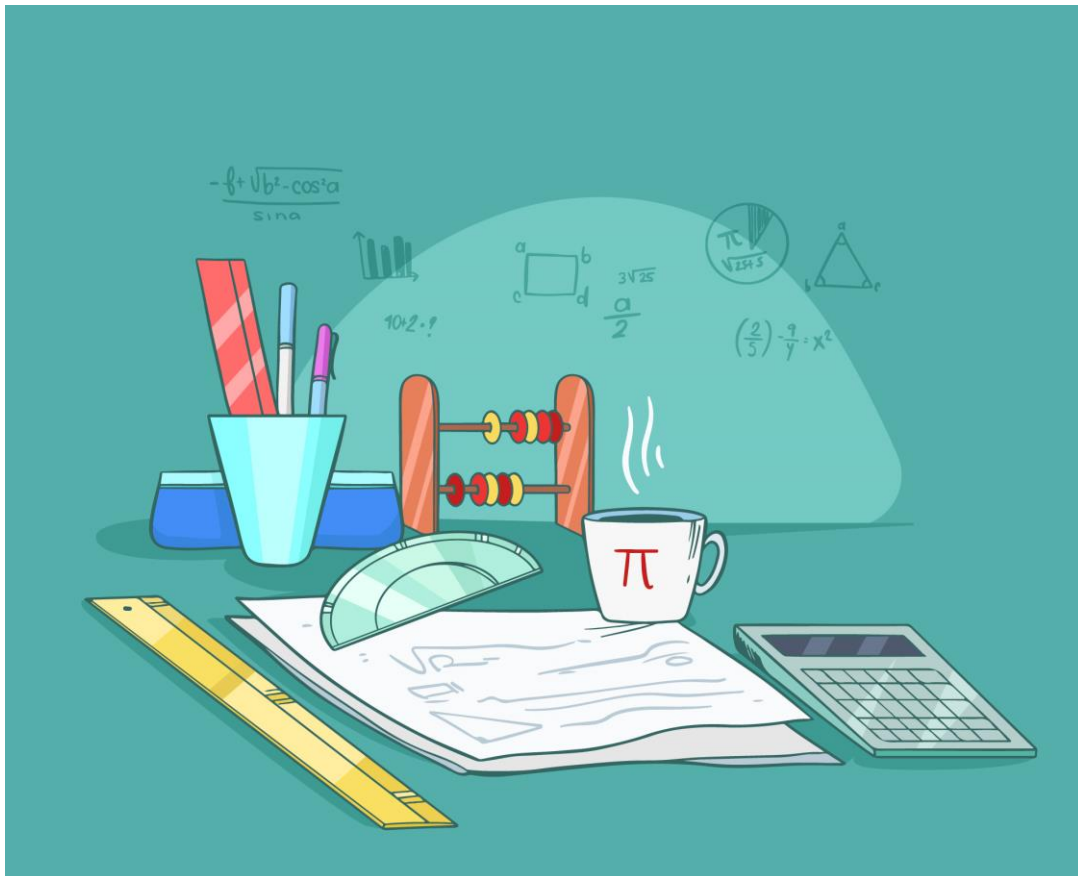


STUDENT'S JOB SHEET

Pembelajaran Metakognitif dalam Setting Kolaboratif

Mata Kuliah : Teori Grup

Dosen Pengampu : Muntazhimah, M.Pd



Semester Genap 2019-2020

Lembar Aktivitas

Mata Kuliah : Teori Grup

Pokok Materi : Grup

Sub Pokok Materi : Pengertian dan Sifat Grup

Petunjuk

1. Kerjakan secara kolaborasi dengan teman satu kelompok
2. Lengkapi dan jawablah pertanyaan di tempat yang disediakan di naskah ini
3. Setiap Kelompok Wajib menuliskan jawaban pada LA yang akan dikumpulkan

-
1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan operasi penjumlahan yang ditetapkan pada himpunan tersebut.

Perhatikan sifat-sifat yang terdapat pada $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan :

- (i) Jika diambil dua buah elemen sebarang di $\mathbb{Z}$, misalkan kedua elemen tersebut dinamakan a dan b. apakah hasil penjumlahan a dan b, yakni $a+b$ hasilnya juga merupakan elemen dari $\mathbb{Z}$? Jelaskan jawaban Anda!

Jawaban :

Catatan :

- Jika jawaban anda adalah “Ya”. Maka dikatakan bahwa “Operasi + di $\mathbb{Z}$ bersifat
- Jika jawaban anda adalah “Tidak”. Maka dikatakan bahwa “Operasi + di $\mathbb{Z}$ bersifat

- (ii) Apabila kita mengambil tiga buah elemen sebarang di $\mathbb{Z}$, Misalkan a,b dan c. Apakah penjumlahan $(a+b)+c$ akan sama dengan $a+(b+c)$? Jelaskan jawaban Anda!

Jawaban :

Catatan :

- Jika jawaban anda adalah “Ya”. Maka dikatakan bahwa “Operasi + di $\mathbb{Z}$ bersifat
- Jika jawaban anda adalah “Tidak”. Maka dikatakan bahwa “Operasi + di $\mathbb{Z}$ bersifat

- (iii) Diantara elemen (unsur) yang terdapat dalam $\mathbb{Z}$, apakah ada “elemen khusus” yang mempunyai sifat khas. Sifat khas tersebut adalah “tidak mengubah hasil operasi”. Artinya, setiap elemen apapun apabila dioperasikan dengan “elemen khusus” tersebut, hasilnya tetap (tidak berubah).

Pertanyaan :

Jika ada, sebutkan dan beri penjelasan secukupnya. Jika tidak ada, pikirkan elemen lain yang dapat ditambahkan kedalam $\mathbb{Z}$, agar $\mathbb{Z}$ memuat elemen khusus seperti penjelasan diatas.

Jawaban :

Catatan :

- Jika jawaban anda adalah “Ada”. Maka dikatakan bahwa “ $\mathbb{Z}$ memuat elemen
- Jika jawaban anda adalah “Tidak ada”. Maka dikatakan bahwa “ $\mathbb{Z}$ tidak memuat elemen

PERHATIKAN JAWABAN ANDA PADA PERTANYAAN (iii).

- Jika Jawaban Anda adalah “Ada” maka lanjutkan ke pertanyaan (iv)
- Jika Jawaban Anda adalah “Tidak ada”, maka lanjutkan ke nomor 2

(iv) Masih ingatkah anda dengan istilah “lawan bilangan”? Lawan bilangan tentunya berkaitan dengan operasi yang ditentukan terhadap bilangan tersebut.

Jawablah pernyataan berikut ini untuk operasi penjumlahan (+)!

a. Berapakah lawan dari 4?

b. Berapakah lawan dari -7?

c. Berapakah lawan dari 0

d. Jika ada yang mengatakan bahwa lawan dari 5 adalah $\frac{1}{5}$, apakah pernyataan tersebut benar? Jelaskan jawaban anda!

e. Apakah setiap elemen (unsur) di Z memiliki lawan? Jelaskan jawaban anda!

Catatan :

- Istilah lawan, memiliki makna yang sama dengan kata
- Jika setiap elemen di Z memiliki lawan (invers), maka dikatakan bahwa “SETIAP ELEMEN DI Z MEMILIKI INVERS
- Jika ada elemen di Z yang tidak memiliki lawan (invers), maka dikatakan bahwa “ADA ELEMEN DI Z YANG TIDAK MEMILIKI INVERS

2. Rangkuman :

Berdasarkan jawaban (i) sampai dengan (iv) diperoleh :

(Berilah tanda $\checkmark$ pada tempat yang sesuai)

No	Aksioma	Dipenuhi	Tidak Dipenuhi
1	Tertutup		
2	Asosiatif		
3	Z memuat elemen netral		
4	Setiap elemen di Z mempunyai invers dan inversnya juga elemen di Z		

Apabila keempat aksioma dipenuhi, maka Z dengan operasi penjumlahan dinamakan GRUP. Tetapi apabila paling sedikit satu aksioma yang tidak dipenuhi, maka Z dengan operasi penjumlahan BUKAN GRUP.

Pertanyaan :

Apakah Z dengan operasi $+$ merupakan grup? Jelaskan jawaban anda!

3. Perhatikan himpunan bilangan cacah $C = \{0,1,2,3,\dots\}$. Apakah C terhadap operasi pengurangan membentuk grup ? Jelaskan jawaban Anda.

Jawaban :

4. Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ memenuhi aksioma grup. Apabila operasi penjumlahan diganti dengan operasi pengurangan, Apakah aksioma grupnya masih dipenuhi? Berikan penjelasan!

Jawaban :

5. Perhatikan pernyataan dan bukti berikut ini. Selidiki apakah pembuktian yang tertulis dibawah ini **benar** atau **salah**. Jika benar, pilihlah 5 anggota yang berbeda dari $\mathbf{Z}^*$ dan tentukan inversnya. Jika salah, tentukan pada baris mana kesalahannya. Berikan penjelasan.

Pernyataan :

“ $\mathbf{Z}^*$ adalah himpunan yang memuat semua bilangan bulat kecuali 0. $\mathbf{Z}^*$ beserta operasi perkalian ($\times$) merupakan grup”.

Bukti :

(i)	Pernyataan Bukti	Nomor Baris
	Ambil sebarang $a, b \in \mathbf{Z}^*$	1
	Karena a dan b bilangan bulat tak nol maka	2
	$A \times b$ juga bilangan bulat tak nol	3
	Jadi $a \times b \in \mathbf{Z}^*$	4
	Jadi sifat tertutup dipenuhi	5
(ii)	Karena sifat asosiatif perkalian berlaku pada	6
	Himpunan bilangan bulat, maka sifat asosiatif	7
	Juga berlaku di $\mathbf{Z}^*$	8
(iii)	Terdapat elemen netral 1 di $\mathbf{Z}^*$, sebab $a \times 1 =$	9
	$1 \times a = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{Z}^*$	10
(iv)	Ambil sebarang $a \in \mathbf{Z}^*$, berarti terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbf{Z}^*$	11
	Sehingga $a \times \frac{1}{a} = 1$	12
	Jadi setiap elemen di $\mathbf{Z}^*$ mempunyai invers	13
	Berdasarkan (i) sampai dengan (iv) terbukti bahwa $\mathbf{Z}^*$	14
	Terhadap operasi $\times$ merupakan grup	15

Jawaban :

6. Pernyataan :

$M_2^*(R)$ adalah himpunan matriks berukuran 2×2 dengan entri bilangan real dan determinan tidak nol. Terhadap operasi perkalian antar matriks, $M_2^*(R)$ merupakan grup.

Lengkapi proses pembuktian berikut ini :

(i) Sifat tertutup

Ambil sebarang $M_1, M_2 \in M_2^*(R)$.

Berarti M_1 dan M_2 berukuran, $\det(M_1)$ dan $\det(M_2)$ keduanya

Karena M_1 dan M_2 berukuran.....maka $M_1.M_2$ juga berukuran

Diperoleh $\det(M_1.M_2) = \dots\dots\dots X \dots\dots\dots$

Karena $\det(M_1)$ dan $\det(M_2)$ keduanya, maka $X \dots\dots\dots$
juga

Jadi $M_1.M_2 \in \dots\dots\dots$

Terbukti bahwa sifat tertutup dipenuhi.

(ii) Sifat asosiatif.

Telah jelas bahwa perkalian matriks bersifat asosiatif yakni $(AB)C = A(BC)$.

(iii) Keberadaan elemen netral

Analisis :

Jawablah pertanyaan berikut :

(1) Apakah makna dari elemen netral?

Jawab :

(2) Elemen manakah di $M_2^*(R)$ yang diduga memenuhi sifat elemen netral?

Jawab :

Ambil $I = \dots\dots\dots$ [Elemen netral di $M_2^*(R)$]

Untuk setiap $M \in M_2^*(R)$ Berlaku

Jadi $M_2^*(R)$ memuat elemen netral yakni

(iv) Keberadaan invers untuk setiap elemen di $M_2^*(R)$.

Analisis :

Apakah syarat suatu matriks mempunyai invers terhadap operasi perkalian?

Jawab :

Tuliskan bukti lengkap adanya invers untuk setiap elemen di $M_2^*(R)$.

RANGKUMAN :

Berdasarkan kajian diatas, kita telah mengkaji 4 macam struktur aljabar yaitu :

1. Himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$) dengan operasi penjumlahan (+)
2. Himpunan bilangan cacah ($\mathbb{C}$) dengan operasi pengurangan (-)
3. Himpunan $\mathbb{Z}^*$ yakni himpunan yang memuat semua bilangan bulat tak nol dengan operasi perkalian ($\times$)
4. Himpunan $M_2^*(R)$ yakni himpunan matriks berukuran 2×2 dengan entri bilangan real dan determinan tidak nol, dengan operasi perkalian matriks.

Lengkapi table berikut :

Himpunan	Operasi	Struktur yang Terbentuk		Untuk yang bukan grup, tuliskan nomor aksioma yang tidak memenuhi
		Grup	Bukan Grup	
$\mathbb{Z}$	Penjumlahan Bilangan			
$\mathbb{C}$	Pengurangan Bilangan			
$\mathbb{Z}^*$	Perkalian Bilangan			
$M_2^*(R)$	Perkalian Matriks			

Keterangan :

*) Beri tanda ($\checkmark$) pada tempat yang sesuai

Nomor aksioma grup

(1) = tertutup

(2) = asosiatif

(3) = Terdapat elemen netral

(4) = setiap elemen mempunyai invers.

Lembar Aktivitas

Mata Kuliah : Teori Grup

Pokok Materi : Grup

Sub Pokok Materi : Bilangan bulat modulo n

Petunjuk

1. Kerjakan secara kolaborasi dengan teman satu kelompok
 2. Lengkapi dan jawablah pertanyaan di tempat yang disediakan di naskah ini
 3. Setiap Kelompok Wajib menuliskan jawaban pada LA yang akan dikumpulkan
-

1. Relasi kekongruenan bilangan bulat menyatakan bahwa untuk bilangan asli n , bilangan bulat a dikatakan kongruen modulo n dengan bilangan bulat b apabila n habis membagi $a-b$. selanjutnya, disimbolkan dengan $a \equiv b \pmod{n}$.

Sebagai contoh, misalkan kita ambil $n = 6$

Lengkapi kalimat-kalimat berikut!

- a. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $x \equiv 0 \pmod{6}$

Jawaban :

Nilai x yang memenuhi adalah $0, 6, -6, 12, -12, \dots$

Himpunlah semua nilai x ini ke dalam himpunan $\bar{0}$.

Jadi $\bar{0} = \{ \dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots \}$.

- b. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $x \equiv 1 \pmod{6}$

Jawaban :

Nilai x yang memenuhi adalah _____

Himpunlah semua nilai x ini ke dalam himpunan $\bar{1}$.

Jadi $\bar{1} = \{ \quad \quad \quad \}$.

- c. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $x \equiv 2 \pmod{6}$

Jawaban :

Nilai x yang memenuhi adalah _____

Himpunlah semua nilai x ini ke dalam himpunan $\bar{2}$.

Jadi $\bar{2} = \{ \quad \quad \quad \}$.

- d. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $x \equiv 3 \pmod{6}$

Jawaban :

Nilai x yang memenuhi adalah _____

Himpunlah semua nilai x ini ke dalam himpunan $\bar{3}$.

Jadi $\bar{3} = \{ \quad \quad \quad \}$.

- e. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $x \equiv 4 \pmod{6}$

Jawaban :

Nilai x yang memenuhi adalah _____

Himpunlah semua nilai x ini ke dalam himpunan $\bar{4}$.

Jadi $\bar{4} = \{ \quad \quad \quad \}$.

- f. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $x \equiv 5 \pmod{6}$

Jawaban :

Nilai x yang memenuhi adalah _____

Himpunlah semua nilai x ini ke dalam himpunan $\bar{5}$.

Jadi $\bar{5} = \{ \quad \quad \quad \}$.

- g. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $x \equiv 6 \pmod{6}$

Jawaban :

Nilai x yang memenuhi adalah _____

Himpunlah semua nilai x ini ke dalam himpunan $\bar{2}$.

Jadi $\bar{2} = \{ \quad \quad \quad \}$.

- h. Bandingkan elemen-elemen yang terdapat pada himpunan $\bar{0}$. dan $\bar{6}$.

Manakah yang tepat :

(i). $\bar{0} \subset \bar{6}$, atau

(ii). $\bar{6} \subset \bar{0}$, atau

(iii). $\bar{0} = \bar{6}$

Jawaban :

- i. Tanpa menghitung $\bar{7}$, apa yang dapat disimpulkan antara $\bar{7}$ dan $\overline{1?}$, antara $\bar{8}$ dan $\bar{2}$? Simpulkan secara umum!

Jawaban :

2. Berdasarkan tugas nomor 1,

- a. Berapa banyak (macam) himpunan yang diperoleh? Tuliskan semuanya!

Jawaban :

Diperoleh _____ himpunan, yaitu : _____

- b. Himpun lagi himpunan yang diperoleh kedalam himpunan yang kita namakan Z_6 . Bilangan 6 diambil dari pemilihan $n=6$. Diperoleh Z_6 adalah :

Jawaban :

$Z_6 = \{ \quad \quad \quad \}$

Catatan : Z_6 dinamakan himpunan kelas residu modulo 6

3. Pada Z_6 ditentukan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (x) dengan aturan sebagai berikut

(i). $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ dan

(ii). $\bar{a}x\bar{b} = \overline{axb}$

Lengkapi table operasi berikut :

+			$\bar{2}$		$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$			$\bar{2}$		$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$			$\bar{3}$		$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$			$\bar{5}$		$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$			$\bar{1}$		$\bar{3}$	$\bar{4}$

Tabel 1.

x			$\bar{2}$		$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$			$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$			$\bar{2}$		$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$			$\bar{4}$		$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$			$\bar{2}$		$\bar{4}$	$\bar{2}$

Tabel 2.

4. Perhatikan Tabel 1 dan Tabel 2.

a. Buktikan Z_6 terhadap operasi penjumlahan merupakan grup!

Jawaban :

(i). Berdasarkan Tabel 1, jelas bahwa $\bar{a} + \bar{b} \in Z_6$ untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in Z_6$. Jadi Z_6 bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.

(ii). Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in Z_6$

Diperoleh $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{(a + b)} + \bar{c}$

=

(iii).

(iv).

b. Apakah Z_6 terhadap operasi perkalian merupakan grup? Buktikan!

Jawaban :

Kesimpulan

Lengkapi Tabel berikut ini :

Himpunan	Operasi	Struktur yang Terbentuk		Untuk yang bukan grup, tuliskan nomor aksioma yang tidak memenuhi
		Grup	Bukan Grup	
$\mathbb{Z}_6$	Penjumlahan			
$\mathbb{Z}_6$	Perkalian			

Keterangan :

*) : Beri tanda $\checkmark$ pada tempat yang sesuai.

Nomor aksioma grup : (1) = tertutup, (2) = asosiatif, (3) = terdapat elemen netral, (4) = setiap elemen mempunyai invers.

Lembar Aktivitas

Mata Kuliah : Teori Grup
Pokok Materi : Grup
Sub Pokok Materi : Subgrup

Petunjuk

1. Kerjakan secara kolaborasi dengan teman satu kelompok
2. Lengkapi dan jawablah pertanyaan di tempat yang disediakan di naskah ini
3. Setiap Kelompok Wajib menuliskan jawaban pada LA yang akan dikumpulkan

1. Telah kita simpulkan bersama bahwa Z_6 dengan operasi penjumlahan adalah sebuah grup yang dituliskan sebagai $\langle Z_6, + \rangle$. Z_6 memiliki 6 elemen.

a. Ada berapa banyak himpunan bagian dari Z_6 , Tuliskan

Jawaban :

b. Tuliskan 5 buah himpunan bagian Z_6 yang memuat 3 elemen

Jawaban :

c. Dipilih $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $B = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. A dan B adalah himpunan bagian dari Z_6 . Lengkapilah tabel berikut ini terhadap operasi penjumlahan pada Z_6

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$			
$\bar{2}$			
$\bar{3}$			

Tabel 1

+	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$			
$\bar{2}$			
$\bar{4}$			

Tabel 2

2. Berdasarkan tabel 1 dan tabel 2 pada tugas nomor 1, Jawablah pertanyaan berikut terhadap operasi penjumlahan pada Z_6

a. Apakah berlaku sifat tertutup?

Jawaban :

$A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$	$B = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

b. Apakah berlaku sifat asosiatif? Jelaskan! :

Jawaban :	
$A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$	$B = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

c. Apakah mempunyai elemen netral? Jika punya sebutkan elemen netral tersebut!

Jawaban :	
$A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$	$B = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

d. {i} Tuliskan invers untuk setiap elemen di himpunan A dan himpunan B

Jawaban :	
$A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$	$B = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

(ii) Apakah setiap elemen invers yang diperoleh berada dalam himpunan A atau himpunan B?

Jawaban :	
$A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$	$B = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

e. Manakah antara himpunan A dan himpunan B yang memenuhi aksioma grup?

Jawaban :

3. Perhatikan himpunan A dan himpunan B diatas. Keduanya adalah himpunan bagian dari Z_6 . Tidak semua himpunan bagian dari Z_6 memenuhi aksioma grup.

Apabila G merupakan suatu grup. H adalah himpunan bagian dari G, **Maka H dikatakan sebagai subgroup dari G apabila H memenuhi semua aksioma grup** terhadap operasi yang sama terhadap operasi di G.

- Apakah A merupakan subgroup dari Z_6 ?
- Apakah B merupakan subgroup dari Z_6 ?

Jawaban :

- ...
- ...

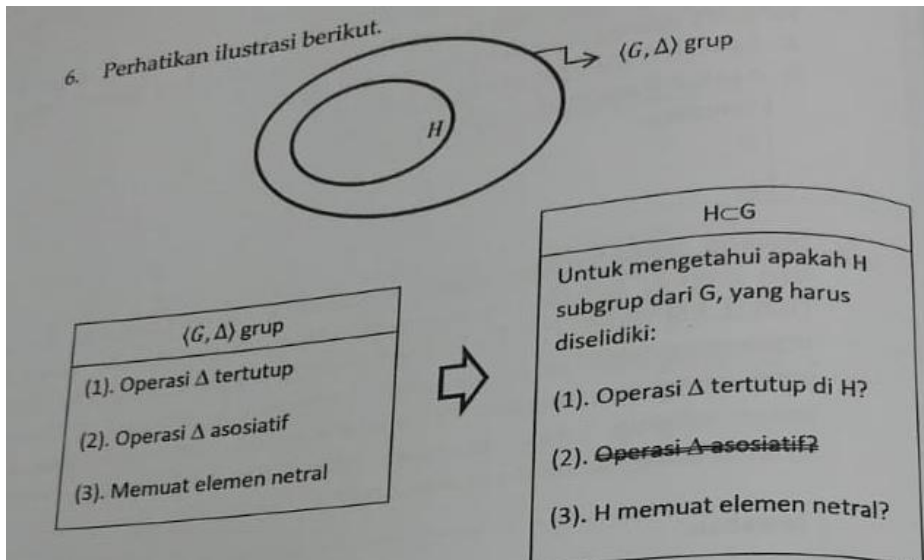
4. Seorang dosen teori grup menuliskan 5 buah himpunan bagian dari grup Z_6 terhadap operasi penjumlahan yaitu $\{\bar{1}\}$, $\{\bar{1}, \bar{2}\}$, $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$, $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Setelah itu dosen menanyakan ke semua mahasiswa, manakah dari kelima himpunan bagian dari Z_6 tersebut yang merupakan subgroup. Seorang mahasiswa menjawab : “Semua bukan merupakan subgroup, karena semua tidak memuat elemen $\bar{0}$ ”. Apakah jawaban tersebut benar, jelaskan jawaban anda !

Jawaban :

5. Jika operasi ∇ pada suatu himpunan G bersifat asosiatif, maka **sifat asosiatif tersebut selalu berlaku disetiap himpunan bagiannya**. Apakah pernyataan tersebut benar? Jelaskan jawaban Anda!

Jawaban :

6. Perhatikan gambar dibawah ini :



Amati pencoretan pada kata ‘Operasi Δ asosiatif’. Apa komentar Anda terhadap ilustrasi diatas?

Jawaban :

7. Perhatikan pernyataan dan bukti berikut :

Pernyataan :

Jika G grup abelian, H dan K subgroup dari G . maka $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ Merupakan subgroup dari G .

(i)	Bukti	Nomor Baris
	Karena H dan K subset G dan aksioma ketertutupan berlaku	1
	Di grup G maka $HK \subset G$	2
(ii)	Ambil sebarang $a, b \in HK$	3
	Berarti $a = h_1k_1$ dan $b = h_2k_2$ untuk suatu	4
	$h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$	5
	Diperoleh $ab = h_1k_1 \cdot h_2k_2$	6
	$= h_1h_2k_1k_2 \in HK$	7
	Juga sifat tertutup dipenuhi oleh HK	8
(iii)	Misalkan e adalah elemen netral G	9
	Karena H dan K subgroup G Maka $e \in H$ dan $e \in K$	10
	Akibatnya $e = ee \in HK$	11
	Jadi HK memuat elemen netral 1	12
(iv)	Ambil sebarang $x \in HK$	13
	Berarti $x = hk$ untuk suatu $h \in H$ dan $k \in K$	14
	Diperoleh $x^{-1} = (hk)^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK$	15

	Jadi setiap elemen di HK mempunyai invers di HK	16
	Berdasarkan (i) sampai dengan (iv) terbukti bahwa	17
	HK subgrup dari G	18
Cermati langkah pembuktian diatas, Apakah langkah pembuktian diatas benar? Jelaskan jawaban anda! Jawaban :		

Kesimpulan

1. Jika $\langle G, * \rangle$ adalah grup. Dan H suatu himpunan, maka H dikatakan subgroup G apabila :
 - (i).
 - (ii).
2. Jika $\langle G, * \rangle$ adalah grup. Dan K adalah suatu himpunan bagian dari G, maka untuk menentukan apakah K dikatakan subgroup G perlu diuji 3 sifat yaitu :
 - (i).
 - (ii).

(iii).

Lembar Aktivitas

Mata Kuliah : Teori Grup
 Pokok Materi : Grup
 Sub Pokok Materi : Grup Siklik

Petunjuk

1. Kerjakan secara kolaborasi dengan teman satu kelompok
2. Lengkapi dan jawablah pertanyaan di tempat yang disediakan di naskah ini
3. Setiap Kelompok Wajib menuliskan jawaban pada LA yang akan dikumpulkan

Makna Pangkat dari Suatu Elemen dalam Grup

Grup terbentuk dari sebuah himpunan dan sebuah operasi yang diberlakukan dalam himpunan tersebut sehingga terpenuhi 4 aksioma grup. Hasil operasi antar elemen dalam suatu grup ditentukan oleh jenis operasi yang berlaku. Perhatikan contoh berikut :

(i). $Z_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ merupakan grup terhadap operasi **penjumlahan** modulo 5.

Dalam grup ini, $(\bar{2})^3 = \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$. Jadi $(\bar{2})^3 = 3 \times \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$

(ii) $Z_{*5} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ merupakan grup terhadap operasi **perkalian** modulo 5.

Dalam grup ini, $(\bar{2})^3 = \bar{2} \times \bar{2} \times \bar{2} = \bar{8} = \bar{2}$.

Berdasarkan (i) dan (ii), meskipun symbol pangkat dituliskan secara sama, tetapi makna dari pangkat tersebut bias berbeda, tergantung operasinya.

Jadi dalam grup $\langle G_1, * \rangle$ berlaku $g^n = g * g * g * \dots * g$ sebanyak n kali,

Sedangkan dalam grup $\langle G_1, \Delta \rangle$ berlaku $g^n = g \Delta g \Delta g \Delta \dots \Delta g$ sebanyak n kali

1. Dalam grup berlaku 4 aksioma, salah satunya adalah aksioma tertutup. Apabila kita mengambil suatu elemen dalam grup, kemudian kita operasikan secara berulang-ulang dengan ellemen itu sendiri, maka hasil operasinya pasti berada dalam grup tersebut. Sebagai contoh Perhatikan grup $\langle Z_6, + \rangle$. Lengkapi tabel berikut ini :

Elemen di Z_6 (x)	x^n						
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
0	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
1	$\bar{1}$	2	$\bar{3}$				
2	$\bar{2}$	$\bar{4}$					
3							
4							
5							

2. Perhatikan tabel pada tugas nomor 1. Kita simbolkan $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ yakni himpunan yang memuat semua hasil pangkat dari a terhadap bilangan bulat n .

Diperoleh :

a. Sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\langle \bar{0} \rangle &= \{\bar{0}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}\} \\ \langle \bar{1} \rangle &= \{\bar{1}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{0}\} \\ \langle \bar{2} \rangle &= \{\bar{2}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\} \\ \langle \bar{3} \rangle &= \{\bar{3}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{3}, \bar{0}\} \\ \langle \bar{4} \rangle &= \{ \quad \quad \quad \} = \{ \quad \quad \quad \} \\ \langle \bar{5} \rangle &= \{ \quad \quad \quad \} = \{ \quad \quad \quad \}\end{aligned}$$

b. Terdapat 4 buah himpunan yang berbeda yaitu :

$$\begin{aligned}\langle \bar{0} \rangle &= \{\bar{0}\} \\ \langle \bar{1} \rangle &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{0}\} \\ \langle \bar{2} \rangle &= \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\} \\ \langle \bar{3} \rangle &= \{\bar{3}, \bar{0}\}\end{aligned}$$

c. Berdasarkan 2b. diperoleh bahwa :

$\langle \bar{0} \rangle \neq \mathbb{Z}_6$	$\langle \bar{3} \rangle \neq \mathbb{Z}_6$
$\langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_6$	$\langle \bar{4} \rangle \neq \mathbb{Z}_6$
$\langle \bar{2} \rangle \neq \mathbb{Z}_6$	$\langle \bar{5} \rangle = \mathbb{Z}_6$

Jadi, terdapat $a \in \mathbb{Z}_6$, yakni $a = \bar{1}$ dan $a = \dots$. Sehingga $a = \mathbb{Z}_6$. Dikatakan bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah **grup siklik** dengan **generator** a . Untuk $a = \bar{1}$ dan $a = \dots$

d. Mengapa 2 bukan merupakan generator $\mathbb{Z}_6$?

Jawaban :

Rangkuman.

Semua elemen di $\mathbb{Z}_6$ dapat dihasilkan dari perpangkatan bilangan bulat generatornya. Lengkapi tabel berikut :

Elemen di $\mathbb{Z}_6$ (x)	Generator	
	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0} = (\bar{1})^0$	$\bar{0} = (\bar{5})^0 = 0$
$\bar{1}$	$\bar{1} = (\bar{1})^1$	$\bar{1} = (\bar{5})^5$
$\bar{2}$	$\bar{2} = (\bar{1})^2$	$\bar{2} = (\bar{5})^4$
$\bar{3}$	$\bar{3} = (\bar{1})^3$	$\bar{3} =$
$\bar{4}$	$\bar{4} =$	$\bar{4} =$
$\bar{5}$	$\bar{5} =$	$\bar{5} =$

Catatan : Dalam setiap grup, pangkat nol (0) dari setiap elemennya selalu menghasilkan elemen netral.

Simpulan : Suatu grup G dikatakan grup siklik, apabila terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{ _ I _ \in _ \}$. Dengan kata lain, semua elemen di G dapat dinyatakan sebagai perpangkatan dari _____.

Pendalaman :

Untuk lebih mendalami materi tentang grup siklik, kerjakan tugas berikut ini :

1. Apakah grup bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan suatu grup siklik? Jelaskan
2. Apakah grup bilangan bulat kelipatan 3 terhadap operasi penjumlahan $\langle 3\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup siklik? Jelaskan
3. Apakah grup $\langle \mathbb{Z}_5, \times \rangle$ merupakan grup siklik? Jelaskan