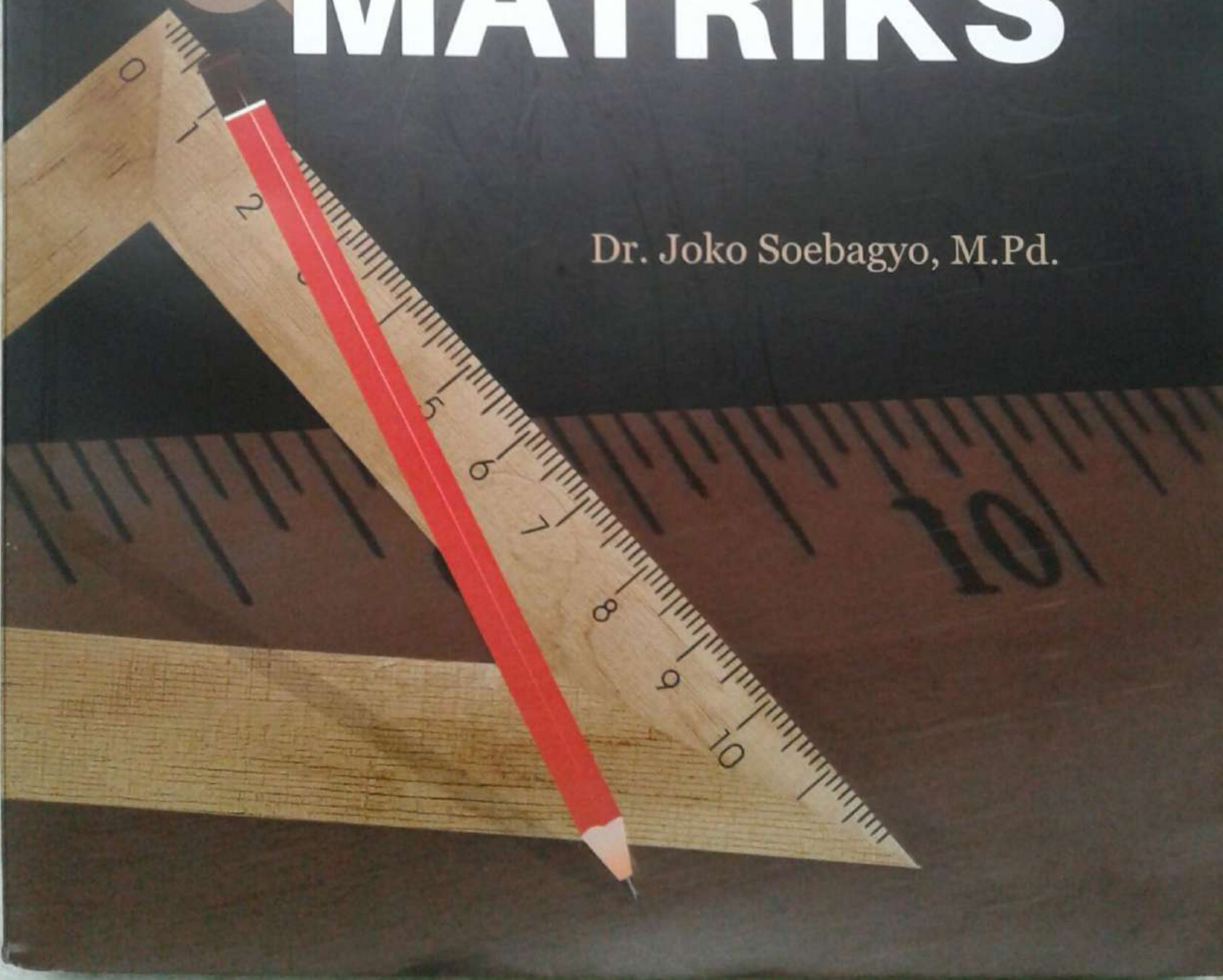
Matematika Teknik

ALJABAR LINIER & MATRIKS

Dr. Joko Soebagyo, M.Pd.



MATEMATIKA TEKNIK

ALJABAR LINIER & MATRIKS

Dr. Joko Soebagyo, M.Pd.
Dr. Samsul Maarif, M.Pd.
Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd.

MATEMATIKA TEKNIK ALJABAR LINIER DAN METRIKS

Penyusun:

Dr. Joko Soebagyo, M.Pd.

Dr. Samsul Maarif, M.Pd.

Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd.

Penyunting: Aep Syaiful Hamidin
Penata Sampul: M. Revaldi
Penata Aksara: Aep SH

Penerbit:

MANGGU MAKMUR TANJUNG LESTARI

(ANGGOTA IKAPI)

Bandung—Indonesia
www.penerbitmanggu.co.id

2020

318 hlm.; 17,5 cm × 25 cm
ISBN: 978-602-7715-09-2

TEKNIK

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT, yang telah memberikan karunia-Nya sehingga Modul ini dapat selesai dan bisa dimanfaatkan oleh peserta didik. Undang–Undang Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen mengamanatkan dosen sebagai tenaga profesional sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 ayat (1) berfungsi untuk meningkatkan martabat dan peran dosen sebagai agen pembelajaran, pengembang ilmu pengetahuan, teknologi, dan seni, serta pengabdi kepada masyarakat berfungsi untuk meningkatkan mutu pendidikan nasional. Penulisan bahan ajar ini adalah salah satu upaya bagi Dosen untuk memenuhi fungsi tersebut.

Materi di dalam bahan ajar dirancang meliputi kompetensi pedagogi yang disatukan dengan kompetensi profesional yang didalamnya terintegrasi penguatan pendidikan karakter dan pengembangan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS) sehingga diharapkan dapat mendorong peserta didik agar dapat langsung menerapkan kompetensi profesionalnya dalam proses pembelajaran sesuai dengan substansi materi yang diampunya. Disamping dalam bentuk *hard-copy*, bahan ajar ini dapat diperoleh juga dalam bentuk digital, sehingga peserta didik dapat lebih mudah mengaksesnya kapan saja dan dimana saja meskipun tidak mengikuti pembelajaran secara tatap muka.

Bahan ajar ini disusun sebagai materi utama dalam program pembelajaran pada program studi keteknikan. Bahan ajar ini disesuaikan dengan kebutuhan mata kuliah matematika yang diampu oleh Dosen pada program studi keteknikan. Kepada semua pihak yang telah bekerja keras dalam penyusunan bahan ajar ini, kami sampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Depok, Agustus 2019

Joko Soebagyo

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Kegiatan Belajar 1: Sistem Linier

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menentukan persamaan linier.
2. Peserta didik dapat menentukan n pasangan berurutan sebagai solusi sistem linier.
3. Peserta didik dapat menemukan matrik perluasan dari sistem linier.
4. Peserta didik dapat menemukan sistem linier yang sesuai dengan matrik perluasan.
5. Peserta didik dapat melakukan operasi baris elementer pada sistem linier dan pada matrik perluasan yang sesuai.
6. Peserta didik dapat menentukan konsistensi dan inkonsistensi dari suatu sistem linier.
7. Peserta didik menemukan himpunan solusi dari sistem linier konsisten.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menentukan persamaan linier.
2. Menentukan n pasangan berurutan sebagai solusi sistem linier.
3. Menemukan matrik perluasan dari sistem linier.
4. Menemukan sistem linier yang sesuai dengan matrik perluasan.
5. Melakukan operasi baris elementer pada sistem linier dan pada matrik perluasan yang sesuai.
6. Menentukan konsistensi dan inkonsistensi dari suatu sistem linier.
7. Menemukan himpunan solusi dari sistem linier konsisten.

C. Uraian Materi

Pendahuluan

Informasi-informasi dalam bidang sains, ekonomi, teknologi, teknik dan matematika seringkali disusun atau diatur ke dalam baris dan kolom dengan format persegi panjang yang disebut **matriks**. Matriks seringkali muncul sebagai tabel data-data berupa angka yang berasal dari observasi fisik tetapi dapat juga matriks terjadi dari berbagai macam bentuk matematis. Sebagai contoh dalam penyelesaian sistem persamaan linear (SPL) berikut:

$$5x + y = 3$$
$$2x - y = 4$$

Dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dan solusi dari SPL dapat diperoleh dengan melakukan operasi yang tepat pada matriks tersebut. Dan operasi yang tepat ini sangat penting dalam mengembangkan program komputer untuk menyelesaikan SPL karena komputer sangat cocok dalam memanipulasi susunan-susunan dari informasi berupa angka. Akan tetapi, matriks bukanlah suatu alat penyimbolan yang sederhana untuk menyelesaikan SPL, matriks dapat dipandang sebagai objek matematika sebagai dirinya sendiri dan di dalamnya terdapat teori yang sangat penting dan luas terkait dengan matriks yang memiliki banyak aplikasi praktis. Inilah pelajaran tentang matriks dan topik-topik terkait dari bentuk matematika yang disebut Aljabar linear.

1.1. Pengantar Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier dan solusinya merupakan topik utama yang akan dipelajari dalam mata kuliah ini. Pada bagian pertama ini, kita akan mengenal beberapa terminologi dasar dan mendiskusikan metode-metode untuk menyelesaikan sistem.

1.1.1. Persamaan Linear

Mengingat bahwa sebuah garis dua dimensi dalam sistem koordinat xy dapat direpresentasikan dengan bentuk persamaan:

$$ax + by = c\left(a, b \neq 0\right)$$

Dan sebuah bidang tiga dimensi dalam sistem koordinat xyz dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan:

$$ax + by + cz = d\left(a, b, c \neq 0\right)$$

Bentuk-bentuk di atas adalah contoh-contoh dari persamaan linear, dimana yang pertama dalam variabel x dan y sedangkan yang kedua dalam variabel

x, y dan z. Secara umum, sebuah persamaan linear dalam n variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dapat direpresentasikan dalam bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \quad (1)$$

Dimana $a_1, a_2, ..., a_n$ dan b adalah konstanta dan semua a tidak nol. Dalam kasus khusus dimana n = 2 atau n = 3, akan sering digunakan variabel tanpa *subscript* dan persamaan linear dalam bentuk:

$$a_1x + a_2y = b(a_1, a_2 \neq 0) \quad (2)$$

$$a_1x + a_2y + a_3z = b(a_1, a_2, a_3 \neq 0) \quad (3)$$

Dalam kasus khusus dimana b = 0, persamaan bentuk (1) menjadi:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0 \quad (4)$$

disebut persamaan linear homogen dalam variabel $x_1, x_2, ..., x_n$.

Contoh 1: Persamaan Linear

Perhatikan bahwa suatu persamaan linier tidak melibatkan variabel berupa hasil kali atau bentuk akar. Semua variabel hanya berpangkat satu dan tidak dituliskan. Berikut ini adalah contoh persamaan linear:

$x + 3y = 7$

$\frac{1}{2}x - y + 3z = -1$

$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$

Berikut ini adalah contoh bukan persamaan linear:

$x + 3y^2 = 4$

$3x + 2y - xy = 5$

$\sin x + y = 0$

$\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$

Himpunan terbatas dari persamaan linear disebut sistem persamaan linear atau sistem linear. Variabelnya disebut tak diketahui. Sebagai contoh, sistem (5) berikut ini memiliki x dan y yang tak diketahui dan sistem (6) memiliki x_1, x_2, dan x_3 yang tak diketahui.

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Secara umum, sistem linear dari *m* persamaan dengan variabel *n* tak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{7}$$

Solusi dari sistem linear dalam *n* variabel tak diketahui $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah barisan dari *n* bilangan $s_1, s_2, ..., x_n$ dimana substitusinya adalah:

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$$

Yang membuat masing-masing persamaan menjadi pernyataan yang benar. Sebagai contoh, sistem (5) memiliki solusi:

$$x = 1, y = -2$$

Dan sistem (6) memiliki solusi:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$$

Solusi-solusi di atas dapat ditulis dengan ringkas menjadi:

$$(1, -2) \text{ dan } (1, 2, -1)$$

Dimana nama-nama variabel diabaikan. Notasi ini, membolehkan kita menginterpretasikan solusi secara geometri sebagai titik-titik dalam ruang 2 dimensi dan 3 dimensi. Secara umum, solusinya adalah:

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$$

Dari sistem linear dengan *n* variabel tak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$(s_1, s_2, ..., s_n)$$

Yang disebut sebagai pasangan ganda (kembar) *n* berurutan. Dengan notasi ini dapat dipahami bahwa semua variabel muncul dalam urutan yang sama dalam setiap persamaan. Jika *n* = 2 maka pasangan ganda (kembar) *n* berurutan disebut pasangan berurutan dan jika *n* = 3 disebut pasangan ganda (kembar) 3 berurutan.

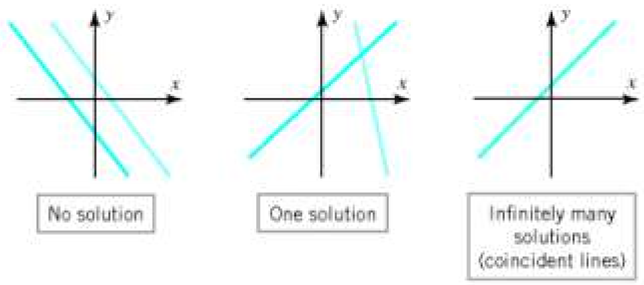
1.1.2. Sistem Persamaan Linear Dengan 2 dan 3 Variabel Tidak Diketahui

Sistem linear dalam dua variabel yang tak diketahui, muncul dalam hubungannya dengan titik potong dari garis-garis tersebut. Sebagai contoh, perhatikan sistem linear berikut:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Dimana, grafik-grafik dari persamaan adalah garis-garis dalam bidang *xy*. Setiap solusi (*x*, *y*) dari sistem, berkorespondensi kepada suatu titik dari irisan garis-garis tersebut, sehingga terdapat 3 kemungkinan (Gambar 1.1.1):

1. Garis-garis mungkin saja paralel dan berjauhan, dalam kasus ini tidak terdapat irisan dan konsekuensinya tidak ada solusi.
2. Garis-garis mungkin saja berisisan di satu titik, dalam kasus ini sistem memiliki tepat satu solusi.
3. Garis-garis mungkin saja berhimpit, dalam kasus ini terdapat tak hingga titik dari irisan dan konsekuensinya terdapat tak hingga solusi.

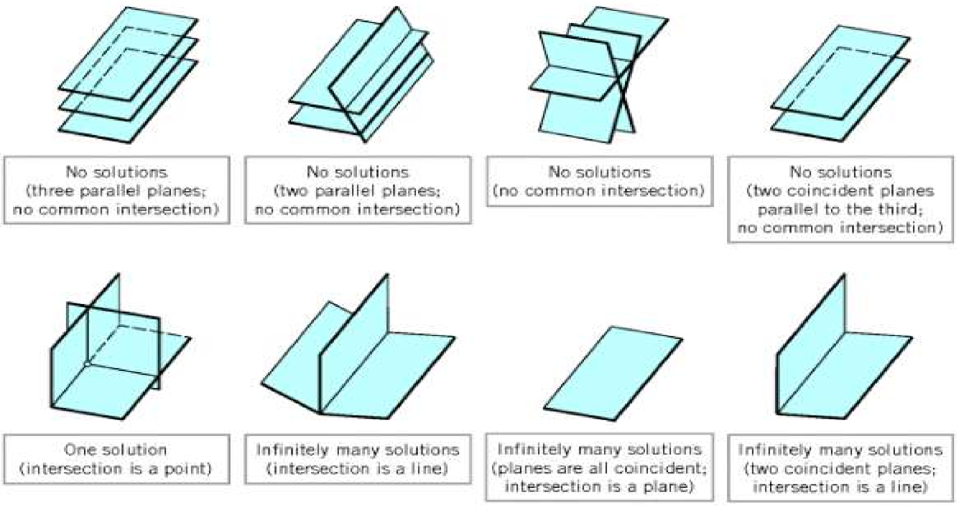


Gambar 1.1. 1. Kemungkinan Kondisi 2 Garis

Secara umum, kita dapat mengatakan bahwa suatu sistem linier adalah konsisten jika memiliki paling sedikit satu solusi, dan inkonsisten jika tidak memiliki solusi. Dengan demikian, suatu persamaan linier konsisten dari dua persamaan dengan dua variabel yang tidak diketahui memiliki satu solusi atau solusi tak hingga. Hal tersebut berlaku pula untuk sistem linier dengan tiga variabel yang tidak diketahui.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Dimana grafik-grafik dari persamaan digambarkan dalam bidang. Solusi dari sistem, jika memang ada, berkorespondensi kepada titik-titik dimana ketiga bidang berpotongan, jadi kita melihat kembali, hanya terdapat tiga kemungkinan, yaitu tidak ada solusi, satu solusi dan solusi tak hingga (Gambar 1.1.2).



Gambar 1.1. 2. Kemungkinan Kondisi 3 Bidang

Kita akan membuktikan nanti bahwa observasi kita tentang banyaknya solusi dari sistem linier dari dua persamaan dengan dua variabel yang tidak diketahui dan sistem linier dari tiga persamaan dengan tiga variabel yang tidak diketahui memenuhi untuk semua sistem linier, yaitu:

Setiap sistem linier memiliki nol, satu atau tak hingga solusi. Tidak ada kemungkinan lain.

Contoh 2: Sistem Linear dengan Satu Solusi
Selesaikan sistem linier berikut:

$$x - y = 1$$
$$2x + y = 6$$

Solusi:
Kita dapat melakukan eliminiasi x dari persamaan kedua dengan menambahkan -2 kali persamaan pertama dengan persamaan kedua. Menghasilkan sistem yang lebih sederhana, yaitu:

$$x - y = 1$$
$$3y = 4$$

Dari persamaan kedua kita peroleh $y = \frac{4}{3}$ dan mensubtitusikan nilai tersebut ke persamaan pertama diperoleh $x = 1 + y = \frac{7}{3}$. Dengan demikian, sistem memiliki solusi tunggal, yaitu:

$$x = \frac{7}{3}, y = \frac{4}{3}$$

Secara geometris, hal ini bermakna bahwa garis yang merepresentasikan persamaan dalam sistem beririsan di titik $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Silahkan dicek dengan menggambar garis-garis tersebut.

Contoh 3: Sistem Linear dengan Tanpa Solusi

Selesaikan sistem linier berikut:

$$x + y = 4$$
$$3x + 3y = 6$$

Solusi:

Kita dapat melakukan eliminiasi x dari persamaan kedua dengan menambahkan -3 kali persamaan pertama dengan persamaan kedua. Menghasilkan sistem yang lebih sederhana, yaitu:

$$x + y = 4$$
$$0 = -6$$

Perhatikan bahwa persamaan kedua inkonsisten, jadi sistem yang diberikan tidak memiliki solusi. Secara geometris, hal tersebut bermakna bahwa garis yang berkorespondensi dengan persamaan dalam sistem sebenarnya adalah paralel dan berjauhan. Silahkan dicek dengan menggambar garis-garis tersebut.

Contoh 4: Sistem Linear dengan Solusi Tak Hingga

Selesaikan sistem linier berikut:

$$4x - 2y = 1$$
$$16x - 8y = 4$$

Solusi:

Kita dapat melakukan eliminiasi x dari persamaan kedua dengan menambahkan -4 kali persamaan pertama dengan persamaan kedua. Menghasilkan sistem yang lebih sederhana, yaitu:

$$4x - 2y = 1$$
$$0 = 0$$

Persamaan kedua tidak memaksakan larangan apapun pada x dan y dan karenanya dapat diabaikan. Dengan demikian, solusi dari sistem adalah nilai-nilai x dan y yang memenuhi satu persamaan saja, yaitu:

$$4x - 2y = 1 \tag{8}$$

Secara geometris, hal tersebut bermakna bahwa garis yang berkorespondensi dengan kedua persamaan dalam sistem sebenarnya adalah berhimpit. Salah satu cara untuk menggambarkan himpunan solusi adalah menyelesaikan persamaan untuk *x* dalam bentuk *y*, yaitu:

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y$$

Dan menguji nilai-nilai *t* secara (acak) arbitrary (disebut parameter) dari *y*. Hal ini memperbolehkan kita untuk mengekspresikan solusi dengan pasangan persamaan yang disebut persamaan parametrik.

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t, \qquad y = t$$

Kita dapat memperoleh banyak solusi secara spesifik dari persamaan ini dengan mensubtitusi nilai-nilai untuk paramaternya. Sebagai contoh, $t = 0$ menghasilkan solusi $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $t = 1$ menghasilkan solusi $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, dan $t = -1$ menghasilkan solusi $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$. Anda dapat melakukan konfirmasi bahwa contoh-contoh tersebut adalah solusi dengan mensubtitusikan koordinat ke persamaan-persamaan yang diberikan.

Contoh 5: Sistem Linear dengan Solusi Tak Hingga

Selesaikan sistem linier berikut:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

Solusi:

Sistem dapat diselesaikan dengan inspeksi, ketika persamaan kedua dan ketiga adalah kelipatan dari persamaan pertama. Secara geometris, hal tersebut bermakna bahwa ketiga bidang berhimpit dan nilai-nilai dari *x*, *y*, dan *z* memenuhi persamaan:

$$x - y + 2z = 5 \tag{9}$$

Dan secara otomatis memenuhi semua ketiga persamaan. Dengan demikian, hal tersebut cukup untuk menemukan solusi dari (9). Kita dapat melakukannya pertama kali dengan menyelesaikan (9) untuk *x* dalam bentuk *y* dan *z*, kemudian menguji secara arbitrary nilai r dan s (parameter) untuk kedua variabel tersebut, dan mengekspresikan solusi dengan tiga persamaan parametrik, yaitu:

$$x = 5 + r - 2s, \qquad y = r, \qquad z = s$$

Solusi secara spesifik dapat diperoleh dengan memilih angka untuk parameter r dan s. Sebagai contoh, ambil $r = 1$ dan $s = 0$ menghasilkan solusi $(6,1,0)$.

1.1.3. Perluasan Matriks dan Operasi Baris Elementer

Semakin banyak persamaan dan variabel yang tidak diketahuinya, semakin kompleks aljabar yang terlibat dalam menentukan solusinya. Perhitungan yang dibutuhkan dapat lebih dikelola dengan menyederhanakan notasi dan prosedur standar. Sebagai contoh, tanda +, x dan – dalam sistem linier tidak dituliskan tetapi tetap dijaga secara mental.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Kita dapat menyingkat sistem dengan hanya menuliskan angka-angka dalam matriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Bentuk ini disebut matrik perluasan untuk sistem. Sebagai contoh, matriks perluasan untuk sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Metode dasar untuk memecahkan sistem linear adalah melakukan operasi aljabar yang sesuai pada sistem yang tidak mengubah himpunan solusi dan yang menghasilkan sistem suksesi yang semakin sederhana, sampai suatu titik tercapai di mana dapat dipastikan apakah sistem tersebut konsisten, dan jika ya, apa solusinya. Biasanya, operasi aljabar adalah sebagai berikut:

1. Kalikan sebuah persamaan oleh konstanta bukan nol.
2. Tukar dua persamaan.
3. Kalikan sebuah konstanta ke satu persamaan dan tambahkan ke persamaan lainnya.

Karena baris (garis horizontal) dari matriks yang diperluas sesuai dengan persamaan dalam sistem yang terkait, ketiga operasi ini sesuai dengan operasi berikut pada baris matriks yang diperluas:

1. Kalikan sebuah oleh konstanta bukan nol.
2. Tukar dua baris.
3. Kalikan sebuah konstanta ke satu baris dan tambahkan ke baris lainnya.

Ini disebut **operasi baris elementer** pada matriks.

Pada contoh berikut, kita akan mengilustrasikan bagaimana menggunakan operasi baris elementer dan satu matriks perluasan untuk menyelesaikan sistem linier dengan tiga varibel yang tidak diketahui. Karena prosedur yang sistematis untuk menyelesaikan sistem linier akan dibangun pada bab berikutnya, jangan khawatir tentang bagaimana langkah-langkah dalam contoh dipilih. Fokus Anda di sini adalah sederhana, memahami perhitungan.

Contoh 6: Menggunakan Operasi Baris Elementer

Pada kolom sebelah kiri, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan linier dengan mengoperasikan persamaan dalam sistem, dan kolom sebelah kanan, kita menyelesaikan sistem yang sama dengan operasi pada baris dari matriks perluasan.

$x + y + 2z = 9$
$2x + 4y - 3z = 1$
$3x + 6y - 5z = 0$

Tambahkan -2 kali persamaan pertama dengan persamaan kedua, diperoleh

$x + y + 2z = 9$
$2y - 7z = -17$
$3x + 6y - 5z = 0$

Tambahkan -3 kali persamaan pertama dengan persamaan ketiga, diperoleh

$x + y + 2z = 9$
$2y - 7z = -17$
$3y - 11z = -27$

Kalikan persamaan kedua dengan 1/2, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama dengan baris kedua, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris pertama dengan baris ketiga, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua dengan $\frac{1}{2}$, diperoleh

$x + y + 2z = 9$
$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$
$3y - 11z = -27$
Tambahkan -3 kali persamaan kedua ke persamaan ketiga, diperoleh
$x + y + 2z = 9$
$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$
$-\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2}$
Kalikan persamaan ketiga dengan -2 diperoleh
$x + y + 2z = 9$
$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$
$z = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -3 kali baris kedua ke baris ketiga, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan -2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -1 kali persamaan kedua ke persamaan pertama, diperoleh
$x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2}$
$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$
$z = 3$
Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali persamaan ketiga dengan persamaan pertama, dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga ke persamaan kedua, diperoleh
$x \quad\quad = 1$
$\quad y \quad = 2$
$\quad\quad z = 3$
Solusinya adalah
$x = 1, y = 2, z = 3$

Tambahkan -1 kali baris kedua ke baris pertama, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali baris ketiga dengan baris pertama, dan $\frac{7}{2}$ kali baris ketiga ke baris kedua, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusinya adalah
$x = 1, y = 2, z = 3$

Latihan 1.1

1. Dari persamaan-persamaan berikut, tentukan yang mana persamaan linier dalam x_1, x_2 dan x_3.
   a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 1$
   b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$
   c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
   d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$
   e) $x_1^{\frac{3}{5}} - 2x_2 + x_3 = 4$
   f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{\frac{1}{3}}$ x
2. Dari bagian-bagian berikut, tentukan yang mana bentuk sistem persamaan linier.
   a) $-2x + 4y + z = 2$
      $3x - \dfrac{2}{y} = 0$
   b) $x = 4$
      $2x = 8$
   c) $4x - y + 2z = -1$
      $-x + (ln2)y - 3z = 0$
   d) $3z + x = -4$
      $y + 5z = 3$
      $6x + 2z = 3$
      $-x - y - z = 4$
3. Dari bagian-bagian berikut, tentukan yang mana bentuk sistem persamaan linier.
   a) $2x_1 - x_4 = 5$
      $-x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1$
   b) $\sin(2x_1 + x_3) = \sqrt{5}$
      $e^{2x_2 - 2x_4} = \dfrac{1}{x_2}$
      $4x_4 = 4$
   c) $7x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
      $2x_1 + x_2 - x_3x_4 = 3$
      $-x_1 + 5x_2 - x_4 = -1$
   d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$
4. Dari soal nomor 2, tentukan manakah yang konsisten!
5. Dari soal nomor 3, tentukan manakah yang konsisten!

6. Tulislah satu sistem persamaan linier yang terdiri dari 3 persamaan dalam 3 variabel yang tidak diketahui dengan kondisi:
   a) Tidak ada solusi
   b) Tepat satu solusi
   c) Solusi tak hingga
7. Dari solusi vektor berikut, tentukan manakah yang merupakan solusi dari sistem linier:
   $2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1$
   $x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$
   $3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 1$
   a) $(3,1,1)$
   b) $(3,-1,1)$
   c) $(13,5,2)$
   d) $\left(\frac{13}{2},\frac{5}{2},2\right)$
   e) $(17,7,5)$
8. Dari solusi vektor berikut, tentukan manakah yang merupakan solusi dari sistem linier:
   $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$
   $3x_1 - x_2 + x_3 = 1$
   $-x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5$
   a) $\left(\frac{5}{7},\frac{8}{7},1\right)$
   b) $\left(\frac{5}{7},\frac{8}{7},0\right)$
   c) $(5,8,1)$
   d) $\left(\frac{5}{7},\frac{10}{7},\frac{2}{7}\right)$
   e) $\left(\frac{5}{7},\frac{22}{7},2\right)$
9. Dari bagian-bagian di bawah ini, tentukan solusi dari persamaan linier dengan menggunakan parameter seperlunya!
   a) $7x - 5y = 3$
   b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$
10. Dari bagian-bagian di bawah ini, tentukan solusi dari persamaan linier dengan menggunakan parameter seperlunya!
   a) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$
   b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$
11. Dari bagian-bagian di bawah ini, tentukan sistem persamaan linier yang sesuai dengan matrik perluasan yang diberikan!
   a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. Dari bagian-bagian di bawah ini, tentukan sistem persamaan linier yang sesuai dengan matrik perluasan yang diberikan!

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -6 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

13. Dari bagian-bagian di bawah ini, tentukan matrik perluasan yang sesuai dengan sistem persamaan linier yang diberikan!

a) $\begin{aligned} -2x_1 &= 6 \\ 3x_1 &= 8 \\ 9x_1 &= -3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3_{x3} &= 4 \\ 5x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} -2x_2 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$

d) $x_1 - x_5 = 7$

14. Dari bagian-bagian di bawah ini, tentukan matrik perluasan yang sesuai dengan sistem persamaan linier yang diberikan!

a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Kegiatan Belajar 2: Eliminasi Gauss

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat mengenal bentuk eselon baris dan bentuk eselon baris tereduksi.
2. Peserta didik dapat menyusun solusi dari sistem linier yang sesuai dengan matrik perluasan dalam bentuk eselon baris atau bentuk eselon baris tereduksi.
3. Peserta didik dapat menggunakan eliminasi Gauss untuk menemukan solusi umum dari sistem linier.
4. Peserta didik dapat menggunakan eliminasi Gauss-Jordan untuk menemukan solusi umum dari sistem linier.
5. Peserta didik dapat menganalisis sistem linier homogen menggunakan Teorema variabel bebas untuk sistem homogen.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Mengenal bentuk eselon baris dan bentuk eselon baris tereduksi.
2. Menyusun solusi dari sistem linier yang sesuai dengan matrik perluasan dalam bentuk eselon baris atau bentuk eselon baris tereduksi.
3. Menggunakan eliminasi Gauss untuk menemukan solusi umum dari sistem linier.
4. Menggunakan eliminasi Gauss-Jordan elimination untuk menemukan solusi umum dari sistem linier.
5. Menganalisis sistem linier homogen menggunakan Teorema variabel bebas untuk sistem homogen.

C. Uraian Materi

1.2. Eliminasi Gauss

Pada bagian ini, kita akan membangun suatu prosedur sistematis untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Prosedur tersebut berdasarkan ide dari pembentukan operasi tertentu dari baris matrik perluasan dari sistem, menjadi bentuk sederhana dimana solusi dari sistem sudah dapat dipastikan dengan inspeksi.

1.2.1. Pertimbangan dalam Menyelesaikan Sistem Linier

Ketika mempertimbangkan metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, sangat penting untuk membedakan sistem yang besar yang harus diselesaikan oleh komputer dan sistem yang kecil yang dapat diselesaikan oleh tangan. Sebagai contoh, terdapat banyak aplikasi yang membawa ke sistem linier dalam ribuan bahkan jutaan variabel yang tidak diketahui. Sistem yang besar membutuhkan teknik khusus untuk berurusan dengan masalah ukuran memori, kesalahan pembulatan, waktu untuk mendapatkan solusi, dan sebagainya. Teknik-teknik seperti itu dipelajari dalam bidang analisis numerik dan hanya tersentuh dalam modul ini. Namun, hampir semua metode yang digunakan pada sistem yang besar mengacu kepada ide-ide yang akan kita bangun pada bagian ini.

1.2.2. Bentuk Eselon

Dalam contoh 6 dari bagian terakhir, kita menyelesaikan sistem linier dalam variable x, y, z yang tidak diketahui dengan mengurangi matriks perluasan kedalam bentuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dimana solusinya adalah $x = 1, y = 2, z = 3$ menjadi jelas. Ini adalah sebuah contoh dari matrik yang mengalami *reduced row echelon forms* (Bentuk eselon baris tereduksi). Untuk menjadi bentuk tersebut, suatu matrik harus memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Jika suatu baris seluruhnya tidak mengandung nol, maka bilangan pertama yang bukan nol pada baris adalah 1, yang disebut *leading 1*.
2. Jika terdapat suatu baris yang berisi semuanya nol, maka mereka akan berkelompok bersama-sama di bagian bawah matrik.
3. Jika terdapat dua baris berturut-turut yang semuanya tidak mengandung nol, maka *leading 1* pada baris bawah terjadi lebih jauh ke kanan daripada *leading 1* pada baris atas.

4. Setiap kolom yang berisi satu leading 1 memiliki nol dimana-mana dalam kolom tersebut.

Suatu matriks yang memiliki tiga sifat pertama dikatakan bentuk eselon baris. (Dengan demikian suatu matrik dalam bentuk eselon baris tereduksi membutuhkan bentuk eselon baris, tetapi tidak sebaliknya.)

Contoh 1: Eselon Baris dan Bentuk Eselon Baris Tereduksi

Matrik-matrik berikut adalah dalam bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrik-matrik berikut adalah dalam bentuk eselon baris tetapi bukan bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 2: Eselon Baris dan Bentuk Eselon Baris Tereduksi Lebih Lanjut

Sebagaimana ilustrasi pada contoh 1, suatu matrik dalam bentuk eselon baris memiliki nol masing-masing di bawah *leading 1*, dimana matrik dalam bentuk eselon baris tereduksi memiliki nol di bawah dan di atas dari setiap *leading 1*. Dengan demikian, dengan substitusi suatu bilangan riil untuk *, semua matrik dari tipe-tipe berikut ini adalah bentuk eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Semua matrik dari tipe-tipe berikut ini adalah bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&1&*&0&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&1&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&1&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

Jika oleh barisan operasi baris elementer, matrik perluasan untuk sistem persamaan linier berada dalam bentuk eselon baris tereduksi maka himpunan solusi dapat diperoleh dengan inspeksi atau merubah persamaan linier tertentu ke dalam bentuk parametrik. Inilah beberapa contohnya.

Contoh 3: Solusi Tunggal

Misalkan matrik perluasan untuk sistem linier dengan variabel x_1, x_2, x_3 dan x_4 tidak diketahui sudah tereduksi oleh operasi baris elementer menjadi:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&5\end{bmatrix}$$

Matrik tersebut berada dalam bentuk eselon baris tereduksi dan sesuai dengan persamaan:

$$\begin{aligned}x_1 \qquad\qquad &= 3\\ x_2 \qquad\quad &= -1\\ x_3 \quad\; &= 0\\ x_4 &= 5\end{aligned}$$

Dengan demikian, sistem memiliki solusi tunggal, yaitu:

$x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 5$

Contoh 4: Sistem Linier dengan Tiga Variabel

Misalkan matriks perluasan untuk sistem linier dalam variabel x, y dan z sudah tereduksi oleh operasi baris elementer menjadi bentuk eselon baris tereduksi di bawah ini. Tentukan solusi dari sistem berikut:

(a) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1&0&3&-1\\0&1&-4&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&-5&1&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

Solusi:

(a) Persamaan yang sesuai dengan baris akhir dari matrik perluasan adalah

$$0x + 0y + 0z = 1$$

Karena persamaan ini tidak memenuhi suatu nilai dari x, y dan z maka sistem inkonsisten.

(b) Persamaan yang sesuai dengan baris akhir dari matrik perluasan adalah

$$0x + 0y + 0z = 0$$

Persamaan ini dapat dihilangkan karena tidak ada batasan dalam x, y dan z sehingga sistem linier yang sesuai dengan matrik perluasan adalah:

$$x + 3z = -1$$
$$y - 4z = 2$$

Karena x dan y sesuai dengan *leading 1* dalam matrik perluasan, maka kita sebut *leading variabel*. Variabel sisanya (dalam hal ini z) disebut variabel bebas. Menyelesaikan *leading variabel* dalam bentuk variabel bebas memberikan:

$$x = -1 - 3z$$
$$y = 2 + 4z$$

Dari persamaan tersebut, kita dapat melihat bahwa varibel bebas z dapat diperlakukan sebagai parameter dan menguji suatu nilai sebarang t yang kemudian menentukan nilai x dan y. Dengan demikian, himpunan solusi dapat direpresentasikan oleh persamaan paramterik:

$$x = -1 - 3t, y = 2 + 4t, z = t$$

Dengan substitusi nilai-nilai sebarang t dalam persamaan tersebut, kita memperoleh solusi yang bervariasi dari sistem. Sebagai contoh, ambil $t = 0$ menghasilkan solusi:

$$x = -1, y = 2, z = 0$$

Dan ambil sebarang $t = 1$ menghasilkan solusi:

$$x = -4, y = 6, z = 1$$

(c) Seperti yang sudah dijelaskan pada bagian (b), kita dapat menghilangkan persamaan yang sesuai dengan baris nol, dimana dalam kasus ini, sistem linier berhubungan dengan matrik perluasan yang terdiri dari persamaan tunggal yaitu:

$$x - 5y + z = 4 \qquad (1)$$

Dimana kita dapat melihat bahwa himpunan solusinya adalah sebuah bidang dalam ruang 3 dimensi. Meskipun (1) adalah bentuk yang valid dari himpunan solusi, terdapat banyak aplikasi yang sesuai untuk mengekspresikan himpunan solusi dalam bentuk paramterik. Kita dapat merubah (1) ke bentuk parametrik dengan menyelesaikan *leading variabel* x dalam bentuk variabel bebas y dan z, diperoleh:

$$x = 4 + 5y - z$$

Dari persamaan ini kita dapat melihat bahwa variabel bebas dapat diujikan sebarang nilai, katakanlah $y = s$ dan $z = t$ yang kemudian menentukan nilai x. Dengan demikian, himpunan solusi dapat diekspresikan secara parametrik, yaitu:

$$x = 4 + 5s - t, y = s, z = t \tag{2}$$

DEFINISI 1

Jika suatu sistem linier memiliki solusi tak hingga, maka himpunan persamaan parametrik dari semua solusi dapat diperoleh dengan menguji nilai-nilai sebarang ke dalam parameter yang disebut Solusi Umum dari sistem.

1.2.3. Metode Eliminasi

Kita baru saja melihat, betapa mudahnya menyelesaikan sistem persamaan linier satu kali yaitu matrik perluasan dalam bentuk eselon tereduksi. Sekarang, kita akan belajar *step-by-step* prosedur eliminasi yang dapat digunakan untuk mereduksi suatu matrik ke dalam bentuk eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah ke 1. Atur kolom paling kiri sehingga tidak semuanya nol

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Kolom paling kiri tidak nol

Langkah ke 2. Tukar baris paling atas dengan baris lain, jika diperlukan, untuk membawa entri tidak nol ke kolom paling atas pada langkah ke 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama dan kedua pada matrik ditukar

Langkah ke 3. Jika entry pada kolom paling atas pada langkah ke 1 adalah a, kalikan baris pertama dengan $\frac{1}{a}$ dalam rangka merubah menjadi *leading 1*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama pada matrik dikalikan dengan $\frac{1}{2}$

Langkah ke 4. Tambahkan perkalian yang sesuai dari baris pertama dengan baris ketiga sehingga semua entri pada baris di bawah *leading 1* menjadi 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-2 kali baris pertama pada matrik ditambahkan dengan baris ketiga

Langkah ke 5. Sekarang tandai baris ke satu pada matrik dan ulangi lagi dengan langkah ke 1, aplikasikan pada submatrik sisanya. Lanjutkan langkah-langkah tersebut sampai seluruh matrik dalam bentuk matrik eselon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Kolom paling kiri tidak nol dalam submatrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama pada submatrik dikalikan dengan $-\frac{1}{2}$ menjadi *leading 1*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-5 kali baris pertama pada submatrik ditambahkan pada baris ketiga untuk memperoleh nol dibawah *leading 1*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris pertama pada submatrik sudah terpenuhi dan kita ulangi lagi Langkah ke 1

Kolom paling kiri tidak nol dalam submatrik baru

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← Baris pertama (hanya satu-satunya) pada submatrik baru dikalikan dengan 2 agar diperoleh *leading 1*

Sekarang matriks keseluruhan dalam bentuk eselon baris. Untuk menentukan bentuk eselon baris tereduksi, kita memerlukan langkah-langkah tambahan.

Langkah ke 6. Dimulai dengan baris terakhir yang bukan nol dan kerjakan dari bawah ke atas, tambahkan setiap baris yang sesuai ke baris di atasnya untuk mendapatkan nol di atas *leading 1*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← $\frac{7}{2}$ kali baris ke tiga ditambahlan ke baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← -6 kali baris ke tiga ditambahlan ke baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← 5 kali baris kedua ditambahlan ke baris pertama

Matrik yang terakhir ini adalah matrik dalam bentuk eselon baris tereduksi.

Prosedur (algoritma) yang baru saja kita lakukan untuk mereduksi matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi disebut **Eliminasi Gauss-Jordan**. Algoritma ini terdiri dari dua bagian, pertama tahap maju dimana nol muncul di bawah *leading 1*, dan kedua tahap mundur dimana nol muncul di atas *leading 1*. Jika hanya tahap maju saja yang digunakan dan menghasilkan bentuk eselon baris saja disebut **Eliminasi Gauss**. Sebagai contoh pada perhitungan sebelumnya yang menghasilkan bentuk eselon baris sampai dengan langkah ke 5.

Contoh 5: Eliminasi Gauss-Jordan
Selesaikan dengan Eliminasi Gauss-Jordan!

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Solusi:
Matriks perluasan dari sistem adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua dan empat, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris kedua dengan -1 dan kemudian tambahkan -5 kali baris kedua yang baru tadi ke baris ketiga dan tambahkan -4 kali baris kedua yang baru ke baris keempat diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Tukarkan baris ketiga dengan baris keempat dan kemudian kalikan baris ketiga baru dengan 1/6 diperoleh bentuk eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini tahap maju yang komplit dimana nol berada di bawah *leading 1*.

Selanjutnya, tambahkan -3 kali baris ketiga ke baris kedua dan kemudian tambahkan 2 kali baris kedua yang baru ke baris pertama yang menghasilkan bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini tahap mundur yang sudah komplit dimana nol berada di bawah *leading 1*. Sistem persamaan yang sesuai adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \qquad (3)$$

Selesaikan untuk *leading variabel*, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Terakhir, kita ekspresikan solusi umum dari sistem secara parametrik dengan mengganti variabel bebas x_2, x_4 dan x_5 dengan sebarang nilai r, s dan t secara berturut-tururt, yang menghasilkan:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t, x_6 = \tfrac{1}{3}$$

1.2.4. Sistem Linier Homogen

Suatu sistem persamaan linier dikatakan homogen apabila bentuk-bentuk konstantanya semuanya nol, yaitu suatu sistem yang memiliki bentuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Setiap sistem persamaan linier homogen adalah konsisten karena semua sistem memiliki $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ sebagai solusinya. Solusi tersebut dinamakan **solusi trivial**, jika terdapat solusi lain dinamakan **solusi nontrivial**.

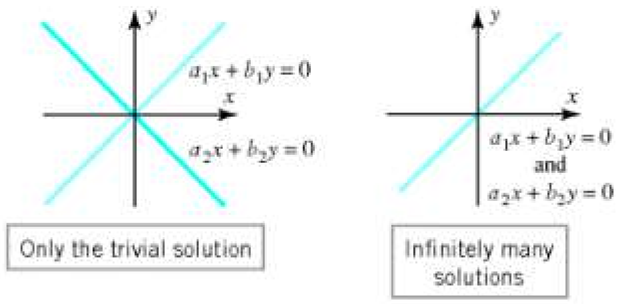
Apabila suatu sistem linier homogen selalu memiliki solusi trivial, maka hanya dua kemungkinan untuk solusinya:

- Sistem hanya memiliki solusi trivial
- Sistem memiliki solusi tak hingga selain solusi trivial

Dalam kasus tertentu dari sistem linier homogen dari dua persamaan dengan dua variabel tidak diketahui, katakanlah:

$$\begin{aligned} a_1x + b_{1y} &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}$$

Grafik dari persamaan adalah garis-garis yang melalui titik pusat dan solusi trivial nya sesuai dengan perpotongan titik di titik pusat (Gambar 1.2.1).



Gambar 1.2. 1. Dua Kemungkinan Solusi dari Sistem Linier Homogen Dua Peubah

Ada satu kasus dimana sistem homogen dipastikan memiliki solusi nontrivial yaitu apabila variabel yang terlibat dalam sistem lebih banyak dari persamaannya. Untuk mengetahui mengapa demikian, perhatikan contoh berikut dimana terdapat 4 persamaan dengan 6 variabel yang tidak diketahui.

Contoh 6: Sistem Homogen

Gunakan Eliminasi Gauss-Jordan, untuk menyelesaikan sistem linier homogen berikut!

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Solusi:

Perhatikan bahwa koefisien dari variabel yang tidak diketahui dalam sistem sama dengan contoh 5, yang membedakannya hanyalah konstanta di sebelah kanan. Matrik perluasan untuk sistem yang diberikan adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Dimana matrik perluasannya sama dengan contoh 5 kecuali nilai-nilai nol pada kolom terakhir. Dengan denikian, betuk eselon baris tereduksi dari matrik ini akan sama dengan matrik perluasan di contoh 5, kecuali nilai pada kolom terakhir. Namun, dengan refleksi beberapa saat akan membuktikan bahwa kolom dengan nilai 0 tidak berubah oleh operasi baris elementer, jadi bentuk eselon baris tereduksinya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Selesaikan untuk *leading variabel*, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Jika kita tetapkan variabel bebas x_2, x_4 dan x_5 dengan sebarang nilai r, s dan t secara berturut-turut, maka kita dapat mengekspresikan solusi parametriknya sebagai:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t, x_6 = 0$$

1.2.5. Variabel Bebas dalam Sistem Linier Homogen

Contoh 6 memberikan ilustrasi dua hal penting tentang penyelesaian sistem linier homogen:

1. Operasi baris elementer tidak merubah kolom dengan nilai nol dalam matriks, jadi bentuk eselon baris tereduksi dari matrik perluasan dari sistem linier homogen memiliki bentuk akhir kolom dengan nilai nol. Akaibatnya sistem linier yang sesuai untuk bentuk eselon baris tereduksinya homogen, seperti sistem asalnya.
2. Jika Kita mengkonstruksi sistem linier homogen yang sesuai matrik perluasan (6), kita abaikan baris dengan nilai nol karena persamaan sesuai dengan:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

Tidak menentukan kondisi apapun dari variabel yang tidak diketahui. Dengan demikian, bergantung atau tidak kepada bentuk eselon baris tereduksi dari matrik perluasan untuk suatu sistem persamaan linier homogen yang memiliki beberapa baris dengan nilai nol, sistem linier sesuai dengan bentuk eselon baris tereduksi diantaranya akan memiliki banyak persamaan yang sama dari sistem asal atau lebih sedikit.

Sekarang, perhatikan sistem linier homogen umum dengan n variabel tidak diketahui dan misalkan bentuk eselon baris tereduksi dari matrik perluasan memiliki baris yang tidak nol sebanyak r. Misalkan baris yang tidak nol memilki satu *leading 1* dan setiap *leading 1* yang sesuai memiliki satu *leading variabel*, sistem homogen yang sesuai dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matrik perluasan harus memiliki r *leading variabel* dan $n - r$ variabel bebas. Dengan demikian, sistem berbentuk:

$$\begin{array}{cccc} x_{k_1} & & & + \Sigma(\quad) = 0 \\ & x_{k_2} & & + \Sigma(\quad) = 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & x_{k_r} & + \Sigma(\quad) = 0 \end{array} \tag{8}$$

Dimana setiap ekspresi persamaan $\Sigma(\quad)$ menotasikan suatu jumlah yang melibatkan variabel bebas, jika ada (lihat (7) sebagai contoh). Kesimpulannya, kita memiliki beberapa hal berikut ini:

TEOREMA 1.2.1. Teorema Variabel Bebas untuk Sistem Homogen
Jika suatu sistem linier homogen memiliki n variabel yang tidak diketahui dan jika bentuk eselon baris tereduksi dari matrik perluasan memiliki r baris bukan nol, maka sistem memiliki $n - r$ variabel bebas.

Teorema 1.2.1 memiliki suatu dampak penting untuk sistem linier homogen dengan lebih banyak variabel yang tidak diketahui daripada banyaknya persamaan. Secara khusus, jika suatu sistem linier homogen memiliki m persamaan dengan n variabel yang tidak diketahui, dan jika $m < n$ maka pasti benar berlaku pula $r < n$ (Kenapa?). Inilah yang terjadi, teorema memberi dampak bahwa terdapat paling sedikit satu variabel bebas, dan implikasi ini selanjutnya menyatakan bahwa sistem memiliki solusi tak hingga. Sehingga, kita mendapatkan hasil seperti di bawah ini.

TEOREMA 1.2.2.
Suatu sistem linier homogen dengan variabel yang tidak diketahuii lebih banyak dari persamaannya memiliki solusi tak hingga.

Dalam retrospeksi, kita dapat mengantisipasi bahwa sistem homogen pada contoh 6 akan memiliki solusi tak hingga karena memiliki 4 persamaan dengan 6 variabel yang tidak diketahui.

1.2.6. Eliminasi Gauss dan Back-Substitustion

Sistem linier yang sederhana dapat dengan mudah diselesaikan secara manual (Seperti kebanyakan yang ada dalam modul ini), Eliminasi Gauss-Jordan (mereduksi ke bentuk eselon baris tereduksi) adalah prosedur yang bagus untuk digunakan. Namun, sistem linier yang besar memerlukan komputer untuk mencari solusinya, secara umum lebih efektif menggunakan eliminasi Gauss (mereduksi ke bentuk eselon baris) yang diikuti dengan teknik yang diketahui sebagai ***back-substitution*** untuk menyempurnakan proses penyelesaian dari sistem. Contoh berikut memberikan ilustrasi teknik ini.

Contoh 7: Penyelesaian Contoh 5 dengan Back-Substitution
Dari perhitungan pada contoh 5, bentuk eselon baris dari matrik perluasan adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan yang sesuai:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Kita memprosesnya sebagai berikut:

Langkah ke 1. Selesaikan persamaan untuk *leading variabel*:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Langkah ke 2. Kerjakan dari bagian bawah keatas, subtitusikan masing-masing persamaan di atasnya.

Subtitusi $x_6 = \frac{1}{3}$ ke persamaan kedua menghasilkan

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Subtitusikan $x_3 = -2x_4$ ke persamaan pertama, menghasilkan:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Langkah ke 3. Ambil nilai-nilai sebarang untuk variabel bebas jika ada.

Jika kita tetapkan variabel bebas x_2, x_4 dan x_5 dengan sebarang nilai r, s dan t secara berturut-turut, solusi umum akan diperoleh dengan formula:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t, x_6 = \frac{1}{3}$$

Ini sama dengan solusi yang diperoleh pada Contoh 5.

Contoh 8:
Misalkan matrik-matrik di bawah ini adalah matrik perluasan dari sistem linier dengan variabel x_1, x_2, x_3, dan x_4 yang tidak diketahui. Matrik-matrik tersebut semuanya berbentuk eselon baris tapi belum berbentuk baris eselon tereduksi. Diskuskan eksistensi dan solusi tunggal yang sesuai dengan sistem linier!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solusi:

(a) Baris terakhir sesuai dengan persamaan:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

Dimana ini menjadi bukti bahwa sistem tidak konsisten.

(b) Baris terakhir sesuai dengan persamaan:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

Dimana tidak memiliki pengaruh dalam himpunan solusi. Sisanya, persamaan dengan variabel x_1, x_2 dan x_3 sesuai dengan *leading 1* dan karenanya menjadi *leading variabel*. Variabel x_4 adalah variabel bebas. Dengan sedikit aljabar, *leading variabel* dapat diekspresikan dalam bentuk variabel bebas, dan variabel bebas dapat diganti dengan sebarang nilai. Dengan demikian, sistem pasti memiliki solusi tak hingga.

(c) Baris terakhir sesuai dengan persamaan:

$$x_4 = 0$$

Yang memberikan kita suatu nilai untuk x_4. Jika kita subtitusikan nilai tersebut ke persamaan ketiga, yaitu:

$$x_3 + 6x_4 = 9$$

Kita memperoleh $x_3 = 9$. Anda seharusnya sekarang mampu melihat bahwa jika kita lanjutkan proses ini dan mensubstitusi nilai-nilai dari x_3 dan x_4 ke dalam persamaan yang sesuai dengan baris kedua, kita akan memperoleh satu bilangan untuk x_2 dan jika akhirnya kita substitusikan nilai-nilai x_4, x_3 dan x_2 ke dalam persamaan yang sesuai pada baris kesatu, kita akan menghasilkan satu bilangan untuk x_1. Dengan demikian, sistem memiliki solusi tunggal.

1.2.7. Beberapa Fakta tentang Bentuk Eselon

Terdapat tiga fakta tentang bentuk eselon baris dan bentuk eselon baris tereduksi yang sangan penting untuk diketahui tetapi kita tidak akan membuktinnya:

1. Setiap matrik memiliki satu bentuk eselon baris tereduksi, baik menggunakan eliminasi Gauss-Jordan atau beberapa operasi baris elementer, yang pada akhirnya akan menghasilkan bentuk eselon baris tereduksi yang sama.
2. Bentuk eselon baris adalah tidak tunggal, karena operasi baris elementer yang berbeda akan menghasilkan bentuk eselon baris yang berbeda.
3. Meskipun bentuk eselon baris tidak tunggal, semua bentuk eselon baris dari suatu matrik A memiliki jumlah baris bernilai nol yang sama, dan *leading 1* selalu terjadi pada posisi yang sama dalam bentuk eselon baris dari A. Hal tersebut dinamakan posisi pivot dari A. Kolom yang berisi posisi pivot dinamakan kolom pivot dari A.

Contoh 9: Posisi dan Kolom Pivot

Pada bagian sebelumnya (khususnya setelah Definisi 1) kita menemukan bahwa suatu bentuk eselon baris dari:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Leading 1 terjadi dalam posisi (baris ke 1, kolom ke 1), (baris ke 2, kolom ke 3), dan (baris ke 3, kolom ke 5). Posisi-posisi tersebut adalah posisi pivot. Kolom pivot adalah kolom 1, 3, dan 5.

1.2.8. Kesalahan Pembulatan dan Ketidakstabilan

Seringkali terdapat gap (kesenjangan) antara teori matematika dan implementasi prakteknya – Eliminasi Gauss-Jordan dan Eliminasi Gauss bisa menjadi contoh yang baik untuk memahami gap tersebut. Masalahnya adalah bahwa komputer secara umum melakukan bilangan pendekatan (aproksimasi), sehingga memunculkan kesalahan dalam pembulatan, kecuali dilakukan pencegahan, perhitungan berturut-turut dapat menurunkan ketepatan dalam jawaban dan menjadi tidak berguna. Algoritma (prosedur) dimana hal-hal tersebut terjadi disebut tidak stabil. Terdapat beberapa teknik untuk meminimalisir kesalahan dalam pembulatan dan ketidakstabilan. Sebagai contoh, dapat ditunjukkan bahwa sistem linier yang besar, eliminasi Gauss-Jordan melibatkan kurang-lebih 50% operasi lebih banyak daripada eliminasi Gauss, sehingga banyak algoritma komputer berbasis eliminasi Gauss. Beberapa materi tersebut akan dibahas pada Bagian 9.

Latihan 1.2

1. Dalam setiap bagian di bawah ini, tentukan apakah matriks-matrik berikut dalam bentuk eselon baris, bentuk eselon baris tereduksi atau keduanya atau bukan keduanya!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Dalam setiap bagian di bawah ini, tentukan apakah matriks-matrik berikut dalam bentuk eselon baris, bentuk eselon baris tereduksi atau keduanya atau bukan keduanya!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Dalam setiap bagian di bawah ini, misalkan matrik perluasan dari suatu sistem persamaan linier sudah mengalami reduksi oleh operasi baris ke bentuk eselon baris. Selesaikan sistem tersebut!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Dalam setiap bagian di bawah ini, misalkan matrik perluasan dari suatu sistem persamaan linier sudah mengalami reduksi oleh operasi baris ke bentuk eselon baris. Selesaikan sistem tersebut!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk Nomor 5 – 8, selsesaikan sistem linier dengan eliminasi Gauss-Jordan

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$$

Untuk nomor 9 – 12, selesaikan sistem linier dengan eliminasi Gauss.

9. Lihat soal nomor 5
10. Lihat soal nomor 6
11. Lihat soal nomor 7
12. Lihat soal nomor 8

Untuk nomor 13 – 16, tentukan yang manakah sistem homogen yang memiliki solusi no trivial dengan inspeksi (tanpa pensil dan kertas)

13. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

Untuk nomor 17 – 24, selesaikan sistem linier homogen berikut dengan metode apapun.

17. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} v + 3w - 2x\& &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

23.
$$\begin{aligned} 2l_1 - l_2 + 3l_3 + 4l_4 &= 9 \\ l_1 - 2l_3 + 7l_4 &= 11 \\ 3l_1 - 3l_2 + l_3 + 5l_4 &= 8 \\ 2l_1 + l_2 + 4l_3 + 4l_4 &= 10 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 + Z_5 &= 0 \end{aligned}$$

Untuk nomor 25 – 28, tentukan nilai a sehingga sistem memiliki tidak ada solusi, tepat satu solusi atau memiliki solusi tak hingga.

25.
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y - (a^2 - 3)z &= a \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + (a^2 - 5)y &= a - 1 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$$

Untuk nomor 29 – 30, selesaikan sistem berikut dimana a, b dan c adalah konstan.

29.
$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

31. Tentukan dua bentuk eselon baris yang berbeda dari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Soal ini menunjukkan bahwa suatu matriks dapat memiliki banyak bentuk eselon baris.

32. Reduksi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ke bentuk eselon baris tereduksi tanpa melibatkan bentuk pecahan dalam semua langkahnya.

33. Buktikan bahwa sistem persamaan non linier berikut memiliki 18 solusi jika $0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \gamma \leq 2\pi$, dan $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} \sin\alpha + 2\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ 2\sin\alpha + 5\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\sin\alpha - 5\cos\beta + 5\tan\gamma &= 0 \end{aligned}$$

[Petunjuk: Mulailah dengan substitusi $x = \sin\alpha$, $y = \cos\beta$, dan $z = \tan\gamma$]

34. Selesaikan sistem persamaan non linier berikut untuk sudut-sudut yang tidak diketahui α, β dan γ dimana $0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi$ dan $0 \leq \gamma \leq \pi$.

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

35. Selesaikan sistem persamaan non linier berikut untuk x, y, dan z.

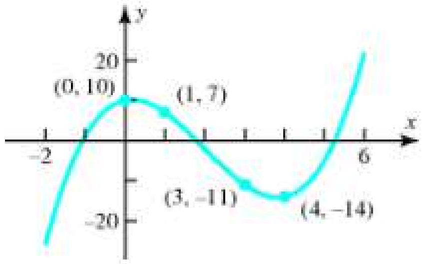
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

[Petunjuk: mulailah dengan mensubstitusi $X = x^2, Y = y^2, Z = z^2$]

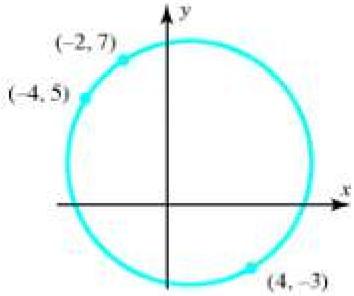
36. Selesaikan sistem berikut untuk x, y, dan z.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

37. Tentukan koefisien $a, b, c,$ dan d sehingga memenuhi gambar dari persamaan grafik $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



38. Tentukan koefisien $a, b, c,$ dan d sehingga memenuhi gambar dari persamaan grafik $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.



39. Jika sistem linier

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 0 \end{aligned}$$

Hanya memiliki solusi trivial, apa yang dapat Anda katakan tentang solusi dari sistem berikut?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 3 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 7 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 11 \end{aligned}$$

40. (a) Jika A adalah matrik 3×5, maka berapa banyak *leading 1* yang mungkin dalam bentuk eselon baris tereduksi?
(b) Jika B adalah matrik 3×6 dimana kolom terakhir semuanya nol, maka berapa banyak parameter yang mungkin dalam solusi umum sistem linier dengan matrik perluasan B?
(c) Jika C adalah matrik 5×3, maka berapa banyak baris berisi nol yang mungkin dalam bentuk eselon baris dari C?

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

Kegiatan Belajar 3: Matriks dan Operasi Matriks

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menentukan ukuran matrik.
2. Peserta didik dapat mengidentifikasi vektor baris dan kolom suatu matrik.
3. Peserta didik dapat melakukan operasi aritmatik penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar dan perkalian.
4. Peserta didik dapat menentukan *product* dari dua buah matriks terdefinisi.
5. Peserta didik dapat menghitung *product* matrik menggunakan metode baris-kolom, metode kolom, dan metode baris.
6. Peserta didik dapat mengekspresikan *product* dari suatu matrik dan suatu vektor kolom sebagai kombinasi linier dari matrik kolom.
7. Peserta didik dapat mengekspresikan sistem linier sebagai persamaan matrik, dan mengidentifikasi koefisien matrik.
8. Peserta didik dapat menghitung transpose matrik.
9. Peserta didik dapat menghitung jejak dari matrik bujur sangkar.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menentukan ukuran matrik.
2. Mengidentifikasi vektor baris dan kolom suatu matrik.
3. Melakukan operasi aritmatik penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar dan perkalian.
4. Menentukan *product* dari dua buah matriks terdefinisi.
5. Menghitung *product* matrik menggunakan metode baris-kolom, metode kolom, dan metode baris.
6. Mengekspresikan *product* dari suatu matrik dan suatu vektor kolom sebagai kombinasi linier dari matrik kolom.

7. Mengekspresikan sistem linier sebagai persamaan matrik, dan mengidentifikasi koefisien matrik.
8. Menghitung transpose matrik.
9. Menghitung jejak dari matrik persegi.

C. Uraian Materi

1.3. Matriks dan Operasi Matriks

Barisan persegi panjang dari bilangan real muncul dalam konteks selain sebagai matriks perluasan sistem linear. Pada bagian ini kita akan mulai mempelajari matriks sebagai mana mestinya dengan mendefinisikan operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian pada mereka.

1.3.1. Terminologi dan Notasi Matriks

Pada bagian 1.2 kita menggunakan barisan angka berbentuk persegi panjang yang disebut matriks perluasan, untuk menyingkat sistem persamaan linier. Namun demikian, susunan bilangan segi empat juga muncul dalam konteks lain. Misalnya, susunan persegi panjang berikut dengan tiga baris dan tujuh kolom mungkin menggambarkan jumlah jam yang dihabiskan seorang mahasiswa untuk mempelajari tiga subjek selama satu minggu tertentu:

	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu	Minggu
Matematika	2	3	2	4	1	4	2
Sejarah	0	3	1	4	3	2	2
Bahasa	4	1	3	1	0	0	2

Jika kita menghilangkan *heading*-nya, maka kita akan tersisa dengan susunan angka persegi panjang berikut dengan tiga baris dan tujuh kolom, yang disebut "matriks":

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Secara umum, kita akan mendefinisikannya sebagai berikut:

DEFINISI 1

Matriks adalah susunan angka/bilangan dalam bentuk persegi panjang. Bilangan/angka dalam susunan tersebut disebut entri.

Catatan: *Matrik yang hanya memiliki satu kolom disebut vektor kolom atau matrik kolom, dan matrik yang hanya memiliki satu baris disebut vektor baris atau matrik baris.*

Contoh 1: Contoh-contoh Matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [4]$$

Ukuran matriks dijelaskan dalam hal jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Sebagai contoh, matriks pertama dalam Contoh 1 memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 dengan 2 (ditulis 3×2). Dalam deskripsi ukuran, angka pertama selalu menunjukkan jumlah baris, dan angka kedua menunjukkan jumlah kolom. Matriks yang tersisa dalam Contoh 1 memiliki ukuran $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1,$ dan 1×1 secara berturut-turut.

Kita akan menggunakan huruf besar untuk menunjukkan matriks dan huruf kecil untuk menunjukkan jumlah numerik, sehingga kita bisa menulis:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ atau } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Ketika membahas matriks, adalah umum untuk merujuk ke jumlah numerik sebagai skalar. Kecuali dinyatakan sebaliknya, skalar adalah bilangan real; skalar kompleks akan dipertimbangkan nanti dalam teks.

Kurung matriks sering diabaikan dari matriks 1×1, *sehingga mustahil untuk mengatakan, misalnya, apakah simbol 4 menunjukkan angka "empat" atau matriks [4]. Ini jarang menimbulkan masalah karena biasanya mungkin untuk mengetahui mana yang dimaksudkan dari konteks.*

Entri yang terjadi di baris i dan kolom j dari matriks A akan dilambangkan dengan a_{ij}. Jadi matriks 3×4 secara umum dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Dan secara umum matriks $m \times n$ adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ketika notasi ringkas diinginkan, matriks sebelumnya dapat ditulis sebagai:

$$[a_{ij}]_{m \times n} \text{ atau } [a_{ij}]$$

Notasi pertama digunakan ketika penting dalam diskusi untuk mengetahui ukuran, dan yang kedua digunakan ketika ukuran tidak perlu ditekankan. Biasanya, kita akan mencocokkan huruf yang menunjukkan matriks dengan huruf yang menunjukkan entri-nya; dengan demikian, untuk matriks B kita biasanya menggunakan b_{ij} untuk entri dalam baris i dan kolom j, dan untuk matriks C kita akan menggunakan notasi c_{ij}.

Entri di baris i dan kolom j dari matriks A juga biasanya dilambangkan dengan simbol $(A)_{ij}$. Jadi, untuk matriks 1 di atas, kita punya:

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Dan untuk matrik:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Kita punya $(A)_{11} = 2, (A)_{12} = -3, (A)_{21} = 7$, dan $(A)_{22} = 0$.

Vektor baris dan kolom sangat penting, dan ini adalah praktik umum untuk menunjukkannya dengan huruf tebal huruf kecil dan bukan huruf besar. Untuk matriks semacam itu, subskrip ganda entri tidak diperlukan. Jadi secara umum vektor baris $1 \times n$ dan vektor kolom $m \times 1$ akan ditulis sebagai:

$$\mathbf{a} = [a_1 a_2 \ldots a_n] \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks persegi ordo n, dan entri $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ yang diarsir dalam 2 dikatakan berada di diagonal utama A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.3.2. Operasi Matrik

Sejauh ini, kita telah menggunakan matriks untuk menyingkat pekerjaan dalam memecahkan sistem persamaan linear. Untuk aplikasi lain, bagaimanapun, itu diinginkan untuk mengembangkan "aritmatika matriks" di mana matriks dapat ditambahkan, dikurangi, dan dikalikan dengan cara yang bermanfaat. Bagian selanjutnya dari bagian ini akan dikhususkan untuk mengembangkan aritmatika ini.

DEFINISI 2

Dua matriks didefinisikan sama jika mereka memiliki ukuran yang sama dan entri yang sesuai adalah sama.

Kesetaraan dua matriks:

$$A = [a_{ij}] \text{ dan } B = [b_{ij}]$$

dengan ukuran yang sama dapat diekspresikan baik dengan menulis:

$$(A)_{ij} = (B)_{ij}$$

atau dengan menulis:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

di mana dipahami bahwa kesetaraan berlaku untuk semua nilai dari i dan j.

Contoh 2: Kesamaan Matriks

Perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $x = 5$ maka $A = B$, tetapi untuk semua nilai lain dari x, matriks A dan B tidak sama, karena tidak semua entri yang sesuai adalah sama. Tidak ada nilai x dimana $A = C$ karena A dan C memiliki ukuran yang berbeda.

DEFINISI 3

Jika A dan B adalah matriks dengan ukuran yang sama, maka penjumlahan $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri B ke entri A yang sesuai, dan pengurangan $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi entri B dari entri A yang sesuai. Matriks dengan ukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangi.

Dalam notasi matrik, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dengan ukuran yang sama, maka:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Dan

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Contoh 3: Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Ekspresi $A + C,\ B + C,\ A - C$ dan $B - C$ tidak terdefinisi.

DEFINISI 4

Jika A adalah matriks dan c adalah skalar apa pun, maka produk cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri dari matriks A oleh c. Matriks cA dikatakan sebagai kelipatan skalar A.

Dalam notasi matrik, jik $A = [a_i j]$ maka:

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Contoh 4: Kelipatan Skalar
Untuk matrik-matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Kita punya:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix},\ (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix},\ \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ini adalah praktik umum untuk menunjukkan $(-1)B$ oleh $-B$.

Sejauh ini kita telah mendefinisikan perkalian matriks oleh skalar tetapi bukan perkalian dari dua matriks. Karena matriks ditambahkan dengan menambahkan entri yang sesuai dan dikurangkan dengan mengurangkan entri yang sesuai, akan terlihat alami untuk menentukan perkalian matriks dengan mengalikan entri yang bersesuaian. Namun, ternyata definisi seperti itu tidak akan sangat berguna untuk sebagian besar masalah. Pengalaman telah menyebabkan para matematikawan mengikuti definisi perkalian matriks yang lebih bermanfaat berikut ini.

DEFINISI 5

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka produk AB adalah matriks $m \times n$ yang entri ditentukan sebagai berikut: Untuk menemukan entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih satu baris i dari *matriks A dan kolom j dari matriks B. Gandakan entri yang sesuai dari baris dan kolom bersama-sama, dan kemudian tambahkan produk yang dihasilkan.*

Contoh 5: Perkalian Matrik
Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matrik 2×3 dan B adalah matrik 3×4, produk AB adalah matrik 2×4. Untuk menentukan, misalnya, entri di baris 2 dan kolom 3 dariAB, kita memilih baris 2 dari A dan kolom 3 dari B. Kemudian, seperti yang digambarkan di bawah ini, kita mengalikan entri yang terkait bersama dan menambahkan produk-produk ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{26} & \square \end{bmatrix}$$

$$(2.4) + (6.3) + (0.5) = 26$$

Entri dalam baris 1 dan kolom 4 dari AB dihitung sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1.3) + (2.1) + (4.2) = 13$$

Perhitungan entri sisanya adalah:

$$(1.4) + (2.0) + (4.2) = 12$$
$$(1.1) - (2.1) + (4.7) = 27$$
$$(1.4) + (2.3) + (4.5) = 30$$
$$(2.4) + (6.0) + (0.2) = 8$$
$$(2.1) - (6.1) + (0.7) = -4$$
$$(2.3) - (6.1) + (0.2) = 12$$

Sehingga diperoleh $AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$

Definisi perkalian matriks mensyaratkan bahwa jumlah kolom dari faktor pertama A sama dengan jumlah baris dari faktor kedua B untuk membentuk produk AB. Jika kondisi ini tidak dipenuhi, produk tidak terdefinisi. Cara mudah untuk menentukan apakah produk dari dua matriks didefinisikan adalah dengan menuliskan ukuran faktor pertama dan, ukuran faktor kedua dituliskan disebelah kanannya,. Jika, seperti pada (3), angka di dalam adalah sama, maka produk dapat ditentukan. Angka-angka di luar kemudian memberikan ukuran produk.

$$\underset{m\times r}{A}\quad \underset{r\times n}{B} = \underset{m\times n}{AB} \tag{3}$$

Angka dalam

Angka luar

Contoh 6: Menentukan Apakah Suatu Produk Terdefinisi

Misalkan A, B dan C adalah matrik-matrik dengan ukuran sebagai berikut:

$$\underset{3\times 4}{A}\qquad \underset{4\times 7}{B}\qquad \underset{7\times 3}{C}$$

Maka dengan (3), AB terdefinisi dengan ukuran matriks 3×7; BC terdefinisi dengan ukuran matrik 4×3; dan CA terdefinisi dengan ukuran matrik 7×4. Produk AC, CB dan BA semuanya tidak terdefinisi.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rm} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Entri $(AB)_{ij}$ dalam baris i dan kolom j dari AB diperoleh dengan:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \tag{5}$$

1.3.3. Partisi Matrik

Matriks dapat dibagi atau dipartisi menjadi matriks yang lebih kecil dengan memasukkan aturan horizontal dan vertikal antara baris dan kolom yang dipilih. Sebagai contoh, berikut ini adalah tiga partisi yang mungkin dari matriks A secara umum - yang pertama adalah partisi A menjadi empat submatrik A_{11}, A_{12}, A_{21}, danA_{22}; yang kedua adalah partisi A ke dalam vektor baris r_1, r_2, danr_3; dan yang ketiga adalah partisi A ke dalam vektor kolom c_1, c_2, c_3, dan c_4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]$$

1.3.4. Perkalian Matrik dengan Kolom dan Baris

Partisi memiliki banyak kegunaan, salah satunya adalah untuk menemukan baris atau kolom tertentu dari produk matriks AB tanpa menghitung seluruh produk. Secara khusus, rumus berikut, yang buktinya dibiarkan sebagai latihan, menunjukkan bagaimana vektor kolom individu AB dapat diperoleh dengan mempartisi B ke dalam vektor kolom dan bagaimana vektor baris individu AB dapat diperoleh dengan mempartisi A ke dalam vektor baris.

$$AB = A[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \dots \quad Ab_n] \tag{6}$$

(AB dihitung kolom dengan kolom)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix} \tag{7}$$

(AB dihitung baris dengan baris)

Dalam kata-kata, rumus-rumus ini menyatakan bahwa:

Vektor kolom ke – j dari $AB = A$[vektor kolom ke j dari B] (8)

Vektor baris ke – i dari AB =[vektor kolom ke j dari A]B (9)

Contoh 7: Lihat kembali Contoh 5

Jika A dan B adalah matriks dalam Contoh 5, maka dari (8) vektor kolom kedua AB dapat diperoleh dengan perhitungan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Kolom ke 2 dari B Kolom ke 2 dari AB

Dan dari (9) vektor baris pertama dari AB dapat diperoleh dengan perhitungan:

$$[1 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = [12 \quad 27 \quad 30 \quad 13]$$

Baris pertama dari A Baris pertama dari AB

1.3.5. Produk Matrik sebagai Kombinasi Linier

Kita telah membahas tiga metode untuk menghitung produk matriks AB – entri demi entri, kolom demi kolom, dan baris demi baris. Definisi berikut memberikan cara lain untuk berpikir tentang perkalian matriks.

DEFINISI 6

Jika $A_1, A_2, \dots., A_r$ adalah matriks dengan ukuran sama, dan jika $c_1, c_2, \dots, c_r$ adalah skalar, maka ekspresi dari bentuk:

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$

Disebut kombinasi linier dari $A_1, A_2, \dots, A_r$ dengan koefisien $c_1, c_2, \dots, c_r$

Untuk melihat bagaimana produk matriks dapat dilihat sebagai kombinasi linear, misalkan A menjadi matriks dan x vektor kolom, katakan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ini membuktikan teorema berikut:

TEOREMA 1.3.1.

Jika A adalah matriks $m \times n$, dan jika $\mathbf{x}$ adalah vektor kolom $n \times 1$, maka produk $A\mathbf{x}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor kolom A di mana koefisien adalah entri dari $\mathbf{x}$.

Contoh 8: Produk Matrik Sebagai Kombinasi Linier

Produk matrik:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor kolom sebagai berikut:

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Contoh 9: Kolom produk AB sebagai kombinasi linier

Kita sudah membuktikan dalam contoh 5 bahwa:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Ini mengikuti dari Rumus (6) dan Teorema 1.3.1 bahwa vektor kolom ke-j dari AB dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor kolom A dimana koefisien dalam kombinasi linear adalah entri dari kolom ke-j dari B. Perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.3.6. Bentuk Matrik dari Sistem Linier

Perkalian matriks memiliki aplikasi penting untuk sistem persamaan linear. Perhatikan m sistem persamaan linier dalam n tidak diketahui:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Karena dua matriks sama jika dan hanya jika entri yang sesuai sama, kita dapat mengganti m persamaan dalam sistem ini dengan persamaan matriks tunggal:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks $m \times 1$ di sisi kiri persamaan ini dapat ditulis sebagai produk sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika kita menunjuk matriks ini dengan A, $\mathbf{x}$, dan $\mathbf{b}$, masing-masing, maka kita dapat mengganti sistem asli m persamaan dengan n tidak dikenal oleh persamaan matriks tunggal:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Matriks A dalam persamaan ini disebut matriks koefisien dari sistem. Matriks perluasan untuk sistem diperoleh dengan adjoining **b** ke A sebagai kolom terakhir; dengan demikian matriks perluasannya adalah:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

garis vertikal di $[A|\mathbf{b}]$ adalah cara yang nyaman untuk memisahkan A dari **b** secara visual; itu tidak memiliki signifikansi matematis.

1.3.7. Transpose Matriks

Kita menyimpulkan bagian ini dengan mendefinisikan dua operasi matriks yang tidak memiliki analog dalam aritmatika bilangan real.

DEFINISI 7

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpose dari A, dilambangkan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks yang dihasilkan dengan mempertukarkan baris dan kolom A; yaitu, kolom pertama A^T adalah baris pertama A, kolom kedua A^T adalah baris kedua A, dan seterusnya.

Contoh 10: Beberapa Contoh Transpose

Berikut ini adalah beberapa contoh matriks dan transposnya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, D^T = [4]$$

Perhatikan bahwa tidak hanya kolom A^T dari baris A, tetapi baris A^T adalah kolom A. Dengan demikian entri dalam baris i dan kolom j dari A^T adalah entri dalam baris j dan kolom i dari A; yaitu:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} \tag{11}$$

Perhatikan pembalikan subscript.

Dalam kasus khusus di mana A adalah matriks persegi, transpose A dapat diperoleh dengan entri pertukaran tempat yang diposisikan secara simetris pada diagonal utama. Dalam bagian 12 kita melihat bahwa A^T juga dapat diperoleh dengan "mencerminkan" A dengan diagonal utamanya.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Pertukaran tempat entri yang diposisikan secara simetris pada diagonal utama

DEFINISI 8

Jika A adalah matriks persegi, maka jejak A, dilambangkan dengan tr (A), didefinisikan sebagai jumlah dari entri pada diagonal utama A. Jejak A tidak terdefinisi jika A bukan matriks persegi.

Contoh 11: Jejak Matrik

Berikut ini adalah contoh-contoh matrik dan jejaknya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ dan } tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

Dalam latihan soal, Anda akan mendapati beberapa latihan untuk dikerjakan terkait operasi transpose dan trace.

Latihan 1.3

1. Misalkan A, B, C, D dan E adalah matrik-matrik dengan ukuran sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4 \times 5) & (4 \times 5) & (5 \times 2) & (4 \times 2) & (5 \times 4) \end{array}$$

   Dari matriks di atas, tentukan apakah ekspresi matrik tersebut terdefinisi. Untuk matriks yang terdefinisi, tentukan ukuran dari hasil matrik berikut:

   (a) BA
   (b) $AC + D$
   (c) $AE + B$
   (d) $AB + B$
   (e) $E(A + B)$
   (f) $E(AC)$
   (g) $E^T A$
   (h) $(A^T + E)D$

2. Misalkan A, B, C, D dan E adalah matrik-matrik dengan ukuran sebagai berikut:

A	B	C	D	E
(3×1)	(3×6)	(6×2)	(2×6)	(1×3)

Dari matriks di atas, tentukan apakah ekspresi matrik tersebut terdefinisi. Untuk matriks yang terdefinisi, tentukan ukuran dari hasil matrik berikut:
(a) EA
(b) AB^T
(c) $B^T(A + E^T)$
(d) $2A + C$
(e) $(C^T + D)B^T$
(f) $CD + B^T E^T$
(g) $(B^T)C^T$
(h) $DC + EA$

3. Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari matrik-matrik tersebut, hitung ekspresi yang mungkin:
(a) $D + E$
(b) $D - E$
(c) $5A$
(d) $-7C$
(e) $2B - C$
(f) $4E - 2D$
(g) $-3(D + 2E)$
(h) $A - A$
(i) $tr(D)$
(j) $tr(D - 3E)$
(k) $4tr(7B)$
(l) $tr(A)$

4. Dengan menggunakan matrik pada soal nomor 3, hitunglah ekspresi-ekspresi di bawah ini yang mungkin:
(a) $2A^T + C$

(b) $D^T - E^T$
(c) $(D - E)^T$
(d) $B^T + 5C^T$
(e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$
(f) $B - B^T$
(g) $2E^T - 3D^T$
(h) $(2E^T - 3D^T)$
(i) $(CD)E$
(j) $C(BA)$
(k) $tr(DE^T)$
(l) $tr(BC)$

5. Dengan menggunakan matrik pada soal nomor 3, hitunglah ekspresi-ekspresi di bawah ini yang mungkin:
(a) AB
(b) BA
(c) $(3E)D$
(d) $(AB)C$
(e) $A(BC)$
(f) CC^T
(g) $(DA)^T$
(h) $(C^T B)A^T$
(i) $tr(DD^T)$
(j) $tr(4E^T - D)$
(k) $tr(C^T A^T + 2E^T)$
(l) $tr((BC^T)^T A)$

6. Dengan menggunakan matrik pada soal nomor 3, hitunglah ekspresi-ekspresi di bawah ini yang mungkin:
(a) $(2D^T - E)A$
(b) $(4B)C + 2B$
(c) $(-AC)^T + 5D^T$
(d) $(BA^T - 2C)^T$
(e) $B^T(CC^T - A^T A)$
(f) $D^T E^T - (ED)^T$

7. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Gunakan metode baris atau metode kolom yang tepat untuk menentukan:

(a) Baris pertama AB
(b) Baris ketiga AB
(c) Kolom kedua AB
(d) Kolom pertama BA
(e) Baris ketiga AA
(f) Kolom ketiga AA

8. Berdasarkan matriks pada soal nomor 7, gunakan metode baris atau metode kolom yang tepat untuk menentukan:
   (a) Kolom pertama AB
   (b) Kolom ketiga BB
   (c) Baris kedua BB
   (d) Kolom pertama AA
   (e) Kolom ketiga AB
   (f) Baris pertama BA

9. Berdasarkan matrik A dan B dalam soal nomor 7, dan contoh 9:
   (a) Ekspresikan masing-masing vektor kolom AA sebagai kombinasi linier dari vektor kolom A.
   (b) Ekspresikan masing-masing vektor kolom BB sebagai kombinasi linier dari vektor kolom B.

10. Berdasarkan matrik A dan B dalam soal nomor 7, dan contoh 9:
    (a) Ekspresikan masing-masing vektor kolom AB sebagai kombinasi linier dari vektor kolom A.
    (b) Ekspresikan masing-masing vektor kolom BA sebagai kombinasi linier dari vektor kolom B.

11. Tentukan matriks A, **x** dan **b** sistem persamaan linier berikut sebagai persamaan matrik tunggal A**x** = **b**, dan tuliskan persamaan matriknya.

    (a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

    (b) $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

12. Tentukan matriks A, **x** dan **b** sistem persamaan linier berikut sebagai persamaan matrik tunggal A**x** = **b**, dan tuliskan persamaan matriknya.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ -3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13. Ekspresikan persamaan matrik sebagai sistem persamaan linier.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$

14. Ekspresikan persamaan matrik sebagai sistem persamaan linier.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 15 – 16, tentukan semua nilai k, jika ada, yang memenuhi persamaan.

15. $\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix} = 0$

Untuk soal nomor 17 – 18, selesaikan persamaan matrik untuk a, b, c dan d.

17. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

19. Misalkan A matriks $m \times n$ dan misalkan O menjadi matriks $m \times n$ masing-masing entri yang nol. Tunjukkan bahwa jika $kA = 0$, lalu $k = 0$ atau $A = 0$.

20. (a) Buktikan bahwa jika AB dan BA terdefinisi, maka AB dan BA adalah matrik persegi.
    (b) Buktikan bahwa jika A adalah matrik $m \times n$ dan $A(BA)$ terdefinisi, maka B adalah matriks $n \times m$.

21. Buktikan: jika A dan B adalah matrik $m \times n$, maka $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

22. (a) Buktikan bahwa jika A memiliki baris nol dan B suatu matriks sehingga AB terdefinisi, maka AB juga memiliki baris nol.
    (b) Buktikan bahwa jika A memiliki kolom nol dan B suatu matriks sehingga AB terdefinisi, maka AB juga memiliki kolom nol.

23. Tentukan matrik $[a_{ij}]$ 6×6 yang memenuhi kondisi seperti di bawah ini. Buatlah jawaban Anda sebisa mungkin secara umum dengan menggunakan huruf dibandingkan menggunakan bilangan secara spesifik untuk entri-entri yang tidak nol.

    (a) $a_{ij} = 0$ jika $i \neq j$
    (b) $a_{ij} = 0$ jika $i > j$
    (c) $a_{ij} = 0$ jika $i < j$
    (d) $a_{ij} = 0$ jika $|i - j| > 1$

24. Tentukan matrik $A = [a_{ij}]$ 4×4 dimana entri-entrinya memenuhi kondisi sebagai berikut:

    (a) $a_{ij} = i + j$
    (b) $a_{ij} = i^{j-1}$
    (c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ jika } |i - j| > 1 \\ -1 \text{ jika } |i - j| \leq 1 \end{cases}$

25. Perhatikan fungsi $y = f(x)$ terdefinisi untuk matrik x 2×1 oleh $y = Ax$, dimana :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Plot $f(x)$ bersama-sama dengan x untuk setiap kasus seperti di bawah ini. Bagaimana Anda akan mendeskripsikan f?

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

26. Misalkan I adalah matrik $n \times n$ dimana entri-entrinya dalam baris i dan kolom j adalah:

$$\begin{cases} 1 \text{ jika } i = j \\ 0 \text{ jika } i \neq j \end{cases}$$

Buktikan bahwa $AI = IA = A$ untuk setiap matrik A $n \times n$.

27. Berapa banyak matrik 3×3 yang dapat Anda temukan sedemikian sehingga:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk semua x, y dan z?

28. Berapa banyak matrik 3×3 yang dapat Anda temukan sedemikian sehingga:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk semua x, y dan z?

29. Sebuah matriks B dikatakan sebagai akar kuadrat dari matriks A jika $BB = A$.

(a) Temukan dua akar kuadrat dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Berapa banyak akar kuadrat yang dapat Anda temukan dari $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

(c) Apakah Anda berpikir bahwa setiap matrik 2×2 memiliki paling sedikit satu akar kuadrat? Jelaskan alasan Anda?

30. Misalkan *0* adalah matrik 2×2, dimana entri-entrinya adalah nol.

(a) Apakah terdapat matrik A 2×2 sedemikian sehingga $A \neq 0$ dan $AA = 0$? Justifikasi jawaban Anda.
(b) Apakah terdapat matrik A 2×2 sedemikian sehingga $A \neq 0$ dan $AA = A$? Justifikasi jawaban Anda.

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4

Kegiatan Belajar 4: Invers: Sifat-sifat Aljabar dari Matriks

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik mengetahui sifat aritmatika operasi matriks.
2. Peserta didik mampu membuktikan sifat aritmatika matrik.
3. Peserta didik mengenal sifat-sifat matriks nol.
4. Peserta didik mengenal sifat-sifat matriks identitas.
5. Peserta didik mampu mengenali ketika dua matriks persegi adalah invers satu sama lain.
6. Peserta didik mampu menentukan apakah suatu matriks dapat dibalik.
7. Peserta didik mampu memecahkan sistem linear dari dua persamaan dalam dua tidak diketahui yang matriks koefisiennya dapat dibalik.
8. Peserta didik mampu membuktikan sifat dasar yang melibatkan matriks yang dapat dibalik.
9. Peserta didik mengenal sifat-sifat matriks transpose dan hubungannya dengan matriks yang dapat dibalik.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Mengetahui sifat aritmatika operasi matriks.
2. Mampu membuktikan sifat aritmatika matrik.
3. Mengenal sifat-sifat matriks nol.
4. Mengenal sifat-sifat matriks identitas.
5. Mampu mengenali ketika dua matriks persegi adalah invers satu sama lain.
6. Mampu menentukan apakah suatu matriks dapat dibalik.
7. Mampu memecahkan sistem linear dari dua persamaan dalam dua tidak diketahui yang matriks koefisiennya dapat dibalik.
8. Mampu membuktikan sifat dasar yang melibatkan matriks yang dapat dibalik.

9. Mengenal sifat-sifat matriks transpose dan hubungannya dengan matriks yang dapat dibalik.

C. Uraian Materi

1.4. Invers: Sifat-sifat Aljabar dari Matriks

Pada bagian ini kita akan membahas beberapa sifat aljabar dari operasi matriks. Kita akan melihat bahwa banyak aturan dasar aritmatika untuk bilangan real berlaku untuk matriks, tetapi kita juga akan melihat bahwa beberapa tidak berlaku.

1.4.1. Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks dan Perkalian Skalar

Teorema-teorema berikut merupakan daftar sifat-sifat aljabar dasar dari operasi matriks.

TEOREMA 1.4.1. Sifat-sifat Matriks Aritmatika
Dengan asumsi bahwa ukuran dari matriks sedemikian rupa sehingga operasi yang ditunjukkan dapat dilakukan, aturan-aturan berikut aritmatika matriks valid.

(a) $A + B = B + A$ (Hukum komutatif penjumlahan)
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Hukum asosiatif penjumlahan)
(c) $A(BC) = (AB)C$ (Hukum asosiatif perkalian)
(d) $A(B + C) = AB + AC$ (Hukum distributif kiri)
(e) $(B + C)A = BA + CA$ (Hukum distributif kanan)
(f) $A(B - C) = AB - AC$
(g) $(B - C)A = BA - CA$
(h) $a(B + C) = aB + aC$
(i) $a(B - C) = aB - aC$
(j) $(a + b)C = aC + bC$
(k) $(a - b)C = aC - bC$
(l) $a(bC) = (ab)C$
(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Untuk membuktikan adanya persamaan dalam teorema ini, kita harus menunjukkan bahwa matriks di sisi kiri memiliki ukuran yang sama dengan yang di sebelah kanan dan bahwa entri yang sesuai pada kedua sisi adalah sama. Sebagian besar bukti mengikuti pola yang sama, jadi kita akan membuktikan bagian *(d)* sebagai sampel. Bukti hukum asosiatif untuk perkalian lebih rumit daripada yang lain dan diuraikan dalam latihan.

Ada tiga cara dasar untuk membuktikan bahwa dua matriks dengan ukuran yang sama adalah sama —membuktikan bahwa entri yang sesuai adalah sama, membuktikan bahwa vektor baris yang sesuai adalah sama, atau membuktikan bahwa vektor kolom yang sesuai adalah sama.

Bukti *(d)* Kita harus menunjukkan bahwa $A(B+C)$ dan $AB+AC$ memiliki ukuran yang sama dan entri yang sesuai adalah sama. Untuk membentuk $A(B+C)$, matriks B dan C harus memiliki ukuran yang sama, misalnya $m \times n$, dan matriks A harus memiliki m kolom, jadi ukurannya harus dalam bentuk $r \times m$. Ini membuat matriks $A(B+C)$ berukuran $r \times n$. Ini mengikuti bahwa $AB+AC$ yang juga merupakan matriks $r \times n$ dan akibatnya, $A(B+C)$ dan $AB+AC$ memiliki ukuran yang sama.

Misalkan $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$, dan $C=[c_{ij}]$. Kita ingin menunjukkan bahwa entri yang sesuai dari $A(B+C)$ dan $AB+AC$adalah sama, yaitu:

$$[A(B+C)]_{ij} = [AB+AC]_{ij}$$

Untuk semua nilai i dan j. Tapi dari definisi penambahan matriks dan perkalian matriks, kita punya:

$$[A(B+C)]_{ij} = a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj}+c_{mj})$$

$$[A(B+C)]_{ij} = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj})$$

$$[A(B+C)]_{ij} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}$$

Catatan Meskipun operasi penambahan matriks dan perkalian matriks didefinisikan untuk pasangan matriks, hukum asosiatif *(b)* dan *(c)* memungkinkan kita untuk menunjukkan jumlah dan produk dari tiga matriks sebagai $A+B+C$ dan ABC tanpa memasukkan tanda kurung. Hal ini dibenarkan oleh fakta bahwa tidak peduli bagaimana tanda kurung disisipkan, hukum asosiatif menjamin bahwa hasil akhir yang sama akan diperoleh. Secara umum, *diberikan jumlah atau produk apapun dari matriks, pasang tanda kurung dapat disisipkan atau dihapus di mana saja dalam ekspresi tanpa mempengaruhi hasil akhir*.

Contoh 1: Asosiatif Perkalian Matriks
Sebagai gambaran hukum asosiatif untuk perkalian matriks, perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

dan

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $(AB)C = A(BC)$, sebagaimana dijamin oleh Teorema 1.4.1 *(c)*.

1.4.2. Sifat-Sifat Perkalian Matriks

Jangan biarkan Teorema 1.4.1 meninabobokan Anda agar percaya bahwa semua hukum aritmatik nyata terbawa ke aritmatika matriks. Sebagai contoh, Anda tahu bahwa dalam aritmatika nyata selalu benar bahwa $ab = ba$, yang disebut hukum komutatif untuk perkalian. Dalam aritmatika matriks, bagaimanapun, kesetaraan *AB* dan *BA* dapat gagal karena tiga kemungkinan alasan:

1) *AB* mungkin saja terdefinisi dan *BA* tidak (sebagai contoh, jika *A* 2×3 dan *B* 3×4).
2) *AB* dan *BA* keduanya terdefinsi, tetapi berbeda ukurannya (sebagai contoh, jika *A* 2×3 dan *B* 3×2).
3) *AB* dan *BA* keduanya terdefinsi, dan sama ukurannya, tetapi kedua matriks mungkin saja berbeda (seperti yang diilustrasikan pada contoh berikut).

Jangan terlalu banyak membaca ke dalam Contoh 2 — itu tidak mengesampingkan kemungkinan bahwa AB dan BA mungkin sama dalam kasus-kasus tertentu, hanya saja mereka tidak sama dalam semua kasus. Jika itu terjadi bahwa $AB + BA$, *maka kita katakan bahwa AB dan BA bolak-balik.*

Contoh 2: Urutan Matrik dalam Perkalian Matriks
Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Perkalian memberikan:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AB \neq BA$.

1.4.3. Matriks Nol

Matrik dengan semua entrinya nol disebut matrik nol. Beberapa contoh matrik nol adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [0]$$

Kita akan menunjukkan matriks nol oleh $\mathit{0}$ kecuali penting untuk menentukan ukurannya, dalam hal ini kita akan menunjukkan matriks nol $m \times n$ oleh $\mathit{0}_{m \times n}$.

Ini menjadi bukti bahwa jika A dan $\mathit{0}$ adalah matriks dengan ukuran yang sama, maka:

$$A + \mathit{0} = \mathit{0} + A = A$$

Dengan demikian, $\mathit{0}$ memainkan peran yang sama dalam persamaan matriks ini bahwa angka 0 bermain dalam persamaan numerik.

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Teorema berikut mencantumkan sifat dasar dari matriks nol. Karena hasilnya harus jelas, kami akan menghilangkan bukti formal.

TEOREMA 1.4.2. Sifat-sifat Matriks Nol

Jika c adalah skalar, dan jika ukuran matriks sedemikian sehingga operasi dapat dilakukan, maka:

(a) $A + \mathit{0} = \mathit{0} + A = A$
(b) $A - \mathit{0} = A$
(c) $A - A = A + (-A) = \mathit{0}$
(d) $\mathit{0}A = \mathit{0}$
(e) Jika $cA = \mathit{0}$ maka $c = \mathit{0}$ atau $A = \mathit{0}$

Karena kita tahu bahwa hukum komutatif aritmatika yang sebenarnya tidak berlaku dalam aritmatika matriks, tidak mengherankan jika ada aturan lain yang gagal juga. Misalnya, perhatikan dua hukum aritmatika berikut:

- Jika $ab = bc$ dan $a \neq 0$ maka $b = c$ (Hukum Pembatalan)
- Jika $ab = 0$ maka paling sedikit terdapat satu faktor sebelah kiri adalah 0.

Dua contoh berikutnya menunjukkan bahwa hukum-hukum ini tidak berlaku secara universal dalam aritmatika matriks.

Contoh 3: Kegagalan Hukum Pembatalan
Perhatikan matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Kami serahkan kepada Anda untuk mengonfirmasi hal tersebut, bahwa:

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Meskipun $A \neq 0$, membatalkan A dari kedua sisi persamaan akan mengarah pada kesimpulan yang salah. Jadi, hukum pembatalan tidak berlaku, secara umum, untuk perkalian matriks.

Contoh 4: Produk Nol dengan Faktor Non-nol
Berikut adalah dua matriks dimana $AB = 0$, tetapi $A \neq 0$ dan $B \neq 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.4. Matriks Identitas

Sebuah matriks persegi dengan angka 1 pada diagonal utama dan nol di tempat lain disebut matriks identitas. Beberapa contohnya adalah:

$$[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks identitas dilambangkan dengan huruf I. Jika penting untuk menekankan ukuran, kami akan menulis I_n untuk matriks identitas $n \times n$.

Untuk menjelaskan peran matriks identitas dalam aritmatika matriks, mari kita pertimbangkan efek mengalikan matriks A 2×3 secara umum pada setiap sisi dengan matriks identitas. Mengalikan di sebelah kanan dengan matriks identitas 3×3 menghasilkan:

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

Dan mengalikan di sisi kiri dengan matriks identitas 2×2 menghasilkan:

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

Hasil yang sama berlaku secara umum; yaitu, jika A adalah matriks $m \times n$ apa pun, maka:

$$AI_n = A \text{ dan } I_mA = A$$

Dengan demikian, matriks identitas memainkan peran yang sama dalam persamaan matriks ini bahwa angka 1 bermain dalam persamaan numerik $a.1 = 1.a = a$.

Seperti yang ditunjukkan oleh teorema berikutnya, matriks identitas muncul secara alami dalam mempelajari bentuk-bentuk eselon baris matriks kuadrat yang tereduksi.

TEOREMA 1.4.3.
Jika R adalah bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A $n \times n$, maka R memiliki deretan nol atau R adalah matriks identitas I_m.

Bukti Anggaplah bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Entah baris terakhir dalam matriks ini seluruhnya terdiri dari nol atau tidak. Jika tidak, matriks tidak mengandung baris nol, dan akibatnya masing-masing baris n memiliki entri *leading 1*. Karena ini *leading 1* terjadi semakin jauh ke kanan saat kita bergerak ke bawah matriks, masing-masing *leading 1* ini harus terjadi pada diagonal utama. Karena entri lain dalam kolom yang sama dengan salah satu dari 1 adalah nol, R haruslah I_n. Jadi, apakah R memiliki barisan nol atau $R = I_n$.

1.4.5. Invers Matriks

Dalam aritmatika nyata setiap bilangan bukan nol memiliki timbal balik $a^{-1}\left(=\frac{1}{a}\right)$ dengan properti:

$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$$

Angka a^{-1} kadang disebut invers perkalian dari a. Tujuan kami berikutnya adalah mengembangkan analog dari hasil ini untuk aritmatika matriks. Untuk tujuan ini kami membuat definisi berikut.

DEFINISI 1.

Jika A adalah matriks persegi, dan jika matriks B dengan ukuran yang sama dapat sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (atau nonsingular) dan B disebut invers A. Jika tidak ada matriks B yang dapat ditemukan, maka A dikatakan tunggal.

Catatan: Hubungan $AB = BA = I$ tidak diubah oleh pertukaran tempat A dan B, jadi jika A dapat dibalik dan B adalah kebalikan dari A, maka benar juga bahwa B dapat dibalik, dan A adalah kebalikan dari B. Jadi, ketika:

$$AB = BA = I$$

kita katakan bahwa A dan B adalah kebalikan satu sama lain.

Contoh 5: Matriks Terbalik

Misal:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dengan demikian, A dan B dapat dibalik dan masing-masing merupakan kebalikan dari yang lain.

Contoh 6: Kelas Matriks Singular

Secara umum, matriks persegi dengan baris atau kolom nol adalah tunggal. Untuk membantu memahami mengapa demikian, perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk membuktikan bahwa A adalah tunggal, kita harus menunjukkan bahwa tidak ada matriks B 3×3 sehingga $AB = BA = I$. Untuk tujuan ini misalkan $c_1, c_2, 0$ menjadi vektor kolom A. Jadi, untuk setiap matriks B 3×3 kita dapat menyatakan produk BA sebagai:

$$BA = B[c_1 \quad c_2 \quad 0] = [Bc_1 \quad Bc_2 \quad 0] \text{ [Rumus (6) dari bagian 1.3]}$$

Kolom nol menunjukkan bahwa $BA \neq I$ dan karenanya A adalah tunggal.

1.4.6. Sifat-Sifat Invers

Adalah masuk akal untuk menanyakan apakah matriks yang dapat dibalik dapat memiliki lebih dari satu invers. Teorema berikutnya menunjukkan bahwa jawabannya tidak — matriks yang dapat dibalik memiliki tepat satu kebalikan.

TEOREMA 1.4.4.

Jika B dan C keduanya invers dari matriks A, maka B = C.

Bukti Karena B adalah kebalikan dari A, kita memiliki $BA = I$. Mengalikan kedua sisi pada sisi kanan dengan C memberikan $(BA)C = IC = C$. Tetapi juga benar bahwa $(BA)C = B(AC) = BI = B$, jadi $C = B$.

Sebagai konsekuensi dari hasil penting ini, kita sekarang dapat berbicara tentang "sang" kebalikan dari matriks yang dapat dibalik. Jika A dapat dibalik, maka kebalikannya akan dilambangkan dengan simbol A^{-1}. Jadi,

$$AA^{-1} = I \text{ dan } A^{-1}A = I \tag{1}$$

Kebalikan (invers) dari A memainkan peran yang sama dalam aritmatika matriks yang timbal balik a^{-1} memainkan dalam hubungan numerik $aa^{-1} = 1$ dan $a^{-1}a = 1$.

Pada bagian berikutnya, kami akan mengembangkan metode untuk menghitung invers matriks yang dapat dibalik dari berbagai ukuran. Untuk saat ini kami memberikan teorema berikut yang menentukan kondisi di mana matriks 2×2 dapat dibalik dan memberikan rumus sederhana untuk inversnya.

TEOREMA 1.4.5.

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dapat dibalik jika dan hanya jika $ad - bc \neq 0$, *dalam hal mana invers diberikan oleh rumus*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2)$$

Kita akan menghilangkan buktinya, karena kita akan mempelajari versi yang lebih umum dari teorema ini nanti. Untuk saat ini, Anda setidaknya harus mengkonfirmasi validitas Formula (2) dengan menunjukkan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

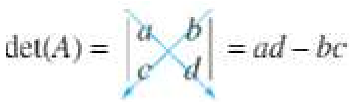
Catatan Sejarah Rumus untuk A^{-1} yang diberikan dalam Teorema 1.4.5 pertama kali muncul (dalam bentuk yang lebih umum) dalam Memo Arthur Cayley 1858 tentang Teori Matriks. Hasil yang lebih umum yang ditemukan Cayley akan dipelajari kemudian.

Kuantitas $ad - bc$ dalam Teorema 1.4.5 disebut determinan (penentu) matriks A 2×2 dan dilambangkan dengan

$$\det(A) = ad - bc$$

atau secara alternatif oleh

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Gambar 1.4. 1. Determinan 2×2

Keterangan Gambar 1.4.1 mengilustrasikan bahwa determinan matriks A 2×2 adalah produk dari entri pada diagonal utama dikurangi produk entri dari diagonal utamanya. Dalam kata-kata, Teorema 1.4.5 menyatakan bahwa matriks A 2×2 dapat dibalik jika dan hanya jika determinannya tidak nol, dan jika dapat dibalik, maka kebalikannya dapat diperoleh dengan mengubah entri diagonalnya, membalik tanda-tanda entri di luarnya, dan mengalikan entri dengan kebalikan dari determinan A.

Contoh 7: Menghitung Invers dari Matriks 2×2

Di setiap bagian, tentukan apakah matriks berikut dapat dibalik. Jika ya, temukan inversenya.

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

Solusi

(a) Determinan dari A adalah $\det(A) = (6)(2) - (1)(5) - 7$, dimana hasilnya tidak nol. Jadi, A dapat dibalik, dan kebalikannya adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Kami serahkan kepada Anda untuk mengonfirmasi bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

(b) Matriks tidak dapat dibalik karena $\det(A) = (-1)(-6) - (2)(3) = 0$.

Contoh 8: Solusi dari Sistem Linear dengan Matriks Invers

Masalah yang muncul dalam banyak aplikasi adalah memecahkan sepasang persamaan bentuk:

$$\begin{aligned} u &= ax + by \\ v &= cx + dy \end{aligned}$$

untuk x dan y dalam bentuk u dan v. Salah satu pendekatannya adalah memperlakukannya sebagai sistem linear dari dua persamaan dalam variabel x dan y dengan menggunakan eliminasi Gauss – Jordan untuk menyelesaikan x dan y. Namun, karena koefisien dari yang tidak diketahui adalah literal daripada numerik, prosedur ini sedikit canggung. Sebagai pendekatan alternatif, mari kita mengganti dua persamaan dengan persamaan matriks tunggal:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Yag mana dapat ditulis ulang sebagai:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Jika kita berasumsi bahwa matriks 2×2 dapat dibalik (yaitu, $ad - bc \neq 0$), maka kita dapat mengalikan di sebelah kiri dengan invers dan menulis ulang persamaan sebagai:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Yang disederhanakan menjadi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Menggunakan teorema 1.4.5, kita dapat menulis ulang persamaan ini sebagai:

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$x = \frac{du - by}{ad - bc}, \quad y = \frac{av - cu}{ad - bc}$$

Teorema berikutnya berkaitan dengan invers produk matriks.

TEOREMA 1.4.6.

Jika A dan B merupakan matriks yang dapat dibalik dengan ukuran yang sama, maka AB dapat dibalik dan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Bukti Kita dapat menetapkan invertibility dan mendapatkan formula yang dinyatakan pada saat yang sama dengan menunjukkan bahwa

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

Tetapi

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

dan juga, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

Meskipun kita tidak akan membuktikannya, hasil ini dapat diperluas menjadi tiga atau lebih faktor:

Produk dari sejumlah matriks yang dapat dibalik dapat dibalik, dan kebalikan dari produk adalah produk dari invers dalam urutan terbalik.

Contoh 9: Invers dari Produk
Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Kami biarkan bagi Anda untuk membuktikan bahwa:

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{7} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Dan juga bahwa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ sebagaimana dijamin oleh Teorema 1.4.6.

1.4.7. Perpangkatan Matriks

Jika A adalah matriks persegi, maka kita mendefinisikan perpangkatan bilangan bulat non-negatif dari A menjadi:

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = AA \ldots A \text{ [}n\text{ faktor]}$$

dan jika A dapat dibalik, maka kita mendefinisikan pangkat bilangan bulat negatif dari A menjadi:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1} \text{ [}n\text{ faktor]}$$

Karena definisi ini sejajar dengan angka-angka riil, memenuhi hukum biasa dari eksponen non-negatif; sebagai contoh,

$$A^T A^S = A^{r+s} \text{ dan } (A^r)^s = A^{rs}$$

Jika suatu produk matriks tunggal, maka setidaknya satu dari faktor harus tunggal. Mengapa?

Selain itu, kita memiliki sifat-sifat dari eksponen negatif berikut.

TEOREMA 1.4.7.
Jika A dapat dibalik dan n adalah bilangan bulat positif, maka:

(a) A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
(b) A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$
(c) kA dapat dibalik untuk setiap skalar k bukan nol dan $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

Kami akan membuktikan bagian *(c)* dan meninggalkan bukti bagian *(a)* dan *(b)* sebagai latihan.

Bukti *(c)* Sifat-sifat *(c)* dan *(m)* dalam Teorema 1.4.1 menyiratkan bahwa

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = k^{-1}(kA)A^{-1} = (k^{-1}k)AA^{-1} = (1)I = I$$

Dan juga, $(k^{-1}A^{-1}) = (kA) = I$. Jadi, kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Contoh 10: Sifat-sifat Eksponen
Misalkan A dan A^{-1} adalah matrik-matrik dalam contoh 9, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^3 = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Juga

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

Jadi, seperti yang diharapkan dari Teorema 1.4.7 (b),

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{(11)(41) - (30)(15)}\begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = (A^{-1})^3$$

Contoh 11: Jumlah Matrik Kuadrat
Dalam aritmatika nyata, di mana kita memiliki hukum komutatif untuk perkalian, kita bisa menulis:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Namun, dalam aritmatika matriks, di mana kita tidak memiliki hukum komutatif untuk perkalian, yang terbaik yang bisa kita lakukan adalah menulis:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Hanya dalam kasus khusus di mana *A* dan *B* bolak-balik (yaitu *AB* = *BA*) bahwa kita dapat melangkah lebih jauh dan menulis:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

1.4.8. Matriks Polinomial

Jika A matrik persegi, misalkan $n \times n$, dan jika:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

Adalah suatu polinom, maka kita definisikan matrik $p(A)$ $n \times n$ menjadi:

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m \quad (3)$$

di mana I adalah matriks identitas $n \times n$; yaitu, $p(A)$ diperoleh dengan mengganti A untuk x dan mengganti konstanta a_0 dengan matriks $a_0 I$. Ekspresi bentuk (3) disebut matriks polinomial dalam A.

Contoh 12: Matrik Polinomial

Tentukan $p(A)$ untuk:

$$p(x) = x^2 - 2x - 3 \text{ dan } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusi

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 2A - 3I \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

atau lebih singkatnya, $p(A) = 0$.

Catatan Ini mengikuti dari fakta bahwa $A^r A^s = A^{r+s} = A^{s+r} = A^s A^r$ adalah perpangkatan matriks persegi bolak balik, dan karena matriks polinomial dalam A dibangun dari perpangkatan A, setiap dua polinomial matriks dalam A juga bolak-balik; yaitu, untuk setiap polinomial p_1 dan p_2 kita memiliki :

$$p_1(A)p_2(A) = p_2(A)p_1(A) \quad (4)$$

1.4.9. Sifat-Sifat Transpose

Teorema berikut mencantumkan sifat-sifat utama dari transpose.

TEOREMA 1.4.8.

Jika ukuran matriks sedemikian sehingga operasi yang dinyatakan dapat dilakukan, maka:

(a) $(A^T)^T = A$
(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(c) $(A-B)^T = A^T - B^T$

(d) $(kA)^T = kA^T$
(e) $(AB)^T = B^T A^T$

Jika Anda ingat bahwa transpose matriks menukar baris dan kolomnya, maka Anda akan memiliki sedikit kesulitan memvisualisasikan hasil dalam bagian *(a)* – *(d)*. Sebagai contoh, bagian *(a)* menyatakan fakta yang jelas bahwa barisan dan kolom yang saling bertukar dua kali meninggalkan matriks tidak berubah; dan bagian *(b)* menyatakan bahwa menambahkan dua matriks dan kemudian mempertukarkan baris dan kolom menghasilkan hasil yang sama sebagai tukar tempat baris dan kolom sebelum menambahkan. Kami akan menghilangkan bukti formal. Bagian *(e)* adalah kurang jelas, tetapi untuk singkatnya kita akan menghilangkan buktinya juga. Hasilnya di bagian itu dapat diperluas menjadi tiga atau lebih faktor dan dinyatakan kembali sebagai:

Transpos produk dari sejumlah matriks adalah produk dari transpos dalam urutan terbalik.

Teorema berikut menetapkan hubungan antara invers dari matriks dan kebalikan dari transposnya.

TEOREMA 1.4.9.
Jika A matrik yang dapat dibalik, maka A^T *juga dapat dibalik dan*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Bukti Kita dapat menetapkan keterbalikan dan mendapatkan rumus pada saat yang sama dengan menunjukkan bahwa:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$$

Tetapi dari bagian (e) teorema 1.4.8 dan fakta bahwa $I^T = I$, kita punya:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

Bukti komplit.
Contoh 13: Invers dari Transpose
Perhatikan matriks 2×2 secara umum dan transposenya:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ dan } A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Karena A dapat dibalik, yaitu determinannya $ad - bc$ adalah bukan nol. Tetapi determinan dari A^T juga $ad - bc$ (silahkan verifikasi), jadi A^T juga dapat dibalik. Ini mengikuti dari Teorema 1.4.5 bahwa:

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{c}{ad-bc} \\ -\dfrac{b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

yang merupakan matriks yang sama yang menghasilkan jika A^{-1} ditransposisikan (verifikasi). Jadi,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

sebagaimana dijamin oleh Teorema 1.4.9.

Latihan 1.4

1. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, a = 4, b = -7$$

   Buktikan bahwa:
   (a) $A + (B + C) = (A + B) + C$
   (b) $(AB)C = A(BC)$
   (c) $(a + b)C = aC + bC$
   (d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Menggunakan matrik dan skalar pada soal nomor satu, verfifikasi bahwa:
   (a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$
   (b) $A(B - C) = AB - AC$
   (c) $(B + C)A = BA + CA$
   (d) $a(bC) = (ab)C$

3. Menggunakan matrik pada soal nomor 1, verifikasi bahwa:
   (a) $(A^T)^T = A$
   (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$
   (c) $(aC)^T = aC^T$
   (d) $(AB)^T = B^T A^T$

Untuk soal nomor 4 – 7 gunakan teorema 1.4.5 untuk menghitung invers dari matrik berikur:

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
5. $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
6. $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
7. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. Tentukan invers dari:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

9. Tentukan invers dari:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

10. Gunakan matrik *A* pada soal nomor 4 untuk memverifikasi bahwa

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

11. Gunakan matrik *B* pada soal nomor 5 untuk memverifikasi bahwa

$$(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$$

12. Gunakan matrik *A* dan *B* pada soal nomor 4 dan 5 untuk memverifikasi bahwa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

13. Gunakan matrik *A*, *B*, dan *C* pada soal nomor 4 – 6 untuk memverifikasi bahwa:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Untuk soal nomor 14 – 17 gunakan informasi berikut untuk menemukan A.

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
15. $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
16. $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
17. $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
18. Misalkan A adalah matrik

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah nilai-nilai berikut ini:

(a) A^3

(b) A^{-3}

(c) $A^2 - 2A + I$

(d) $p(A)$ dimana $p(x) = x - 2$

(e) $p(A)$ dimana $p(x) = 2x^2 - x + 1$

(f) $p(A)$ dimana $p(x) = x^3 - 2x + 4$

19. Ulangi soal nomor 18 untuk matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Ulangi soal nomor 18 untuk matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Ulangi soal nomor 18 untuk matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Untuk soal nomor 22 – 24, misalkan $p_1(x) = x^2 - 9, p_2(x) = x + 3$ dan $p_3(x) = x - 3$. Buktikan bahwa $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$ untuk matrik-matrik yang diberikan.

22. Matrik pada soal nomor 18.
23. Matrik pada soal nomor 21.
24. Sebarang matrik *A* persegi.
25. Tunjukkan bahwa jika $p(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Maka $p(A) = 0$.

26. Tunjukkan bahwa jika $p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ae + be - cd)x - a(be - cd)$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$$

Maka $p(A) = 0$.

27. Perhatikan matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dimana $a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$. Tunjukkan bahwa *A* dapat dibalik dan tentukan inversnya.

28. Tunjukkan bahwa jika matrik persegi memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$ maka $A^{-1} = 3I - A$.
29. (a) Tunjukkan bahwa matrik dengan baris nol tidak memiliki invers.
    (b) Tunjukkan bahwa matrik dengan kolom nol tidak memiliki invers.
30. Asumsikan bahwa semua matrik berukuran $n \times n$ dan dapat dibalik, selesaikan untuk *D*.

$$ABC^TDBA^TC = AB^T$$

31. Asumsikan bahwa semua matrik berukuran $n \times n$ dan dapat dibalik, selesaikan untuk *D*.

$$C^TB^{-1}A^2BAC^{-1}DA^{-2}B^TC^{-2} = C^T$$

32. Jika A adalah matrik persegi dan n adalah bilangan bulat positif, adalah benar bahwa $(A^n)^T = (A^T)^n$? Justifikasi jawaban Anda.
33. Sederhanakan:

$$(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$$

34. Sederhanakan:

$$(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$$

Untuk soal nomor 35 – 37, tentukan apakah A dapat dibalik atau tidak, jika ya, tentukan inversnya. [Petunjuk: selesaikan $AX = I$ untuk X dengan menyamakan entri yang sesuai dari kedua sisinya]

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
37. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
38. Buktikan teorema 1.4.2.

Untuk soal nomor 39 – 42, gunakan metode pada contoh 8 untuk menentukan solusi tunggal dari sistem linier berikut.

39. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$

43. Buktikan bagian *(a)* dari teorema 1.4.1.
44. Buktikan bagian *(c)* dari teorema 1.4.1.
45. Buktikan bagian *(f)* dari teorema 1.4.1.
46. Buktikan bagian *(b)* dari teorema 1.4.2.
47. Buktikan bagian *(c)* dari teorema 1.4.2.

48. Verifikasi Formula 4 dalam teks dengan penghitungan langsung.
49. Buktikan bagian *(d)* dari teorema 1.4.8.
50. Buktikan bagian *(e)* dari teorema 1.4.8.
51. (a) Tunjukkan bahwa jika A dapat dibalik dan $AB = BC$ maka $B = C$:
    (b) Jelaskan mengapa bagian (a) dan contoh 3 tidak saling kontradiksi?
52. Tunjukkan bahwa jika A dapat dibalik dan k adalah skalar bukan nol, maka $(kA)^n = k^n A^n$ untuk semua bilangan bulat n.
53. (a) Tunjukkan bahwa jika A, B dan $A + B$ adalah matriks yang dapat dibalik dengan ukuran yang sama, maka:
$$A(A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1} = I$$
    (b) Apa hasil di bagian (a) memberitahu Anda tentang matriks $A^{-1} + B^{-1}$?
54. Suatu matrik persegi dikatakan idempotent jika $A^2 = A$.
    (a) Tunjukkan bahwa jika A adalah idempotent maka bergitu pula $I - A$.
    (b) Tunjukkan bahwa jika A adalah idempotent maka $2A - I$ dapat dibalik dan merupakan kebalikannya sendiri.
55. Tunjukkan bahwa jika A adalah matrik persegi sedemikian sehingga $A^k = 0$ untuk beberapa bilangan positif k, maka matrik A dapat dibalik dan
$$(1 - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 5

Kegiatan Belajar 5: Matriks Elementer dan Metode Penentuan A^{-1}

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menentukan apakah suatu matrik persegi adalah matrik elementer.
2. Peserta didik dapat menentukan apakah dua buah matrik persegi adalah baris equivalen.
3. Peserta didik dapat menerapkan invers dari operasi baris elementer suatu matrik.
4. Peserta didik dapat menerapkan operasi baris elementer untuk mereduksi matrik persegi ke matrik identitas.
5. Peserta didik dapat memahami hubungan antara pernyataan yang setara dengan invertibilitas matriks persegi (Teorema 1.5.3).
6. Peserta didik dapat menggunakan algoritma inversi untuk menemukan invers matriks yang dapat dibalik.
7. Peserta didik dapat mengekspresikan matriks yang dapat dibalik sebagai produk dari matriks elementer.

Metode Pembelajaran : ***Direct Learning, Pendekatan Saintifik***
Model Pembelajaran : ***Drill, Scaffolding, Problem Based Learning***

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menentukan apakah suatu matrik persegi adalah matrik elementer.
2. Menentukan apakah dua buah matrik persegi adalah baris equivalen.
3. Menerapkan invers dari operasi baris elementer suatu matrik.
4. Menerapkan operasi baris elementer untuk mereduksi matrik persegi ke matrik identitas.
5. Memahami hubungan antara pernyataan yang setara dengan invertibilitas matriks persegi (Teorema 1.5.3).
6. Menggunakan algoritma inversi untuk menemukan invers matriks yang dapat dibalik.

7. Mengekspresikan matriks yang dapat dibalik sebagai produk dari matriks elementer.

C. Uraian Materi

1.5. Matriks Elementer dan Metode Penentuan A^{-1}

Pada bagian ini kita akan mengembangkan suatu algoritma untuk menemukan kebalikan dari matriks, dan kita akan membahas beberapa sifat dasar dari matriks yang dapat dibalik.

Di Bagian 1.1 kita mendefinisikan tiga operasi baris elementer pada matriks A:

1. Kalikan baris dengan konstanta c bukan nol.
2. Tukar dua baris.
3. Tambahkan konstanta c kali satu baris ke baris lainnya.

Seharusnya sudah jelas bahwa jika kita memisalkan B menjadi matriks yang dihasilkan dari A dengan melakukan salah satu operasi dalam daftar ini, maka matriks A dapat dipulihkan dari B dengan melakukan operasi yang sesuai dalam daftar berikut:

1. Kalikan baris yang sama dengan $1/c$.
2. Tukar dua baris yang sama.
3. Jika B dihasilkan dengan menambahkan c kali baris r_1 dari A ke baris r_2, lalu tambahkan $-c$ kali r_1 ke r_2.

Ini mengikuti bahwa jika B diperoleh dari A dengan melakukan urutan operasi baris elementer, maka ada urutan kedua operasi baris elementer, yang ketika diterapkan ke B memulihkan A (Latihan 43). Oleh karena itu, kita membuat definisi berikut.

DEFINISI 1.

Matriks A dan B dikatakan ***baris ekuivalen*** *jika salah satu (maka masing-masing) dapat diperoleh dari yang lain oleh urutan operasi baris elementer.*

Tujuan kita berikutnya adalah untuk menunjukkan bagaimana perkalian matriks dapat digunakan untuk melakukan operasi baris elementer.

DEFINISI 2.

Sebuah matriks disebut ***matriks elementer*** *jika dapat diperoleh dari matriks identitas I_n dengan melakukan operasi baris elementer tunggal.*

Contoh 1: Matrik Elementer dan Operasi Baris

Di bawah ini tercantum empat matriks elementer dan operasi yang menghasilkannya.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Kalikan baris kedua I_2 dengan -3	Tukar baris kedua dan ke empat I_4	Tambah 3 kali baris ketiga I_3 ke baris pertama	Kalikan baris pertama I_3 dengan 1

Teorema berikut, yang buktinya dibiarkan sebagai latihan, menunjukkan bahwa ketika matriks A dikalikan di sebelah kiri oleh matriks elementer E, efeknya adalah melakukan operasi baris elementer pada A, persis seperti proses pembentukan E.

TEOREMA 1.5.1. **Operasi Baris dengan Perkalian Matrik**

Jika matriks elementer E dihasilkan dari melakukan operasi baris tertentu pada I_m dan jika A adalah matriks $m \times n$, maka produk EA adalah matriks yang dihasilkan ketika operasi baris yang sama dilakukan pada A.

Contoh 2: Menggunakan Matrik Elementer

Perhatikan matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan perhatikan matrik elementer berikut:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yang dihasilkan dari penambahan 3 kali baris pertama I_3 ke baris ketiga. Produk EA adalah:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

matrik yang persis sama dengan yang dihasilkan ketika kita menambahkan 3 kali baris pertama A ke baris ketiga.

Teorema 1.5.1 akan menjadi alat yang berguna untuk mengembangkan hasil baru tentang matriks, tetapi sebagai masalah praktis biasanya lebih baik untuk melakukan operasi baris secara langsung.

Kita tahu dari diskusi di awal bagian ini bahwa jika E adalah matriks elementer yang dihasilkan dari melakukan operasi baris elementer pada matriks identitas I, maka ada operasi baris elementer kedua, yang ketika diterapkan ke E, menghasilkan I lagi. Tabel 1 berisi daftar operasi ini. Operasi di sisi kanan tabel disebut **operasi invers** dari operasi yang terkait di sebelah kiri.

Tabel 1. Daftar Operasi Baris

Operasi baris pada I menghasilkan E	Operasi Baris pada E menghasilkan I
Kalikan baris $\boldsymbol{i}$ dengan $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$	Kalikan baris i dengan $1/c$
Tukar baris $\boldsymbol{i}$ dan $\boldsymbol{j}$	Tukar baris i dan j
Tambah $\boldsymbol{c}$ kali baris $\boldsymbol{i}$ ke baris $\boldsymbol{j}$	Tambah $-c$ kali baris i ke baris j

Contoh 3: Operasi Baris dan Operasi Baris Invers

Dalam setiap hal berikut, operasi baris elementer diterapkan pada matriks identitas 2×2 untuk mendapatkan matriks elementer E, kemudian E dikembalikan ke matriks identitas dengan menerapkan operasi baris invers.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Kalikan baris kedua dengan 7}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 7\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Kalikan baris kedua dengan } \frac{1}{7}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tukar baris pertama dengan kedua}]{} \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tukar baris pertama dengan kedua}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tambah 5 kali baris kedua ke baris pertama}]{} \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tambah -5 kali baris kedua ke baris pertama}]{} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Teorema berikutnya adalah hasil kunci tentang keterbalikan matriks elementer. Ini akan menjadi blok bangunan untuk banyak hasil yang mengikuti.

TEOREMA 1.5.2.

Setiap matriks elementer dapat dibalik, dan inversnya juga merupakan matriks elementer.

Bukti Jika E adalah matriks elementer, maka E dihasilkan dengan melakukan operasi baris elementer tunggal pada I. Misalkan E_0 menjadi matriks yang dihasilkan ketika kebalikan dari operasi ini dilakukan pada I. Menerapkan Teorema 1.5.1 dan menggunakan fakta bahwa operasi baris terbalik membatalkan efek satu sama lain, maka diperoleh:

$$E_0 E = I \text{ dan } E E_0 = I$$

Dengan demikian, matriks elementer E_0 adalah kebalikan dari E.

1.5.1. Teorema Ekuivalen

Salah satu tujuan kita saat kita maju melalui teks ini adalah untuk menunjukkan bagaimana ide-ide yang tampak beragam dalam aljabar linear saling terkait. Teorema berikut, yang mengaitkan hasil yang kita peroleh tentang keterbalikan matriks, sistem linear homogen, bentuk eselon baris tereduksi, dan matriks elementer, adalah langkah pertama kita ke arah itu. Saat kita mempelajari topik baru, lebih banyak pernyataan akan ditambahkan ke teorema ini.

TEOREMA 1.5.3. **Pernyataan Ekuivalen**

Jika A adalah matrik $n \times n$ maka pernyataan berikut ini ekuivalen, yaitu semua benar atau semua salah.

(a) A dapat dibalik.

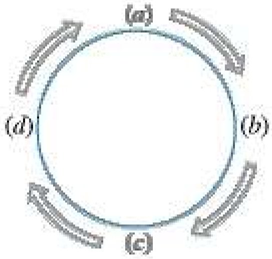
(b) $A\mathbf{x} = 0$ hanya memiliki solusi trivial.

(c) bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n.

(d) A dinyatakan sebagai produk dari matriks-matriks elementer.

Ini mungkin membuat logika dari bukti Teorema 1.5.3 kita lebih jelas dengan menulis implikasinya.

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$$



Hal ini membuktikan secara visual bahwa validitas dari satu pernyataan menyiratkan validitas dari semua yang lain, dan karenanya bahwa kesalahan dari salah satu menyiratkan kesalahan dari yang lain.

Bukti Kita akan membuktikan ekuivalensi dengan membangun rantai implikasi:

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$$

$(a) \Longrightarrow (b)$ Asumsikan A dapat dibalik dan misalkan $\mathbf{x}_0$ menjadi solusi. Kalikan dua sisi dari persamaan dengan matrik A^{-1} menghasilkan $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}0$ atau $(A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = 0$ atau $I\mathbf{x}_0 = 0$ atau $\mathbf{x}_0 = 0$. Jadi, $A\mathbf{x} = 0$ hanya memiliki solusi trivial.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Misalkan $A\mathbf{x} = 0$ menjadi matrik dari sistem:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \qquad (1)$$

dan menganggap bahwa sistem hanya memiliki solusi trivial. Jika kita menyelesaikan dengan eliminasi Gauss-Jordan, maka sistem persamaan yang sesuai dengan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks perluasan menjadi:

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \ddots & \\ & & x_n & = 0 \end{array} \qquad (2)$$

Maka matrik perluasannya:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk (1) dapat direduksi menjadi matrik perluasan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk (2) oleh urutan operasi baris elementer. Jika kita mengabaikan kolom terakhir (semua nol) di masing-masing matriks ini, kita dapat menyimpulkan bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n.

$(c) \implies (d)$ Asumsikan bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n, maka A dapat direduksi ke I_n dengan operasi baris elementer terbatas. Dengan Teorema 1.5.1, masing-masing operasi ini dapat diselesaikan dengan mengalikan ruas kiri dengan matriks elementer yang sesuai. Dengan demikian kita dapat menemukan matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \dots, E_k$ sedemikian sehingga:

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Dengan Teorema 1.5.2, persamaan ini menyatakan A sebagai produk dari matriks elementer.

$(d) \implies (a)$ Jika A adalah produk matriks elementer, maka dari Teorema 1.4.7 dan Teorema 1.5.2, matriks A adalah produk dari matriks yang dapat dibalik dan karenanya dapat dibalik.

1.5.2. Metode untuk Membalik Matriks

Sebagai aplikasi pertama dari Teorema 1.5.3, kita akan mengembangkan prosedur (atau algoritma) yang dapat digunakan untuk memberi tahu apakah matriks yang diberikan dapat dibalik, dan jika demikian, menghasilkan inversnya. Untuk memperoleh algoritma ini, asumsikan saat ini, bahwa A adalah matriks $n \times n$ yang dapat dibalik. Dalam Persamaan (3), matriks elementer mengeksekusi urutan operasi baris yang mereduksi A ke I_n. Jika kita mengalikan kedua sisi persamaan ini di sebelah kanan dengan A^{-1} dan menyederhanakan, kita dapatkan:

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1 I_n$$

Namun persamaan ini memberi tahu kita bahwa urutan operasi baris yang sama mereduksi A ke I_n yang akan mengubah I_n ke A^{-1}. Dengan demikian, kita telah menetapkan hasil sebagai berikut:

Algoritma Invers

Untuk menemukan kebalikan dari matriks A yang dapat dibalik, temukan urutan operasi baris elementer yang mereduksi A ke identitas dan kemudian lakukan urutan operasi yang sama pada I_n untuk memperoleh A^{-1}.

Metode sederhana untuk melaksanakan prosedur ini diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 4: Menggunakan Operasi Baris untuk Menentukan A^{-1}
Tentukan invers dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solusi Kita ingin mereduksi A ke matriks identitas dengan operasi baris dan secara bersamaan menerapkan operasi ini ke I untuk menghasilkan A^{-1}. Untuk mencapai hal ini kita akan menghubungkan matriks identitas ke sisi kanan A, sehingga menghasilkan matriks terpartisi dari bentuk:

$$[A|I]$$

Kemudian kita akan menerapkan operasi baris ke matriks ini hingga sisi kiri dikurangi menjadi I; operasi ini akan mengubah sisi kanan menjadi A^{-1}, sehingga matriks akhir akan memiliki bentuk:

$$[I|A^{-1}]$$

Perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Kita tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua, dan -1 kali baris pertama ke baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Kita tambahkan 2 kali baris kedua ke baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Kita kalikan baris ketiga dengan -1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Kita tambahkan 3 kali baris ketiga ke baris kedua, dan -3 kali baris ketiga ke baris pertama

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$

Kita tambahkan -2 kali baris kedua ke baris pertama

Jadi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Seringkali tidak akan diketahui sebelumnya jika matriks A $n \times n$ yang diberikan dapat dibalik. Namun, jika tidak, maka dengan bagian *(a)* dan *(c)* dari Teorema 1.5.3 akan mustahil untuk mereduksi A ke I_n oleh operasi baris elementer. Ini akan ditandai oleh deretan nol yang muncul di sisi kiri partisi pada beberapa tahap algoritma invers. Jika ini terjadi, maka Anda dapat menghentikan perhitungan dan menyimpulkan bahwa A tidak dapat dibalik.

Contoh 5: Menunjukkan Bahwa Matriks Tidak Dapat Dibalik
Perhatikan matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Menerapkan prosedur pada contoh 4 menghasilkan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow$$

Kita tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua, dan menambahkan baris pertama ke baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \leftarrow$$

Kita tambahkan baris kedua ke baris ketiga

Karena kita telah mendapatkan deretan nol di sisi kiri, maka A tidak dapat dibalik.

Contoh 6: Menganalisis Sistem Homogen
Gunakan Teorema 1.5.3 untuk menentukan apakah sistem homogen yang diberikan memiliki solusi nontrivial.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi

Dari bagian (a) dan (b) dari Teorema 1.5.3 sistem linear homogen hanya memiliki solusi trivial jika dan hanya jika koefisien matriks dapat dibalik. Dari Contoh 4 dan Contoh 5 koefisien matriks dari sistem (a) dapat dibalik dan sistem (b) tidak. Dengan demikian, sistem (a) hanya memiliki solusi trivial sedangkan sistem (b) memiliki solusi tidak trivial.

Latihan 1.5

1. Tentukan yang manakah matrik-matrik berikut yang merupakan matrik elementer.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan yang manakah matrik-matrik berikut yang merupakan matrik elementer.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Cari operasi baris dan matriks elementer yang sesuai yang akan mengembalikan matriks elementer yang diberikan ke matriks identitas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Cari operasi baris dan matriks elementer yang sesuai yang akan mengembalikan matriks elementer yang diberikan ke matriks identitas.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Di setiap bagian, diberikan sebuah matriks elementer E dan matriks A. Tuliskan operasi baris yang terkait dengan E dan tunjukkan bahwa hasil EA produk dari penerapan operasi baris ke A.

   (a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

   (b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. Di setiap bagian, diberikan sebuah matriks elementer E dan matriks A. Tuliskan operasi baris yang terkait dengan E dan tunjukkan bahwa hasil EA produk dari penerapan operasi baris ke A.

   (a) $E = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

   (b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 7 – 8, gunakan matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Tentukan matrik elementer *E* yang memenuhi persamaan berikut:
   (a) $EA = B$
   (b) $EB = A$
   (c) $EA = C$
   (d) $EC = A$

8. Tentukan matrik elementer *E* yang memenuhi persamaan berikut:
   (a) $EB = D$
   (b) $ED = B$
   (c) $EB = F$
   (d) $EF = B$

Untuk soal nomor 9 – 24, gunakan algoritma invers untuk menentukan invers dari matrik yang diberikan, jika invernya ada.

9. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 25 – 26, tentukan invers dari setiap matrik 4×4 berikut, dimana k_1, k_2, k_3, k_4, dan k adalah bukan nol.

25. (a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 27 – 28, tentukan semua nilai c, jika ada, yang matriks pembaliknya dapat dibalik.

27. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

Untuk nomor soal 29 – 32, tuliskan matriks yang diberikan sebagai produk dari matriks elementer.

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk nomor soal 33 – 36, tuliskan matriks yang diberikan sebagai produk dari matriks elementer.

33. Matrik pada soal nomor 29.
34. Matrik pada soal nomor 30.
35. Matrik pada soal nomor 31.
36. Matrik pada soal nomor 32.

Untuk soal nomor 37 – 38, tunjukkan bahwa matriks *A* dan *B* yang diberikan adalah baris ekuivalen, dan temukan urutan operasi baris elementer yang menghasilkan *B* dari *A*.

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

39. Buktikan bahwa jika:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

adalah matrik elementer, maka paling sedikit satu entri pada baris ketiga harus bernilai nol.

40. Buktikan bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

Tidak dapat dibalik untuk setiap nilai-nilai entri.

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 6

Kegiatan Belajar 6: Sistem Linier Lanjut dan Matriks Invers

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menentukan apakah sistem persamaan linear tidak memiliki solusi, tepat satu solusi, atau banyak solusi tanpa batas.
2. Peserta didik dapat menyelesaikan sistem linear dengan membalikkan matriks koefisiennya.
3. Peserta didik dapat menyelesaikan sistem linear berganda dengan matriks koefisien yang sama secara bersamaan.
4. Peserta didik dapat mengenal kondisi tambahan dari keterbalikan yang dinyatakan dalam Teorema Ekuivalen.

Metode Pembelajaran : ***Direct Learning, Pendekatan Saintifik***
Model Pembelajaran : ***Drill, Scaffolding, Problem Based Learning***

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menentukan apakah sistem persamaan linear tidak memiliki solusi, tepat satu solusi, atau banyak solusi tanpa batas.
2. Menyelesaikan sistem linear dengan membalikkan matriks koefisiennya.
3. Menyelesaikan sistem linear berganda dengan matriks koefisien yang sama secara bersamaan.
4. Mengenal kondisi tambahan dari keterbalikan yang dinyatakan dalam Teorema Ekuivalen.

C. Uraian Materi

1.6. Sistem Linier Lanjut dan Matriks Invers

Pada bagian ini kita akan menunjukkan bagaimana invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem linear dan kita akan mengembangkan beberapa hasil lebih lanjut tentang matriks yang memiliki invers.

1.6.1. Banyak Solusi dari Sistem Linier

Dalam Bagian 1.1 kita membuat pernyataan (berdasarkan Gambar 1.1.1 dan 1.1.2) bahwa setiap sistem linier mungkin saja tidak memiliki solusi, memiliki satu solusi, atau memiliki banyak solusi. Kita sekarang berada dalam posisi untuk membuktikan hasil fundamental ini.

TEOREMA 1.6.1.

Suatu sistem persamaan linear memiliki nol, satu, atau banyak solusi tak terbatas. Tidak ada kemungkinan lain.

Bukti Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem persamaan linear, maka salah satu dari hal berikut ini benar: (a) sistem tidak memiliki solusi, (b) sistem memiliki tepat satu solusi, atau (c) sistem memiliki lebih dari satu solusi. Buktinya akan lengkap jika kita dapat menunjukkan bahwa sistem memiliki banyak solusi tak terbatas dalam kasus (c).

Asumsikan bahwa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki lebih dari satu solusi, dan misalkan $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, di mana $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ adalah dua solusi yang berbeda. Karena $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ berbeda, matriks $\mathbf{x}_0$ tidak nol; bahkan,

$$A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = 0$$

Jika sekarang kita misalkan k suatu skalar, maka

$$A(\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + A(k\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + k(A\mathbf{x}_0) = \mathbf{b} + k0 = \mathbf{b} + 0 = \mathbf{b}$$

Tetapi ini mengatakan bahwa $\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0$ adalah solusi dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Karena $\mathbf{x}_0$ tidak nol dan ada banyak pilihan untuk k, sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki banyak solusi tanpa batas.

1.6.2. Penyelesaian Sistem Linier Dengan Invers Matrik

Sejauh ini kita telah mempelajari dua prosedur untuk menyelesaikan sistem linear - eliminasi Gauss-Jordan dan eliminasi Gauss. Teorema berikut menyediakan rumus aktual untuk solusi sistem linear n persamaan dalam n tidak diketahui dalam kasus di mana matriks koefisien dapat dibalik.

TEOREMA 1.6.2.

Jika A adalah matriks $n \times n$ yang memiliki invers, maka untuk setiap matriks $\mathbf{b}$ $n \times 1$, sistem persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki tepat satu solusi, yaitu, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Bukti Karena $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, berarti $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ adalah solusi dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Untuk menunjukkan bahwa ini adalah satu-satunya solusi, kita akan mengasumsikan bahwa $\mathbf{x}_0$ adalah solusi sebarang dan kemudian menunjukkan bahwa $\mathbf{x}_0$ harus menjadi solusi $A^{-1}\mathbf{b}$.

Jika $\mathbf{x}_0$ solusi dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ maka $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Mengalikan kedua ruas dari persamaan ini dengan A^{-1}, kita peroleh $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b}$.

Contoh 1: Solusi Sistem Linier Menggunakan A^{-1}
Perhatikan sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Dalam matrik bentuk sistem ini dapat ditulis sebagai $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dimana:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Pada contoh 4 pembahasan sebelumnya, kita membutkikan bahwa A dapat dibalik dan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan teorema 1.6.2, solusi dari sistem adalah:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

atau $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$

Perlu diingat bahwa metode pada Contoh 1 hanya berlaku ketika sistem memiliki banyak persamaan yang tidak diketahui dan matriks koefisien memiliki invers.

1.6.3. Sistem Linier Dengan Koefisien Matrik Secara Umum

Seringkali, seseorang fokus dengan pemecahan suatu sistem secara berurutan, seperti:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \qquad \ldots, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$$

Masing-masing memiliki koefisien matriks A kuadrat yang sama. Jika A dapat dibalik maka solusinya:

$$\mathbf{x}_1 = A^{-1}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{x}_2 = A^{-1}\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{x}_3 = A^{-1}\mathbf{b}_3, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_k = A^{-1}\mathbf{b}_k$$

Yang dapat diperoleh dengan satu matriks inversi dan perkalian matriks k. Cara yang efisien untuk melakukan ini adalah dengan membentuk matriks yang dipartisi:

$$[A|\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2|\dots|\mathbf{b}_k|] \tag{1}$$

di mana matriks koefisien A "diperluas" oleh semua k dari matriks $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, ... , $\mathbf{b}_k$, dan kemudian mereduksi 1 menjadi bentuk eselon baris tereduksi oleh eliminasi Gauss-Jordan. Dengan cara ini kita bisa menyelesaikan semua sistem k sekaligus. Metode ini memiliki keuntungan tambahan yang berlaku bahkan ketika A tidak memiliki invers.

Contoh 2: Menyelesaikan Dua Sistem Linier Sekaligus
Selesaikan sistem-sistem berikut:

(a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solusi Kedua sistem memiliki koefisien matriks yang sama. Jika kita menambahkan matriks koefisien ini dengan kolom konstanta di sisi kanan sistem ini, kita dapatkan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

Mereduksi matrik ini ke bentuk eselon baris tereduksi diperoleh (silahkan diverifikasi):

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Ini mengikuti dari dua kolom terakhir bahwa solusi sistem (a) adalah $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$ dan solusi sistem (b) adalah $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$.

1.6.4. Sifat-sifat Matrik Invers

Hingga kini, untuk menunjukkan bahwa matriks A memiliki invers, perlu ditemukan matriks B $n \times n$ sedemikian sehingga:

$$AB = I \text{ dan } BA = I$$

Teorema berikutnya menunjukkan bahwa jika kita menghasilkan matriks B memenuhi kondisi yang baik, maka kondisi lainnya berlaku secara otomatis.

TEOREMA 1.6.3.
Misalkan A matrik persegi.
(a) Jika B matrik persegi yang memenuhi $BA = I$, maka $B = A^{-1}$
(b) Jika B matrik persegi yang memenuhi $AB = I$, maka $B = A^{-1}$

Kita akan membuktikan bagian *(a)* dan meninggalkan bukti bagian *(b)* sebagai latihan.

Bukti *(a)* Asumsikan bahwa $BA = I$. Jika kita dapat menunjukkan bawa A memiliki invers, bukti dapat diselesaikan dengan mengalikan $BA = I$ pada kedua sisi dengan A^{-1} untuk memperoleh:

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \text{ atau } BI = IA^{-1} \text{ atau } B = A^{-1}$$

Untuk menunjukkan bahwa A memiliki invers, cukuplah untuk menunjukkan bahwa sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hanya memiliki solusi trivial (lihat Teorema 1.5.3). Misalkan $\mathbf{x}_0$ menjadi solusi dari sistem ini. Jika kita mengalikan kedua sisi $A\mathbf{x}_0 = 0$ di sebelah kiri oleh B, kita memperoleh $BA\mathbf{x}_0 = B0$ atau $I\mathbf{x}_0 = 0$ atau $\mathbf{x}_0 = 0$. Dengan demikian, sistem persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hanya memiliki solusi trivial.

1.6.5. Teorema Ekuivalen

Kita sekarang berada dalam posisi untuk menambahkan dua pernyataan lagi yang ke empat yang diberikan dalam Teorema 1.5.3.

TEOREMA 1.6.4. Pernyataan Ekuivalen
Jika A adalah matrik $n \times n$, maka yang berikut ini adalah ekuivalen.
(a) A dapat dibalik.
(b) $A\mathbf{x} = 0$ *hanya memiliki solusi trivial.*
(c) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n.
(d) A dapat diekspresikan sebagai produk dari matrik elementer.
(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *konsisten untuk setiap matrik* $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *memiliki tepat satu solusi untuk setiap matrik* $\mathbf{b}$ $n \times 1$.

Ini mengikuti dari ekuivalen bagian *(e)* dan *(f)* bahwa jika Anda dapat menunjukkan bahwa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki setidaknya satu solusi untuk setiap matriks $\mathbf{b}$ $n \times 1$, maka Anda dapat menyimpulkan bahwa ia memiliki tepat satu solusi untuk setiap matriks $\mathbf{b}$ $n \times 1$.

Bukti Karena kita sudah membuktikan Teorema 1.5.3, bahwa *(a), (b), (c),* dan *(d)* adalah ekuivalen, itu akan cukup untuk membuktikan bahwa

$$(a) \Longrightarrow (f) \Longrightarrow (e) \Longrightarrow (a)$$

$(a) \Longrightarrow (f)$ Ini sudah dibuktikan dalam Teorema 1.6.2.

$(f) \Longrightarrow (e)$ Hal ini terbukti dengan sendirinya, karena jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki tepat satu solusi untuk setiap matriks $\mathbf{b}$ $n \times 1$, maka $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten untuk setiap matriks $\mathbf{b}$ $n \times 1$.

$(e) \Longrightarrow (a)$ Jika sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten untuk setiap matriks $\mathbf{b}$ $n \times 1$, maka, khususnya, ini adalah untuk sistem:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ menjadi solusi dari sistem masing-masing, dan mari kita bentuk matriks C $n \times n$ yang memiliki solusi ini sebagai kolom. Jadi C memiliki bentuk:

$$C = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \ldots | \mathbf{x}_n]$$

Sebagaimana dibahas dalam Bagian 1.3, kolom berturut-turut dari produk AC akan menjadi:

$$AC = [A\mathbf{x}_1 | A\mathbf{x}_2 | \ldots | A\mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = I$$

Dengan bagian *(b)* dari Teorema 1.6.3, berarti bahwa $C = A^{-1}$. Dengan demikian, A dapat dibalik.

Kita tahu dari pekerjaan sebelumnya bahwa faktor matriks yang dapat dibalik menghasilkan produk yang dapat dibalik. Sebaliknya, teorema berikut Ini menunjukkan bahwa jika produk matriks kuadrat dapat dibalik, maka faktor-faktor itu sendiri harus dapat dibalik.

TEOREMA 1.6.5.

Misalkan A dan B adalah matrik persegi yang berukuran sama. Jika AB dapat dibalik, maka A dan B seharusnya juga dapat dibalik.

Di pekerjaan-pekerjaan kita selanjutnya masalah mendasar berikut akan sering terjadi dalam berbagai konteks.

Masalah Mendasar

Misalkan A matrik berukuran tetap $m \times n$. Temukan semua matriks $\mathbf{b}$ $m \times 1$ *sehingga sistem persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten.*

Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, Teorema 1.6.2 sepenuhnya menyelesaikan masalah ini dengan menyatakan bahwa untuk setiap matriks $\mathbf{b}$ $m \times 1$, sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki solusi unik $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Jika A tidak persegi, atau jika A persegi tetapi tidak dapat dibalik, maka Teorema 1.6.2 tidak berlaku. Dalam kasus ini, matriks $\mathbf{b}$ harus memenuhi syarat-syarat tertentu agar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten. Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana metode Bagian 1.2 dapat digunakan untuk menentukan kondisi tersebut.

Contoh 3: Menentukan Konsistensi Dengan Eliminasi

Kondisi seperti apa yang harus dipenuhi $b_1, b_2,$ dan b_3 untuk sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + 3x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

agar konsisten?

Solusi Matrik perluasannya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

yang dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

-1 kali baris pertama ditambahkan ke baris kedua dan -2 kali baris pertama ditambahkan ke baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris kedua dikalikan dengan -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Baris kedua ditambahkan ke baris ketiga

Sekarang terbukti dari baris ketiga dalam matriks bahwa sistem memiliki solusi jika dan hanya jika b_1, b_2, dan b_3 memenuhi syarat:

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \text{ atau } b_3 = b_1 + b_2$$

Untuk menyatakan kondisi ini dengan cara lain, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten jika dan hanya jika $\mathbf{b}$ adalah matriks bentuk:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

dimana b_1 dan b_2 adalah sebarang.

Contoh 4: Menentukan Konsistensi Dengan Eliminasi

Kondisi seperti apa yang harus dipenuhi b_1, b_2, dan b_3 untuk sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

agar konsisten?

Solusi Matrik perluasannya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reduksi bentuk ini ke bentuk eselon baris tereduksi menghasilkan (silahkan diverfikasi):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dalam hal ini tidak ada batasan pada b_1, b_2, dan b_3, sehingga sistem memiliki solusi unik (tunggal):

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{3}$$

Untuk semua nilai b_1, b_2, dan b_3.

Apakah hasil dalam Contoh 4 memberitahu Anda tentang koefisien matriks dari sistem?

Latihan 1.6

Untuk soal nomor 1 – 8, selesaikan sistem dengan membalikkan koefisien matriks dan menggunakan Teorema 1.6.2.

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Untuk soal nomor 9 – 12, selesaikan sistem linear bersama dengan mereduksi matriks perluasan yang tepat.

9. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$
   (i) $b_1 = 1, \quad b_2 = 4$
   (ii) $b_1 = -2, \quad b_2 = 5$

10. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0$

(ii) $b_1 = -3, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = -5$

11. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1$

(ii) $b_1 = -4, \quad b_2 = 6$

(iii) $b_1 = -1, \quad b_2 = 3$

(iv) $b_1 = -5, \quad b_2 = 1$

12. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -1$

(ii) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1$

(iii) $b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 0$

Untuk soal nomor 13 – 17, tentukan kondisi pada b_i, jika ada, untuk menjamin bahwa sistem linier konsisten.

13. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_2 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_3 \end{aligned}$

18. Perhatikan matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Buktikan bahwa persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ dapat ditulis sebagai $(A - I)\mathbf{x} = 0$ dan gunakan hasilnya untuk menyelesaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ untuk $\mathbf{x}$.

(b) Selesaikan $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$

Untuk soal nomor 19 – 20, selesaikan persamaan matrik berikut untuk X.

19. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

21. Misalkan $A\mathbf{x} = 0$ menjadi sistem homogen dari *n* persamaan linear dalam *n* tidak diketahui yang hanya memiliki solusi trivial. Tunjukkan bahwa jika *k* adalah bilangan bulat positif, maka sistem $A^k\mathbf{x} = 0$ juga hanya memiliki solusi trivial.

22. Misalkan $A\mathbf{x} = 0$ menjadi sistem homogen *n* persamaan linear dalam *n* tidak diketahui, dan misalkan Q menjadi matriks $n \times n$ yang dapat dibalik. Tunjukkan bahwa $A\mathbf{x} = 0$ hanya memiliki solusi trivial jika dan hanya jika $(QA)\mathbf{x} = 0$ hanya memiliki solusi trivial.

23. Misalkan $A\mathbf{x} = 0$ menjadi sistem persamaan linear yang konsisten, dan misalkan $\mathbf{x}_1$ menjadi solusi tetap. Tunjukkan bahwa setiap solusi untuk sistem dapat ditulis dalam bentuk $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, di mana $\mathbf{x}_0$ adalah solusi untuk $A\mathbf{x} = 0$. Tunjukkan juga bahwa setiap matriks dalam bentuk ini adalah solusi.

24. Gunakan bagian *(a)* dari Teorema 1.6.3 untuk membuktikan bagian *(b)*.

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 7

Kegiatan Belajar 7: Matriks Diagonal, Triangular dan Simetris

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menentukan apakah matriks diagonal dapat dibalik tanpa perhitungan.
2. Peserta didik dapat menghitung produk matriks yang melibatkan matriks diagonal dengan inspeksi.
3. Peserta didik dapat menentukan apakah suatu matriks berbentuk segitiga.
4. Peserta didik dapat memahami bagaimana operasi transpose mempengaruhi matriks diagonal dan segitiga.
5. Peserta didik dapat memahami bagaimana invers mempengaruhi matriks diagonal dan segitiga.
6. Peserta didik dapat menentukan apakah suatu matriks adalah matriks simetris.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menentukan apakah matriks diagonal dapat dibalik tanpa perhitungan.
2. Menghitung produk matriks yang melibatkan matriks diagonal dengan inspeksi.
3. Menentukan apakah suatu matriks berbentuk segitiga.
4. Memahami bagaimana operasi transpose mempengaruhi matriks diagonal dan segitiga.
5. Memahami bagaimana invers mempengaruhi matriks diagonal dan segitiga.
6. Menentukan apakah suatu matriks adalah matriks simetris.

C. Uraian Materi

1.7. Matriks Diagonal, Segitiga dan Simetris

Pada bagian ini kita akan membahas matriks yang memiliki berbagai bentuk khusus. Matriks ini muncul dalam berbagai aplikasi dan juga akan memainkan peran penting dalam pekerjaan kita berikutnya.

1.7.1. Matrik Diagonal

Sebuah matriks persegi di mana semua entri di luar dari diagonal utamanya adalah nol disebut matriks diagonal. Berikut beberapa contohnya:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Secara umum, matrik diagonal $D\ n \times n$ dapat ditulis sebagai:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Sebuah matriks diagonal dapat dibalik jika dan hanya jika semua entri diagonalnya tidak nol; dalam hal ini invers dari 1 adalah

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Konfirmasi Formula 2 dengan menunjukkan bahwa:

$$DD^{-1} = D^{-1}D = I$$

Perpangkatan matriks diagonal mudah dikomputasi; kami biarkan bagi Anda untuk memverifikasi bahwa jika D adalah matriks diagonal 1 dan k adalah bilangan bulat positif, maka:

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix} \tag{3}$$

Contoh 1: Invers dan Pangkat Matrik Diagonal

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, A^{5}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -243 & 0\\ 0 & 0 & 32\end{bmatrix}, A^{-5}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{243} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{32}\end{bmatrix}$$

Produk matriks yang melibatkan faktor diagonal sangat mudah untuk dihitung. Sebagai contoh,

$$\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} & d_1a_{14}\\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} & d_2a_{24}\\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} & d_3a_{34}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{42}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1a_{11} & d_2a_{12} & d_3a_{13}\\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & d_3a_{23}\\ d_1a_{31} & d_2a_{32} & d_3a_{33}\\ d_1a_{41} & d_2a_{42} & d_3a_{42}\end{bmatrix}$$

Dalam kata-kata, untuk mengalikan matriks *A* di ruas kiri dengan matriks diagonal *D*, salah satu caranya dapat mengalikan baris *A* secara berurutan dengan entri diagonal *D* yang berurutan, dan untuk mengalikan matrik *A* pada ruas kanan oleh matrik diagonal *D*, salah satu caranya dapat mengalikan kolom *A* berturut-turut dengan entri diagonal *D* berturut-turut.

1.7.2. Matrik Segitiga

Sebuah matriks persegi di mana semua entri di atas diagonal utama adalah nol disebut matrik segitiga bawah, dan matriks persegi di mana semua entri di bawah diagonal utama adalah nol disebut matrik segitiga atas. Sebuah matriks yang segitiga atas atau segitiga bawah disebut matrik segitiga.

Contoh 2: Matrik Segitiga Atas dan Bawah

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

Matrik Segitiga Atas 4×4 secara umum

Matrik Segitiga Bawah 4×4 secara umum

Catatan Amati bahwa matriks diagonal keduanya adalah matrik segitiga atas dan segitiga bawah karena memiliki nol di bawah dan di atas diagonal utama. Amati juga bahwa matriks persegi dalam bentuk eselon baris adalah matrik segitiga atas karena memiliki nol di bawah diagonal utama.

1.7.3. Sifat-Sifat Matrik Segitiga

Contoh 2 memberi ilustrasi empat fakta berikut tentang matrik segitiga bahwa kita akan menyatakannya tanpa bukti formal.

- Matrik persegi $A = [a_{ij}]$ adalah matrik segitiga atas jika dan hanya jika semua entri sebelah kiri dari diagonal utama dalah nol, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i > j$ (Gambar 1.7.1).
- Matrik persegi $A = [a_{ij}]$ adalah matrik segitiga bawah jika dan hanya jika semua entri sebelah kanan dari diagonal utama adalah nol, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i < j$ (Gambar 1.7.1).
- Matrik persegi $A = [a_{ij}]$ adalah matrik segitiga atas jika dan hanya jika baris ke i dimulai dengan paling tidak $i - 1$ nol untuk setiap i.
- Matrik persegi $A = [a_{ij}]$ adalah matrik segitiga bawah jika dan hanya jika kolom ke j dimulai dari setidaknya $j - 1$ nol untuk setiap j.

Gambar 1.7. 1. Pseudo Matrik Segitiga

TEOREMA 1.7.1.

(a) Transpose matriks segitiga bawah adalah matrik segitiga atas, dan transpose matriks segitiga atas adalah matrik segitiga bawah.

(b) Produk matriks segitiga bawah adalah matrik segitiga bawah, dan produk matriks segitiga atas adalah matrik segitiga atas.

(c) Matriks segitiga dapat dibalik jika dan hanya jika entri diagonalnya tidak nol.

(d) Invers matriks segitiga bawah yang dapat dibalik adalah matrik segitiga bawah, dan kebalikan dari matriks segitiga atas yang dapat dibalik adalah matrik segitiga atas.

Bagian *(a)* adalah bukti dari fakta bahwa mentransformasikan matriks persegi dapat dicapai dengan merefleksikan entri dari diagonal utama; kita menghilangkan bukti formal. Kita akan membuktikan *(b)*, tetapi kita akan menunda bukti *(c)* dan *(d)* ke bab berikutnya, di mana kita akan memiliki alat untuk membuktikan hasil tersebut secara lebih efisien.

Bukti *(b)* Kita akan membuktikan hasil untuk matriks segitiga bawah; bukti untuk matriks segitiga atas adalah serupa. Misal $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matrik segitiga bawah $n \times n$, dan misalkan $C = [c_{ij}]$ adalah produk

$C = AB$. Kita dapat membuktikan bahwa C adalah matrik segitiga bawah dengan menunjukkan bahwa $c_{ij} = 0$ untuk setiap $i < j$. Tapi dari definisi perkalian matriks,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i1}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Jika berasumsi bahwa $i < j$, maka terminologi dalam ekspresi ini dapat dikelompokkan sebagai berikut:

$$c_{ij} = \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i(j-i)}b_{(j-1)j}}_{\substack{\text{Terminologi dimana} \\ \text{banyaknya baris } b \text{ lebih} \\ \text{sedikit dari pada} \\ \text{banyaknya kolom } b}} + \underbrace{a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}}_{\substack{\text{Terminologi dimana} \\ \text{banyaknya baris } a \text{ lebih} \\ \text{sedikit dari pada} \\ \text{banyaknya kolom } a}}$$

Dalam pengelompokan pertama, semua faktor b adalah nol karena B adalah matrik segitiga bawah, dan dalam pengelompokan kedua semua faktor a adalah nol karena A adalah matrik segitiga bawah. Jadi, $c_{ij} = 0$, yang mana bagian yang ingin kita buktikan.

Contoh 3: Perhitungan dengan Matrik Segitiga
Perhatikan matrik segitiga atas berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ini mengikuti dari bagian *(c)* dari Teorema 1.7.1 bahwa matriks A dapat dibalikkan tetapi matriks B tidak dapat dibalik. Selain itu, teorema juga memberi tahu kita bahwa A^{-1}, AB dan BA haruslah matrik segitiga atas. Kami serahkan kepada Anda untuk mengkonfirmasi ketiga pernyataan berikut dengan menunjukkan bahwa:

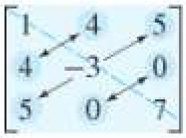
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1.7.4. Matrik Simetris

DEFINISI 1.

Matriks persegi A dikatakan simetris jika $A = A^T$.

Sangat mudah untuk mengenali matriks simetris dengan inspeksi (pengecekan): Entri pada diagonal utama tidak memiliki batasan, tetapi gambar cermin dari entri di seluruh diagonal utama harus sama. Berikut ini gambar menggunakan matriks kedua dalam Contoh 4:



Semua matriks diagonal, seperti matriks ketiga dalam Contoh 4, jelas memiliki sifat ini.

Contoh 4: Matrik Simetris

Matriks berikut simetris, karena masing-masing sama dengan transposnya sendiri (silahkan verifikasi).

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Keterangan Ini mengikuti dari Formula 11 Bagian 1.3 bahwa matriks persegi simetris jika dan hanya jika:

$$(A)_{ij} = (A)_{ji} \tag{4}$$

Untuk semua nilai i dan j.

Teorema berikut mencantumkan sifat aljabar utama matriks simetris. Buktinya adalah konsekuensi langsung dari Teorema 1.4.8 dan dihilangkan.

TEOREMA 1.7.2.

Jika A dan B adalah matrik simetris dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah suatu skalar, maka:

(a) A^T adalah simetris.

(b) $A + B$ dan $A - B$ adalah simetris.

(c) kA adalah simetris.

Tidaklah benar, secara umum, bahwa produk dari matriks simetrik adalah simetris. Untuk melihat mengapa demikian, misalkan A dan B menjadi matriks simetris dengan ukuran yang sama. Kemudian mengikuti dari bagian *(e)* dari Teorema 1.4.8 dan ke-simetri-an A dan B bahwa:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

Jadi, $(AB)^T = BA$ jika dan hanya jika $AB = BA$, yaitu jika dan hanya jika A dan B bolak-balik (komutatif). Singkatnya, kita memiliki hasil sebagai berikut:

TEOREMA 1.7.3.

Produk dari dua matrik simetris adalah simetris jika dan hanya jika matrik-matrik tersebut bolak-balik (komutatif).

Contoh 5: Produk dari Matrik Simetris

Yang pertama dari persamaan berikut menunjukkan produk matriks simetris yang tidak simetris, dan yang kedua menunjukkan produk matriks simetris yang simetris. Kita menyimpulkan bahwa faktor-faktor dalam persamaan pertama tidak bolak-balik (komutatif), tetapi dalam persamaan kedua bolak-balik (komutatif). Kami menyerahkan kepada Anda untuk memverifikasi bahwa ini benar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.7.5. Keterbalikan dari Matrik Simetris

Secara umum, matriks simetris tidak perlu dibalik. Misalnya, matriks diagonal dengan nol pada diagonal utama simetris tetapi tidak dapat dibalik. Namun, teorema berikut menunjukkan bahwa jika matriks simetris kebetulan dapat dibalik, maka inversnya juga harus simetris.

TEOREMA 1.7.4.

Jika A adalah matrik simetris yang dapat dibalik, maka A^{-1} adalah simetris.

Bukti Asumsikan bahwa A adalah simetris dan dapat dibalik. Dari Teorema 1.4.9 dan fakta bahwa $A = A^T$, kita punya:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

Sehingga membuktikan bahwa A^{-1} adalah simetris.

1.7.6. Produk AA^T dan A^TA

Produk matrik dari bentuk AA^T dan A^TA muncul dalam penerapan yang bervariasi. Jika adalan matrik $m \times n$, maka A^T adalah matrik $n \times m$, jadi produk AA^T dan A^TA keduanya adalah matrik persegi – matrik AA^T memiliki ukuran $m \times m$ dan matrik A^TA memiliki ukuran $n \times n$. Sehingga produknya selalu simetris karena:

$$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T \text{ dan } (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

Contoh 6: Produk dari Matrik dan Transposenya adalah Simetris

Misalkan A matrik 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa $A^T A$ dan AA^T adalah simetris seperti yang diharapkan.

Nanti dalam teks ini, kita akan memperoleh kondisi umum pada A di mana AA^T dan $A^T A$ dapat dibalik. Namun, dalam kasus khusus di mana A berbentuk persegi, kita memiliki hasil sebagai berikut:

TEOREMA 1.7.4.
Jika A adalah matrik yang dapat dibalik, maka AA^T dan $A^T A$ juga dapat dibalik.

Bukti Karena A dapat dibalik, begitu pula dengan A^T dengan Teorema 1.4.9. Jadi, A^T dan $A^T A$ dapat dibalik, karena keduanya produk dari matrik yang dapat dibalik.

Latihan 1.7

Untuk soal nomor 1 – 4, tentukan apakah matrik-matrik berikut dapat dibalik atau tidak.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 5 – 8, tentukan produknya dengan inspeksi (pengecekan).

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Untuk nomor 9 – 12, tentukan A^2, A^{-2} dan A^{-k} (dimana k bilangan bulat) dengan inspeksi (pengecekan).

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 13 – 19, simpulkan apakah matrik-matrik berikut simetris atau tidak.

13. $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 20 – 22, simpulkan dengan inspeksi (pengecekan) apakah matrik-matrik berikut dapat dibalik.

20. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 23 – 24, tentukan semua nilai konstanta yang belum diketahui secara berurutan sehingga *A* menjadi simetris.

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 25 – 26, tentukan semua nilai x secara berurutan sehingga *A* dapat dibalik.

25. $A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x & x-\frac{1}{3} & 0 \\ x^2 & x^3 & x-\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 27 – 28, tentukan matrik diagonal *A* yang memenuhi kondisi berikut.

27. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

28. $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. Verifikasi Teorema 1.7.1 *(b)* untuk produk AB, dimana:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

30. Verifikasi Teorema 1.7.1 *(d)* untuk matrik A dan B pada soal nomor 29.

31. Verifikasi Teorema 1.7.4 untuk matrik A berikut:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

    (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

32. Misal A matrik simetris $n \times n$.

    (a) Tunjukkan bahwa A^2 adalah simetris.

    (b) Tunjukkan bahwa $2A^2 - 3A + I$ adalah simetris.

33. Buktikan: jika $A^T A = A$ maka A simetris dan $A = A^2$.

34. Tentukan semua matrik diagonal A 3×3 yang memenuhi $A^2 - 3A - 4I = 0$

35. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matrik $n \times n$. Tentukan apakah A simetris.

    (a) $a_{ij} = i^2 + j^2$

    (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

    (c) $a_{ij} = 2i + 2j$

    (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

36. Berdasarkan pengalaman Anda pada soal nomor 35, buatlah tes umum yang dapat diterapkan pada rumus a_{ij} untuk menentukan apakah $A = [a_{ij}]$ simetris.

37. Matrik persegi A dikatakan simetris-miring jika $A^T = -A$.
    Buktikan:

    (a) Jika A adalah matrik simetris-miring yang dapat dibalik, maka A^{-1} adalah simetris-miring.

    (b) Jika A dan B adalah matrik simetris-miring, maka begitu pula $A^T, A + B, A - B$, dan kA untuk setiap skalar k.

    (c) Setiap matrik persegi A dapat diekspresikan sebagai penjumlahan dari matrik simetris dan matrik simetris-miring.
    [petunjuk: identitas $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

Untuk soal nomor 38 – 39, isilah entri yang kosong (ditandai dengan $\times$) untuk menghasilkan matrik simetris-miring.

38. $A = \begin{bmatrix} \times & \times & 4 \\ 0 & \times & \times \\ \times & -1 & \times \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & -4 \\ 8 & \times & \times \end{bmatrix}$

40. Tentukan semua nilai $a, b, c,$ dan d apabila A adalah matrik simetris-miring.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2a-3b+c & 3a-5b+5c \\ -2 & 0 & 5a-8b+6c \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$$

41. Kita menunjukkan dalam teks bahwa produk dari matriks-matrik simetris adalah simetris jika dan hanya jika matrik bolak-balik (komutatif). Apakah produk matrik simetris miring-simetris bolak-balik (komutatif)? Jelaskan. [Catatan: Lihat soal nomor 37 untuk definisi simetris miring.]

42. Jika matrik A $n \times n$ dapat diekspresikan sebagai $A = LU$, dimana L adalah matrik segitiga bawah dan U adalah matrik segitiga atas maka sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat diekspresikan sebagai $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan dapat diselesaikan dalam dua langkah:

    Langkah 1. Misal $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, sehingga $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dapat diekspresikan sebagai $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Selesaikan sistem ini.

    Langkah 2. Selesaikan sistem $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ untuk $\mathbf{x}$.

    Dalam tiap bagian, gunakan metode dua langkah untuk menyelesaikan sistem berikut:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

43. Tentukan matrik segitiga atas yang memenuhi:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 8

Kegiatan Belajar 8: Aplikasi Sistem Linier

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menemukan laju aliran dan arah aliran di cabang-cabang jaringan.
2. Peserta didik dapat menemukan jumlah arus yang mengalir melalui bagian-bagian sirkuit listrik.
3. Peserta didik dapat menulis persamaan kimia yang seimbang untuk reaksi kimia tertentu.
4. Peserta didik dapat menemukan polinomial interpolasi untuk grafik yang melewati koleksi poin yang diberikan.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menemukan laju aliran dan arah aliran di cabang-cabang jaringan.
2. Menemukan jumlah arus yang mengalir melalui bagian-bagian sirkuit listrik.
3. Menulis persamaan kimia yang seimbang untuk reaksi kimia tertentu.
4. Menemukan polinomial interpolasi untuk grafik yang melewati koleksi poin yang diberikan.

C. Uraian Materi

1.8. Aplikasi Sistem Linier

Pada bagian ini kita akan membahas beberapa aplikasi sistem linear yang relatif singkat. Ini hanyalah contoh kecil dari berbagai macam masalah dunia nyata di mana pelajaran kita tentang sistem linear dapat diterapkan.

1.8.1. Analisis Jaringan

Konsep jaringan muncul dalam berbagai aplikasi. Dijelaskan secara longgar, jaringan adalah seperangkat cabang di mana sesuatu “mengalir.”

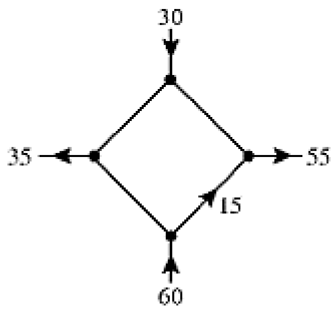
Sebagai contoh, cabang-cabangnya mungkin berupa kabel listrik di mana aliran listrik mengalir, pipa dilalui air atau aliran minyak, jalur lalu lintas dilalui lalu lintas kendaraan, atau hubungan ekonomi di mana uang mengalir, untuk menyebutkan beberapa kemungkinan.

Di sebagian besar jaringan, cabang-cabang bertemu di titik-titik, yang disebut node atau persimpangan, di mana aliran terbelah. Misalnya, dalam jaringan listrik, node terjadi di mana tiga atau lebih kabel bergabung, dalam jaringan lalu lintas, cabang terjadi di persimpangan jalan, dan dalam jaringan keuangan, cabang terjadi di pusat-pusat perbankan di mana uang masuk didistribusikan ke individu atau lembaga lain.

Dalam studi jaringan, umumnya ada beberapa ukuran numerik dari tingkat di mana medium mengalir melalui cabang. Sebagai contoh, laju aliran listrik sering diukur dalam ampere, laju aliran air atau minyak dalam galon per menit, laju aliran lalu lintas dalam kendaraan per jam, dan laju aliran mata uang Eropa dalam jutaan Euro per hari. Kita akan membatasi perhatian kita untuk jaringan di mana ada konservasi aliran di setiap node, yang dimaksudkan bahwa laju aliran ke setiap node sama dengan laju aliran dari node tersebut. Ini memastikan bahwa aliran medium tidak membangun di node dan memblokir pergerakan bebas medium melalui jaringan.

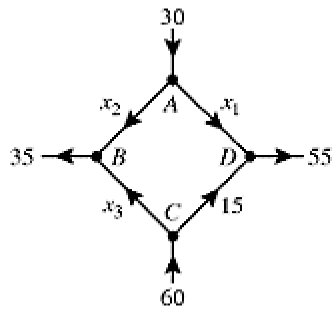
Masalah umum dalam analisis jaringan adalah menggunakan laju aliran yang dikenal di cabang-cabang tertentu untuk menemukan laju aliran di semua cabang. Berikut ini contohnya.

Contoh 1: Analisis Jaringan Menggunakan Sistem Linier
Gambar 1.8.1 menunjukkan jaringan dengan empat node di mana laju aliran dan arah aliran di cabang tertentu diketahui. Temukan laju aliran dan arah aliran di cabang yang tersisa.



Gambar 1.8. 1. Jaringan Empat Node

Solusi Seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1.8.2, kita telah menetapkan arah acak ke laju aliran yang tidak diketahui x_1, x_2 danx_3. Kita tidak perlu khawatir jika beberapa petunjuk salah, karena arah yang salah akan ditandai oleh nilai negatif untuk laju aliran ketika kita memecahkan untuk yang tidak diketahui.



Gambar 1.8. 2. Arah Acak Laju Aliran

Ini mengikuti dari konservasi aliran di node A bahwa:

$$x_1 + x_2 = 30$$

Demikian pula, di simpul lain kita punya:

$$x_2 + x_3 = 35 \quad \text{(node } B\text{)}$$
$$x_3 + 15 = 60 \quad \text{(node } C\text{)}$$
$$x_1 + 15 = 55 \quad \text{(node } D\text{)}$$

Empat kondisi tersebut menghasilkan sistem linier:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 30 \\ x_2 + x_3 &= 35 \\ x_3 &= 45 \\ x_1 &= 40 \end{aligned}$$

yang sekarang dapat kita coba untuk memecahkan laju aliran yang tidak diketahui. Dalam kasus khusus ini sistemnya cukup sederhana sehingga dapat diselesaikan dengan inspeksi (bekerja dari bawah ke atas). Kami serahkan kepada Anda untuk mengonfirmasi bahwa solusinya adalah

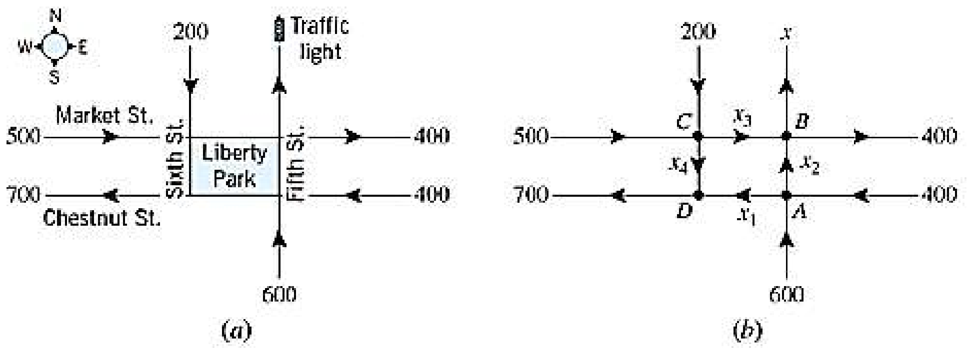
$$x_1 = 40, x_2 = -10, x_3 = 45$$

Fakta bahwa x_2 bernilai negatif memberitahu kita bahwa arah yang ditetapkan untuk aliran pada Gambar 1.8.2 tidak benar; yaitu, aliran di cabang itu menuju ke node A.

Contoh 2: Desain Pola Lalu Lintas

Jaringan pada Gambar 1.8.3 menunjukkan rencana yang diusulkan untuk arus lalu lintas di sekitar taman baru yang akan menjadi rumah Liberty Bell di Philadelphia, Pennsylvania. Rencana yang dibuat adalah komputerisasi lampu lalu lintas di pintu keluar utara di Fifth Street, dan diagram menunjukkan jumlah rata-rata kendaraan per jam yang diharapkan mengalir masuk dan keluar dari jalan-jalan yang membatasi kompleks. Semua jalan satu arah.

(a) Berapa banyak kendaraan per jam seharusnya yang melalui lampu lalu lintas untuk memastikan bahwa rata-rata jumlah kendaraan per jam yang mengalir ke kompleks sama dengan jumlah rata-rata kendaraan yang mengalir keluar?
(b) Dengan asumsi bahwa lampu lalu lintas telah diatur untuk menyeimbangkan aliran total masuk dan keluar dari kompleks, apa yang dapat Anda katakan tentang jumlah rata-rata kendaraan per jam yang akan mengalir di sepanjang jalan yang berbatasan dengan kompleks?



Gambar 1.8. 3. Rencana Arus Lalu Lintas

Solusi

(a) Jika, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.3b kita memisalkan x menunjukkan jumlah kendaraan per jam yang harus melewati lampu lalu lintas, maka jumlah kendaraan per jam yang mengalir masuk dan keluar dari kompleks akan menjadi:
Aliran masuk : 500 + 400 + 600 + 200 = 1700
Aliran keluar : $x + 700 + 400$
Menyamakan arus masuk dan keluar menunjukkan bahwa lampu lalu lintas seharusnya memberikan nilai x = 600 kendaraan per jam untuk lewat.

(b) Untuk menghindari kemacetan lalu lintas, arus harus sama dengan aliran keluar di setiap persimpangan. Agar ini terjadi, kondisi berikut harus dipenuhi:

Simpangan	Arus Masuk	Arus Keluar
$\boldsymbol{A}$	$400 + 600$	$x_1 + x_2$
$\boldsymbol{B}$	$x_2 + x_3$	$400 + x$

C	$500 + 200$	$x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	700

Jadi, dengan $x = 600$, seperti perhitungan pada bagian (a), kita peroleh sistem linier berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1000 \\ x_2 + x_3 &= 1000 \\ x_3 + x_4 &= 700 \\ x_1 + x_4 &= 700 \end{aligned}$$

Kami tinggalkan bagi Anda untuk menunjukkan bahwa sistem memiliki banyak solusi tak hingga dan hal ini diberikan oleh persamaan parametrik:

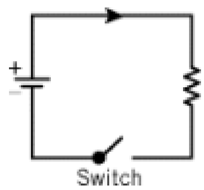
$$x_1 = 700 - t, x_2 = 300 + t, x_3 = 700 - t, x_4 = t \qquad (1)$$

Namun, parameter t tidak sepenuhnya sebarang di sini, karena ada batasan fisik yang harus dipertimbangkan. Sebagai contoh, laju alir rata-rata harus non-negatif karena kita menganggap jalan menjadi satu arah, dan laju alir negatif akan menunjukkan aliran ke arah yang salah. Ini adalah kasusnya, kita melihat dari (1) bahwa t dapat menjadi bilangan riil apa pun yang memenuhi, yang menyiratkan bahwa laju aliran rata-rata di sepanjang jalan akan berada dalam rentang:

$$0 \leq x_1 \leq 700\,; 300 \leq x_2 \leq 1000\,;\ 0 \leq x_3 \leq 700\,;\ 0 \leq x_4 \leq 700$$

1.8.2. Rangkaian listrik

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bagaimana analisis jaringan dapat digunakan untuk menganalisis rangkaian listrik yang terdiri dari baterai dan resistor. Baterai adalah sumber energi listrik, dan sebuah resistor, seperti bola lampu, adalah elemen yang menghamburkan energi listrik. Gambar 1.8.4 menunjukkan diagram skematik rangkaian dengan satu baterai (diwakili oleh simbol), satu resistor (diwakili oleh simbol), dan sebuah saklar. Baterai memiliki kutub positif (+) dan kutub negatif (-). Ketika saklar ditutup, arus listrik dianggap mengalir dari kutub positif baterai, melalui resistor, dan kembali ke kutub negatif (ditunjukkan oleh panah pada gambar).



Gambar 1.8. 4. Diagram Skematik Rangkaian Listrik

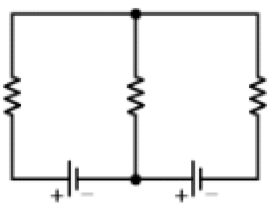
Arus listrik, yang merupakan aliran elektron melalui kabel, berperilaku seperti aliran air melalui pipa. Baterai berfungsi seperti pompa yang menciptakan "tekanan listrik" untuk meningkatkan laju aliran elektron, dan resistor bertindak seperti pembatasan dalam pipa yang mengurangi laju aliran elektron. Istilah teknis untuk tekanan listrik adalah **potensial listrik**, biasanya diukur dalam ***volt*** (V). Tingkat dimana sebuah resistor mengurangi potensi listrik disebut ***hambatan*** dan biasanya diukur dalam ***ohm*** (Ω). Tingkat aliran elektron dalam kawat disebut ***arus*** dan biasanya diukur dalam ampere (juga disebut ***amp***) (A). Efek yang tepat dari sebuah resistor diberikan oleh hukum berikut:

Hukum Ohm

Jika arus I ampere melewati resistor dengan resistansi R ohms, maka ada penurunan E volt yang dihasilkan dalam potensial listrik yang merupakan produk dari arus dan resistansi; yaitu,

$$E = IR$$

Tipikal jaringan listrik akan memiliki banyak baterai dan resistor yang dihubungkan oleh beberapa konfigurasi kabel. Suatu titik di mana tiga atau lebih kabel dalam jaringan bergabung disebut node (atau titik persimpangan). Cabang adalah kawat yang menghubungkan dua node, dan loop tertutup adalah rangkaian cabang terhubung yang dimulai dan diakhiri pada simpul yang sama. Sebagai contoh, jaringan listrik pada Gambar 1.8.5 memiliki dua node dan tiga loop tertutup — dua loop dalam dan satu loop luar. Saat arus mengalir melalui jaringan listrik, ia mengalami peningkatan dan penurunan potensial listrik, yang disebut kenaikan tegangan dan tegangan turun. Perilaku arus pada node dan sekitar loop tertutup diatur oleh dua hukum dasar:



Gambar 1.8. 5. Jaringan Listrik dengan Dua Node dan Tiga Loop

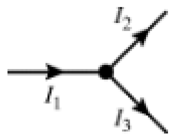
Hukum Arus Kirchoff

Jumlah arus yang mengalir ke setiap node sama dengan jumlah arus yang mengalir keluar.

Hukum Tegangan Kirchoff

Dalam satu lintasan dari setiap loop tertutup, jumlah tegangan naik sama dengan jumlah tegangan turun.

Hukum Arus Kirchhoff adalah pernyataan kembali prinsip konservasi aliran pada node yang dinyatakan untuk jaringan umum. Jadi, misalnya, arus di simpul atas pada Gambar 1.8.6 memenuhi persamaan $I_1 = I_2 + I_3$.

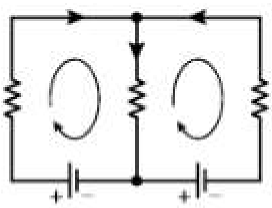


Gambar 1.8. 6. Pseudo Hukum Arus Kirchoff

Dalam sirkuit dengan beberapa loop dan baterai biasanya tidak ada cara untuk mengetahui selanjutnya mana arus yang mengalir, sehingga prosedur biasa dalam analisis rangkaian adalah untuk menetapkan sebarang arah terhadap aliran arus di cabang-cabang dan membiarkan perhitungan matematis menentukan apakah penetapan sudah benar. Selain menetapkan arah ke aliran arus, hukum tegangan Kirchhoff membutuhkan arah perjalanan untuk setiap loop tertutup. Pilihannya sebarang, tetapi untuk konsistensi kita akan selalu mengambil arah ini searah jarum jam (Gambar 1.8.7). Kita juga membuat konvensi berikut:

- Penurunan tegangan terjadi pada resistor jika arah yang ditetapkan ke arus melalui resistor sama dengan arah yang ditetapkan ke loop, dan kenaikan tegangan terjadi pada resistor jika arah yang ditetapkan ke arus melalui resistor berlawanan dengan arah yang ditetapkan ke loop.
- Kenaikan tegangan terjadi pada baterai jika arah yang ditetapkan untuk loop berasal dari - ke + melalui baterai, dan penurunan tegangan terjadi pada baterai jika arah yang ditetapkan untuk loop adalah dari + ke - melalui baterai.

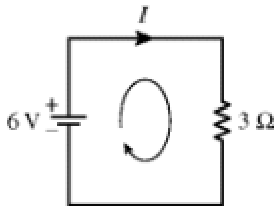
Jika Anda mengikuti konvensi ini ketika menghitung arus, maka arus yang arahnya ditetapkan dengan benar akan memiliki nilai positif dan mereka yang arahnya ditetapkan secara tidak benar akan memiliki nilai negatif.



Konvensi Loop-teretutup searah jarum jam dengan penetapan sebarang arah arus pada cabang

Gambar 1.8. 7. Loop Tertutup Searah Jarum Jam

Contoh 3: Sirkuit dengan Satu Loop Tertutup
Tentukan arus I di sirkuit yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.8.

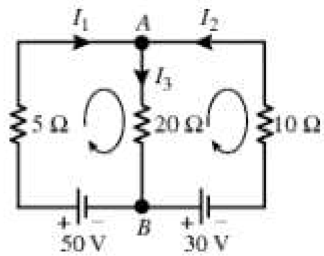


Gambar 1.8. 8. Sirkuit dengan Satu Loop Tertutup

Solusi Karena arah yang ditetapkan ke arus melalui resistor sama dengan arah loop, terdapat penurunan tegangan pada resistor. Menurut hukum Ohm, penurunan tegangan ini adalah $E = IR = 3I$. Juga, karena arah yang ditetapkan untuk loop adalah dari - ke + melalui baterai, ada kenaikan tegangan sebesar 6 volt pada baterai. Dengan demikian, mengikuti hukum tegangan Kirchhoff yaitu $3I = 6$.

dari situ kami menyimpulkan bahwa arusnya adalah $I = 2A$. Karena I positif, arah yang ditetapkan ke aliran arus adalah benar.

Contoh 4: Sirkuit dengan Tiga Loop Tertutup
Tentukan arus I_1, I_2, dan I_3 di sirkuit yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.9.



Gambar 1.8. 9. Sirkuit dengan Tiga Loop Tertutup

Solusi Menggunakan arah arus yang sudah ditetapkan, hukum arus Kirchoff memberikan satu persamaan untuk tiap node:

Node	Arus Masuk	Arus Keluar
A	$I_1 + I_2$	I_3
B	I_3	$I_1 + I_2$

Namun, persamaan ini benar-benar sama, karena keduanya dapat dinyatakan sebagai:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{2}$$

Gustav Kirchhoff (1824-1887)

Catatan Sejarah Fisikawan Jerman Gustav Kirchhoff adalah murid Gauss. Karyanya pada hukum Kirchhoff, diumumkan pada 1854, merupakan kemajuan besar dalam perhitungan arus, tegangan, dan hambatan sirkuit listrik. Kirchhoff sangat cacat dan menghabiskan sebagian besar hidupnya di penopang atau di kursi roda.

Untuk menemukan nilai tunggal untuk arus, kita akan membutuhkan dua persamaan lagi, yang akan kita peroleh dari hukum tegangan Kirchhoff. Kita dapat melihat dari diagram jaringan bahwa ada tiga loop tertutup, loop sebelah kiri yang berisi baterai 50 V, loop dalam kanan yang berisi baterai 30 V, dan loop luar yang berisi kedua baterai. Jadi, hukum tegangan Kirchhoff sebenarnya akan menghasilkan tiga persamaan. Dengan lintasan searah jarum jam dari loop, tegangan naik dan turun dalam loop ini adalah sebagai berikut:

	Tegangan Naik	Tegangan Turun
Loop dalam kiri	50	$5I_1 + 20I_3$
Loop dalam kanan	$30 + 10I_2 + 20I_3$	0
Loop Luar	$30 + 50 + 10I_2$	$5I_1$

Kondisi tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} 5I_1 + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \\ 5I_1 - 10I_2 &= 80 \end{aligned} \tag{3}$$

Namun, persamaan terakhir adalah berlebihan, karena berbeda dari dua persamaan pertama. Jadi, jika kita menggabungkan (2) dan dua persamaan pertama dalam (3), kita memperoleh sistem linear tiga persamaan berikut dalam tiga arus yang tidak diketahui:

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\
5I_1 + 20I_3 &= 50 \\
10I_2 + 20I_3 &= -30
\end{aligned}
$$

Kami biarkan bagi Anda untuk menyelesaikan sistem ini dan menunjukkan bahwa $I_1 = 6A, I_2 = -5A$, dan $I_3 = 1A$. Fakta yang negatif memberitahu kita bahwa arah arus ini berlawanan dengan yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.9.

1.8.3. Menyeimbangkan Persamaan Kimia

Senyawa kimia diwakili oleh rumus kimia yang menggambarkan susunan atom-atomnya. Sebagai contoh, air terdiri dari dua atom hidrogen dan satu atom oksigen, sehingga rumus kimianya adalah H_2O; dan oksigen stabil terdiri dari dua atom oksigen, sehingga rumus kimianya adalah O_2.

Ketika senyawa kimia dikombinasikan di bawah kondisi yang tepat, atom-atom dalam molekulnya mengatur ulang untuk membentuk senyawa baru. Misalnya, ketika metana terbakar, metana $(\mathrm{CH_4})$ dan oksigen yang stabil $(\mathrm{O_2})$ bereaksi membentuk karbon dioksida $(\mathrm{CO_2})$ dan air $(\mathrm{H_2O})$. Ini ditunjukkan oleh persamaan kimia:

$$\mathrm{CH_4} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \tag{4}$$

Molekul di sebelah kiri panah disebut reaktan dan yang di sebelah kanan produknya. Dalam persamaan ini tanda plus berfungsi untuk memisahkan molekul dan tidak dimaksudkan sebagai operasi aljabar. Namun, persamaan ini tidak menceritakan keseluruhan cerita, karena tidak memperhitungkan proporsi molekul yang diperlukan untuk reaksi lengkap (tidak ada reaktan yang tersisa). Sebagai contoh, kita dapat melihat dari sisi kanan (4) yang menghasilkan satu molekul karbon dioksida dan satu molekul air, yang membutuhkan tiga atom oksigen untuk setiap atom karbon. Namun, dari sisi kiri (4) kita melihat bahwa satu molekul metana dan satu molekul oksigen yang stabil hanya memiliki dua atom oksigen untuk setiap atom karbon. Jadi, pada sisi reaktan, rasio metana terhadap oksigen yang stabil tidak dapat satu-ke-satu dalam reaksi lengkap.

Persamaan kimia dikatakan seimbang jika untuk setiap jenis atom dalam reaksi, jumlah atom yang sama muncul di setiap sisi panah. Sebagai contoh, versi seimbang dari Persamaan (4) adalah:

$$\mathrm{CH_4} + 2\mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O} \tag{5}$$

yang kita maksudkan bahwa satu molekul metana bergabung dengan dua molekul oksigen yang stabil untuk menghasilkan satu molekul karbon dioksida dan dua molekul air. Secara teori, salah satu caranya dapat mengalikan persamaan ini melalui bilangan bulat positif apa pun. Sebagai contoh, mengalikan melalui 2 menghasilkan persamaan kimia yang seimbang:

$$2\mathrm{CH}_4 + 4\mathrm{O}_2 \longrightarrow 2\mathrm{CO}_2 + 4\mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

Namun, konvensi standar adalah menggunakan bilangan bulat positif terkecil yang akan menyeimbangkan persamaan.

Persamaan (4) cukup sederhana yang dapat diimbangi dengan trial and error, tetapi untuk persamaan kimia yang lebih rumit kita akan membutuhkan metode yang sistematis. Ada berbagai metode yang dapat digunakan, tetapi kami akan memberikan salah satu yang menggunakan sistem persamaan linear. Untuk mengilustrasikan metode mari kita periksa kembali Persamaan (4). Untuk menyeimbangkan persamaan ini kita harus menemukan bilangan bulat positif, x_1, x_2, x_3 dan x_4 sedemikian sehingga:

$$x_1(\mathrm{CH}_4) + x_2(\mathrm{O}_2) \longrightarrow x_3(\mathrm{CO}_2) + x_4(\mathrm{H}_2\mathrm{O}) \qquad (6)$$

Untuk setiap atom dalam persamaan, jumlah atom di sebelah kiri harus sama dengan jumlah atom di sebelah kanan. Mengekspresikan ini dalam bentuk tabel kita punya:

	Sisi Kiri		Sisi Kanan
Karbon	x_1	=	x_3
Hidrogen	$4x_1$	=	$2x_4$
Oksigen	$2x_2$	=	$2x_3 + x_4$

dimana kita memperoleh sistem linear homogen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Matrik perluasan dari sistem ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kami biarkan bagi Anda untuk menunjukkan bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari matriks ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

dan kita simpulkan bahwa solusi umum dari sistem ini adalah:

$$x_1 = \frac{t}{2}, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = \frac{t}{2}, \qquad x_4 = t$$

Dimana t sebarang. Nilai bilangan bulat positif terkecil untuk x_1, x_2, x_3, x_4 terjadi ketika kita ambil $t = 2$, sehingga persamaan dapat diseimbangkan dengan mengambil $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 2$. Ini sesuai dengan kesimpulan kita sebelumnya, karena mengganti nilai-nilai ini ke dalam Persamaan (6) menghasilkan Persamaan (5).

Contoh 5: Menyeimbangkan Persamaan Kimia Menggunakan Sistem Linier
Seimbangkan persamaan kimia berikut:

$$\text{HCl} \quad + \quad \text{Na}_3\text{PO}_4 \quad \longrightarrow \quad H_3\text{PO}_4 \quad + \quad \text{NaCl}$$

[hydrochloric acid] + [sodium phosphate] ⟶ [phosphoric acid] + [sodium chloride]

Solusi Misalkan x_1, x_2, x_3, dan x_4 adalah bilangan bulat positif yang menyeimbangkan persamaan:

$$x_1(\text{HCl}) + x_2(\text{Na}_3\text{PO}_4) \longrightarrow x_3(H_3\text{PO}_4) + x_4(\text{NaCl}) \tag{7}$$

Menyamakan jumlah atom dari masing-masing jenis pada dua sisi menghasilkan:

$$\begin{aligned} 1x_1 &= 3x_3 && \text{Hidrogen (H)} \\ 1x_1 &= 1x_4 && \text{Klorin (Cl)} \\ 3x_2 &= 1x_4 && \text{Sodium (Na)} \\ 1x_2 &= 1x_3 && \text{Pospor (P)} \\ 4x_2 &= 4x_3 && \text{Oksigen (O)} \end{aligned}$$

dimana kita memperoleh sistem linear homogen:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Kami biarkan bagi Anda untuk menunjukkan bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari matriks perluasan untuk sistem ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan kita simpulkan bahwa solusi umum dari sistem ini adalah:

$$x_1 = t, \qquad x_2 = \frac{t}{3}, \qquad x_3 = \frac{t}{3}, \qquad x_4 = t$$

Dimana t sebarang. Untuk memperoleh bilangan bulat positif terkecil agar persamaan seimbang, kita ambil $t = 3$, dalam hal ini kita peroleh $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 3$. Substitusikan nilai-nilai tersebut ke persamaan (7) untuk menghasilkan persamaan yang seimbang, yaitu:

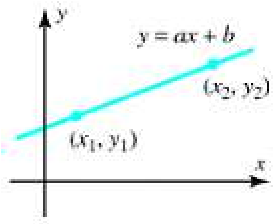
$$3\mathrm{HCl} + \mathrm{Na_3PO_4} \longrightarrow H_3\mathrm{PO_4} + 3\mathrm{NaCl}$$

1.8.4. Interpolasi Polinomial

Masalah penting dalam berbagai aplikasi adalah menemukan polinomial yang grafiknya melalui himpunan titik-titik dalam bidang; ini disebut polinomial interpolasi untuk titik-titiknya. Contoh paling sederhana dari masalah seperti itu adalah menemukan polinomial linier:

$$p(x) = ax + b \tag{8}$$

yang grafiknya melewati dua titik berbeda yang diketahui, (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), dalam bidang xy (Gambar 1.8.10). Anda mungkin telah menemukan berbagai metode dalam geometri analitik untuk menemukan persamaan garis melalui dua titik, tetapi di sini kita akan memberikan metode berdasarkan sistem linear yang dapat diadaptasi untuk interpolasi polinomial secara umum.



Gambar 1.8. 10. Ruas Garis $y = ax + b$

Grafik (8) adalah garis $y = ax + b$, dan agar garis ini melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), kita harus punya:

$$y_1 = ax_1 + b \text{ dan } y_2 = ax_2 + b$$

Oleh karena itu, koefisien a dan b yang tidak diketahui dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem linear:

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned}$$

Kita tidak memerlukan metode yang fantastis untuk menyelesaikan sistem ini — nilai a dapat diperoleh dengan mengurangi persamaan untuk menghilangkan b, dan kemudian nilai dari a dapat disubsitusikan ke dalam persamaan untuk menemukan b. Kami membiarkannya sebagai latihan bagi Anda untuk menemukan a dan b dan kemudian menunjukkan bahwa mereka dapat diekspresikan dalam bentuk:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{dan} \quad b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

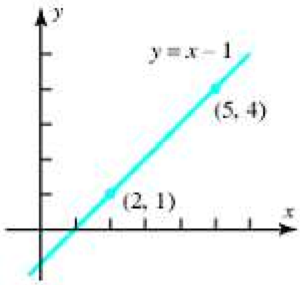
Asalkan $x_1 \neq x_2$. Sehingga, sebagai contoh, garis $y = ax + b$ melalui titik-titik:

$$(2,1) \text{ dan } (5,4)$$

Dapat diperoleh dengan mengambil $(x_1, y_1) = (2,1)$ dan $(x_2, y_2) = (5,4)$, ke dalam (9) diperoleh:

$$a = \frac{4-1}{5-2} = 1 \text{ dan } b = \frac{(1)(5)-(4)(2)}{5-2} = -1$$

Sehingga persamaan garisnya adalah $y = x - 1$ (Gambar 1.8.11).



Gambar 1.8. 11. Ruas Garis $y = x - 1$

Sekarang mari kita perhatikan masalah yang lebih umum dalam menemukan polinomial yang grafiknya melewati n titik dengan koordinat x yang berbeda.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n) \tag{10}$$

Karena ada n kondisi yang harus dipenuhi, intuisi menyarankan bahwa kita harus mulai denganType equation here. mencari polinomial dalam bentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_xx^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \tag{11}$$

karena polinomial dari bentuk ini memiliki n koefisien yang kita miliki untuk memenuhi n kondisi. Namun, kita ingin membolehkan untuk kasus-kasus di mana titik-titik mungkin terletak pada garis atau memiliki beberapa konfigurasi lain yang akan memungkinkan untuk menggunakan polinomial yang derajatnya kurang dari $n - 1$; dengan demikian, kita mengizinkan kemungkinan bahwa $a_n - 1$ dan koefisien lainnya dalam (11) mungkin nol.

Teorema berikut, yang akan kita buktikan nanti dalam teks, adalah hasil dasar pada interpolasi polinomial.

TEOREMA 1.8.1. **Interpolasi Polinomial**
Diberikan n titik apa pun dalam bidang xy yang memiliki koordinat x berbeda, terdapat polinomial tunggal berderajat n - 1 atau kurang yang grafiknya melewati titik-titik tersebut.

Mari sekarang kita perhatikan bagaimana kita bisa menemukan interpolasi polinomial yang grafiknya melewati titik-titik dalam (10). Karena grafik dari polinomial ini adalah grafik persamaan:

$$y = a_0 + a_1x + a_xx^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \tag{12}$$

Oleh karena itu, koordinat titik-titik harus memenuhi:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{array} \tag{13}$$

Dalam persamaan ini nilai-nilai x dan y diasumsikan diketahui, sehingga kita dapat melihat ini sebagai sistem linear dalam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yang tidak diketahui. Dari sudut pandang ini, matriks perluasan untuk sistem ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_2^{n-1} & y_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

dan karenanya interpolasi polinomial dapat ditemukan dengan mereduksi matriks ini ke bentuk eselon baris tereduksi (eliminasi Gauss-Jordan).

Contoh 6: Interpolasi Polinomial dengan Eliminasi Gauss-Jordan

Temukan polinomial kubik yang grafiknya melewati titik-titik:

$$(1,3),(2,-2),(3,-5),(4,0)$$

Solusi Karena terdapat empat titik, kita akan menggunakan interpolasi plinomial dengan derajat $n=3$. Polinomial dinotasikan dengan:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

Dan koordinat x dan y dinotasikan dengan titik-titik berikut:

$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ dan $y_1=3, y_2=-2, y_3=-5, y_4=0$

Kemudian, dengan mengikuti (14) maka matrik perluasan untuk sistem linier dalam a_0, a_1, a_2, dan a_3 yang tidak diketahui adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

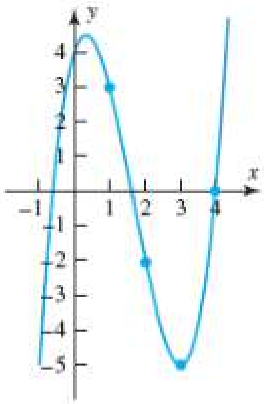
Kami serahkan kepada Anda untuk mengkonfirmasi bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari matriks ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

di mana hal itu berarti bahwa $a_0=4, a_1=3, a_2=-5$, dan $a_3=1$. Dengan demikian, interpolasi polinomialnya adalah

$$p(x)=4+3x-5x^2+x^3$$

Grafik dari polinomial ini dengan titik-titik yang diberikan, ditunjukkan pada Gambar 1.8.12.



Gambar 1.8. 12. Grafik $p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$

Catatan Kita akan mendapatkan metode yang lebih efisien untuk menemukan interpolasi polinomial yang lebih sesuai untuk masalah di mana banyak data dari titik-titiknya lebih besar.

1.8.5. Kalkulus dan Kegunaan Perhitungan yang Diperlukan

Contoh 7: Aproksimasi Integral

Tidak ada cara lain untuk menghitung integral:

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

Secara langsung karena tidak ada cara lain untuk mengekspresikan anti turunan dari integran dalam terminologi fungsi elementer.

Integral ini dapat diaproksimasi menggunakan Aturan Simpson atau metode lain yang cocok, tetapi pendekatan alternatif untuk meng-aproksimasi integran adalah dengan interpolasi polinomial dan mengintegralkan polinomial yang sudah diaproksimasi. Sebagai contoh, mari kita perhatikan lima titik berikut:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3, = 0.75, x_4 = 1$$

Yang membagi interval [0, 1] menjadi empat bagian sub-interval yang sama. Nilai dari:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

Nilai aproksimasi pada titik-titik tersebut adalah:

$f(0) = 0,\quad f(0.25) = 0.098017,\quad f(0.5) = 0.382683,$
$f(0.75) = 0.77301,\quad f(1) = 1$

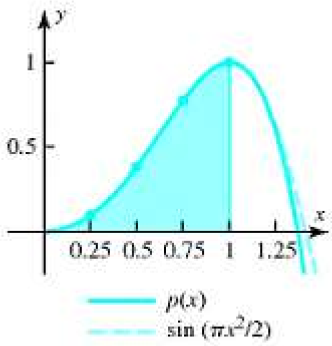
Interpolasi polinomialnya adalah (silahkan verifikasi):

$$p(x) = 0.098796x + 0.762356x^2 + 2.14429x^3 - 2.00544x^4 \qquad (15)$$

Dan

$$\int_0^1 p(x)\,dx \approx 0.438501 \qquad (16)$$

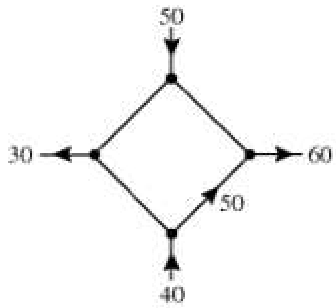
Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.13, grafik dari f dan p sangat mendekati kecocokan (*match*) pada interval [0, 1], sehingga aproksimasinya cukup bagus.



Gambar 1.8. 13. Aproksimasi integral f dan p

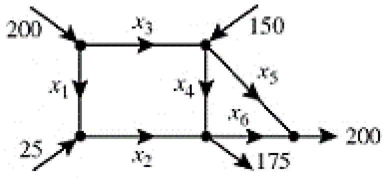
Latihan 1.8

1. Gambar 1.8.14 menunjukkan jaringan di mana laju aliran dan arah aliran di cabang tertentu diketahui.Temukan laju aliran dan arah aliran di cabang yang tersisa.



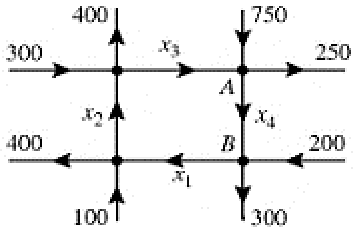
Gambar 1.8. 14. Latihan 1.8 Nomor 1

2. Gambar 1.8.15 menunjukkan laju aliran hidrokarbon yang diketahui masuk dan keluar dari jaringan pipa di kilang minyak.
   (a) Buatlah sistem linier yang memberikan solusi dalam laju aliran yang tidak diketahui.
   (b) Selesaikan sistem untuk laju aliran yang tidak diketahui.
   (c) Tentukan laju aliran dan arah aliran jika $x_4 = 50$ dan$x_6 = 0$.



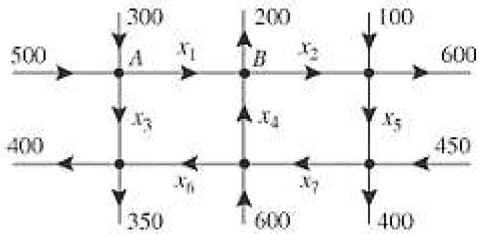
Gambar 1.8. 15. Latihan 1.8 Nomor 2

3. Gambar terlampir menunjukkan jaringan jalan satu arah dengan arus lalu lintas seperti arah yang ditunjukkan. Laju arus di sepanjang jalan diukur sebagai jumlah rata-rata kendaraan per jam.
   (a) Buatlah sistem linier yang memberikan solusi dalam laju arus yang tidak diketahui.
   (b) Selesaikan sistem untuk laju arus yang tidak diketahui.
   (c) Jika arus di sepanjang jalan dari *A* ke *B* harus dikurangi untuk konstruksi, berapa arus minimum yang diperlukan untuk menjaga arus lalu lintas di semua jalan?



Gambar 1.8. 16. Latihan 1.8 Nomor 3

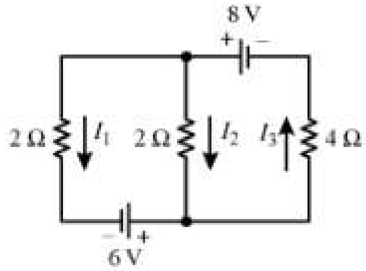
4. Gambar terlampir menunjukkan jaringan jalan satu arah dengan arus lalu lintas seperti arah yang ditunjukkan. Laju arus di sepanjang jalan diukur sebagai jumlah rata-rata kendaraan per jam.
   (a) Buatlah sistem linier yang memberikan solusi dalam laju arus yang tidak diketahui.
   (b) Selesaikan sistem untuk laju arus yang tidak diketahui.
   (c) Apakah mungkin untuk menutup jalan dari *A* ke *B* untuk konstruksi dan menjaga lalu lintas yang mengalir di jalan lain? Jelaskan.



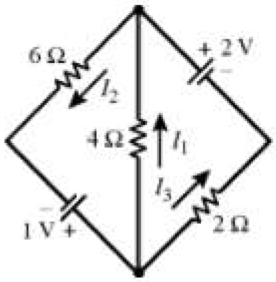
Gambar 1.8. 17. Latihan 1.8 Nomor 4

Untuk soal nomor 5 – 8, analisis rangkaian listrik berikut dengan menentukan arus-arus yang tidak diketahui.

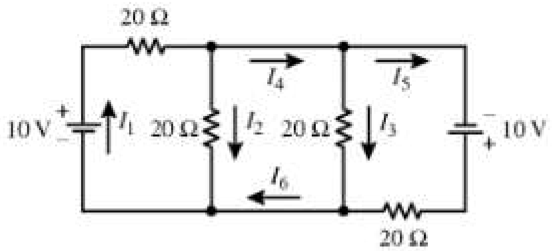
5.



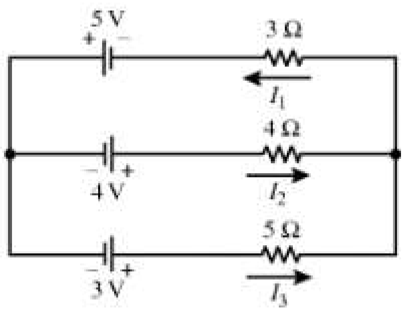
6.



7.



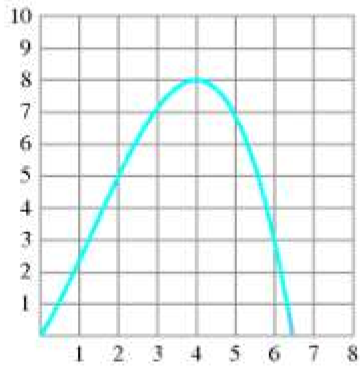
8.



Untuk nomor 9 – 12, tuliskan persamaan kimia seimbang untuk reaksi kimia berikut:

9. $C_3H_8 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$ (pembakaran propana)
10. $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow CO_2 + C_2H_5OH$ (fermentasi gula)
11. $CH_3COF + H_2O \longrightarrow CH_3COOH + HF$

12. $CO_2 + H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (fotosintesis)
13. Tentukan polinomial kuadratik yang grafiknya melewati titik $(1,1), (2,2)$, dan$(3,5)$.
14. Tentukan polinomial kuadratik yang grafiknya melewati titik $(0,0), (-1,1)$, dan $(1,1)$.
15. Tentukan polinomial kubik yang grafiknya melewati titik $(-1,-1), (0,1), 1,3), (4,-1)$.
16. Gambar terlampir menunjukkan grafik polinomial kubik. Tentukan persamaan polinomialnya.



17. (a) Temukan persamaan yang mewakili keluarga dari semua polinomial tingkat kedua yang melewati titik (0, 1) dan (1,2). [Petunjuk: Persamaan ini akan melibatkan satu parameter acak yang menghasilkan anggota keluarga ketika bervariasi.]
    (b) Dengan tangan, atau dengan bantuan utilitas grafik, sketsa empat kurva dalam keluarga.
18. Di bagian ini kita hanya memilih beberapa aplikasi sistem linear. Menggunakan Internet sebagai alat pencarian, cobalah untuk menemukan beberapa aplikasi dunia nyata dari sistem tersebut. Pilih satu yang menarik bagi Anda, dan tulis paragraf tentang itu.

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 9

Kegiatan Belajar 9: Model Input-Output Leontief

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat mengkonstruksi matriks konsumsi untuk suatu ekonomi.
2. Peserta didik dapat memahami hubungan antara vektor sektor ekonomi: konsumsi, permintaan luar, produksi, dan permintaan menengah.

Metode Pembelajaran : ***Direct Learning, Pendekatan Saintifik***
Model Pembelajaran : ***Drill, Scaffolding, Problem Based Learning***

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Mengkonstruksi matriks konsumsi untuk suatu ekonomi.
2. Memahami hubungan antara vektor sektor ekonomi: konsumsi, permintaan luar, produksi, dan permintaan menengah.

C. Uraian Materi

1.9. Model Input-Output Leontief

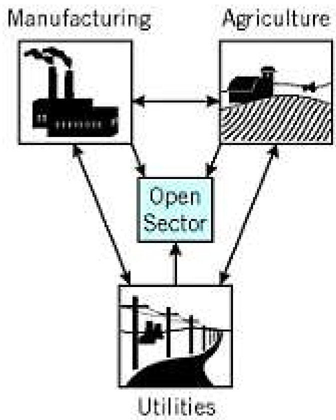
Pada tahun 1973, ekonom Wassily Leontief dianugerahi Hadiah Nobel untuk karyanya pada pemodelan ekonomi di mana ia menggunakan metode matriks untuk mempelajari hubungan antara berbagai sektor dalam suatu perekonomian. Pada bagian ini kita akan membahas beberapa gagasan yang dikembangkan oleh Leontief.

1.9.1. Input dan Output dalam Ekonomi

Salah satu cara untuk menganalisa suatu perekonomian adalah membaginya ke dalam sektor-sektor dan mempelajari bagaimana sektor-sektor berinteraksi satu sama lain. Sebagai contoh, ekonomi sederhana dapat dibagi menjadi tiga sektor - manufaktur, pertanian, dan utilitas (*Utilitas adalah tingkat kepuasan yang diperoleh seorang individu dari mengkonsumsi suatu barang atau melakukan suatu aktivitas*). Biasanya, satu sektor akan menghasilkan output tertentu tetapi akan membutuhkan masukan dari sektor lain dan dirinya sendiri. Sebagai contoh, sektor pertanian dapat menghasilkan gandum sebagai output tetapi akan membutuhkan input dari mesin pertanian dari sektor manufaktur, tenaga listrik dari sektor utilitas, dan makanan dari sektornya sendiri untuk memberi makan para pekerjanya. Dengan demikian, kita dapat membayangkan suatu ekonomi menjadi jaringan di mana input dan output mengalir keluar masuk sektor; studi tentang aliran tersebut disebut analisis input-output. Input dan output biasanya diukur dalam satuan moneter (dolar atau jutaan dolar, misalnya) tetapi unit pengukuran lain mungkin juga untuk digunakan.

Arus diantara sektor ekonomi riil tidak selalu jelas. Sebagai contoh, dalam Perang Dunia II, Amerika Serikat memiliki permintaan untuk 50.000 pesawat baru yang membutuhkan pembangunan banyak pabrik aluminium baru. Ini menghasilkan permintaan besar yang tak terduga untuk komponen listrik tembaga tertentu, yang pada gilirannya menghasilkan kekurangan tembaga. Masalahnya akhirnya diselesaikan dengan menggunakan perak yang dipinjam dari Fort Knox sebagai pengganti tembaga. Dalam semua kemungkinan analisis input-output modern akan memerlukan antisipasi kekurangan tembaga.

Sebagian besar sektor ekonomi akan menghasilkan output, tetapi mungkin ada sektor yang mengkonsumsi output tanpa menghasilkan apa pun dari sektor tersebut (pasar konsumen, misalnya). Sektor-sektor yang tidak menghasilkan output disebut sektor terbuka. Ekonomi tanpa sektor terbuka disebut ekonomi tertutup, dan ekonomi dengan satu atau lebih sektor terbuka disebut ekonomi terbuka (Gambar 1.9.1). Pada bagian ini kita akan memperhatikan ekonomi dengan satu sektor terbuka, dan tujuan utama kita adalah menentukan tingkat output yang diperlukan untuk sektor-sektor produktif untuk menopang diri mereka sendiri dan memenuhi permintaan sektor terbuka.



Gambar 1.9. 1. Ekonomi Sektor Terbuka

1.9.2. Model Leontief dari Ekonomi Terbuka

Mari kita perhatikan ekonomi terbuka sederhana dengan satu sektor terbuka dan tiga sektor penghasil produk: manufaktur, pertanian, dan utilitas. Asumsikan bahwa input dan output diukur dalam dolar dan bahwa input yang dibutuhkan oleh sektor-sektor produktif untuk menghasilkan output senilai satu dolar sesuai dengan Tabel 2.

Tabel 2. Input dan Output Tiga Sektor Penghasil Produk

		Pendapatan yang diperlukan per Dolar Output		
		Manufaktur	**Pertanian**	**Utilitas**
Sektor	**Manufaktur**	\$ 0.50	\$ 0.10	\$ 0.10
	Pertanian	\$ 0.20	\$ 0.50	\$ 0.30
	Utilitas	\$ 0.10	\$ 0.30	\$ 0.40

Wassily Leontief (1906–1999)

Catatan Sejarah Sungguh ironis bahwa Wassily Leontief kelahiran Rusia yang memenangkan Hadiah Nobel pada 1973 yang merintis metode modern untuk menganalisis ekonomi pasar bebas. Leontief adalah seorang siswa dewasa sebelum waktunya yang memasuki Universitas Leningrad pada usia 15 tahun. Karena terganggu oleh pembatasan intelektual pada sistem Soviet, dia dipenjarakan karena kegiatan anti-Komunis, setelah itu dia menuju Universitas Berlin, menerima PhD-nya di sana pada 1928. Dia datang ke Amerika Serikat pada 1931, di mana dia memegang jabatan profesor di Harvard dan kemudian New York University.

Biasanya, kita akan melakukan pelabelan dan mengekspresikan matriks ini sebagai:

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Yang disebut sebagai matrik konsumsi (kadang-kadang disebut matrik teknologi) dalam ekonomi. Vektor-vektor kolom:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

dalam matrik C adalah input yang dibutuhkan oleh sektor manufaktur, pertanian, dan utilitas, secara berturut-turut, untuk menghasilkan output senilai \$ 1,00. Ini disebut vektor konsumsi dari sektor-sektor tersebut. Sebagai contoh, c_1 memberi tahu kita bahwa untuk menghasilkan output senilai \$ 1,00, sektor manufaktur membutuhkan output manufaktur senilai \$ 0,50, output pertanian senilai \$ 0,20, dan output utilitas senilai \$ 0,10.

Apa signifikansi ekonomi dari jumlah baris matriks konsumsi?

Melanjutkan contoh di atas, anggaplah bahwa sektor terbuka ingin ekonomi memasok barang-barang manufaktur, produk pertanian, dan utilitas dengan nilai dolar:

d_1 dolar barang-barang manufaktur

d_2 dolar produk pertanian

d_3 dolar utilitas

Vektor kolom **d** yang memiliki angka-angka ini sebagai komponen berurutan disebut **vektor permintaan luar**. Karena sektor penghasil produk mengkonsumsi sebagian dari output mereka sendiri, nilai dolar dari output mereka harus menutupi kebutuhan mereka sendiri ditambah permintaan luar. Misalkan nilai dolar yang diperlukan untuk melakukan ini adalah:

x_1 dolar barang-barang manufaktur

x_2 dolar produk pertanian

x_3 dolar utilitas

Vektor kolom $\mathbf{x}$ yang memiliki angka-angka ini sebagai komponen berurutan disebut **vektor produksi** dalam ekonomi. Untuk ekonomi dengan matriks konsumsi 1, bagian dari vektor produksi $\mathbf{x}$ yang akan dikonsumsi oleh ketiga sektor produktif tersebut adalah:

$$\underbrace{x_1\begin{bmatrix}0.5\\0.2\\0.1\end{bmatrix}}_{\text{Bagian yang dikonsumsi oleh manufaktur}} + \underbrace{x_2\begin{bmatrix}0.1\\0.5\\0.3\end{bmatrix}}_{\text{Bagian yang dikonsumsi oleh pertanian}} + \underbrace{x_3\begin{bmatrix}0.1\\0.3\\0.4\end{bmatrix}}_{\text{Bagian yang dikonsumsi oleh utilitas}} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = C\mathbf{x}$$

Vektor $C\mathbf{x}$ disebut **vektor permintaan menengah** dalam ekonomi. Setelah permintaan menengah terpenuhi, bagian dari produksi yang tersisa untuk memenuhi permintaan luar adalah $\mathbf{x} - C\mathbf{x}$. Jadi, jika vektor permintaan luar adalah $\mathbf{d}$, maka $\mathbf{x}$ harus memenuhi persamaan:

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Banyaknya Produksi}} - \underbrace{C\mathbf{x}}_{\text{Permintaan Menengah}} = \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Permintaan Luar}}$$

dimana kita akan nyaman menuliskan kembali sebagai:

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2}$$

Matrik $(I - C)$ disebut **matrik Leontief** dan (2) disebut **persamaan Leontief**.

Contoh 1: Pemenuhan Permintaan Luar

Perhatikan gambaran ekonomi pada Tabel 2. Anggaplah bahwa sektor terbuka memiliki permintaan untuk produk manufaktur senilai \$ 7900, produk pertanian senilai \$ 3950, dan utilitas senilai \$ 1975.

(a) Dapatkah ekonomi memenuhi permintaan ini?

(b) Jika demikian, cari vektor produksi $\mathbf{x}$ yang akan memenuhi secara tepat.

Solusi Matrik konsumsi, vektor produksi, dan vektor permintaan luarnya adalah:

$$C = \begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.1\\0.2 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix}7900\\3950\\1975\end{bmatrix} \tag{3}$$

Untuk memenuhi permintaan luar, vektor $\mathbf{x}$ harus memenuhi persamaan Leontief (2), sehingga masalah tereduksi untuk menyelesaikan sistem linier:

$$\begin{array}{ccc} (I-C) & \mathbf{x} & \mathbf{d} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.5 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 7900 \\ 3950 \\ 1975 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4}$$

(jika konsisten). Kami biarkan bagi Anda untuk menunjukkan bahwa bentuk eselon baris tereduksi dari matriks perluasan untuk sistem ini adalah:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27{,}500 \\ 0 & 1 & 0 & 33{,}750 \\ 0 & 0 & 1 & 24{,}750 \end{array}\right]$$

Ini memberi tahu kita bahwa (4) konsisten, dan (a) ekonomi dapat memenuhi permintaan sektor terbuka secara tepat dengan (b) memproduksi output manufaktur senilai \$ 27.500, output pertanian senilai \$ 33,750, dan output utilitas senilai \$ 24,750.

1.9.3. Ekonomi Terbuka Produktif

Dalam pembahasan sebelumnya kita sudah melihat ekonomi terbuka dengan sektor produksi tiga produk; ide yang sama berlaku untuk ekonomi terbuka dengan sektor produksi n produk. Dalam hal ini, matriks konsumsi, vektor produksi, dan vektor permintaan luar memiliki bentuk:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

di mana semua entri adalah non-negatif dan:

c_{ij} = nilai uang dari output sektor ke-i yang dibutuhkan oleh sektor ke-j untuk menghasilkan satu unit output

x_i = nilai uang dari output sektor ke-i

d_i = nilai moneter dari output sektor i yang diperlukan untuk memenuhi permintaan sektor terbuka

Catatan Perhatikan bahwa vektor kolom ke-j dari C berisi nilai-nilai moneter yang diperlukan sektor ke-j dari sektor-sektor lain untuk menghasilkan satu unit output moneter, dan vektor baris ke-i dari C berisi nilai-nilai moneter yang diperlukan dari sektor ke-i oleh sektor-sektor lain. untuk masing-masing untuk menghasilkan satu unit output moneter.

Sebagaimana dibahas dalam contoh kami di atas, vektor produksi $\mathbf{x}$ yang memenuhi permintaan $\mathbf{d}$ dari sektor luar yang harus memenuhi persamaan Leontief:

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Jika matrik $(I - C)$ dapat dibalik, maka persamaan ini memiliki solusi tunggal:

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} \tag{5}$$

untuk setiap vektor permintaan $\mathbf{d}$. Namun, untuk x untuk menjadi vektor produksi yang valid harus memiliki entri nonnegatif, sehingga masalah penting dalam ekonomi adalah untuk menentukan kondisi di mana persamaan Leontief memiliki solusi dengan entri nonnegatif.

Hal ini adalah bukti dari bentuk (5) bahwa jika $I - C$ dapat dibalik, dan jika $(I - C)^{-1}$ memiliki entri non-negatif, maka untuk setiap vektor permintaan $\mathbf{d}$ yang sesuai dengan $\mathbf{x}$ juga akan memiliki entri non-negatif, dan karenanya akan menjadi vektor produksi yang valid untuk perekonomian. Ekonomi dimana $(I - C)^{-1}$ memiliki entri non-negatif dikatakan **produktif**. Ekonomi semacam itu diinginkan karena permintaan selalu dapat dipenuhi oleh beberapa tingkat produksi. Teorema berikut, yang buktinya dapat ditemukan di banyak buku tentang ekonomi, memberikan kondisi di mana ekonomi terbuka adalah produktif.

TEOREMA 1.9.1.
Jika C adalah matrik konsumsi dalam suatu ekonomi terbuka, dan jika jumlah semua kolom ke-$j < 1$ *maka matrik $I - C$ dapat dibalik, entri-entri dalam $(I - C)^{-1}$ adalah non-negatif, dan ekonomi dikatakan produktif.*

Catatan Jumlah kolom ke-j dari C merepresentasikan total nilai dolar dari input yang diperlukan sektor ke-j untuk menghasilkan \$ 1 output, jadi jika jumlah kolom ke-j kurang dari 1, maka sektor ke-j membutuhkan kurang dari \$ 1 input untuk menghasilkan \$ 1 output; dalam hal ini kita katakan bahwa sektor ke-j adalah menguntungkan. Dengan demikian, Teorema 1.9.1 menyatakan bahwa jika semua sektor penghasil produk dari ekonomi terbuka menguntungkan, maka ekonomi itu produktif. Dalam latihan Anda diminta untuk menunjukkan bahwa ekonomi terbuka adalah produktif jika semua jumlah baris C kurang dari 1 (Latihan soal nomor 11). Dengan demikian, ekonomi terbuka adalah produktif jika salah satu dari jumlah kolom atau semua jumlah baris C kurang dari 1.

Contoh 2: Ekonomi Terbuka yang Sektornya Semua Menguntungkan
Jumlah kolom dari matriks konsumsi C dalam (1) kurang dari 1, jadi $(I - C)^{-1}$ ada dan memiliki entri nonnegatif. Gunakan utilitas penghitungan untuk mengkonfirmasi ini, dan gunakan invers ini untuk menyelesaikan Persamaan (4) dalam Contoh 1.

Solusi Kami tinggalkan bukti untuk Anda membuktikan bahwa:

$$(I - C)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 2.65823 & 1.13924 & 1.01266 \\ 1.89873 & 3.67089 & 2.15190 \\ 1.39241 & 2.02532 & 2.91139 \end{bmatrix}$$

Matrik diatas tidak memiliki entri nonnegatif, dan:

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2.65823 & 1.13924 & 1.01266 \\ 1.89873 & 3.67089 & 2.15190 \\ 1.39241 & 2.02532 & 2.91139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7900 \\ 3950 \\ 1975 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 27,500 \\ 33,750 \\ 24,750 \end{bmatrix}$$

yang konsisten dengan solusi dalam contoh 1.

Latihan 1.9

1. Seorang montir mobil (M) dan toko karoseri (B) menggunakan layanannya satu sama lain. Untuk setiap \$ 1,00 bisnis yang dilakukan M, ia menggunakan \$ 0,50 dari layanannya sendiri dan \$ 0,25 dari layanan B, dan untuk setiap \$ 1,00 bisnis yang B lakukan menggunakan \$ 0,10 dari layanannya sendiri dan \$ 0,25 dari layanan M.
   (a) Buatlah matriks konsumsi untuk ekonomi ini.
   (b) Berapa banyak hasil M dan B masing-masing seharusnya, untuk mengurus pelanggan dengan pekerjaan mekanik senilai \$ 7000 dan pekerjaan karoseri senilai \$ 14.000?

2. Suatu ekonomi sederhana menghasilkan makanan (F) dan perumahan (H). Produksi makanan senilai \$ 1,00 membutuhkan makanan senilai \$ 0,30 dan \$ 0. 10 dari perumahan, dan produksi perumahan senilai \$ 1,00 membutuhkan makanan senilai \$ 0,20 dan perumahan senilai \$ 0,60.
   (a) Buatlah matriks konsumsi untuk ekonomi ini.
   (b) Berapa nilai dolar makanan dan perumahan yang harus dihasilkan bagi perekonomian untuk menyediakan makanan senilai \$ 130.000 dan perumahan senilai \$ 130.000 bagi konsumen?

3. Perhatikan ekonomi terbuka yang digambarkan pada tabel 3, di mana input dalam dolar diperlukan untuk \$ 1,00 output.
   (a) Tentukan matriks konsumsi untuk ekonomi.

(b) Misalkan sektor terbuka memiliki permintaan untuk $ 1930 senilai perumahan, $ 3860 senilai makanan, dan $ 5790 senilai utilitas. Gunakan reduksi baris untuk menemukan vektor produksi yang akan memenuhi permintaan ini dengan tepat.

Tabel 3. Ekonomi Terbuka (Latihan 1.9 soal nomor 3)

		Pendapatan yang diperlukan per Dolar Output		
		Perumahan	**Makanan**	**Utilitas**
Sektor	**Perumahan**	$ 0.10	$ 0.60	$ 0.40
	Makanan	$ 0.30	$ 0.20	$ 0.30
	Utilitas	$ 0.40	$ 0.10	$ 0.20

4. Suatu perusahaan memproduksi desain web, perangkat lunak, dan layanan jaringan. Amati perusahaan sebagai ekonomi terbuka yang dijelaskan oleh tabel 4, di mana input dalam dolar diperlukan untuk $ 1,00 output.
   (a) Tentukan matriks konsumsi untuk perusahaan tersebut.
   (b) Misalkan pelanggan (sektor terbuka) memiliki permintaan untuk desain Web senilai $ 5400, perangkat lunak senilai $ 2700, dan jaringan senilai $ 900. Gunakan reduksi baris untuk menemukan vektor produksi yang akan memenuhi permintaan ini dengan tepat.

Tabel 4. Ekonomi Terbuka (Latihan 1.9 soal nomor 4)

		Pendapatan yang diperlukan per Dolar Output		
		Desain web	**Software**	**Jaringan**
Sektor	**Desain web**	$ 0.40	$ 0.20	$ 0.45
	Software	$ 0.30	$ 0.35	$ 0.30
	Jaringan	$ 0.15	$ 0.10	$ 0.20

Untuk soal nomor 5 – 6, gunakan invers matrik untuk menentukan vektor produksi **x** yang memenuhi permintaan **d** untuk matrik konsumsi C.

5. $C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix}$
6. $C = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix}$

7. Perhatikan ekonomi terbuka dengan matrik konsumsi:
$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Tunjukkan bahwa ekonomi dapat memenuhi permintaan $d_1 = 2$ unit dari sektor pertama dan $d_2 = 0$ unit dari sektor kedua, tetapi tidak dapat

memenuhi permintaan $d_1 = 2$ unit dari sektor pertama dan $d_2 = 1$ unit dari sektor kedua.

(b) Berikan penjelasan secara matematis dan ekonomis dari hasil pada bagian (a).

8. Perhatikan ekonomi terbuka dengan matrik konsumsi:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Jika permintaan sektor terbuka bernilai dolar yang sama dari masing-masing sektor penghasil produk, sektor mana yang harus menghasilkan nilai dolar terbesar untuk memenuhi permintaan?

9. Perhatikan ekonomi terbuka dengan matrik konsumsi:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Buktikan bahwa persamaan Leontief $\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ memiliki solusi tunggal untuk setiap vektor permintaan $\mathbf{d}$ jika $c_{21}c_{12} < 1 - c_{11}$.

10. (a) Perhatikan suatu ekonomi terbuka dengan matrik konsumsi C dimana jumlah kolom dalam matrik C kurang dari 1, dan misalkan $\mathbf{x}$ adalah vektor produksi yang memeuhi permintaan luar $\mathbf{d}$, yaitu $(I - C)^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{x}$. Misalkan $\mathbf{d}_j$ adalah vektor permintaan yang diperoleh dengan menambah entri ke-j dari $\mathbf{d}$ dengan 1 dan entri yang lainnya tetap. Buktikan bahwa vektor produksi $\mathbf{x}_j$ yang memenuhi permintaan tersebut adalah:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x} + \text{vektor kolom ke-}j \text{ dari } (I - C)^{-1}$$

(b) Dalam kata-kata, apa signifikansi ekonomis dari vektor kolom ke-j dari $(I - C)^{-1}$? [Petunjuk: lihat $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}$]

11. Buktikan: jika C adalah matrik $n \times n$ dimana entri-entrinya adalah nonegatif dan jumlah dalam barisnya kurang dari 1, maka $(I - C)$ dapat dibalik dan memiliki entri nonnegatif. [Petunjuk: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ untuk setiap matrik A yang dapat dibalik]

oOoEndoOo

Suplemen Latihan 1

Untuk soal nomor 1 – 4 representesaikan sistem linier berikut dalam bentuk matrik perluasan. Tuliskan himpunan penyelesaian yang sesuai dari sistem persamaan linier tersebut, dan gunakan eliminasi Gauss untuk menyelesaikannya. Gunakan parameter seperlunya.

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & 2 \\ 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Gunakan eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan x' dan y' dalam variabel x dan y.

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$
$$y = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'$$

6. Gunakan eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan x' dan y' dalam variabel x dan y.

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$y = x' \sin\theta - y' \cos\theta$$

7. Tentukan bilangan bulat positif yang memenuhi:

$$x + y + z = 9$$
$$x + 5y + 10z = 44$$

8. Sebuah kotak berisi pennies, nickels, dan dimes, memiliki 13 koin dengan total nilai 83 sen. Berapa banyak koin dari masing-masing jenis di dalam kotak?

[Petunjuk: Pennies = beberapa koin penny, dimana 1 koin penny =1 sen, Nickels = beberapa koin Nickel, dimana 1 koin Nickel = 5 sen, Dimes = beberapa koin Dime, dimana 1 koin Dime = 10 sen]

9. Misalkan

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

Adalah matrik perluasan dari suatu sistem linier. Tentukan untuk nilai a dan b jika sistem memiliki:
(a) Solusi tunggal
(b) Solusi satu parameter
(c) Solusi dua parameter
(d) Tidak ada solusi

10. Untuk nilai a berapa, sehingga sistem berikut memiliki nol solusi? Satu solusi? Solusi tak hingga?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 44 \\ (a^2 - 4)x_3 &= a - 2 \end{aligned}$$

11. Tentukan matrik K sedemikian sehingga $AKB = C$, jika diberikan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Bagaimanakah seharusnya nilai koefisien $a, b,$ dan c sehingga sistem berikut:

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

Memiliki solusi $x = 1, y = -1, z = 2$?

13. Pada setiap bagian, selesaikan persamaan matrik untuk X.
(a) $X\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
(b) $X\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}X - X\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

14. Misalkan A adalah matrik persegi.

   (a) Buktikan bahwa $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ jika $A^4 = 0$.
   (b) Buktikan bahwa $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ jika $A^{n+1} = 0$.

15. Tentukan nilai $a, b,$ dan c sedemikian sehingga grafik polinomial $p(x) = ax^2 + bx + c$ melalui titik-titik $(1, 2), (-1, 6)$, dan $(2,3)$.

16. (***Memerlukan kalkulus***) Tentukan nilai-nilai a, b, dan c sedemikian sehingga grafik polinomial $p(x) = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(-1,0)$ dan memiliki tangen horisontal di titik $(2, -9)$.

17. Misalkan J_n adalah matrik $n \times n$ dimana sentri-entrinya adalah 1. Buktikan bahwa jika $n > 1$, maka:
$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$$

18. Buktikan bahwa jika matrik persegi A memenuhi:
$$A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$$
Maka begitu pula A^T.

19. Buktikan: jika B dapat dibalik, maka $AB^{-1} = B^{-1}A$ jika dan hanya jika $AB = BA$.

20. Buktikan: jika A dapat dibalik, maka $A + B$ dan $I + BA^{-1}$ kedua-duanya dapat dibalik atau kedua-duanya tidak dapat dibalik.

21. Buktikan: jika A matrik $m \times n$ dan B matrik $n \times 1$ dimana masing-masing entrinya adalah $\frac{1}{n}$, maka:
$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$
Dimana $\bar{r}_i$ adalah rata-rata entri pada baris ke-i dalam matrik A.

22. (***Memerlukan kalkulus***) Jika entri-entri dari matrik:
$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \dots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \dots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \dots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Adalah fungsi-fungsi x yang berbeda, maka kita definisikan:

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \dots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \dots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \dots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa jika entri dalam A dan B merupakan fungsi terdiferensiasi dari x dan ukuran dari matriks adalah sedemikian rupa sehingga operasi yang dinyatakan dapat dilakukan, maka:

(a) $\frac{d}{dx}(kA) = k\frac{dA}{dx}$

(b) $\frac{d}{dx}(A+B) = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}$

(c) $\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx}$

23. (***Memerlukan kalkulus***) Gunakan bagian (c) pada soal nomor 22 untuk membuktikan bahwa:

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

Nyatakan semua asumsi yang Anda buat untuk mendapatkan formula ini.

24. Dengan asumsi bahwa kebalikan yang dinyatakan ada, buktikan persamaan berikut:

(a) $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C+D)^{-1}D$

(b) $(I + CD)^{-1}C = C(I + DC)^{-1}$

(c) $(C + DD^T)^{-1} = C^{-1}D(I + D^TC^{-1}D)^{-1}$

oOoEndo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 10

Kegiatan Belajar 10: Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menentukan minor dan kofaktor dari matrik persegi.
2. Peserta didik dapat menggunakan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan matrik persegi.
3. Peserta didik dapat menggunakan teknik panah untuk menghitung determinan matrik 2×2 atau 3×3.
4. Peserta didik dapat menggunakan determinan dari matrik 2×2 yang dapat dibalik, untuk menentukan invers dari matrik tersebut.
5. Peserta didik dapat menentukan determinan dari matrik segitiga atas, bawah, atau diagonal dengan inspeksi.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menentukan minor dan kofaktor dari matrik persegi.
2. Menggunakan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan matrik persegi.
3. Menggunakan teknik panah untuk menghitung determinan matrik 2×2 atau 3×3.
4. Menggunakan determinan dari matrik 2×2 yang dapat dibalik, untuk menentukan invers dari matrik tersebut.
5. Menentukan determinan dari matrik segitiga atas, bawah, atau diagonal dengan inspeksi.

C. Uraian Materi

Pada bagian ini, kita akan belajar "penentu (determinan)" atau lebih tepatnya "fungsi penentu (fungsi determinan)". Tidak seperti fungsi bernilai riil, seperti $f(x) = x^2$, yang mengukur suatu bilangan riil ke variabel x riil, fungsi determinan mengukur bilangan riil $f(A)$ ke variabel matrik A. Meskipun determinan pertama kali muncul dalam konteks penyelesaian sistem persamaan linear, mereka tidak lagi digunakan untuk tujuan itu dalam aplikasi dunia nyata. Meskipun mereka dapat berguna untuk memecahkan sistem linear yang sangat kecil (katakanlah dua atau tiga tidak diketahui), minat utama kita di dalamnya berasal dari fakta bahwa mereka menghubungkan secara bersamaan berbagai konsep dalam aljabar linier dan memberikan rumus yang berguna untuk kebalikan (invers) dari matriks.

2.1. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Pada bagian ini kita akan mendefinisikan pengertian "penentu (determinan)." Ini akan memungkinkan kita untuk memberikan rumus spesifik untuk invers dari matriks yang dapat dibalik, sedangkan hingga kini kita hanya memiliki prosedur komputasi untuk menemukannya. Ini, pada gilirannya, pada akhirnya akan memberi kita formula untuk solusi dari beberapa jenis sistem linear.

Lihat kembali Teorema 1.4.5 bahwa matrik 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dapat dibalik, jika dan hanya jika $ad - bc \neq 0$ dan ekspresi $ad - bc$ disebut determinan dari matrik A. Lihat kembali bahwa determinan dinotasikan dengan:

$$\det(A) = ad - bc \text{ atau } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (1)$$

Dan invers dari A dapat diekspresikan dalam bentuk determinan sebagai:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \mathrm{d} & -\mathrm{b} \\ -\mathrm{c} & \mathrm{a} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

PERINGATAN

Penting untuk diingat bahwa det(A) adalah angka, sedangkan A adalah matriks.

2.1.1. Minor dan Kofaktor

Salah satu tujuan utama kita dalam bab ini adalah memperoleh analogi dari Formula (2) yang berlaku untuk matriks kuadrat dari semua ukuran. Untuk tujuan ini kita akan merasa nyaman untuk menggunakan entri-entri yang ber-indeks ketika menulis matriks atau determinan. Sehingga, jika kita menotasikan suatu matrik 2×2 sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka dua persamaan pada (1) berbentuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

Kita mendefinisikan determinan dari matrik A $1 \times 1 = [a_{11}]$ sebagai

$$\det[A] = \det[a_{11}] = a_{11}$$

Definisi berikut akan menjadi kunci bagi tujuan kita untuk memperluas definisi determinan menjadi matriks dengan ordo yang lebih tinggi.

DEFINISI 1

Jika A matrik persegi, maka ***minor dari entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ *dinotasikan dengan* M_{ij} *dan didefinisikan sebagai determinan dari submatrik yang merupakan sisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A. Bilangan* $(-1)^{i+j}M_{ij}$ *dinotasikan dengan* C_{ij} *dan disebut* ***kofaktor dari entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Contoh 1: Menentukan Minor dan Kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka minor dari entri a_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

Dan kofaktor dari a_{11} adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 16$$

Demikian pula, minor dari entri a_{32} adalah

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

Dan kofaktor dari a_{32} adalah

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

PERINGATAN

Kita mengikuti konvensi standar menggunakan huruf besar untuk menunjukkan minor dan kofaktor meskipun mereka angka, bukan matriks.

Catatan Sejarah Istilah determinan pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman, Carl Friedrich Gauss pada tahun 1801 (lihat hal. 15), yang menggunakannya untuk "menentukan" sifat dari beberapa jenis fungsi tertentu. Menariknya, istilah matriks berasal dari kata Latin "rahim" karena dipandang sebagai wadah determinan.

Catatan Sejarah Istilah minor ini rupanya disebabkan oleh matematikawan Inggris James Sylvester (lihat hal. 34), yang menulis dalam sebuah makalah yang diterbitkan pada tahun 1850: "Sekarang bayangkan satu baris dan satu kolom terlempar keluar, kita mendapatkan … suatu persegi, satu istilah yang kurang luas dan dalam dibandingkan dengan persegi aslinya; dan dengan memvariasikan dalam setiap pilihan yang mungkin dari garis dan kolom yang dikecualikan, kita memperoleh, andaikan persegi asli tersebut terdiri dari n baris dan n kolom, seperti persegi minor n^2, masing-masing akan mewakili apa yang kita sebut sebagai "Determinan minor pertama" yang relatif terhadap determinan utama."

Catatan Catat bahwa minor M_{ij} dan kofaktor C_{ij} yang sesuai adalah sama atau negatif satu sama lain dan bahwa tanda yang terkait $(-1)^{i+j}$ adalah $+1$ atau -1 sesuai dengan pola dalam susunan berikut ini:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh,

$$C_{11} = M_{11}, \qquad C_{21} = -M_{21}, \qquad C_{22} = M_{22}$$

Dan seterusnya. Jadi, tidak perlu betul-betul menghitung $(-1)^{i+j}$ untuk menghitung C_{ij} – Anda dapat menghitung secara sederhana minor M_{ij} dan kemudian mencocokkan pola tanda pada susunan di atas. Cobalah hal ini pada Contoh 1.

Contoh 2: Ekspansi Kofaktor Matrik 2×2

Pola susunan untuk matrik A $2 \times 2 = [a_{ij}]$ adalah

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$C_{11} = M_{11} = a_{22} \qquad C_{12} = -M_{12} = -a_{21}$$

$$C_{21} = -M_{21} = -a_{12} \quad C_{22} = M_{22} = a_{11}$$

Kami tinggal untuk Anda Formula (3) untuk diverifikasi bahwa $\det(A)$ dapat diekspresikan dalam bentuk kofaktor dengan empat langkah berikut ini:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} \end{aligned} \tag{4}$$

Masing-masing dari empat persamaan terakhir disebut ekspansi kofaktor $\det(A)$. Dalam setiap ekspansi kofaktor, entri dan kofaktor semua berasal dari baris atau kolom yang sama dari A. Misalnya, dalam persamaan pertama entri dan kofaktor semuanya berasal dari baris pertama A, di persamaan kedua, semua berasal dari baris kedua dari A, di persamaan ketiga, semua berasal dari kolom pertama A, dan di keempat mereka semua berasal dari kolom kedua A.

2.1.2. Definisi Determinan Secara Umum

Formula (4) adalah kasus khusus dari generalisasi berikut, dimana kita akan menyatakan tanpa membuktikan.

TEOREMA 2.1.1.

Jika A adalah matrik $n \times n$, maka terlepas dari baris atau kolom mana yang dipilih dari A, jumlah yang diperoleh dengan mengalikan entri dalam baris atau kolom tersebut oleh kofaktor yang sesuai dan menambahkan produk yang dihasilkan, akan selalu sama.

Hasil ini memungkinkan kita untuk membuat definisi berikut.

DEFINISI 2

Jika A adalah matrik $n \times n$, maka jumlah yang diperoleh dengan mengalikan entri pada baris atau kolom dari A dengan kofaktor yang sesuai dan menambahkan hasil produk disebut determinan A, dan jumlah-jumlah dalam determinan A disebut ekspansi kofaktor dari A. Yaitu:

$$\det(A) = a_{ij}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$
$$[\textbf{ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke} - \boldsymbol{j}] \tag{5}$$

Dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$
$$[\textbf{ekspansi kofaktor sepanjang baris ke} - \boldsymbol{i}] \tag{6}$$

Contoh 3: Ekspansi Kofaktor Sepanjang Baris Pertama

Tentukan determinan dari matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama!

Solusi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

Contoh 4: Ekspansi Kofaktor Sepanjang Kolom Pertama

Misalkan A adalah matrik dalam Contoh 3, dan tentukan $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dari A!

Solusi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

Perhatikan bahwa dalam Contoh 4 kita harus menghitung tiga kofaktor, sedangkan pada Contoh 3 hanya dua yang diperlukan karena yang ketiga dikalikan dengan nol.Sebagai aturan, strategi terbaik untuk ekspansi cofactor adalah memperluas sepanjang baris atau kolom dengan angka nol terbanyak.

Ini sesuai dengan hasil yang diperoleh pada Contoh 3.

Catatan Sejarah Ekspansi kofaktor bukan satu-satunya metode untuk mengekspresikan determinan matriks dalam hal determinan dari ordo yang lebih rendah. Sebagai contoh, meskipun tidak diketahui dengan baik, matematikawan Inggris Charles Dodgson, yang merupakan pengarang *Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking Glass* di bawah nama pena Lewis Carroll, menemukan metode seperti itu, yang disebut "kondensasi." Metode itu baru-baru ini dibangkitkan dari ketidakjelasan karena kesesuaiannya untuk pemrosesan paralel pada komputer.

Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll) (1832–1898)

Contoh 5: Pemilihan Cerdas dari Baris dan Kolom

Jika A adalah matrik 4×4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka untuk menentukan $\det(A)$ akan lebih mudah menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua, karena memilik entri nol terbanyak:

$$\det(A) = 1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Untuk determinan matrik 3×3, akan lebih mudah menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua, karena memiliki entri nol terbanyak:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2. (1 + 2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Contoh 6: Determinan dari Matrik Segitiga Atas

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa determinan matriks segitiga atas adalah produk dari entri diagonalnya. Setiap bagian dari perhitungan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}|a_{44}| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Metode yang digunakan pada Contoh 6 dapat dengan mudah diterapkan untuk membuktikan bentuk umum berikut:

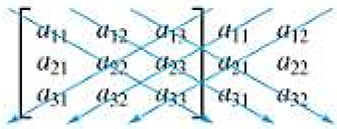
TEOREMA 2.1.2.

Jika A matrik segitiga (atas, bawah, diagonal) $n \times n$, maka $de\,t(A)$ adalah produk dari entri-entri diagonal utama dari A, yaitu:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

2.1.3. Teknik yang Berguna untuk Menghitung Determinan 2×2 dan 3×3

Determinan dari matrik 2×2 dan 3×3 dapat ditentukan secara efisien pola seperti pada Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1. 1. Pola Determinan 2×2 dan 3×3

Dalam kasus 2×2, determinan dapat dihitung dengan membentuk produk entri panah ke kanan dikurangi produk entri panah ke kiri.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Yang sesuai dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

PERINGATAN

Teknik panah hanya berguna untuk determinan dari matrik 2×2 *dan* 3×3

Contoh 7: Teknik Menghitung Determinan Matrik 2×2 dan 3×3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240$$

Latihan 2.1

Untuk soal nomor 1 – 2, tentukan semua minor dan kofaktor dari matrik A.

1. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:
(a) M_{13} dan C_{13}
(b) M_{23} dan C_{23}
(c) M_{22} dan C_{22}
(d) M_{21} dan C_{21}

4. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

(a) M_{32} dan C_{32}

(b) M_{44} dan C_{44}

(c) M_{41} dan C_{41}

(d) M_{24} dan C_{24}

Untuk soal nomor 5 – 8, hitunglah determinan dari matrik-matrik berikut. Jika matrik dapat dibalik, gunakan persamaan (2) untuk menentukan inversnya.

5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Untuk nomor 9 – 14, gunakan teknik panah untuk menghitung determinan dari matrik-matrik berikut:

9. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 15 – 18, tentukan semua nilai λ apabila $\det(A) = 0$.

15. $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 4 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$

19. Hitunglah determinan matrik pada soal nomor 13 dengan ekspansi kofaktor sepanjang:
    (a) Baris pertama
    (b) Kolom pertama
    (c) Baris kedua
    (d) Kolom kedua
    (e) Baris ketiga
    (f) Kolom ketiga

20. Hitunglah determinan matrik pada soal nomor 12 dengan ekspansi kofaktor sepanjang:
    (a) Baris pertama
    (b) Kolom pertama
    (c) Baris kedua
    (d) Kolom kedua
    (e) Baris ketiga
    (f) Kolom ketiga

Untuk soal nomor 21 – 26, hitunglah $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom pilihan Anda.

21. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 27 – 32, tentukan determinan dari matrik-matrik berikut dengan inspeksi.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$

33. Tunjukkan bahwa nilai determinan berikut bebas dari θ.

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta)-\cos(\theta) & \sin(\theta)+\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

34. Buktikan bahwa matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

Saling bolak balik jika dan hanya jika:

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

35. Dengan cara inspeksi, apa hubungan determinan-determinan di bawah ini:

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ dan } d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

36. Buktikan bahwa:

$$\det(A) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}$$

Untuk setiap matrik A 2×2.

37. Apa yang dapat Anda simpulkan terkait determinan ordo ke-n yang memiliki entri adalah 1? Jelaskan alasan Anda.
38. Berapa jumlah nol maksimum yang dapat dimiliki matrik 3×3 sehingga determinannya adalah tidak nol? Jelaskan alasan Anda.
39. Berapa jumlah nol maksimum yang dapat dimiliki matrik 4×4 sehingga determinannya adalah tidak nol? Jelaskan alasan Anda.
40. Buktikan bahwa $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dan (x_3, y_3) adalah titik-titik kolinier jika dan hanya jika:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

41. Buktikan bahwa persamaan garis yang melalui titik-titik yang berbeda yaitu (a_1, b_1) dan (a_2, b_2) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

42. Buktikan bahwa jika A adalah matrik segitiga atas dan B_{ij} adalah matrik yang dihasilkan apabila baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A, kemudian B_{ij} adalah segitiga atas jika $i < j$.

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 11

Kegiatan Belajar 11: Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat mengetahui efek dari operasi baris elementer pada nilai suatu determinan.
2. Peserta didik dapat mengetahui determinan dari tiga jenis matrik elementer.
3. Peserta didik dapat mengetahui cara memasukkan nol ke dalam baris atau kolom suatu matriks untuk memfasilitasi perhitungan determinannya..
4. Peserta didik dapat menggunakan reduksi baris untuk menghitung determinan suatu matrik.
5. Peserta didik dapat menggunakan operasi kolom untuk menghitung determinan suatu matrik.
6. Peserta didik dapat mengkombinasikan reduksi baris dan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan suatu matrik.

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Mengetahui efek dari operasi baris elementer pada nilai suatu determinan.
2. Mengetahui determinan dari tiga jenis matrik elementer.
3. Mengetahui cara memasukkan nol ke dalam baris atau kolom suatu matriks untuk memfasilitasi perhitungan determinannya..
4. Menggunakan reduksi baris untuk menghitung determinan suatu matrik.
5. Menggunakan operasi kolom untuk menghitung determinan suatu matrik.
6. Mengkombinasikan reduksi baris dan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan suatu matrik.

C. Uraian Materi

2.2. Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Pada bagian ini, kita akan menunjukkan bagaimana menghitung determinan dengan mereduksi matrik terkait ke bentuk eselon baris. Secara umum, metode ini membutuhkan perhitungan yang lebih sedikit daripada ekspansi kofaktor dan karenanya metode ini dipilih untuk matrik berukuran besar.

2.2.1. Teorema Dasar

Kita mulai dengan terorema fundamental yang membawa kita kepada suatu prosedur yang efisien untuk menentukan determinan matrik persegi dengan ukuran apapun.

TEOREMA 2.2.1.

Misalkan A adalah matrik persegi. Jika A memiliki barisan nol atau kolom bernilai nol, maka $det(A) = 0$.

Bukti Karena determinan A dapat ditentukan dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom apapun, kita dapat menggunakan bari atau kolom yang bernilai nol. Sehingga jika kita misalkan $C_1, C_2, \dots, C_n$ sebagai kofaktor dari A sepanjang baris atau kolom, kemudian dengan formula (5) atau (6) dalam bagian 2.1., bahwa:

$$\det(A) = 0.C_1 + 0.C_2 + \cdots + 0.C_n = 0$$

Teroema berikut berguna terkait determinan suatu matrik dan determinan dari transposenya.

TEOREMA 2.2.2.

Misalkan A adalah matrik persegi. Maka $\det(A) = \det(A^T)$.

Bukti Karena mentrasnpose matrik merubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, ekspansi kofaktor sari A sepanjang baris manapun sama saja dengan ekspansi kofaktor dari A^T sepanjang kolom yang bersesuaian. Sehingga, baik A maupun A^T memiliki determinan yang sama.

2.2.2. Operasi Baris Elementer

Teorema berikutnya menunjukkan bagaimana operasi baris elementer pada matriks persegi mempengaruhi nilai determinannya. Sebagai pengganti bukti formal, kami menyediakan tabel untuk mengilustrasikan ide-ide dalam kasus ini (lihat Tabel 5).

TEOREMA 2.2.3.

Misalkan A adalah matrik $n \times n$.

(a) Jika B adalah matrik yang dihasilkan ketika satu baris atau satu kolom dari A adalah perkalian dengan skalar k, maka $det(B) = kde\,t(A)$.

(b) Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika dua baris atau dua kolom matrik A dipertukarkan, maka $det(B) = -de\,t(A)$.

(c) Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika beberapa baris matrik A ditambahkan ke baris lain atau beberapa kolom ditambahkan ke kolom lain, maka $det(B) = de\,t(A)$.

Panel pertama dari Tabel 5 menunjukkan bahwa Anda dapat membawa faktor umum dari setiap baris (kolom) dari determinan melalui tanda determinan. Ini adalah cara berpikir yang sedikit berbeda tentang bagian (a) dari Teorema 2.2.3.

Tabel 5. Hubungan Dua Matriks dan Operasi Baris

Hubungan	Operasi
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\mathbf{det}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{k}\mathbf{de\,t}(\boldsymbol{A})$	Baris pertama dari A dikalikan dengan k
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\mathbf{det}(\boldsymbol{B}) = -\mathbf{de\,t}(\boldsymbol{A})$	Baris pertama dan kedua dari A ditukar tempat
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\mathbf{det}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{de\,t}(\boldsymbol{A})$	Beberapa kali baris kedua ditambahkan ke baris pertama

Kami akan memverifikasi persamaan pertama di Tabel 5 dan meninggalkan dua lainnya untuk Anda. Untuk memulai, perhatikan bahwa determinan pada kedua sisi persamaan hanya berbeda pada baris pertama, jadi determinan ini memiliki kofaktor yang sama, yaitu C_{11}, C_{12}, C_{13} di sepanjang baris tersebut (karena kofaktor tersebut hanya bergantung pada entri di baris kedua dan ketiga). Dengan demikian, memperluas sisi kiri oleh kofaktor di sepanjang baris pertama menghasilkan:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}C_{11} + ka_{12}C_{12} + ka_{13}C_{13}$$

$$= k(a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.2.3. Matriks Elementer

Ini akan berguna untuk diperhatikan kasus khusus dari Teorema 2.2.3 di mana $A = I_n$ adalah matriks identitas $n \times n$ dan E (daripada A) menunjukkan matriks elementer yang dihasilkan ketika operasi baris dilakukan. Dalam kasus khusus ini Teorema 2.2.3 menyiratkan hasil berikut.

TEOREMA 2.2.4.

Misalkan E matrik elementer $n \times n$.

(a) Jika E dihasilkan dari mengalikan satu baris dari I_n dengan bilangan k bukan nol, maka $\det(E) = k$.

(b) Jika E dihasilkan dari menukar dua baris dari I_n, maka $\det(E) = -1$.

(c) Jika E dihasilkan dari menambahkan satu baris dari I_n ke baris lain, maka $\det(E) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Baris kedua dikali 3 **Baris pertama dan terakhir ditukar** **7 kali baris terakhir ditambah ke baris pertama**

2.2.4. Matriks dengan Baris atau Kolom Proporsional

Jika matriks persegi A memiliki dua baris proporsional, maka barisan nol dapat dimunculkan dengan menambahkan kelipatan yang sesuai dari salah satu baris ke baris lainnya. Demikian pula untuk kolom. Tetapi menambahkan kelipatan satu baris atau kolom ke kolom lainnya tidak mengubah determinan, jadi dari Teorema 2.2.1, kita harus memiliki $\det(A) = 0$. Ini membuktikan teorema berikut.

TEOREMA 2.2.5.

Jika matriks persegi A memiliki dua baris atau dua kolom proporsional, maka $det(A) = 0$.

Contoh 2: Memunculkan Barisan Nol

Perhitungan di bawah ini menunjukkan bagaimana memunculkan barisan nol apabila terdapat dua baris yang proporsional.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \longleftarrow$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua untuk memunculkan barisan nol

Masing-masing matrik berikut ini memiliki dua baris yang proporsional, sehingga masing-masing memiliki determinan nol.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{vmatrix}$$

2.2.5. Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Kita sekarang akan mendapatkan metode untuk mengevaluasi determinan yang melibatkan perhitungan jauh lebih sedikit daripada ekspansi kofaktor. Ide dari metode ini adalah untuk mereduksi matriks yang diberikan ke bentuk segitiga atas oleh operasi baris elementer, kemudian menghitung determinan matriks segitiga atas (perhitungan mudah), dan kemudian menghubungkan determinan itu dengan matriks asli. Berikut ini contohnya.

Contoh 3: Menggunakan Reduksi Baris untuk Menentukan Determinan

Hitunglah $\det(A)$ dimana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solusi Kita akan mereduksi A ke bentuk eselon baris (yaitu segitiga atas) dan menerapkan Teorema 2.1.2.

Bahkan dengan komputer tercepat saat ini, butuh jutaan tahun untuk menghitung sutau determinan oleh ekspansi kofaktor, jadi metode berdasarkan pengurangan baris sering digunakan untuk determinan besar. Untuk determinan ukuran kecil (seperti yang ada dalam teks ini), ekspansi kofaktor sering merupakan pilihan yang masuk akal.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \longleftarrow$$

Tukarkan baris pertama dan kedua

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \longleftarrow$$

Faktor bersama dari baris pertama yaitu 3 dikeluarkan

$$= -3\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 5\\0 & 10 & -5\end{vmatrix}$$

-2 kali baris pertama ditambahkan ke baris ketiga

$$= -3\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 5\\0 & 0 & -55\end{vmatrix}$$

-10 kali baris kedua ditambah ke baris ketiga

$$= -3(-55)\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 5\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Faktor bersama -55 dikeluarkan

$$= -3(-55)(1) = 165$$

Contoh 4: Menggunakan Operasi Kolom untuk Menghitung Determinan

Hitunglah determinan dari:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\2 & 7 & 0 & 6\\0 & 6 & 3 & 0\\7 & 3 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

Solusi Determinan ini dapat dihitung seperti perhitungan pada contoh 3 dengan menggunakan operasi baris elementer untuk mereduksi A ke bentuk eselon baris, tapi kita dapat membuat A menjadi matrik segitiga bawah dengan satu langkah yaitu menambahkan -3 kali kolom pertama ke kolom keempat, diperoleh:

$$\det(A) = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 7 & 0 & 0\\0 & 6 & 3 & 0\\7 & 3 & 1 & -26\end{vmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Contoh 4 menunjukkan bahwa selalu bijaksana untuk mengawasi operasi kolom yang dapat memperpendek perhitungan.Ekspansi kofaktor dan operasi baris atau kolom terkadang dapat digunakan dalam kombinasi untuk menyediakan metode yang efektif untuk mengevaluasi determinan. Contoh berikut mengilustrasikan ide ini.

Contoh 5: Operasi Baris dan Ekspansi Kofaktor

Hitunglah $\det(A)$ dimana:

$$A = \begin{bmatrix}3 & 5 & -2 & 6\\1 & 2 & -1 & 1\\2 & 4 & 1 & 5\\3 & 7 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

Solusi Dengan menambhakan perkalian yang sesuai dari baris kedua ke baris lainnya, kita peroleh:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$ ← Ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$ ← Tambahkan baris pertama ke baris ketiga

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$ ← Ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama

$$= -18$$

Latihan 2.2

Untuk soal nomor 1 – 4 , verifikasi bahwa $\det(A) = \det(A^T)$.

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$
4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 5 – 9, tentukan determinan dari matrik di bawah ini dengan inspeksi.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 10 – 17, hitunglah determinan dari matrik berikut dengan mereduksi matrik ke bentuk eselon baris.

10. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

18. Ulangi soal nomor 10 – 13 dengan menggunakan kombinasi reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

19. Ulangi soal nomor 14 – 17 dengan menggunakan kombinasi reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

Untik soal nomor 20 – 27, hitunglah determinan jika diberikan:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

20. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$
21. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$
22. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$
23. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$
24. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
25. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
26. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$
27. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

28. Buktikan bahwa

(a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

(b) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = -a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

29. Gunakan reduksi baris untuk membuktikan bahwa

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Untik soal nomor 30 – 33, konfirmasi identitas tanpa menghitung determinan secara langsung.

30. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 t & a_2 + b_2 t & a_3 + b_3 t \\ a_1 t + b_1 & a_2 t + b_2 & a_3 t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ta_1 & c_1 + rb_1 + sa_1 \\ a_2 & b_2 + ta_2 & c_2 + rb_2 + sa_2 \\ a_3 & b_3 + ta_3 & c_3 + rb_3 + sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

34. Tentukan determinan dari matrik berikut:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

Untuk soal nomor 35 – 36, buktikan bahwa $\det(A) = 0$ tanpa menghitung secara langsung determinan.

35. $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

oOoEndo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 12

Kegiatan Belajar 12: Sifat-sifat Determinan: Aturan Cramer

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat mengetahui prilaku determinan terkait dengan operasi dasar aritmatika, seperti dalam persamaan (1), Teorema 2.3.1, Lemma 2.3.2, dan Teorema 2.3.4.
2. Peserta didik dapat menggunakan determinan untuk menguji keterbalikan suatu matrik.
3. Peserta didik dapat mengetahui bagaimana $\det(A)$ dan $\det(A^{-1})$ saling terkait.
4. Peserta didik dapat menghitung matrik kofaktor dari suatu matrik persegi A.
5. Peserta didik dapat menghitung $\mathrm{adj}(A)$ dari suatu matrik persegi A.
6. Peserta didik dapat menggunakan adjoint dari matrik yang dapat dibalik untuk menentukan invesnya.
7. Peserta didik dapat menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.
8. Peserta didik dapat mengetahui karakterisitik ekuivalensi dari matriks yang dapat dibalik yang diberikan dalam Teorema 2.3.8.

Metode Pembelajaran : ***Direct Learning, Pendekatan Saintifik***
Model Pembelajaran : ***Drill, Scaffolding, Problem Based Learning***

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Mengetahui prilaku determinan terkait dengan operasi dasar aritmatika, seperti dalam persamaan (1), Teorema 2.3.1, Lemma 2.3.2, dan Teorema 2.3.4.
2. Menggunakan determinan untuk menguji keterbalikan suatu matrik.
3. Mengetahui bagaimana $\det(A)$ dan $\det(A^{-1})$ saling terkait.
4. Menghitung matrik kofaktor dari suatu matrik persegi A.
5. Menghitung $\mathrm{adj}(A)$ dari suatu matrik persegi A.
6. Menggunakan adjoint dari matrik yang dapat dibalik untuk menentukan invesnya.
7. Menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

8. Mengetahui karakterisitik ekuivalensi dari matriks yang dapat dibalik yang diberikan dalam Teorema 2.3.8.

C. Uraian Materi

2.3. Sifat-sifat Determinan: Aturan Cramer

Pada bagian ini kita akan membangun beberapa sifat fundamental dari matrik, dan kita akan menggunakannya untuk menurunkan suatu formula untuk invers dari matrik yang dapat dibalik dan formula-formula untuk solusi macam-macam sistem linier.

2.3.1. Sifat-sifat Dasar Determinan

Misalkan A dan B adalah matrik $n \times n$ dan k adalah suatu skalar. Kita mulai dari memperhatikan hubungan-hubungan yang mungkin antara $\det(A)$, $\det(B)$, dan $\det(kA)$, $\det(A+B)$, dan $\det(AB)$.

Karena faktor bersama dari suatu baris dalam suatu matrik dapat dipindahkan keluar, dan karena masing-masing baris ke-n memiliki faktor bersama k, maka:

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{1}$$

Sebagai contoh,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sayangnya, tidak ada hubungan yang sederhana antara $\det(A)$, $\det(B)$, dan $\det(AB)$. Secara khusus, kita menekankan bahwa $\det(A+B)$ biasanya tidak akan sama dengan $\det(A) + \det(B)$. Contoh berikut mengilustrasikan fakta ini.

Contoh 1: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Perhatikan,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Kita punya $\det(A) = 1, \det(B) = 9$, dan $\det(A+B) = 23$, sehingga $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Terlepas dari contoh sebelumnya, ada hubungan yang berguna mengenai jumlah determinan yang berlaku ketika matriks yang terlibat adalah sama kecuali untuk satu baris (kolom). Sebagai contoh, perhatikan dua matriks berikut yang hanya berbeda pada baris kedua:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Menghitung determinan A dan B, kita peroleh:

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Ini adalah kasus khusus dari generalisasi berikut.

TEOREMA 2.3.1.

Misalkan A, B, dan C adalah matrik $n \times n$ yang hanya berbeda pada satu baris, katakan baris ke-r, dan asumsikan bahwa baris ke-r dari C dapat diperoleh dengan menambahkan entri yang sesuai pada baris ke-r dari A dan B. Maka $det(C) = det(A) + de\,t(B)$.

Hasil yang sama diperoleh untuk kolom.

Contoh 2: Jumlah Determinan

Kami tinggalkan untuk Anda untuk dikonfirmasi kesamaan berikut dengan menghitung determinannya.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Determinan dari Produk Matrik

Perhatikan kompleksitas rumus untuk determinan dan perkalian matriks, tampaknya tidak mungkin ada hubungan sederhana di antara keduanya. Inilah yang membuat kesederhanaan hasil kita berikutnya sangat mengejutkan. Kita akan menunjukkan bahwa jika A dan B adalah matriks persegi dengan ukuran yang sama, maka,:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{2}$$

Bukti teorema ini cukup rumit, jadi kita harus mengembangkan beberapa hasil awal terlebih dahulu. Kita mulai dengan kasus khusus (2) di mana A adalah matriks elementer. Karena kasus khusus ini hanya permulaan ke (2), kita menyebutnya lemma.

LEMMA 2.3.2.

Jika B adalah matrik $n \times n$ dan E adalah matrik elementer $n \times n$, maka:

$$det(EB) = det(E)\, det(B)$$

Bukti Kita akan memperhatikan tiga kasus, masing-masing sesuai dengan operasi baris yang menghasilkan matriks E.

Kasus 1 Jika E dihasilkan dari perkalian baris dari I_n dengan k, maka dengan Teorema 1.5.1, EB dihasilkan dari B dengan mengalikan baris yang sesuai dengan k, sehingga dari Teorema 2.2.3 (a), kita punya:

$$\det(EB) = k\det(B)$$

Tetapi dari Teorema 2.2.4 (a), kita punya $\det(E) = k$, sehingga

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Kasus 2 dan 3 Bukti dari kasus ini dimana E dihasilkan dari pertukaran antar dua baris di I_n atau menambahkan perkalian dari satu baris ke baris lain, mengikuti pola yang sama pada kasus 1 dan ditinggalkan sebagai latihan.

Kesimpulan Ini diikuti oleh aplikasi berulang Lemma 2.3.2 bahwa jika B adalah matriks $n \times n$ dan $E_1, E_2, \ldots, E_n$ adalah matrik elementer, maka:

$$\det(E_1E_2 \ldots E_rB) = \det(E_1)\det(E_2) \ldots \det(E_r)\det(B) \tag{3}$$

2.3.3. Uji Determinan untuk Keterbalikan

Teorema kita selanjutnya memberi suatu kriteia penting untuk deteminan apakah matriknya dapat dibalik atau tidak. Hal ini juga membaw kita satu langkah lebih dekat untuk membangun Formula (2).

TEOREMA 2.3.3.

Matrik persegi A dapat dibalik jika dan hanya jika $det(A) \neq 0$.

Bukti Misalkan R adalah bentuk eselon baris tereduksi dari A. Sebagai langkah awal, kita akan menunjukkan bahwa $\det(A)$ dan $\det(R)$ keduanya nol atau keduanya bukan nol: Misalkan $E_1, E_2, \dots, E_r$ adalah matriks elementer yang sesuai dengan operasi baris elementer yang menghasilkan R dari A. Jadi:

$$R = E_r \dots E_2 E_1 A$$

Dan dari (3)

$$\det(R) = \det(E_r) \dots \det(E_2) \det(E_1) \det(A) \qquad (4)$$

Kita menunjukkan di catatan yang menyertai Teorema 2.2.4 bahwa determinan dari matriks elementer adalah bukan nol. Jadi, ini mengikuti dari Formula (4) bahwa $\det(A)$ dan $\det(R)$ keduanya nol atau keduanya bukan nol, yang menetapkan tingkatan untuk bagian utama untuk pembuktian. Jika kita berasumsi pertama bahwa A dapat dibalik, maka mengikuti dari Teorema 1.6.4 bahwa $R = I$ dan karenanya $\det(R) = 1 (\neq 0)$. Ini, pada gilirannya, menyiratkan $\det(A) \neq 0$, dimana ini yang ingin kita tunjukkan.

Ini mengikuti dari Teorema 2.3.3 dan Teorema 2.2.5 bahwa matriks persegi dengan dua baris proporsional atau dua kolom proporsional tidak dapat dibalik.

Sebaliknya, asumsikan bahwa $\det(A) \neq 0$. Ini mengikuti dari ini bahwa $\det(R) \neq 0$, yang memberitahu kita bahwa R tidak dapat memiliki barisan nol. Jadi, ini mengikuti dari Teorema 1.4.3 bahwa $R = I$ dan karenanya A dapat dibalik oleh Teorema 1.6.4.

Contoh 3: Uji Determinan untuk Keterbalikan

Karena baris pertama dan ketiga dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Adalah proporsional, $\det(A) = 0$. Maka A tidak dapat dibalik.

Kita sekarang siap untuk hasil utama mengenai produk-produk matriks.

TEOREMA 2.3.4.

Jika A dan B adalah matrik persegi dengan ukuran yang sama, maka

$$det(AB) = det(A)\, de\, t(B)$$

Bukti Kita membagi bukti menjadi dua kasus yang bergantung pada apakah A dapat dibalik atau tidak. Jika matriks A tidak dapat dibalik, maka menurut Teorema 1.6.5 juga bukan produk AB. Jadi, dari Teorema 2.3.3, kita punya $\det(AB) = 0$ dan $\det(A) = 0$, sehingga hal itu mengikuti bahwa

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Catatan Sejarah Pada tahun 1815, matematikawan Perancis yang hebat, Augustin Cauchy, menerbitkan makalah bersejarah di mana ia memberikan perlakuan yang sistematis dan modern pertama kali pada determinan. Dalam makalah itu bahwa Teorema 2.3.4 dinyatakan dan dibuktikan secara umum sepenuhnya untuk pertama kalinya. Kasus-kasus khusus teorema telah dinyatakan dan dibuktikan sebelumnya, tetapi Cauchy yang membuat lompatan terakhir.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Sekarang asumsikan bahwa A dapat dibalik. Dengan Teorema 1.6.4, matrik A dapat diekspresikan sebagai suatu produk dari matrik elementer, katakanlah:

$$A = E_1 E_2 \dots E_r \qquad (5)$$

Sehingga:

$$AB = E_1 E_2 \dots E_r B$$

Menerapkan persamaan (3) ke persamaan ini menghasilkan:

$$\det(AB) = \det(E_1) \det(E_2) \dots \det(E_r) \det(B)$$

Dan menerapkan (3) lagi menghasilkan:

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \dots E_r)$$

Dimana, dari (5), dapat ditulis sebagai $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Contoh 4: Memverifikasi bahwa $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Kami meninggalkan ini untuk Anda verifikasi bahwa:

$\det(A) = 1,\ \det(B) = -23,$ dan $\det(AB) = -23$

Sehingga $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ seperti yang dijamin dengan Teorema 2.3.4.

Teorema berikut memberikan hubungan yang berguna antara determinan matriks yang dapat dibalik dan determinan dari inversnya.

TEOREMA 2.3.5.

Jika A dapat dibalik, maka:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Bukti Karena $A^{-1}A = I$, ini mengiktui bahwa $(A^{-1}A) = \det(I)$. Oleh karenanya, kita harus memiliki $\det(A^{-1})\det(A) = I$. Karena $\det(A) \neq 0$, bukti dapat dilengkapi dengan membagi melalui oleh $\det(A)$.

2.3.4. Adjoint Suatu Matrik

Dalam ekspansi kofaktor kita menghitung $\det(A)$ dengan mengalikan entri-entri pada baris atau kolom dengan kofaktornya dan menambahkan produk yang dihasilkan. Ternyata jika salah satu perkalian entri di baris mana pun oleh kofaktor yang sesuai dari baris yang berbeda, jumlah dari produk ini selalu nol (Hasil ini juga berlaku untuk kolom). Meskipun kita menghilangkan bukti umum, contoh berikut mengilustrasikan ide bukti dalam kasus khusus.

Hal ini mengikuti Teorema 2.3.5 dan 2.1.2 bahwa:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{a_{11}} \frac{1}{a_{22}} \dots \frac{1}{a_{nn}}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan formula adjoin hal ini mungkin membuktikan bahwa:

$$\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}$$

sebenarnya adalah entri diagonal berturut-turut dari A^{-1} (bandingkan A dan A^{-1} dalam Contoh 3 dari Bagian 1.7).

Contoh 5: Entri dan Kofaktor dari Baris yang Berbeda

Misal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Perhatikan nilai-nilai

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$

yang dibentuk dengan mengalikan entri di baris pertama oleh kofaktor entri terkait di baris ketiga dan menambahkan produk yang dihasilkan. Kita dapat menunjukkan bahwa kuantitas ini sama dengan nol dengan trik berikut: Buatlah matriks A' baru dengan mengganti baris ketiga A dengan salinan lain dari baris pertama. yaitu,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Misal$C'_{31}, C'_{32}, C'_{33}$ adalah kofaktor dari entri-entri dalam baris ketiga dari A'. Karena dua baris pertama dari A dan A' sama, dan karena perhitungan $C_{31}, C_{32}, C_{33}, C'_{31}, C'_{32}$, dan C'_{33} hanya meibatkan entri dari dua baris pertama dari A dan A', ini mengikuti bahwa:

$$C_{31} = C'_{31}, \qquad C_{32} = C'_{32}, \qquad C_{33} = C'_{33}$$

Karena A' memiliki dua baris yang identik, itu mengikuti dari (3) bahwa:

$$\det(A') = 0 \tag{6}$$

Disisi lain, menghitung $\det(A')$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga memberikan:

$$\det(A') = a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} = a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \qquad (7)$$

Dari (6) dan (7) kita memperoleh:

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$

DEFINISI 1

Jika A adalah matrik $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matrik:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut matrik kofaktor dari A. Transpose dari matrik ini disebut adjoin dari A dan dinotasikan dengan $\mathrm{adj}(A)$.

Contoh 6: Adjoin Matrik 3×3

Misal

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Kofaktor-kofaktor dari A adalah:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{array}$$

Jadi matrik kofaktornya adalah:

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Dan adjoin dari A adalah:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Leonard Eugene Dickson (1874–1954)

Catatan Sejarah Penggunaan istilah adjoint untuk transpose dari matriks kofaktor tampaknya telah diperkenalkan oleh matematikawan Amerika L. E. Dickson dalam makalah penelitian yang ia terbitkan tahun 1902.

Dalam Teorema 1.4.5 kita memberikan formula untuk invers dari matrik 2×2 yang dapat dibalik. Teorema kita selanjutnya diperluas hasilnya menjadi matrik $n \times n$ yang dapat dibalik.

TEOREMA 2.3.6. Invers Matrik Menggunakan Adjoinnya

Jika A adalah matrik yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \tag{8}$$

Bukti Kita tunjukkan pertama bahwa:

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I$$

Perhatikan produk:

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dari produk $A \operatorname{adj}(A)$ adalah:

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \tag{9}$$

(lihat garis berbayang di atas).

Jika $i = j$, maka (9) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke-i dari A (Teorema 2.1.1), dan jika $i \neq j$, maka a dan kofaktor berasal dari baris-baris yang berbeda dari A, sehingga nilai dari (9) adalah nol. Dengan demikian:

$$A\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I \tag{10}$$

Karena A dapat dibalik, $\det(A) \neq 0$. Oleh karen itu, persamaan (10) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{1}{\det(A)}[A\ \text{adj}(A)] = I \text{ atau } A\left[\frac{1}{\det(A)} A\ \text{adj}(A)\right] = I$$

Mengalikan kedua sisi dari yang kiei dengan A^{-1} menghasilkan:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$

Contoh 7: Menggunakan Adjoin untuk Menentukan Invers Matrik

Gunakan (8) untuk menentukan invers dari matrik A pada Contoh 6.

Solusi Kami tinggalkan untuk Anda Cek bahwa $\det(A) = 64$, jadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

2.3.5. Aturan Cramer

Teorema kita selanjutnya menggunakan formula untuk invers dari matrik yang dapat dibalik untuk menghasilkan formula yang disebut **Aturan Cramer**, untuk solusi dari sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dari n persamaan dalam n yang tidak diketahui dalam kasus dimana koefisien matrik A adalah dapat dibalik (atau, ekuivalen ketika $\det(A) \neq 0$).

TEOREMA 2.3.7. Aturan Cramer

Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem n persamaan linier dalam n tidak diketahui sedemikian sehingga $\det(A) \neq 0$, maka sistem memiliki solusi tunggal. Solusinya adalah:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dimana A_j adalah matrik yang diperoleh dengan menukar entri-entri dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri dalam matrik:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bukti Jika $\det(A) \neq 0$, maka A dapat dibalik, dan dengan Teorema 1.6.2, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ adalah solusi tunggal dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dengan demikian, dari Teorema 2.3.6, kita punya:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Kalikan matrik, diperoleh:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} b_1C_{11} & + & b_2C_{21} & + \ldots + & b_nC_{n1} \\ b_1C_{21} & + & b_2C_{22} & + \ldots + & b_nC_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_1C_{1n} & + & b_2C_{2n} & + \ldots + & b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dalam baris ke-j dari x adalah:

$$x_j = \frac{b_1\, C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_n\, C_{nj}}{\det(A)} \tag{11}$$

Sekarang misalkan:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena A_j berbeda dari A hanya pada kolom ke-j, ini mengikuti bahwa kofaktor dari entri $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dalam A_j adalah sama dengan kofaktor dari entri yang sesuai dalam kolom ke-j dari A. Ekspansi kofaktor dari $\det(A_j)$ sepanjang kolom ke-j adalah

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

Mensubstitusikan hasil ini ke (11) menghasilkan:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Contoh 8: Menggunakan Aturan Cramer untuk Menyelesaikan Sistem Linier

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad &+ 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 &+ 6x_3 = 30 \\ -x_1 - \ 2x_2 &+ 3x_3 = 8 \end{aligned}$$

Gabriel Cramer (1704–1752)

Catatan Sejarah Variasi aturan Cramer cukup dikenal sebelum ahli matematika Swiss membahasnya dalam pekerjaan yang ia terbitkan tahun 1750. Itu adalah notasi superior Cramer yang mempopulerkan metode dan menyebabkan para matematikawan melampirkan namanya ke situ.

Solusi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Untuk $n > 3$, biasanya lebih efisien untuk menyelesaikan sistem linear dengan n persamaan dalam n tidak diketahui oleh eliminasi Gauss – Jordan *daripada dengan aturan Cramer. Penggunaan utamanya adalah untuk memperoleh sifat-sifat dari solusi dari sistem linear tanpa benar-benar menyelesaikan sistem.*

Karena itu,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

2.3.6. Teorema Ekuivalen

Dalam Teorema 1.6.4 kita membuat daftar lima hasil yang setara dengan keterbalikan matriks A. Kita menyimpulkan bagian ini dengan menggabungkan Teorema 2.3.3 dengan daftar itu untuk menghasilkan teorema berikut yang menghubungkan semua topik utama yang telah kami pelajari sejauh ini.

TEOREMA 2.3.8. Pernyataan Ekuivalen

Jika A adalah matrik $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen.

(a) A dapat dibalik.
(b) $Ax = 0$ hanya memiliki solusi trivial.
(c) Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n.
(d) A dapat diekspresikan sebagai produk dari matrik elementer.
(e) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ adalah konsisten untuk setiap matrik b $n \times 1$.
(f) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ memiliki tepat satu solusi untuk setiap matrik b $n \times 1$.
(g) $det(A) \neq 0$.

PILIHAN

Kita sekarang memiliki semua mesin yang diperlukan untuk membuktikan dua hasil berikut, yang kami nyatakan tanpa bukti dalam Teorema 1.7.1:

- Teorema 1.7.1 (*c*) Sebuah matriks segitiga dapat dibalik jika dan hanya jika entri diagonalnya semua nol.
- Teorema 1.7.1 (*d*) Kebalikan dari matriks segitiga bawah yang dapat dibalik adalah segitiga bawah, dan kebalikan dari matriks segitiga atas yang dapat dibalik adalah segitiga atas.

Bukti dari Teorema 1.7.1 (*c*) Misal $A = [a_{ij}]$ adalah matrik segitiga, sehingga entri diagonalnya adalah:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

Dari Teorema 2.1.2, matrik A dapat dibalik jika dan hanya jika:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Adalah bukan nol, dimana benar jika dan hanya jika semua entri diagonalnya bukan nol.

Bukti dari Teorema 1.7.1 (*d*) Kita akan membuktikan hasil dari matrik segitiga atas dan meninggalkan kasus segitiga bawah untuk Anda. Asumsikan bahwa A adalah matrik segitiga atas dan dapat dibalik. Karena:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Kita dapat buktikan bahwa A^{-1} adalah segitigas atas dengan menunjukkan bahwa $\operatorname{adj}(A)$ adalah segitiga atas atau secara ekuivalen, bahwa matrik kofaktornya adalah segitiga bawah. Kita dapat melakukannya dengan menunjukkan bahwa setiap kofaktor C_{ij} dengan $i < j$ (yaitu, diatas diagonal utama) adalah nol. Karena

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

itu sudah cukup untuk menunjukkan bahwa setiap minor M_{ij} dengan $i < j$ adalah nol. Untuk tujuan ini, misalkan B_{ij} menjadi matriks yang dihasilkan ketika baris ke-i dan kolom ke-j dari A dihapus, jadi:

$$M_{ij} = \det(B_{ij}) \tag{12}$$

Dari asumsi bahwa $i < j$, berarti bahwa B_{ij} adalah segitiga atas (lihat Gambar 1.7.1). Karena A adalah segitiga atas, baris ke-$(i + j)$ dimulai dengan setidaknya i nol. Namun barisan B_{ij} adalah baris ke-$(i + 1)$ dari A dengan entri di kolom ke-j dihapus. Karena $i < j$, tidak ada angka nol pertama yang dihapus dengan menghapus kolom ke-j; sehingga deretan B_{ij} dimulai dengan setidaknya i nol, yang menyiratkan bahwa baris ini memiliki nol pada diagonal utama. Sekarang mengikuti dari Teorema 2.1.2 bahwa $\det(B_{ij}) = 0$ dan dari (12) bahwa $M_{ij} = 0$.

Latihan 2.3

Untuk soal nomor 1 – 4, verifikasi bahwa $\det(kA) = k^n \det(A)$.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ k = 2$
2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \ k = -4$
3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ k = -2$
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ k = 3$

Untuk soal nomor 5 – 6, verifikasi bahwa $\det(AB) = \det(BA)$ dan tentukan apakah persamaan $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ terpenuhi.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 7 – 14, gunakan determinan untuk menyimpulkan matrik-matrik berikut dapat dibalik.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
10. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
11. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$
12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$
13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 15 – 18, tentukan nilai dari k dimana A dapat dibalik.

15. $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$
16. $A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}$
17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$
18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 19 – 23, simpulkan apakah matrik-matrik berikut dapat dibalik, dan jika bisa, gunakan metode adjoin untuk menentukan inversnya.

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Untuk soal nomor 24 – 29, selesaikan dengan Aturan Cramer, dimana ia diterapkan.

24. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 30 \\ 3x_1 + x_2 &= 8 \end{aligned}$
25. $\begin{aligned} 4x + 5y + \quad &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$

26. $$\begin{aligned} x - 4y + \quad z &= 6 \\ 4x - \ y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - \ x_2 + \quad &= -2 \\ 4x_1 - \ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 - \ x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 30 \\ -x_1 + \ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 + \ x_3 - 4x_4 &= 8 \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - \ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

30. Buktikan bahwa matrik:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik untuk semua nilai θ, kemudian tentukan A^{-1} menggunakan Teorema 2.3.6.

31. Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan y tanpa menyelesaikan x, z, dan w.

$$\begin{aligned} 4x + \quad y + \quad z + w \quad &= 6 \\ 3x + 7y - \quad z + w \quad &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + \quad y + \quad z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

32. Misalkan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem pada soal nomor 31.
    (a) Selesaikan dengan aturan Cramer.
    (b) Selesaikan dengan eliminasi Gauss-Jordan.
    (c) Metode mana antara (a) dan (b) yang paling sedikit perhitungannya?

33. Buktikan bahwa jika $\det(A) = 1$ dan semua entri dalam A adalah bilangan bulat, maka semua entri dalam A^{-1} adalah bilangan bulat.

34. Misalkan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem dari n persamaan linier dalam n yang tidak diketahui dengan koefisien dan konstanta bilangan bulat. Buktikan jika $\det(A) = 1$, solusi x memiliki entri bilangan bulat.
35. Misal

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Asumsikan bahwa $\det(A) = -7$, tentukan:
(a) $\det(3A)$
(b) $\det(A^{-1})$
(c) $\det(2A^{-1})$
(d) $\det((2A)^{-1})$
(e) $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

36. Dalam setiap bagian, tentukan determinan dari matrik A 4×4 dimana $\det(A) = -2$.
(a) $\det(-A)$
(b) $\det(A^{-1})$
(c) $\det(2A^T)$
(d) $\det(A^3)$

37. Dalam setiap bagian, tentukan determinan dari matrik A 3×3 dimana $\det(A) = 7$.

(a) $\det(3A)$
(b) $\det(A^{-1})$
(c) $\det(2A^{-1})$
(d) $\det((2A)^{-1})$

38. Buktikan bahwa matrik persegi A dapat dibalik jika dan hanya jika $A^T A$ dapat dibalik.
39. Tunjukkan bahwa jika A matrik persegi, maka $\det(A^T A) = \det(AA^T)$.

oOoEndoOo

Suplemen Latihan 2

Untuk soal nomor 1 – 8, hitunglah determinan dari matrik yang diberikan dengan (a) ekspansi kofaktor dan (b) menggunakan operasi baris elementer untuk memunculkan nol kedalam matrik.

1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$
9. Hitunglah determinan pada nomor soal 3 – 6 dengan menggunakan teknik panah (lihat Contoh 7 bagian 2.1)
10. (a) Buatlah matrik 4×4 dimana determinannya mudah untuk dihitung menggunakan ekspansi kofaktor tetapi sulit dihitung menggunakan operasi baris elementer.

    (b) Buatlah matrik 4×4 dimana determinannya mudah untuk dihitung menggunakan operasi baris elementer tetapi sulit dihitung menggunakan ekspansi kofaktor.
11. Gunakan determinan untuk menyimpulkan apakah matrik pada soal nomor 1 – 4 dapat dibalik atau tidak.
12. Gunakan determinan untuk menyimpulkan apakah matrik pada soal nomor 5 – 8 dapat dibalik atau tidak.

Untuk soal nomor 13 – 15, tentukan determinan dari matrik yang diberikan dengan metode apapun.

13. $\begin{vmatrix} 5 & b-3 \\ b-2 & -3 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ a^2 & 1 & 2 \\ 2 & a-1 & 4 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16. Tentukan nilai x dari:

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

Untuk soal nomor 17 – 24, gunakan metode adjoin (Teorema 2.3.6) untuk menentukan invers dari matrik yang diberikan, jika inversnya ada.

17. Matrik pada soal nomor 1.
18. Matrik pada soal nomor 2.
19. Matrik pada soal nomor 3.
20. Matrik pada soal nomor 4.
21. Matrik pada soal nomor 5.
22. Matrik pada soal nomor 6.
23. Matrik pada soal nomor 7.
24. Matrik pada soal nomor 8.

25. Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan x' dan y' dalam bentuk x dan y

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$
$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

26. Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan x' dan y' dalam bentuk x dan y

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

27. Dengan memeriksa determinan dari koefisien matriks, tunjukkan bahwa sistem berikut ini memiliki solusi trivial jika dan hanya jika $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} x + \quad y + \alpha z &= 0 \\ x + \quad y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \quad z &= 0 \end{aligned}$$

28. Misalkan A adalah matrik 3×3, masing-masing disetiap entrinya dalah 1 atau 0. Berapakah nilai terbesar yang mungkin dari $\det(A)$?

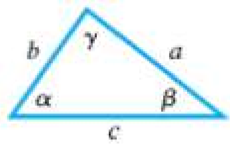
29. (a) Untuk segitiga dalam Gambar 2.3.1, gunakan trigonometri untuk membuktikan bahwa:

$$\begin{aligned} b \cos\gamma + c \cos\beta &= a \\ c \cos\alpha + a \cos\gamma &= b \\ a \cos\beta + b \cos\alpha &= c \end{aligned}$$

Dan kemudian terapkan aturan Cramer untuk menunjukkan bahwa:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) Gunakan aturan Cramer untuk memperoleh formula serupa untuk $\cos\beta$ dan $\cos\gamma$.



Gambar 2.3. 1. Suplemen Latihan 2 Nomor 29

30. Gunakan determinan untuk menunjukkan bahwa untuk semua nilai bilangan riil untuk λ, solusi satu-satunya dari:

$$\begin{aligned} x - 2y &= \lambda x \\ x - y &= \lambda y \end{aligned}$$

Adalah $x = 0,\ y = 0$.

31. Buktikan: jika A dapat dibalik, maka $\operatorname{adj}(A)$ dapat dibalik dan

$$[\operatorname{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \operatorname{adj}(A^{-1})$$

32. Buktikan: jika A adalah matrik $n \times n$, maka:

$$\det[\operatorname{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

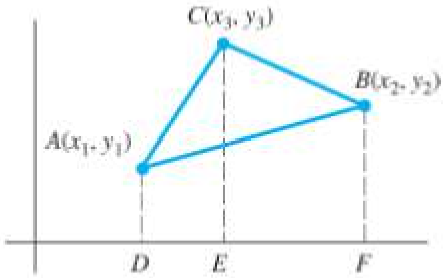
33. Buktikan: Jika entri dalam setiap baris dari matrik $n \times n$ ditambahkan sampai nol, maka determinan dari A adalah nol. [Petunjuk: perhatikan produk AX, dimana X adalah matrik $n \times 1$, dimana setiap entrinya adalah satu]

34. (a) Pada Gambar 2.3.2, luas segitiga ABC dapat diekspresikan sebagai:
Luas ABC = luas $ADEC$ + luas $CEFB$ – luas$ADFB$.
Gunakan ini dan fakta bahwa luas trapesium sama dengan $\frac{1}{2}$ kali ketinggian jumlah sisi paralel untuk menunjukkan bahwa

$$\text{Luas } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[Catatan: Dalam menurunkan rumus ini, simpul diberi label sedemikian rupa sehingga segitiga ditelusuri berlawanan arah jarum jam dari (x_1, y_1) ke (x_2, y_2) ke (x_3, y_3). Untuk orientasi searah jarum jam, determinan di atas menghasilkan luas daerah negatif.]

(b) Gunakan hasil (a) untuk menentukan luas daerah dari segitiga dengan simpul $(3, 3), (4, 0), (-2, -1)$.



Gambar 2.3. 2. Suplemen Latihan 2 Nomor 34

35. Gunakan fakta bahwa 21.375, 38.798, 34.162, 40.223, dan 79.154 adalah semuanya habis dibagi dengan 19 untuk menunjukkan bahwa:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Adalah habis dibagi 29 tanpa menghitung langsung determinanya.

36. Tanpa menghitung langsung determinannya, tunjukkan bahwa:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

oOoEndo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 13

Kegiatan Belajar 13: Ruang Vektor Euclid

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat melakukan operasi geometris pada vektor: penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar.
2. Peserta didik dapat melakukan operasi aljabar pada vektor: penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar.
3. Peserta didik dapat menentukan dua vektor yang ekuivalen.
4. Peserta didik dapat menentukan dua vektor yang kolinier.
5. Peserta didik dapat menggambar vektor.
6. Peserta didik dapat menentukan komponen-komponen vektor.
7. Peserta didik dapat membuktikan sifat-sifat aljabar vektor (Teorema 3.1.1. dan 3.1.2.)

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Melakukan operasi geometris pada vektor: penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar.
2. Melakukan operasi aljabar pada vektor: penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar.
3. Menentukan dua vektor yang ekuivalen.
4. Menentukan dua vektor yang kolinier.
5. Menggambar vektor.
6. Menentukan komponen-komponen vektor.
7. Membuktikan sifat-sifat aljabar vektor (Teorema 3.1.1. dan 3.1.2.)

C. Uraian Materi

3.1. Vektor Ruang-2, Ruang-3, Ruang-n

Aljabar linier berkaitan dengan dua jenis objek matematika, "matriks" dan "vektor." Kita sudah akrab dengan ide-ide dasar tentang matriks, jadi di bagian ini kita akan mempelajati beberapa ide dasar tentang vektor. Sebagai progres, melalui teks ini kita akan melihat bahwa vektor dan matriks terkait erat dan kebanyakan aljabar linier berkaitan dengan hubungan itu..

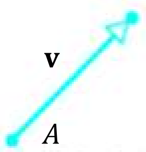
3.1.1. Vektor Geometris

Insinyur dan fisikawan mewakili vektor dalam dua dimensi (juga disebut ruang-2) atau dalam tiga dimensi (juga disebut ruang-3) dengan panah. Arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menentukan besarnya. Matematikawan menyebutnya vektor geometris. Ekor panah disebut titik awal dari vektor dan ujungnya disebut titik terminal (Gambar 3.1.1).

Gambar 3.1. 1. Vektor Geometris

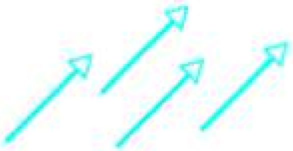
Dalam teks ini kita akan menunjukkan vektor dalam bentuk cetak tebal seperti **a**, **b**, **v**, **w**, dan **x**, dan skalar dalam tipe huruf kecil miring seperti $a, k, v, w,$ dan x. Ketika kita ingin menunjukkan bahwa vektor **v** memiliki titik awal A dan titik terminal B, maka, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.1.2, kita akan menulis:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$



Gambar 3.1. 2. Vektor AB

Vektor dengan panjang dan arah yang sama, seperti pada Gambar 3.1.3, dikatakan **ekuivalen** (setara). Karena kita menginginkan sebuah vektor ditentukan semata-mata oleh panjang dan arahnya, vektor yang ekuivalen dianggap sebagai vektor yang sama meskipun mereka mungkin berada di posisi yang berbeda. Vektor ekuivalen juga dikatakan **equal** (sama), yang kita tunjukkan dengan menulis: $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.



Gambar 3.1. 3. Vektor Ekuivalen

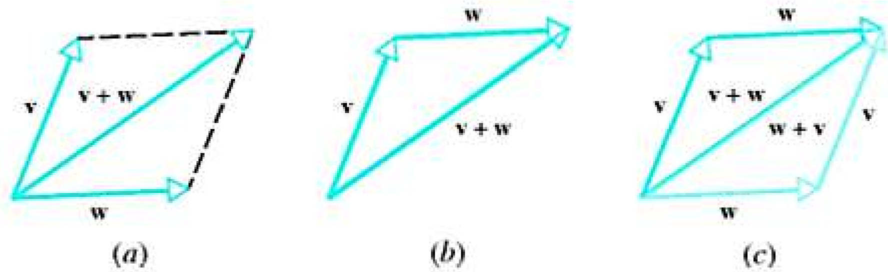
Vektor yang titik awal dan terminalnya berhimpit memiliki panjang nol, kita menyebutnya **vektor nol** dan melambangkannya dengan $\mathbf{0}$. Vektor nol tidak memiliki arah alami, jadi kita akan setuju bahwa ia dapat diberi arah apapun yang nyaman untuk masalah yang dihadapi.

3.1.2. Penjumlahan Vektor

Ada sejumlah operasi aljabar penting pada vektor, yang semuanya berasal dari hukum fisika.

Aturan Jajaran Genjang untuk Penjumlahan Vektor

Jika $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor dalam ruang-2 atau ruang-3 yang diposisikan sehingga titik awal mereka bertepatan, maka dua vektor membentuk sisi yang berdekatan dari jajaran genjang, dan penjumlahan $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ adalah vektor yang diwakili oleh panah dari titik awal yang umum dari $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ ke titik yang berlawanan dari jajaran genjang (Gambar 3.1.4*a*).



Gambar 3.1. 4. Aturan Jajaran Genjang untuk Penjumlahan Vektor

Berikut ini cara lain untuk membentuk penjumlahan dua vektor.

Aturan Segitiga untuk Penjumlahan Vektor

Jika $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor dalam ruang-2 atau ruang-3 yang diposisikan sehingga titik awal $\mathbf{w}$ bertepatan dengan titik terminal $\mathbf{v}$, maka penjumlahan $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ adalah vektor yang diwakili oleh panah dari titik awal $\mathbf{v}$ ke titik terminal $\mathbf{w}$ (Gambar 3.1.4*b*).

Pada Gambar 3.1.4c kita membuat penjumlahan $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ dan $\mathbf{w}+\mathbf{v}$ dengan aturan segitiga. Konstruksi ini membuatnya jelas bahwa:

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v} \tag{1}$$

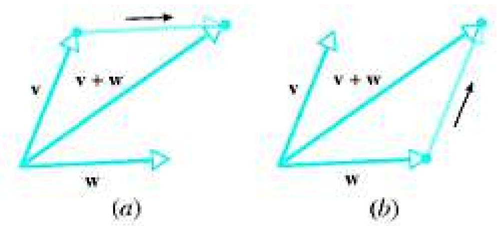
dan bahwa jumlah yang diperoleh oleh aturan segitiga adalah sama dengan jumlah yang diperoleh oleh aturan jajaran genjang. Penjumlahan vektor juga dapat dilihat sebagai proses translasi titik.

Penjumlahan Vektor Sebagai Translasi

Jika $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ dan $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ diposisikan sehingga titik-titik awalnya bertepatan, maka titik terminal dari $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ dapat dilihat dalam dua cara:

1. Titik terminal dari $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ adalah titik yang dihasilkan ketika titik terminal $\mathbf{v}$ ditranslasikan ke arah $\mathbf{w}$ yang jaraknya sama dengan panjang $\mathbf{w}$ (Gambar 3.1.5a).
2. Titik terminal dari $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ adalah titik yang dihasilkan ketika titik terminal $\mathbf{w}$ ditranslasikan ke arah $\mathbf{v}$ yang jaraknya sama dengan panjang $\mathbf{v}$ (Gambar 3.1.5b).

Dengan demikian, kita katakan bahwa $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ adalah **translasi dari v ke w** atau alternatif lain, **translasi dari w ke v**.



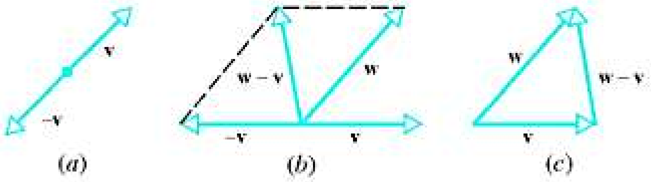
Gambar 3.1. 5. Penjumlahan Vektor Sebagai Translasi

3.1.3. Pengurangan Vektor

Dalam aritmatika biasa kita dapat menulis $a-b=a+(-b)$, yang menyatakan pengurangan dalam hal penambahan. Ada ide yang analog dalam aritmatika vektor.

Negatif dari vektor $\mathbf{v}$, dilambangkan oleh $-\mathbf{v}$, adalah vektor yang memiliki panjang yang sama dengan $\mathbf{v}$ tetapi arahnya berlawanan (Gambar 3.1.6a), dan pengurangan $\mathbf{v}$ dari $\mathbf{w}$, dilambangkan dengan $\mathbf{w}-\mathbf{v}$, dianggap sebagai penjumlahan, yaitu:

$$\mathbf{w}-\mathbf{v}=\mathbf{x}+(-\mathbf{v}) \tag{2}$$



Gambar 3.1. 6.   Pengurangan dan Negatif Vekor

Pengurangan $\mathbf{v}$ dari $\mathbf{w}$ dapat diperoleh secara geometris dengan metode jajaran genjang yang ditunjukkan pada Gambar 3.1.6b, atau secara langsung dengan memposisikan $\mathbf{w}$ dan $\mathbf{v}$ sehingga titik awal mereka berhimpit dan menggambar vektor dari titik terminal $\mathbf{v}$ ke titik terminal $\mathbf{w}$ (Gambar 3.1.6c).

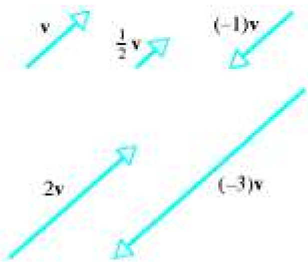
3.1.4. Perkalian Skalar

Kadang-kadang ada kebutuhan untuk mengubah panjang vektor atau mengubah panjangnya dan membalik arahnya. Hal ini dilakukan oleh suatu jenis perkalian di mana vektor dikalikan dengan skalar. Sebagai contoh, produk $2\mathbf{v}$ menunjukkan vektor yang memiliki arah yang sama tetapi dua kali panjangnya, dan produk $-2\mathbf{v}$ menunjukkan vektor yang diarahkan secara berlawanan dan memiliki panjang dua kali lipat. Inilah hasil umumnya.

Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor tak nol dalam ruang-2 atau ruang-3, dan jika k adalah skalar tak nol, maka kita mendefinisikan produk skalar dari $\mathbf{v}$ oleh k menjadi vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang $\mathbf{v}$ dan yang arahnya sama $\mathbf{v}$ jika k positif dan berlawanan dengan $\mathbf{v}$ jika k negatif. Jika $k = 0$ atau $\mathbf{v} = 0$, maka kita mendefinisikan $k\mathbf{v}$ menjadi $\mathbf{0}$.

Gambar 3.1.7 menunjukkan hubungan geometrik antara vektor $\mathbf{v}$ dan beberapa kelipatan skalarnya. Secara khusus, amati bahwa $(-1)\mathbf{v}$ memiliki panjang yang sama seperti $\mathbf{v}$ tetapi diarahkan sebaliknya; karena itu,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \tag{3}$$

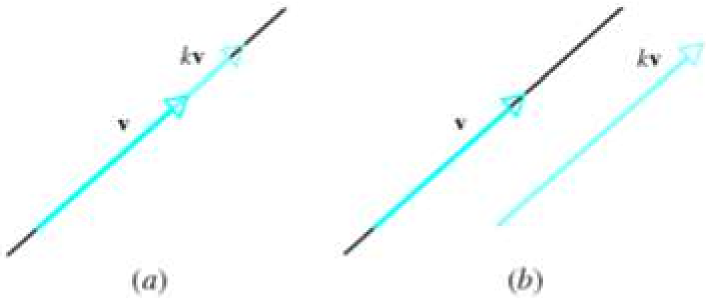


Gambar 3.1. 7. Perkalian Skalar

3.1.5. Vektor Paralel dan Kolinier

Anggaplah **v** dan **w** adalah vektor dalam ruang-2 atau ruang-3 dengan titik awal yang umum. Jika salah satu dari vektor adalah kelipatan skalar dari yang lain, maka vektor terletak pada garis yang sama, sehingga masuk akal untuk mengatakan bahwa mereka kolinier (Gambar 3.1.8*a*). Namun, jika kita menerjemahkan salah satu vektor, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.1.8*b*, maka vektornya paralel tetapi tidak lagi kolinier. Ini menciptakan masalah linguistik karena mentranslasikan vektor tidak mengubah vektornya.

Satu-satunya cara untuk menyelesaikan masalah ini adalah menyetujui bahwa istilah paralel dan kolinear berarti hal yang sama ketika diterapkan pada vektor. Meskipun vektor **0** tidak memiliki arah yang jelas, kita akan menganggapnya paralel (sejajar) dengan semua vektor demi kenyamanan.



Gambar 3.1. 8. Vektor Paralel dan Kolinier

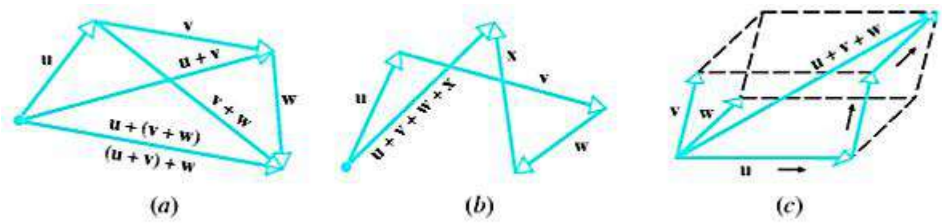
3.1.6. Penjumlahan Tiga Vektor atau Lebih

Penjumlahan vektor memenuhi hukum asosiatif penjumlahan, artinya bahwa ketika kita menjumlahkan tiba buah vektor, katakanlah **u**, **v**, dan **w**, tidak jadi masalah jika kita menambahkan dua vektor dulu, yaitu:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

Hal tersebut mengikuti pernyataan ini bahwa tidak ada ambiguitas (dwimakna) dalam ekspresi $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ karena hasil yang diperoleh sama, tidak jadi masalah bagaimana vektor-vektor tersebut dikelompokkan.

Cara sederhana untuk membangun $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ adalah menempatkan vektor "ujung ke ekor" berturut-turut dan kemudian menarik vektor dari titik awal **u** ke titik terminal **w** (Gambar 3.1.9a). Metode ujung-ke-ekor juga berfungsi untuk empat vektor atau lebih (Gambar 3.1.9b). Metode ujung-ke-ekor juga membuatnya jelas bahwa jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor dalam ruang-3 dengan titik awal yang umum, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ adalah diagonal dari bentuk jajar genjang yang memiliki tiga vektor sebagai sisi yang berdekatan (Gambar 3.1.9c).



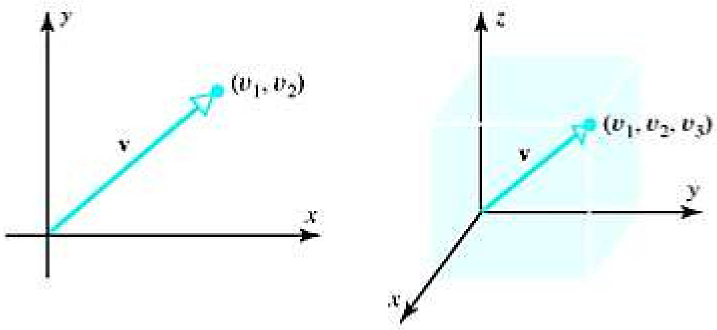
Gambar 3.1. 9. Penjumlahan Tiga Vektor atau Lebih

3.1.7. Vektor dalam Sistem Koordinat

Sampai sekarang kita telah mendiskusikan vektor tanpa referensi ke sistem koordinat. Namun, karena kita akan segera melihat, perhitungan dengan vektor jauh lebih sederhana untuk dilakukan jika sistem koordinat hadir untuk bekerja dengan vektor.

Bentuk komponen dari vektor nol adalah $\mathbf{0} = (0,0)$ dalam ruang-2, dan $\mathbf{0} = (0,0,0)$ dalam ruang-3.

Jika vektor **v** dalam ruang-2 atau ruang-3 diposisikan dengan titik awalnya pada pusat sistem koordinat persegi panjang, maka vektor sepenuhnya ditentukan oleh koordinat titik terminalnya (Gambar 3.1.10). Kita menyebut koordinat ini **komponen-komponen v** relatif terhadap sistem koordinat. Kita akan menulis $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ untuk menunjukkan vektor **v** dalam ruang-2 dengan komponen (v_1, v_2), dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ untuk menunjukkan vektor **v** dalam ruang-3 dengan komponen (v_1, v_2, v_3).



Gambar 3.1. 10. Vektor dalam Sistem Koordinat

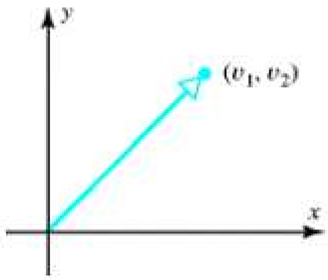
Hal tersebut seharusnya menjadi bukti secara geometris bahwa dua vektor dalam ruang-2 atau ruang-3 ekuivalen (setara) jika dan hanya jika mereka memiliki titik terminal yang sama ketika titik awal mereka berada di titik asal. Secara aljabar, ini berarti bahwa dua vektor ekuivalen jika dan hanya jika komponen yang sesuai sama. Jadi, misalnya, vektor-vektor:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ dan } \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

Dalam ruang-3 adalah ekuivalen jika dan hanya jika:

$$v_1 = w_1, \qquad v_2 = w_2, \qquad v_3 = w_3$$

Catatan Ini mungkin telah terjadi kepada Anda bahwa pasangan berurutan (v_1, v_2) dapat mewakili vektor dengan komponen v_1 dan v_2 atau titik dengan komponen v_1 dan v_2 (dan juga untuk tripel yang berurutan). Keduanya merupakan interpretasi geometrik yang valid, jadi pilihan yang tepat akan bergantung pada sudut pandang geometrik yang ingin kita tekankan (Gambar 3.1.11).



Gambar 3.1. 11. Pasangan Berurutan (v_1, v_2) dapat Merepresentasikan Titik atau Vektor

3.1.8. Vektor dengan Titik Awal Tidak di Pusat

Kadang-kadang perlu untuk memperhatikan vektor dimana titik awalnya tidak di pusat. Jika $\overrightarrow{P_1P_2}$ menotasikan vektor dengan titik awal $P_1(x_1, y_1)$ dan titik terminal $P_2(x_2, y_2)$, maka komponen dari vektor tersebut diperoleh dengan formula:

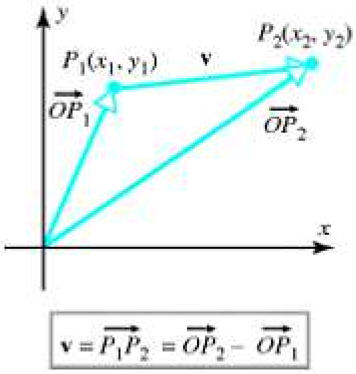
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) \tag{4}$$

Yaitu, komponen dari $\overrightarrow{P_1P_2}$ diperoleh dengan melakukan pengurangan koordinat titik awal dari koordinat titik terminal. Sebagai contoh, pada Gambar 3.1.12 vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah pengurangan vektor $\overrightarrow{OP_2}$ dan $\overrightarrow{OP_1}$, jadi:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

Seperti yang Anda duga, komponen vektor pada ruang-3 memiliki titik awal (x_1, y_1, z_1) dan titik terminal (x_2, y_2, z_2) diberikan oleh:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ \ z_2 - z_1) \tag{5}$$



Gambar 3.1. 12. Pengurangan Vektor dengan Titik Awal Tidak di Pusat

Contoh 1: Menentukan Komponen Vektor

Komponen dari vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ dengan titik awal $P_1(2, -1,4)$ dan titik terminal $P_2(7,5, -8)$ adalah

$$\mathbf{v} = (7 - 2,\ \ 5 - (-1),\ \ (-8) - 4) = (5,6 - 12)$$

3.1.9. Ruang-n

Ide menggunakan pasangan berurutan dan tiga pasang berurutan dari bilangan real untuk merepresentasikan titik-titik dalam ruang dua dimensi dan ruang tiga dimensi telah diketahui dengan baik pada abad kedelapan belas dan kesembilan belas. Menjelang awal abad ke-20, para matematikawan dan fisikawan sedang mengeksplorasi penggunaan ruang "dimensi-tinggi" dalam matematika dan fisika. Hari ini, bahkan orang awam terbiasa dengan gagasan waktu sebagai dimensi keempat, sebuah ide yang digunakan oleh Albert Einstein dalam mengembangkan teori relativitas umum. Hari ini, fisikawan yang bekerja di bidang "teori string" umumnya menggunakan ruang 11-dimensi dalam pencarian mereka untuk teori unifikasi yang akan menjelaskan bagaimana kekuatan dasar alam bekerja. Sebagian besar pekerjaan yang tersisa di bagian ini berkaitan dengan memperluas pengertian ruang ke dimensi-n.

Untuk mengeksplorasi ide-ide ini lebih lanjut, kita mulai dengan beberapa terminologi dan notasi. Himpunan semua bilangan real dapat dilihat secara geometris sebagai garis. Ini disebut garis nyata dan dilambangkan dengan R atau R^1. Superskrip memperkuat gagasan intuitif bahwa sebuah garis adalah satu dimensi. Himpunan semua pasangan bilangan real yang terurut (disebut **2-tuples**) dan himpunan semua tripel yang dipesan dari bilangan real (disebut **3-tuples**) ditunjukkan masing-masing oleh R^2 dan R^3. Superskrip memperkuat gagasan bahwa pasangan berurutan sesuai dengan titik-titik dalam bidang (dua-dimensi) dan 3 pasang berurutan ke titik-titik dalam ruang (tiga-dimensi). Definisi berikut memperluas ide ini.

DEFINISI 1

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka suatu **$\boldsymbol{n}$-pasangan berurutan** adalah barisan dari n bilangan riil $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Himpunan semua n-pasangan berurutan disebut **ruang-$\boldsymbol{n}$** dan dinotasikan dengan R^n.

Catatan Anda dapat memikirkan angka-angka dalam suatu n-pasangan berurutan sebagai koordinat dari *titik umum* atau komponen dari *vektor umum*, tergantung pada gambar geometris yang ingin Anda bawa kedalam pikiran — pilihan tidak membuat perbedaan secara matematis, karena sifat aljabar dari n-pasangan berurutan yang menjadi perhatian.

Berikut ini beberapa aplikasi khas yang mengarah ke -pasangan berurutan.

- **Ekspreimen Data** Seorang ilmuwan melakukan eksperimen dan membuat n pengukuran numerik setiap kali percobaan dilakukan. Hasil dari setiap percobaan dapat dianggap sebagai vektor. $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dalam R^n dimana $y_1, y_2, \dots, y_n$ adalah nilai-nilai pengukuran.
- **Penyimpanan dan Pergudangan** Sebuah perusahaan truk nasional memiliki 15 depot untuk menyimpan dan melayani truk-truknya. Pada setiap titik waktu distribusi truk di depot layanan dapat digambarkkan oleh 15-tupel $x = (x_1, x_2, \dots, x_{15})$ di mana x_1 adalah jumlah truk di depot pertama, x_2 adalah nomor di depot kedua, dan seterusnya.
- **Rangkaian Listrik** Chip pemrosesan jenis tertentu dirancang untuk menerima empat tegangan masukan dan menghasilkan tiga tegangan output sebagai respons. Tegangan input dapat dianggap sebagai vektor di R^4 dan tegangan output sebagai vektor di R^3. Dengan demikian, chip dapat dilihat sebagai perangkat yang mengubah vektor input $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ di R^4 menjadi vektor output $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ di R^3.
- **Gambar Grafis** Salah satu cara di mana gambar berwarna dibuat pada layar komputer adalah dengan menetapkan setiap piksel (titik beralamat di layar) tiga angka yang menggambarkan **rona**, **saturasi**, dan **kecerahan** dari piksel. Dengan demikian, gambar warna lengkap dapat dilihat sebagai satu set 5-pasangan berurutan dari bentuk $\mathbf{v} = (x, y, h, s, b)$ di mana x dan y adalah koordinat layar dari pixel dan h, s, dan b adalah rona, saturasi, dan kecerahannya.
- **Ekonomi** Salah satu pendekatan untuk analisis ekonomi adalah membagi ekonomi menjadi sektor (manufaktur, layanan, utilitas, dan

sebagainya) dan mengukur output dari masing-masing sektor dengan nilai dolar. Jadi, dalam ekonomi dengan 10 sektor, output ekonomi seluruh ekonomi dapat diwakili oleh 10-pasangan berurutan $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{10})$ di mana angka $s_1, s_2, .., s_{10}$ adalah output dari masing-masing sektor.

- **Sistem Mekanik** Misalkan enam partikel bergerak sepanjang garis koordinat yang sama sehingga pada saat t koordinatnya adalah $x_1, x_2, \dots, x_6$ dan kecepatannya masing-masing adalah $v_1, v_2, \dots, v_6$. Informasi ini dapat diwakili oleh vektor
$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, t)$$
Dalam R^{13}. Vektor ini disebut ***state*** (keadaan) sistem partikel pada saat t.

Albert Einstein (1879-1955)

Catatan Sejarah Fisikawan kelahiran Jerman Albert Einstein berimigrasi ke Amerika Serikat pada 1935, di mana ia menetap di Princeton University. Einstein menghabiskan tiga dekade terakhir hidupnya bekerja, tidak berhasil menghasilkan teori medan unifikasi (terpadu) yang akan membangun hubungan yang mendasar antara kekuatan gravitasi dan elektromagnetisme. Baru-baru ini, fisikawan telah membuat kemajuan dalam masalah menggunakan kerangka kerja yang dikenal sebagai teori string. Dalam teori ini, komponen-komponen terkecil dari alam semesta bukanlah partikel tetapi loop yang berperilaku seperti senar yang bergetar. Sedangkan semesta ruang-waktu Einstein adalah empat-dimensi, string berada di dunia 11-dimensi yang merupakan fokus penelitian saat ini.

3.1.10. Operasi Vektor di R^n

Tujuan kita selanjutnya adalah mendefinisikan operasi yang berguna dalam R^n. Semua operasi ini akan menjadi ekstensi alami dari operasi yang sudah familiar pada vektor dalam R^2 dan R^3. Kita akan menotasikan vektor **v** di R^n menggunakan notasi:
$$\mathbf{v} = (x_1, v_2, \dots, v_n)$$

Dan kita menyebut $\mathbf{0} = (0,0, \dots ,0)$ sebagai vektor nol.

Sebelumnya kita sudah mencatat bahwa dalam R^2 dan R^3 dua vektor adalah ekuivalen (sama) jika dan hanya jika komponen-kompnen yang sesuai sama. Sehingga kita membuat definisi sebagai berikut:

DEFINISI 2

Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots , v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots , w_n)$ dalam R^n dikatakan ekuivalen (sama) jika:

$$v_1 = w_1, v_2 = w_2, \dots , v_n = w_n$$

Kita mengindikasikan hal ini dengan menuliskan $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Contoh 2: Kesamaan Vektor

$$(a, b, c, d) = (1, -4,2,7)$$

Jika dan hanya jika $a = 1, b = -4, c = 2, d = 7$.

Tujuan kita selanjutnya adalah mendefinisikan operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar untuk vektor-vektor di R^n menggunakan komponen. Dengan mempelajari Gambar 3.1.13, Anda seharusnya mampu menyimpulkan bahwa jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, maka:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \tag{6}$$

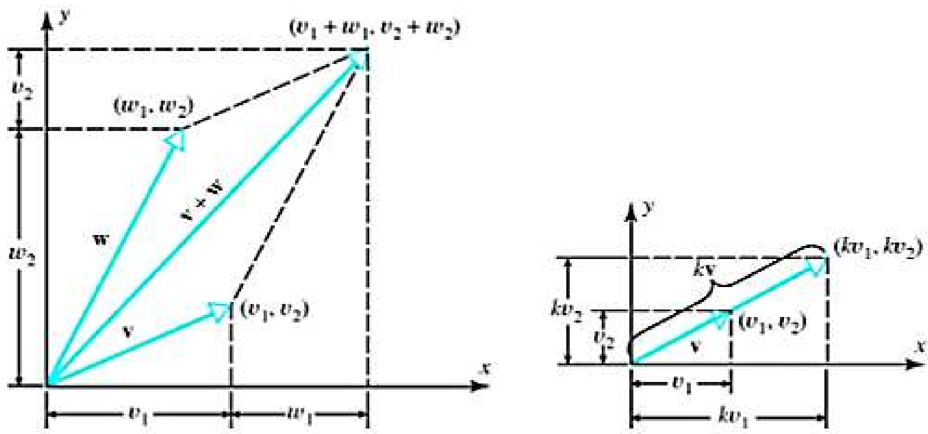
$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \tag{7}$$

Secara khusus, dengan mengikuti (7) maka:

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = (-v_1, -v_2) \tag{8}$$

Dan karenanya maka:

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2) \tag{9}$$



Gambar 3.1. 13. Penjumlahan Vektor dan Perkalian Skalar

Termotivasi oleh formula (6) – (9), kita membuat definisi sebagai berikut:

DEFINISI 3

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ adalah vektor-vektor di R^n, dan jika k adalah suatu skalar, maka kita mendefinisikan:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \quad (10)$$

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n) \quad (11)$$

$$-\mathbf{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n) \quad (12)$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n) \quad (13)$$

Dalam kata-kata, vektor ditambahkan (atau dikurangkan) dengan menambah (atau mengurang) komponen-komponen yang sesuai, dan vektor dikalikan dengan skalar, dengan mengalikan setiap kompnen dengan skalar tersebut.

Contoh 3: Operasi Aljabar Menggunakan Komponen

Jika $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ dan $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$, maka:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3)$$

$$2\mathbf{v} = (2, -6, 4)$$

$$-\mathbf{w} = (-4, -2, -1)$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1)$$

Teorema berikut merangkum sifat-sifat yang penting dalam operasi vektor.

TEOREMA 3.1.1.

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor dalam* R^n, *dan jika* k *dan* m *skalar, maka:*

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(c) $\mathbf{u} + 0 = 0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$
(e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
(f) $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$
(g) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$
(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Kita akan membuktikan bagian (b), dan meninggalkan bukti lainnya sebagai latihan.

Bukti (*b*) Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Maka:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \big((u_1, u_2, \dots u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)\big) + (w_1, w_2, \dots, w_n) \\
&= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) \\
&= \big(u_1 + (v_1 + w_1), \dots, u_n + (v_n + w_n)\big) \\
&= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, \dots, u_n + w_n) \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}
$$

Berikut ini sifat-sifat tambahan pada vektor dalam R^n dapat mudah disimpulkan dengan mengekspresikan vektor dalam bentuk komponen (silahkan diverifikasi).

TEOREMA 3.1.2.

Jika $\mathbf{v}$ *adalah vektor dalam* R^n *dan* k *adalah skalar, maka:*

(a) $0\mathbf{v} = 0$
(b) $k0 = 0$
(c) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

3.1.11. Menghitung Tanpa Komponen Vektor

Salah satu konsekuensi dahsyat dari Teorema 3.1.1 dan 3.1.2 adalah bahwa kita dibolehkan melakukan perhitungan tanpa mengekspresikan vektor dalam bentuk komponen. Sebagai contoh, misalkan $\mathbf{x}, \mathbf{a}$, dan $\mathbf{b}$ adalah vektor-vektor di R^n, dan kita ingin menyelesaikan persamaan vektor

$\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ untuk vektor $\mathbf{x}$ tanpa menggunakan komponen. Kita dapat memprosesnya sebagai berikut:

$\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$	[Diberikan]
$(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$	Kedua ruas tambahkan negatif **a**
$\mathbf{x} + \big(\mathbf{a} + (-\mathbf{a})\big) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$	Bagian (*b*) Teorema 3.1.1
$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$	Bagian (*d*) Teorema 3.1.1
$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$	Bagian (*c*) Teorema 3.1.1

Sementara metode ini jelas lebih rumit daripada komputasi dengan komponen dalam R^n, ini akan menjadi penting nanti di teks di mana kita akan menemukan jenis vektor yang lebih umum.

3.1.12. Kombinasi Linier

Penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar seringkali digunakan dalam kombinasi untuk membentuk vektor baru. Sebagai contoh, jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$ adalah vektor-vektor dalam R^n, maka vektor-vektor berikut:

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \text{ dan } \mathbf{w} = 7\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

Dibentuk dengan cara ini. Secara umum, kita membuat definisi sebagai berikut:

DEFINISI 4

Jika $\mathbf{w}$ adalah vektor di R^n, maka $\mathbf{w}$ dikatakan **kombinasi linier** dari vektor-vektor dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ di R^n jika $\mathbf{w}$ dapat diekspresikan dalam bentuk:

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r \qquad (14)$$

Diman $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar. Skalar-skalar ini disebut **koefisien** dari kombinasi linier. Dalam kasus dimana $r = 1$, formula (14) menjadi $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$, dimana kombinasi linier dari vektor tunggal hanyalah perkalian skalar dengan vektor tersebut.

Perhatikan bahwa definisi ini dari kombinasi linear adalah konsisten dengan yang diberikan dalam konteks matriks (lihat Definisi 6 dalam Bagian 1.3).

Aplikasi Kombinasi Linier dalam Model Pewarnaan

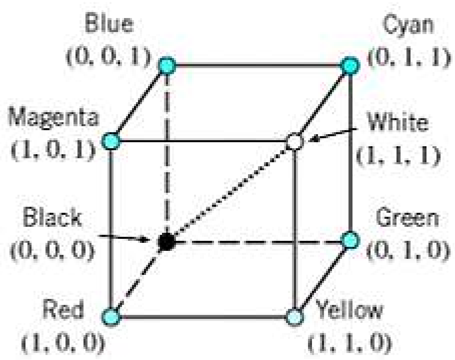
Warna-warna dalam monitor komputer pada umumnya berbasis dengan apa yang disebut **model pewarnaan RGB**. Warna-warna dalam sistem ini dibuat dengan menambahkan persentase dari warna utamanya yaitu merah (R), hijau (G), dan biru (B). Salah satu cara melakukannya adalah dengan mengidentifikasi warna utama dengan vektor:

$$\mathbf{r} = (1,0,0) \qquad \text{(merah murni)}$$
$$\mathbf{g} = (0,1,0) \qquad \text{(hijau murni)}$$
$$\mathbf{b} = (0,0,1) \qquad \text{(biru murni)}$$

Dalam R^3 dan untuk membuat warna-warna lain dengan membentuk kombinasi linier dari $\mathbf{r}, \mathbf{g}$, dan $\mathbf{b}$ menggunakan koefisien antara 0 dan 1, termasuk, koefisien-koefisien tersebut merepresentasikan dari setiap arna murni dalam campuran. Himpunan dari semua vektor warna disebut **ruang RGB** atau **kubus warna RGB** (Gambar 3.1.14). Jadi, setiap vektor warna **c** dalam kubus ini diekspresikan sebagai kombinasi linier dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{g} + k_3\mathbf{b} \\ &= k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) \\ &= (k_1, k_2, k_3)\end{aligned}$$

Dimana $0 \leq k_i \leq 1$. Seperti ditunjukkan pada gambar 3.1.14, sudut kubus mewakili warna primer murni bersama dengan warna hitam, putih, magenta, cyan, dan kuning. Vektor sepanjang diagonal berjalan dari hitam ke putih sesuai dengan warna abu-abu.



Gambar 3.1. 14. Kubus Warna RGB

3.1.13. Notasi Alternatif untuk Vektor

Sampai saat ini kita telah menulis vektor dalam R^n menggunakan notasi:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \tag{15}$$

Kita menyebutnya sebagai **bentuk koma-terbatas**. Namun, karena vektor di R^n hanyalah daftar dari n komponennya dalam urutan tertentu, setiap notasi yang menampilkan komponen tersebut dalam urutan yang benar adalah cara yang valid untuk merepresentasikan vektor. Misalnya, vektor dalam (15) dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \tag{16}$$

Yang disebut sebagai **bentuk matrik-baris**, atau sebagai:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

Yang disebut sebagai **bentuk matrik-kolom**. Pilihan notasi seringkali merupakan masalah selera atau kenyamanan, tetapi terkadang sifat dalam masalah akan menyarankan notasi yang disarankan. Notasi (15), (16), dan (17) semuanya akan digunakan di berbagai tempat dalam teks ini.

Latihan 3.1

Untuk soal nomor 1 – 4, gambarlah sistem koordinat (seperti Gambar 3.1.10) dan tempatkan titik-titik dimana koordinat diberikan.

1. (a) $(3,4,5)$
   (b) $(-3,4,5)$
   (c) $(3,-4,5)$
   (d) $(3,4,-5)$
   (e) $(-3,-4,5)$
   (f) $(-3,4,-5)$

2. (a) $(0,3,-3)$
   (b) $(3,-3,0)$
   (c) $(-3,0,0)$
   (d) $(3,0,3)$
   (e) $(0,0,-3)$
   (f) $(0,3,0)$

Untuk soal nomor 3 – 4, sketsalah vektor-vektor berikut dengan titik awal berlokasi di pusat.

3. (a) $\mathbf{v}_1 = (3,6)$

(b) $\mathbf{v}_2 = (-4,-8)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (-4,-3)$
(d) $\mathbf{v}_4 = (3,4,5)$
(e) $\mathbf{v}_5 = (3,3,0)$
(f) $\mathbf{v}_6 = (-1,0,2)$

4. (a) $\mathbf{v}_1 = (5,-4)$
   (b) $\mathbf{v}_2 = (3,0)$
   (c) $\mathbf{v}_3 = (0,-7)$
   (d) $\mathbf{v}_4 = (0,0,-3)$
   (e) $\mathbf{v}_5 = (0,4,-1)$
   (f) $\mathbf{v}_6 = (2,2,2)$

Untuk soal nomor 5 – 6, sketsalah vektor-vektor berikut dengan titik awal berlokasi di pusat.

5. (a) $P_1(4,8), P_2(3,7)$
   (b) $P_1(3,-5), P_2(-4,-7)$
   (c) $P_1(3,-7,2), P_2(-2,5,-4)$

6. (a) $P_1(-5,0), P_2(-3,1)$
   (b) $P_1(0,0), P_2(3,4)$
   (c) $P_1(-1,0,2), P_2(0,-1,0)$
   (d) $P_1(2,2,2), P_2(0,0,0)$

Untuk soal nomor 7 – 8, tentukan komponen dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

7. (a) $P_1(3,5), P_2(2,8)$
   (b) $P_1(5,-2,1), P_2(2,4,2)$

8. (a) $P_1(-6,2), P_2(-4,-1)$
   (b) $P_1(0,0,0), P_2(-1,6,1)$

9. (a) Tentukan titik terminal dari vektor yang ekuivalen dengan $\mathbf{u} = (1,2)$ dan dimana titik awalnya $A(1,1)$.
   (b) Tentukan titik awal dari vektor yang ekuivalen dengan $\mathbf{u} = (1,1,3)$ dan dimana titik terminalnya adalah $B(-1,-1,2)$.

10. (a) Tentukan titik awal dari vektor yang ekuivalen dengan $\mathbf{u} = (1,2)$ dan dimana titik terminalnya adalah $B(2,0)$.

(b) Tentukan titik terminal dari vektor yang ekuivalen dengan $\mathbf{u} = (1,1,3)$ dan dimana titik awalnya $A(0,2,0)$.

11. Tentukan vektor tidak nol $\mathbf{u}$ dengan titik terminal $Q(3,0,-5)$ sedemikian sehingga:
    (a) $\mathbf{u}$ memiliki arah yang sama seperti $\mathbf{v} = (4,-2,-1)$.
    (b) $\mathbf{u}$ memiliki arah yang berlawanan dengan $\mathbf{v} = (4,-2,-1)$.

12. Tentukan vektor tidak nol $\mathbf{u}$ dengan titik awal $P(-1,3,-5)$ sedemikian sehingga:
    (a) $\mathbf{u}$ memiliki arah yang sama seperti $\mathbf{v} = (6,7,-3)$.
    (b) $\mathbf{u}$ memiliki arah yang berlawanan dengan $\mathbf{v} = (6,7,-3)$.

13. Misal $\mathbf{u} = (4,-1), \mathbf{v} = (0,5)$, dan $\mathbf{w} = (-3,-3)$. Tentukan komponen dari:
    (a) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$
    (b) $\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$
    (c) $2(\mathbf{u} - 5\mathbf{w})$
    (d) $3\mathbf{v} - 2(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$
    (e) $-3(\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v})$
    (f) $(-2\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 5(\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$

14. Misal $\mathbf{u} = (-3,1,2), \mathbf{v} = (4,0,-8)$, dan $\mathbf{w} = (6,-1,-4)$. Tentukan komponen dari:
    (a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
    (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$
    (c) $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$
    (d) $5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$
    (e) $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$
    (f) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

15. Misal $\mathbf{u} = (-3,2,1,0), \mathbf{v} = (4,7,-3,2)$, dan $\mathbf{w} = (5,-2,8,1)$. Tentukan komponen dari:
    (a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
    (b) $2\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$
    (c) $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$
    (d) $6(\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$
    (e) $-\mathbf{v} - \mathbf{w}$
    (f) $(6\mathbf{v} - \mathbf{w}) - (4\mathbf{u} + \mathbf{v})$

16. Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor pada soal nomor 15. Tentukan vektor $\mathbf{x}$ yang memenuhi $5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$.

17. Misal $\mathbf{u} = (5, -1, 0, 3, -3), \mathbf{v} = (-1, -1, 7, 2, 0)$, dan $\mathbf{w} = (-4, 2, -3, -5, 2)$. Tentukan komponen dari:
(a) $\mathbf{w} - \mathbf{u}$
(b) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$
(c) $-\mathbf{w} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u})$
(d) $5(-\mathbf{v} + 4\mathbf{u} - \mathbf{w})$
(e) $-2(3\mathbf{w} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{u} + \mathbf{w})$
(f) $\frac{1}{2}(\mathbf{w} - 5\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{v}$

18. Misal $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 5, 0), \mathbf{v} = (0, 4, -1, 1, 2)$, dan $\mathbf{w} = (7, 1, -4, -2, 3)$. Tentukan komponen dari:
(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
(b) $3(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$
(c) $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (2\mathbf{u} + 4\mathbf{w})$

19. Misal $\mathbf{u} = (-3, 1, 2, 4, 4), \mathbf{v} = (4, 0, -8, 1, 2)$, dan $\mathbf{w} = (6, -1, -4, 3, -5)$. Tentukan komponen dari:
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
(b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$
(c) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

20. Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor pada soal nomor 18. Tentukan vektor $\mathbf{x}$ yang memenuhi $3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} = 3\mathbf{x} + 2\mathbf{w}$.
21. Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor pada soal nomor 19. Tentukan vektor $\mathbf{x}$ yang memenuhi $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.
22. Untuk nilai-nilai t berapakah, jika ada, sehingga vektor-vektor berikut paralel dengan $\mathbf{u} = (4, -1)$?
(a) $(8t, -2)$
(b) $(8t, 2t)$
(c) $(1, t^2)$

23. Yang manakah vektor-vektor berikut dalam R^6 yang paralel dengan $\mathbf{u} = (-2, 1, 0, 3, 5, 1)$?
(a) $(4, 2, 0, 6, 10, 2)$
(b) $(4, -2, 0, -6, -10, -2)$
(c) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$

24. Misal $\mathbf{u} = (2, 1, 0, 1, -1)$, dan $\mathbf{v} = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Tentukan skalar a dan b sehingga $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (-8, 8, 3, -1, 7)$.

25. Misal $\mathbf{u} = (1, -1,3,5)$, dan $\mathbf{v} = (2,1,0, -3)$. Tentukan skalar a dan b sehingga $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (1, -4,9,18)$.
26. Tentukan semua skalar c_1, c_2, dan c_3 sedemikian sehingga:
$$c_1(1,2,0) + c_2(2,1,1) + c_3(0,3,1) = (0,0,0)$$
27. Tentukan semua skalar c_1, c_2, dan c_3 sedemikian sehingga:
$$c_1(1, -1,0) + c_2(3,2,1) + c_3(0,1,4) = (-1,1,19)$$
28. Tentukan semua skalar c_1, c_2, dan c_3 sedemikian sehingga:
$$c_1(-1,0,2) + c_2(2,2, -2) + c_3(1, -2,1) = (-6,12,4)$$
29. Misalkan $\mathbf{u}_1 = (-1,3,2,0)$, $\mathbf{u}_2 = (2,0,4, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (7,1,1,4)$, dan $\mathbf{u}_4 = (6,3,1,2)$. Tentukan skalar c_1, c_2, c_3, dan c_4 sedemikian sehingga:
$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = (0,5,6, -3).$$
30. Buktikan bahwa tidak terdapat skalar c_1, c_2, dan c_3 yang eksis sedemikian sehingga:
$$c_1(1,0,1,0) + c_2(1,0, -2,1) + c_3(2,0,1,2) = (1, -2,2,3)$$
31. Buktikan bahwa tidak terdapat skalar c_1, c_2, dan c_3 yang eksis sedemikian sehingga:
$$c_1(-2,9,6) + c_2(-3,2,1) + c_3(1,7,5) = (0,5,4)$$
32. Perhatikan Gambar3.1.12. Diskusikan interpretasi geometris dari vektor:
$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
33. Misalkan P titik $(2,3, -2)$ dan Q titik $(7, -4,1)$.
    (a) Tentukan titik tengah dari segmen garis yang menghubungkan P dan Q.
    (b) Tentuka titik dari segmen garis yang menghubungkan P dan Q yang jaraknya $\frac{3}{4}$ dari P ke Q.
34. Misalkan P titik $(1,3,7)$. Jika titik $(4,0, -6)$ adalah titik tengah dari segmen garis yang menghubungkan P dan Q, berapakah Q?
35. Buktikan bagian (*a*), (*c*), dan (*d*) dari Teorema 3.1.1.
36. Buktikan bagian (e) – (*h*) dari Teorema 3.1.1.
37. Buktikan bagian (*a*) – (*c*) dari Teorema 3.1.2.

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 14

Kegiatan Belajar 14: Norm, Produk Dot, and Jarak dalam R^n

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menghitung norm dari suatu vektor di R^n.
2. Peserta didik dapat menentukan apakah suatu vektor di R^n adalah vektor satuan.
3. Peserta didik dapat menormaslisasi vektor bukan nol di R^n.
4. Peserta didik dapat menentukan jarak antar dua vektor di R^n.
5. Peserta didik dapat menghitung produk titik dari dua vektor di R^n.
6. Peserta didik dapat menghitung besar sudut antara dua vektor tidak nol di R^n.
7. Peserta didik dapat membuktikan sifat dasar yang berkaitan dengan norm dan produk titik (Teorema 3.2.1 – 3.2.3 dan 3.2.5 – 3.2.7).

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menghitung norm dari suatu vektor di R^n.
2. Menentukan apakah suatu vektor di R^n adalah vektor satuan.
3. Menormaslisasi vektor bukan nol di R^n.
4. Menentukan jarak antar dua vektor di R^n.
5. Menghitung produk titik dari dua vektor di R^n.
6. Menghitung besar sudut antara dua vektor tidak nol di R^n.
7. Membuktikan sifat dasar yang berkaitan dengan norm dan produk titik (Teorema 3.2.1 – 3.2.3 dan 3.2.5 – 3.2.7).

C. Uraian Materi

3.2. Norm, Produk Dot, and Jarak dalam R^n

Pada bagian ini kita akan fokus dengan notasi panjang dan jarak yang terkait dengan vektor. Pertama-tama kita akan mendiskusikan ide-ide ini dan kemudian memperluasnya secara aljabar.

3.2.1. Norm Vektor

Dalam teks ini kita akan menotasikan panjang vektor **v** dengan simbol $\|\mathbf{v}\|$, yang dibaca sebagai norm **v**, panjang **v**, atau besarnya **v** (istilah "norm" menjadi matematis umum sinonim untuk panjang). Seperti yang disarankan pada Gambar 3.2.1a, ini mengikuti dari Teorema Pythagoras bahwa norma vektor (v_1, v_2) dalam R^2 adalah:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1}$$

Serupa untuk vektor (v_1, v_2, v_3) dalam R^3, ini mengiktui dari Gambar 3.2.1b dan dua aplikasi dari Teorema Pythagoras, yaitu:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Dan karenanya:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{2}$$

Termotivasi dengan pola dari formula (1) dan (2), kita membuat definisi berikut ini:

DEFINISI 1

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor dalam R^n, maka norm dari **v** (disebut juga panjang **v** atau magnitude dari **v**) dinotasikan dengan $\|\mathbf{v}\|$, dan didefinisikan dengan formula:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \tag{3}$$

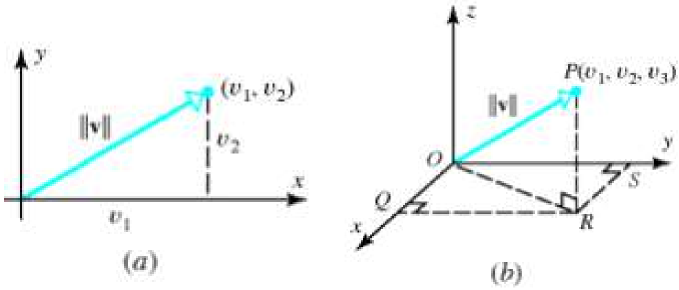
Contoh 1: Menghitung Norm

Ini mengikuti dari formula (2) bahwa norm dari vektor $\mathbf{v} = (-3,2,1)$ dalam R^3 adalah:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

Dan dari formula (3) bahwa nom vektor $\mathbf{v} = (2,-1,3,-5)$ dalam R^4 adalah:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39}$$



Gambar 3.2. 1. Norm Vektor

Teorema pertama kita di bagian ini akan menggeneralisasikan ke tiga fakta umum berikut tentang vektor dalam R^2 dan R^3.

1. Jarak adalah tidak negatif
2. Vektor nol adalah hanya vektor dengan panjang nol.
3. Mengalikan vektor dengan skalar adalah mengalikan panjang vektor dengan nilai mutlak dari skalar tersebut.

Sangat penting untuk diingat bahwa hanya karena ketiga hal diatas memenuhi dalam R^2 dan R^3, tidak ada jamina ketiga hal tersebut memenuhi dalam R^n – validitas ketiganya dalam R^n harus dibuktikan menggunakan sifat-sifat aljabar dari n-pasangan berurutan.

TEOREMA 3.2.1.

Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor dalam R^n, dan jika k adalah suatu skalar, maka:

(a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$
(b) $\|\mathbf{v}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = 0$
(c) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$

Kita akan membuktikan bagian (c) dan meninggalkan (a) dan (b) sebagai latihan.

Butki (c) Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, maka $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$, jadi

$$\begin{aligned}\|k\mathbf{v}\| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + \cdots + (kv_n)^2} \\ &= \sqrt{(k)^2(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)} \\ &= |k|\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \\ &= |k|\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

3.2.2. Vektor Satuan

Norm vektor 1 disebut **vektor satuan**. Vektor semacam itu berguna untuk menentukan arah ketika panjang tidak relevan dengan masalah yang dihadapi. Anda dapat memperoleh vektor satuan dalam arah yang diinginkan dengan memilih vektor non-nol **v** ke arah itu dan mengalikan **v** dengan kebalikan dari panjangnya. Sebagai contoh, jika **v** adalah vektor panjang 2 dalam R^2 atau R^3, maka $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ adalah vektor satuan dalam arah yang sama dengan **v**. Lebih umum, jika **v** adalah vektor bukan nol di R^n, maka:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \tag{4}$$

Yang mendefinisikan vektor satuan yang memiliki arah yang sama dengan **v**. Kita dapat mengkonfirmasi bahwa (4) adalah vektor satuan dengan mengaplikasikan bagian (c) dari Teorema 3.2.1 dengan $k = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}$ untuk memperoleh:

$$\|\mathbf{u}\| = \|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

Proses mengalikan vektor tak nol dengan timbal balik panjangnya untuk mendapatkan vektor satuan disebut **normalisasi v**.

PERHATIAN

Kadang-kadang Anda akan melihat formula (4) diekspresikan sebagai:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Ini hanyalah cara yang lebih ringkas untuk menulis rumus itu dan tidak dimaksudkan untuk menyampaikan bahwa **v** dibagi oleh $\|\mathbf{v}\|$.

Contoh 2: Normalisasi Vektor

Tentukan vektor satuan **u** yang memiliki arah yang sama dengan $\mathbf{v} = (2,2,-1)$.

Solusi Vektor **v** memiliki panjang

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Sehingga dari (4):

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2,2,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Untuk pengecekan, silahkan Anda konfirmasi bahwa $\|\mathbf{u}\| = 1$.

3.2.3. Vektor Satuan Standar

Ketika sistem koordinat persegi panjang diperkenalkan dalam R^2 atau R^3, vektor-vektor satuan dalam arah positif dari sumbu koordinat disebut **vektor satuan standar**. Dalam R^2 vektor-vektor ini dilambangkan dengan:

$$\mathbf{i} = (1,0) \text{ dan } \mathbf{j} = (0,1)$$

Dalam R^3 dengan:

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \text{ dan } \mathbf{k} = (0,0,1)$$

(Gambar 3.2.2). Untuk setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dalam R^2 dan untuk setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dalam R^3 dapat diekspresikan sebagai kombinasi linier dari vektor satuan standar dengan menuliskan:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \qquad (5)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \qquad (6)$$

Lebih lanjut, kita dapat menggeneralisir formula-formula tersebut ke R^n dengan mendefinisikan **vektor satuan standar dalam R^n** menjadi:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0,0,0, \dots, 1) \qquad (7)$$

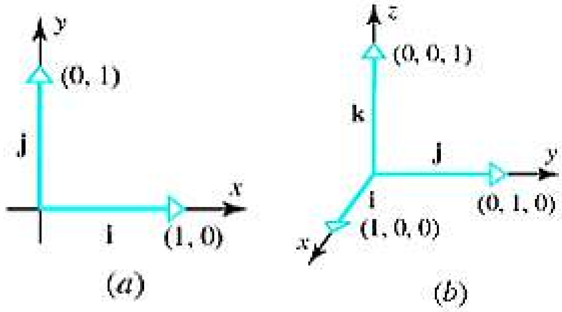
Untuk setiap $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dalam R^n dapat diekspresikan sebagai:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \qquad (8)$$

Contoh 3: Kombinasi Linier dari Vektor Satuan Standar

$$(2,-3,4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$(7,3,-4,5) = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4$$



Gambar 3.2. 2. Vektor Satuan Standar

3.2.4. Jarak dalam R^n

Jika P_1 dan P_2 adalah titik-titik dalam R^2 atau R^3, maka panjang vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah sama dengan jarak d antara dua titik (Gambar 3.2.3). Secara khusus, jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah titik-titik di R^2, maka formula (4) dari bagian 3.1, menjadi:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (9)$$

Ini adalah formula jarak yang familiar dari geometri analitik. Serupa, jarak antara titik-titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dalam ruang-3 adalah:

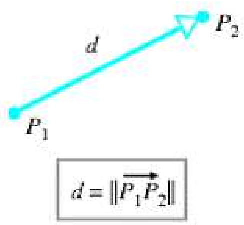
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (10)$$

Termotivasi dari formula (9) dan (10), kita membuat definisi sebagai berikut:

DEFINISI 2

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah titik-titik di R^n, maka kita menotasikan jarak antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dengan $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dan didefinisikan menjadi:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_2 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \qquad (11)$$



Gambar 3.2. 3. Jarak Antara P_1 dan P_2

Kita mencatat di bagian sebelumnya bahwa n-pasangan berurutan dapat dilihat baik sebagai vektor atau titik dalam R^2. Dalam Definisi 2 kita memilih untuk mendeskripsikannya sebagai titik, karena sepertinya interpretasi yang lebih alami.

Contoh 4: Menghitung jarak di R^n

Jika $\mathbf{u} = (1,3,-2,7)$ dan $\mathbf{v} = (0,7,2,2)$ maka jarak antara $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah:

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$$

3.2.5. Produk Titik

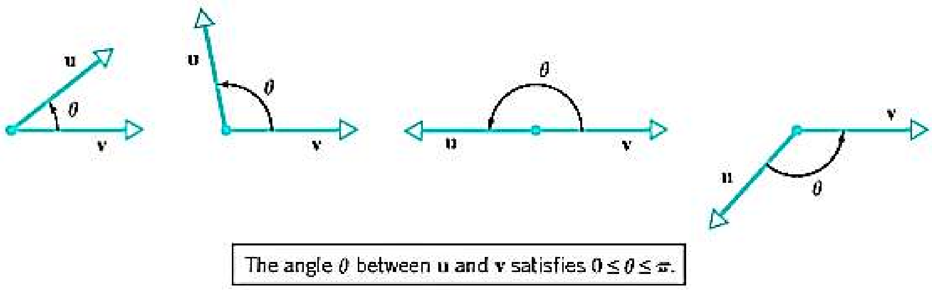
Tujuan kita selanjutnya adalah mendefinisikan operasi perkalian yang berguna pada vektor di R^2 dan R^3 dan kemudian memperluas operasi itu ke R^n. Untuk melakukan ini pertama-tama kita perlu mendefinisikan secara tepat apa yang kita maksud dengan "sudut" antara dua vektor dalam R^2 atau R^3. Untuk tujuan ini, misalkan **u** dan **v** menjadi vektor tak nol dalam R^2 atau R^3 yang telah diposisikan sehingga titik awal mereka bertepatan. Kita mendefinisikan sudut antara **u** dan **v** untuk menjadi sudut θ yang ditentukan oleh **u** dan **v** yang memenuhi ketidaksamaan $0 \leq \theta \leq \pi$ (Gambar 3.2.4).

DEFINISI 3

Jika **u** dan **v** adalah vektro bukan nol di R^2 dan R^3, dan jika θ adalah sudut antara **u** dan **v**, maka produk titik (disebut juga produk dalam Euclid) dari **u** dan **v** dinotasikan dengan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan disefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta \qquad (12)$$

Jika $\mathbf{u} = 0$ atau $\mathbf{v} = 0$, maka kita mendefinisikan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ menjadi 0.



Gambar 3.2. 4. Sudut antara u dan v

Tanda dari produk titik mengungkapkan informasi tentang sudut θ yang bisa kita peroleh dengan menulis ulang Formula (12) sebagai:

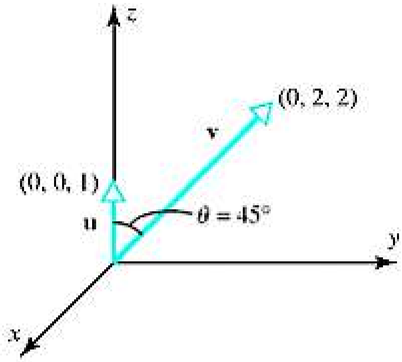
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \tag{13}$$

Karena $0 \leq \theta \leq \pi$, ini mengiktui dari formula (13) dan sifat dari fungsi cosinus yang dipelajari di trigonometri bahwa:

- θ adalah lancip jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$.
- θ adalah tumpul jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$

Contoh 5: Produk Titik

Tentukan produk titik dari vektor-vektor yang ditunjukkan pada Gambar 3.2.5.



Gambar 3.2. 5. Contoh 5, Produk titik

Solusi Panjang vektor adalah:

$$\|\mathbf{u}\| = 1 \text{ dan } \|\mathbf{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Dan cosinus sudut θ antara keduanya adalah:

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sehingga, mengikuti formula (12), maka:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (1)(2\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

Contoh 6: Penyelesaian Masalah Geometri Menggunakan Produk Titik

Tentukan sudut antara diagonal kubus dan salah satu rusuknya.

Solusi Misalkan k adalah salah satu ujung kubus dan masuk ke dalam sistem koordinat seperti pada Gambar 3.2.6. Jika kita misalkan $\mathbf{u}_1 = (0, k, 0), \mathbf{u}_2 = (k, 0,0)$, dan $\mathbf{u}_3 = (0,0, k)$, maka vektor:

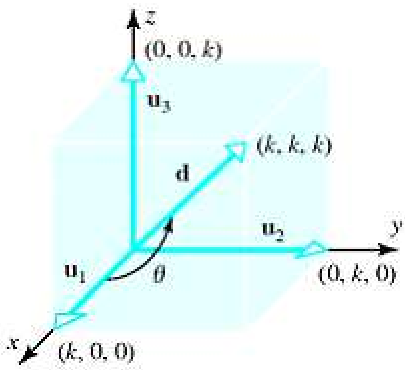
$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Adalah diagonal kubus. Dengan mengikuti formula (13) maka sudut θ antara $\mathbf{d}$ dan rusuk $\mathbf{u}_1$ memenuhi:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dengan bantuan kalkulator, kita peroleh:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74^{\circ}$$



Gambar 3.2. 6. Sudut antara $\mathbf{d}$ dan $\mathbf{u}_1$

Perhatikan bahwa sudut θ yang diperoleh pada Contoh 6 tidak melibatkan k. Mengapa ini bisa terjadi?

3.2.6. Bentuk Komponen dari Produk Titik

Untuk keperluan komputasi, diperlukan formula yang mengekspresikan produk titik dari dua vektor dalam bentuk komponen. Kita akan menurunkan formula seperti itu untuk vektor dalam ruang-3; penurunan formula untuk vektor di ruang-2 serupa.

Misal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor bukan nol. Jika, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2.7, θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka dari hukum cosinus menghasilkan:

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \qquad (14)$$

Karena $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, kita dapat menuliskan (14) sebagai:

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

Atau

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

Substitusi: $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^3,\ \|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^3$ dan

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

Kita per0leh dengan penyederhanaan:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{15}$$

Meskipun kita sudah menurunkan Formula (15) dan terkait ruang-2 dengan asumsi bahwa **u** dan **v** bukan nol, ternyata formula ini juga berlaku jika $\mathbf{u} = 0$ atau $\mathbf{v} = 0$ (verifikasi).

Formula terkait untuk vektor di ruang-2 adalah:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \tag{16}$$

Termotivasi dari pola dalam formula (15) dan (16), kita membuat definisi berikut:

DEFINISI 4

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor di R^n, maka **produk titik** (disebut juga **produk dalam Euclid**) dari **u** dan **v** dinotasikan dengan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ didefinisikan dengan:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \tag{17}$$

Dalam kata-kata, untuk menghitung produk titik (produk dalam Euclid), kalikan komponen yang sesuai dan tambahkan produk yang dihasilkan.

Contoh 7: Menghitung Produk Titik Menggunakan Komponen

(a) Gunakan formula (15) untuk menghitung produk titik dari vektor **u** dan **v** pada contoh 5.

(b) Hitung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk vektor-vektor berikut dalam R^4.
$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7)$ dan $\mathbf{v} = (-3, -4, 1, 0)$

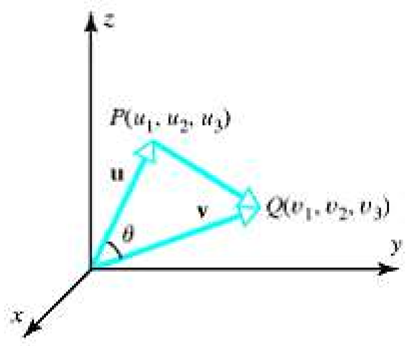
Solusi:

(a) Bentuk komponen dari vektor-vektornya adalah $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ dan $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$. Maka:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$$

Dan ini sama dengan hasil yang diperoleh secara geometris dalam contoh 5.

(b) $\cdot\, \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0) = -4$



Gambar 3.2. 7. Hubungan antara Sudut dan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

3.2.7. Sifat-sifat Aljabar dari Produk Titik

Dalam kasus khusus dimana $u = v$ dalam Definisi 4, kita memperoleh hubungan:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \qquad (18)$$

Menghasilkan formula berikut untuk mengekspresikan panjang dari suatu vektor dalam bentuk produk titi:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad (19)$$

Produk titik memiliki banyak sifat-sifat aljabar yang sama sebagai produk dari bilangan riil.

TEOREMA 3.2.2.

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor di R^n, dan jika k adalah suatu skalar, maka:

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ [Sifat Simetri]
(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ [Sifat Distributif]
(c) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ [Sifat Homogeniti]
(d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = 0$ [Sifat Positif]

Kita akan membuktikan bagian (c) dan (d) dan sisanya dijadikan latihan.

Bukti (*c*) Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Maka

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\ &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + \cdots + (ku_n)v_n \\ &= (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Bukti (*d*) Hasil berikut berasal dari bagian (a) dan (b) dari Teorema 3.2.1 dan fakta bahwa:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1v_1 + v_2v_2 + \cdots + v_nv_n = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$

Teorema berikutnya memberikan sifat-sifat tambahan dari produk titik. Bukti-bukti dapat diperoleh dengan mengekspresikan vektor dalam bentuk komponen dengan menggunakan sifat aljabar yang dibangun dalam Teorema 3.2.2.

TEOREMA 3.2.3.

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor di R^n, dan jika k adalah suatu skalar, maka:

(a) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$
(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
(c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
(d) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
(e) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Kita akan melihat bagaimana Teorema 3.2.2 dapat digunakan untuk membuktikan bagian (b) tanpa menguraikan vektor ke bentuk komponen. Bukti yang lain dijadikan latihan.

Bukti (*b*)

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) && \text{[Sifat Simetri]} \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} && \text{[Sifat Distributif]} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} && \text{[Sifat Simetri]} \end{aligned}$$

Formula (18) dan (19) bersama-sama dengan Teorema 3.2.2 dan 3.2.3 memungkinkan memanipulasi ekspresi yang melibatkan produk titik menggunakan sifat aljabar yang sudah familiar.

Contoh 8: Menghitung dengan Produk Titik

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) - 2\mathbf{v} \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) \\ &= 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 6(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{8}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 3\|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 8\|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

3.2.8. Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz dan Sudut di R^n

Tujuan kita selanjutnya adalah memperluas gagasan ke R^n dari “sudut” antara vektor **u** dan **v** bukan nol. Kita akan memulainya dengan formula:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right) \qquad (20)$$

Dimana sebelumnya kita sudah menurunkan untuk vektor bukan nol di R^2dan R^3. Karena produk titik dan norm sudah didefinisikan untuk vektor di R^n, terlihat bahwa formula ini memiliki semua kandungan untuk memberikan suatu definisi dari sudut θ antara dua vektor, **u** dan **v** di R^n. Namun demikian, terdapat sesuatu masalah di dalamnya, bahwa invers kosinus dalam formula (20) tidak terdefinisi kecuali argumen memenuhi pertidaksamaan:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1 \qquad (21)$$

Untungnya, pertidaksamaan ini berlaku untuk semua vektor bukan nol di R^n sebagai hasil dari hasil fundamental yang dikenal sebagai **pertidaksamaan Cauchy-Schwarz**.

TEOREMA 3.2.4. Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor di R^n, maka:

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \qquad (22)$$

Atau dalam bentuk komponen:

$$|u_1v_1 + \cdots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + \cdots + u_n^2)^{\frac{1}{2}}(v_1^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \qquad (23)$$

Kita akan mengabaikan bukti dari teorema ini karena nanti di bagian berikutnya kita akan membuktikan versi yang lebih umum dimana ini akan menjadi kasus khusus. Tujuan kita saat ini akan menggunakan teorema ini untuk membuktikan pertidaksamaan (21) yang berlaku untuk semua vektor bukan nol di R^n. Setelah pembuktian selesai kita akan membangun semua hasil yang dibutuhkan untuk menggunakan formula (20) sebagaimana definisi yang kita buat dari sudut antara vektor **u** dan **v** bukan nol di R^n.

Untuk membuktikan bahwa pertidaksamaan (21) berlaku untuk semua vektor bukan nol di R^n, bagilah kedua ruas dari formula (22) dengan produk $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ untuk memperoleh:

$$\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1 \text{ atau ekuivalen dengan } \left|\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1$$

Dimana mengikuti (21).

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)

Catatan Sejarah Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz dinamai untuk menghormati matematikawan Perancis Augustin Cauchy (lihat halaman 109) dan matematikawan Jerman Hermann Schwarz. Variasi pertidaksamaan ini terjadi di banyak pengaturan yang berbeda dan di bawah berbagai nama. Tergantung pada konteks di mana pertidaksamaan terjadi, Anda mungkin menemukan itu disebut pertidaksamaan Cauchy, pertidaksamaan Schwarz, atau kadang-kadang bahkan pertidaksamaan Bunyakovsky, sebagai pengakuan terhadap ahli matematika Rusia yang diterbitkan dalam versinya tentang kualitas pada tahun 1859, sekitar 25 tahun sebelum Schwarz.

3.2.9. Geometri di R^n

Pada bagian ini, kita akan memperluas macam-macam konsep ke R^n dengan ide yang hasilnya familiar yang dapat kita visualisasikan di R^2 dan

R^3 dan mungkin valid juga di R^n. Inilah dua teorema fundamental dari geometri bidang dimana perluasannya valid di R^n, yaitu:

- Jumlah panjang dari dua sisi suatu segitiga paling tidak lebih besar dari sisi yang ketiga (lihat Gambar 3.2.8)
- Jarak terpendek dari dua titik adalah suatu garis lurus (lihat Gambar 3.2.9)

Teorema berikut menggeneralisasi teorema-teorema di atas ke R^n.

TEOREMA 3.2.5

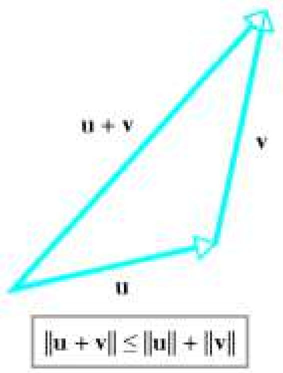
Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor di R^n, dan jika k adalah suatu skalar, maka:
(a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ [Pertidaksamaan Segitiga untuk Vektor]
(b) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$ [Pertidaksamaan Segitiga untuk Jarak]

Bukti (*a*)

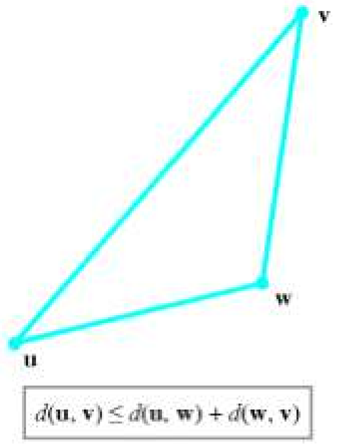
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 && \longleftarrow \text{Sifat Nilai Mutlak} \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 && \longleftarrow \text{Pertdk. Cauchy-Schwarz} \\
&\leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

Bukti (*b*) Ini mengiktui bagian (a) dan formula (11) bahwa:

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{u}-\mathbf{w}) + (\mathbf{w}-\mathbf{v})\| \\
&\leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| = d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})
\end{aligned}$$



Gambar 3.2. 8. Pertidaksamaan Segitiga untuk Vektor



Gambar 3.2. 9. Pertidaksamaan Segitiga untuk Jarak

Hal ini terbukti dalam geometri bidang bahwa untuk jajaran genjang apapun jumlah kuadrat diagonal sama dengan jumlah kuadrat dari keempat sisi (Gambar 3.2.10). Teorema berikut ini mengeneralisasikan hasil tersebut ke R^n.

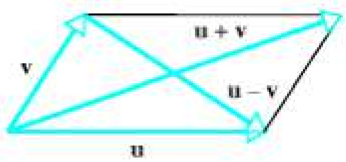
TEOREMA 3.2.6. Persamaan Jajar Genjang untuk Vektor

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor di R^n, maka:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2) \tag{24}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2)\end{aligned}$$



Gambar 3.2. 10. Persamaan Jajar Genjang untuk Vektor

Kita dapat menyatakan dan membuktikan lebih banyak teorema dari geometri bidang yang digeneralisasikan, tetapi yang sudah diberikan harus cukup untuk meyakinkan Anda bahwa R^n tidak begitu berbeda dari R^2 dan R^3 meskipun kita tidak dapat memvisualisasikannya secara langsung. Teorema berikutnya menetapkan hubungan mendasar antara produk titik dan norm di R^n.

TEOREMA 3.2.7

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor di R^n dengan produk dalam Euclid, maka:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \qquad (25)$$

Bukti:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

Dimana formula (25) diperoleh dengan penyederhanaan aljabar.

Catatan Formula (25) adalah ekspresi produk titik dalam bentuk norm.

3.2.10. Produk Titik Sebagai Perkalian Matrik

Ada berbagai cara untuk mengekspresikan produk titik vektor menggunakan notasi matriks. Rumus bergantung pada apakah vektor dinyatakan sebagai matriks baris atau matriks kolom. Inilah kemungkinannya.

Jika A adalah matrik $n\times n$ dan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah matrik $n\times 1$, maka mengiktui dari baris pertama pada Tabel 6 dan sifat-sifat dari transpose bahwa:

$$A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}^T(A\mathbf{u}) = (\mathbf{v}^T A)\mathbf{u} = (A^T\mathbf{v})^T\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{u} = (\mathbf{v}^T A^T)\mathbf{u} = \mathbf{v}^T(A^T\mathbf{u}) = A^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

Menghasilkan formula:

$$A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v} \qquad (26)$$

$$\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \qquad (27)$$

Memberikan suatu kaitan penting antara perkalian dengan matrik A $n\times n$ dan perkalian dengan A^T.

Contoh 9: Verifikasi bahwa $A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$

Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dimana kita peroleh:

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7(-2) + 10(0) + 5(5) = 11$$

$$\mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v} = (-1)(-7) + 2(4) + 4(-1) = 11$$

Sehingga, $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$ sebagaimana dijamain dengan formula (26). Kami tinggalkan untuk Anda memverifikasi bahwa formula (27) juga berlaku.

Tabel 6. Produk Titik Sebagai Perkalian Matriks

Bentuk	Produk Titik		Contoh
$\mathbf{u}$ matrik kolom dan $\mathbf{v}$ matrik kolom	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = [1 \;\; -3 \;\; 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [5 \;\; 4 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
$\mathbf{u}$ matrik baris dan $\mathbf{v}$ matrik kolom	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}^\mathbf{T}$	$\mathbf{u} = [1 \;\; -3 \;\; 5]$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}\mathbf{v} = [1 \;\; -3 \;\; 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u}^T = [5 \;\; 4 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
$\mathbf{u}$ matrik kolom dan $\mathbf{v}$ matrik baris	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\mathbf{T}\mathbf{v}^T$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = [5 \;\; 4 \;\; 0]$	$\mathbf{v}\mathbf{u} = [5 \;\; 4 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{u}^T\mathbf{v}^T = [1 \;\; -3 \;\; 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$

Bentuk	Produk Titik		Contoh
u matrik baris dan **v** matrik baris	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ $=\mathbf{v}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{u}=[1\ \ -3\ \ 5]$ $\mathbf{v}=[5\ \ 4\ \ 0]$	$\mathbf{u}\mathbf{v}^T=[1\ \ -3\ \ 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}=-7$ $\mathbf{v}\mathbf{u}^T=[5\ \ 4\ \ 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=-7$

3.2.11. Produk Titik ditinjau dari Perkalian Matrik

Produk titik memberikan cara berpikir lain tentang perkalian matrik. Ingat kembali jika $A=[a_{ij}]$ adalah matrik $r\times n$, maka entri ke-ij dari AB adalah:

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ir}b_{rj}$$

Dimana produk titik dari vektor baris ke-i dari A adalah:

$$[a_{i1}\quad a_{i2}\quad \dots\quad a_{ir}]$$

Dan vektor kolom ke-j dari B adalah:

$$\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{rj}\end{bmatrix}$$

Sehingga, jika vektor baris dari A adalah $r_1,r_2,\dots,r_m$ dan vektor kolom dari B adalah $c_1,c_2,\dots,c_n$, maka produk matrik AB dapat diekspresikan sebagai:

$$AB=\begin{bmatrix}r_1\cdot c_1 & r_1\cdot c_1 & \dots & r_1\cdot c_n\\ r_2\cdot c_1 & r_2\cdot c_1 & \dots & r_2\cdot c_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_m\cdot c_1 & r_m\cdot c_1 & \dots & r_1\cdot c_n\end{bmatrix}\qquad (28)$$

3.2.12. Aplikasi Produk Titik pada Nomor ISBN

Meskipun sistem baru-baru ini berubah, sebagian besar buku yang diterbitkan dalam 25 tahun terakhir telah diberi nomor 10-digit unik yang disebut Nomor Buku Standar Internasional atau ISBN. Sembilan digit pertama dari angka ini dibagi menjadi tiga kelompok — kelompok pertama yang mewakili negara atau kelompok negara tempat buku tersebut berasal, yang kedua mengidentifikasi penerbit, dan yang ketiga ditugaskan untuk judul buku itu sendiri. Digit kesepuluh dan terakhir, yang disebut digit cek, dihitung dari sembilan digit pertama dan digunakan untuk memastikan bahwa transmisi elektronik ISBN, katakanlah melalui Internet, terjadi tanpa kesalahan.

Untuk menjelaskan bagaimana hal ini dilakukan, perhatikan sembilan digit pertama dari ISBN sebagai vektor **b** di R9, dan misalkan **a** menjadi vektor:

$$\mathbf{a} = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$$

Kemudian cek digit c dihitung menggunakan prosedur berikut:

1. Bentuk produk titik.
2. Bagilah dengan 11, sehingga menghasilkan sisa c yang merupakan integer antara 0 dan 10, inklusif.

Digit cek diambil menjadi c, dengan syarat $c = 10$ yang ditulis sebagai X untuk menghindari digit ganda.

Misalnya, ISBN edisi singkat Kalkulus, edisi keenam, oleh Howard Anton adalah:

$$0 - 471 - 1530 - 9$$

yang memiliki digit cek 9. Ini konsisten dengan sembilan digit pertama ISBN, karena:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1,2,3,4,5,6,7,8,9) \cdot (0,4,7,1,1,5,3,0,7) = 152$$

Membagi 152 dengan 11 menghasilkan hasil bagi 13 dan sisa 9, sehingga digit cek adalah $c = 9$. Jika pesanan elektronik ditempatkan untuk buku dengan ISBN tertentu, maka gudang dapat menggunakan prosedur di atas untuk memverifikasi bahwa digit cek konsisten dengan sembilan digit pertama, sehingga mengurangi kemungkinan kesalahan pengiriman yang mahal.

Latihan 3.2

Untuk soal nomor 1 – 2, tentukan norm **v**, vektor satuan yang memiliki arah sama dengan **v**, dan vektor satuan yang berlawanan arah dengan **v**.

1. (a) $\mathbf{v} = (4, -3)$
   (b) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$

(c) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 1, 3)$

2. (a) $\mathbf{v} = (-5, 12)$
   (b) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$
   (c) $\mathbf{v} = (-2, 3, 3, -1)$

Untuk soal nomor 3 – 4, hitunglah ekspresi berikut dengan $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$, dan $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$.

3. (a) $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||$
   (b) $||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$
   (c) $|| - 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}||$
   (d) $||3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}||$

4. (a) $||\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}||$
   (b) $||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$
   (c) $||3\mathbf{v}|| - 3||\mathbf{v}||$
   (d) $||\mathbf{u}|| - ||\mathbf{v}||$

Untuk soal nomor 5 – 6, hitunglah ekspresi berikut dengan $\mathbf{u} = (-2, -1, 4, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -5, 7)$, dan $\mathbf{w} = (-6, 2, 1, 1)$.

5. (a) $||3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}||$
   (b) $||3\mathbf{u}|| - 5||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$
   (c) $|| - ||\mathbf{u}||\mathbf{v}||$

6. (a) $||\mathbf{u}|| - 2||\mathbf{v}|| - 3||\mathbf{w}||$
   (b) $||\mathbf{u}|| + ||-2\mathbf{v}|| + || - 3\mathbf{w}||$
   (c) $||||\mathbf{u} - \mathbf{v}||\mathbf{w}||$

7. Misalkan $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$. Tentukan semua skalar k sedemikian sehingga $||k\mathbf{v}|| = 5$.

8. Misalkan $\mathbf{v} = (1, 1, 2, -3, 1)$. Tentukan semua skalar k sedemikian sehingga $||k\mathbf{v}|| = 4$.

Untuk soal nomor 9 – 10, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

9. (a) $\mathbf{u} = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 2, -4)$
   (b) $\mathbf{u} = (1, 1, 4, 6)$, $\mathbf{v} = (2, -2, 3, -2)$

10. (a) $\mathbf{u} = (1, 1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 5, 1)$

(b) $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 0, -2),\ \ \mathbf{v} = (1, 2, 2, 2, 1)$

Untuk soal nomor 11 – 12, tentukan jarak Euclid antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

11. (a) $\mathbf{u} = (3, 3,\ 3),\ \ \mathbf{v} = (1, 0, 4)$
    (b) $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1),\ \ \mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$
    (c) $\mathbf{u} = (3, -3, -2, 0, -3, 13, 5),\ \ \mathbf{v} = (-4, 1, -1, 5, 0, -11, 4)$

12. (a) $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 0),\ \ \mathbf{v} = (5, 1, 2, -2)$
    (b) $\mathbf{u} = (2, -1, -4,1,0,6, -3,1),\ \ \mathbf{v} = (-2, -1,0,3,7,2, -5,1)$
    (c) $\mathbf{u} = (0, 1,1,1,2),\ \ \mathbf{v} = (2,1,0, -1,3)$

13. Tentukan kosinus dari sudut antara vektor-vektor pada soal nomor 11, dan kemudian tentukan apakah sudut lancip, tumpul atau siku-siku.

14. Tentukan kosinus dari sudut antara vektor-vektor pada soal nomor 12, dan kemudian tentukan apakah sudut lancip, tumpul atau siku-siku.

15. Anggaplah bahwa vektor **a** dalam bidang-xy memiliki panjang 9 satuan dan menunjuk ke arah 120° berlawanan arah jarum jam dari sumbu x positif, dan vektor **b** dalam bidang itu memiliki panjang 5 satuan dan titik dalam arah y positif. Tentukan $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

16. Misalkan vektor **a** dalam titik-titik bidang-xy dalam arah 47° berlawanan arah jarum jam dari sumbu x positif, dan vektor **b** di titik bidang dalam arah yang 43° searah jarum jam dari sumbu x positif. Apa yang bisa Anda katakan tentang nilai $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$?

Untul soal nomor 17 – 18, tentukan apakah ekspresi berikut masuk akal secara matematik. Jika tidak, jelaskan mengapa.

17. (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
    (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
    (c) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$
    (d) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \|\mathbf{u}\|$

18. (a) $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$
    (b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{w}$
    (c) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - k$
    (d) $k \cdot \mathbf{u}$

19. Tentukan vektor satuan yang memiliki arah yang sama dengan vektor-vektor berikut.
 (a) $(-4, -3)$
 (b) 1,7)
 (c) $(-3, 2, \sqrt{3})$
 (d) $(1, 2, 3, 4, 5)$

20. Tentukan vektor satuan yang arahnya berlawanan dengan vektor-vektor berikut.
 (a) $(-12, -5)$
 (b) $(3, -3, -3)$
 (c) $(-6, 8)$
 (d) $(-3, 1, \sqrt{6}, 3)$

21. Sebutkan prosedur untuk mencari vektor dari panjang m yang ditentukan yang menunjuk ke arah yang sama dengan vektor $\mathbf{v}$ yang diberikan.

22. Jika $\|\mathbf{v}\| = 2$ dan $\|\mathbf{w}\| = 3$, berapakah nilai terkecil dan terbesar yang mungkin untuk $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$? Berikan penjelasan secara geometris dari hasil yang didapatkan.

23. Tentukan kosinus dari sudut θ antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
 (a) $\mathbf{u} = (2, 3), \ \ \mathbf{v} = (5, -7)$
 (b) $\mathbf{u} = (-6, -2), \ \ \mathbf{v} = (4, 0)$
 (c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4), \ \ \mathbf{v} = (3, 3, 3)$
 (d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3), \ \ \mathbf{v} = (1, 7, -4)$

24. Tentukan ukuran radian dari sudut θ (dengan $0 \leq \theta \leq \pi$) antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
 (a) $(1, -7)$ dan $(21, 3)$
 (b) $(0, 2)$ dan $(3, -3)$
 (c) $(-1, 1, 0)$ dan $(0, -1, 1)$
 (d) $(1, -1, 0)$ dan $(1, 0, 0)$

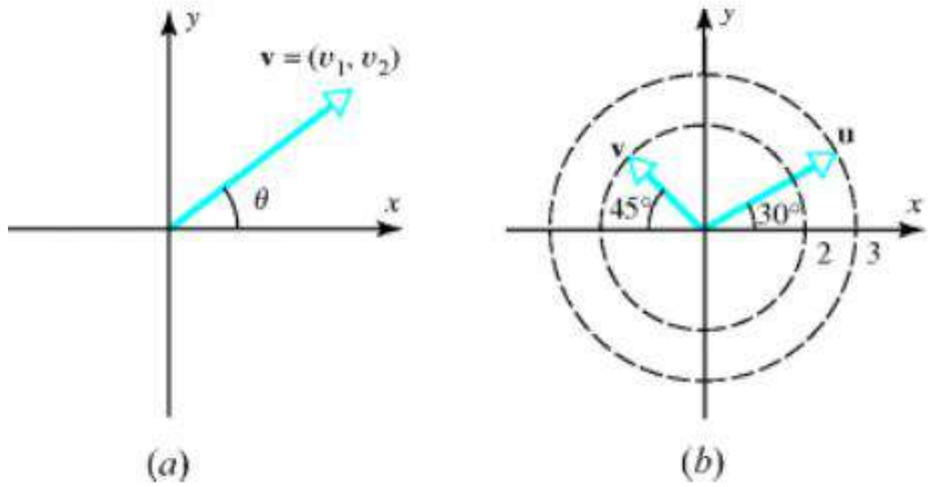
Untuk soal nomor 25 – 26, verifikasi apakah memenuhi pertidaksamaan Cauchy-Schwarz.

25. (a) $\mathbf{u} = (3, 2), \ \ \mathbf{v} = (4, -1)$
 (b) $\mathbf{u} = (-3, 1, \ 0), \ \ \mathbf{v} = (2, -1, \ 3)$
 (c) $\mathbf{u} = (0, 2, 2, 1), \ \ \mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$

26. (a) $\mathbf{u} = (4, 1, 1),\ \ \mathbf{v} = (1, 2, 3)$
(b) $\mathbf{u} = (1, 2, 1, 2, 3,),\ \ \mathbf{v} = (0, 1, 1, 5, -2)$
(c) $\mathbf{u} = (1, 3, 5, 2, 0, 1),\ \ \mathbf{v} = (0, 2, 4, 1, 3, 5)$

27. Misalkan $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dan $\mathbf{p} = (x, y, z)$. Gambarkan himpunan semua titik (x, y, z) dimana $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$.

28. (a) Tunjukkan bahwa komponen dari vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pada gambar Soal nomor 28(a) adalah $v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$ dan $v_2 = \|\mathbf{v}\| \sin\theta$.
(b) Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor pada gambar Soal nomor 28(b). Gunakan hasil bagian (a) untuk menentukan kompinen dari $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$.



Gambar 3.2. 11. Soal nomor 28

29. Buktikan bagian (a) dan (b) dari Teorema 3.2.1.
30. Buktikan bagian (a) dan (c) dari Teorema 3.2.3.
31. Buktikan bagian (d) dan (e) dari Teorema 3.2.3.

32. Di bawah kondisi apakah pertidaksamaan segitiga akan menjadi persamaan? Jelaskan jawaban Anda secara geometris!

33. Apa yang dapat Anda katakan tentang dua vektor bukan nol yaitu $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, yang memenuhi persamaan $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$?

34. Apa hubungan yang harus dipenuhi untuk titik $\mathbf{p} = (a, b, c)$ agar lebih jauh dari titik pusat daripada bidang xz? Pastikan bahwa hubungan yang Anda nyatakan valid untuk nilai-nilai positif dan negatif dari a, b, dan c.

oOoEndoOo

KEGIATAN PEMBELAJARAN 15

Kegiatan Belajar 15: Ortogonalitas

A. Tujuan Pembelajaran:

1. Peserta didik dapat menentukan dua vektor yang saling ortogonal.
2. Peserta didik dapat menentukan himpunan vektor yang membentuk himpunan ortogonal.
3. Peserta didik dapat menentukan persamaan garis atau bidang menggunakan vektor normal dan satu titik pada garis atau bidang.
4. Peserta didik dapat menentukan bentuk vektor dari garis atau bidang yang melalui titik pusat.
5. Peserta didik dapat menghitung komponen vektor dari **u** sepanjang **a** dan ortogonal pada **a**.
6. Peserta didik dapat menentukan jarak antara titik dan garis di R^2 atau R^3.
7. Peserta didik dapat menentukan jarak antara dua bidang paralel di R^3.
8. Peserta didik dapat menentukan jarak antara titik dan bidang..

Metode Pembelajaran : *Direct Learning, Pendekatan Saintifik*
Model Pembelajaran : *Drill, Scaffolding, Problem Based Learning*

Petunjuk Penggunaan Modul:
1. Bacalah dengan seksama materi dan contoh soal.
2. Kerjakan latihan-latihan dengan sungguh-sungguh.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menentukan dua vektor yang saling ortogonal.
2. Menentukan himpunan vektor yang membentuk himpunan ortogonal.
3. Menentukan persamaan garis atau bidang menggunakan vektor normal dan satu titik pada garis atau bidang.
4. Menentukan bentuk vektor dari garis atau bidang yang melalui titik pusat.
5. Menghitung komponen vektor dari **u** sepanjang **a** dan ortogonal pada **a**.
6. Menentukan jarak antara titik dan garis di R^2 atau R^3.
7. Menentukan jarak antara dua bidang paralel di R^3.
8. Menentukan jarak antara titik dan bidang.

C. Uraian Materi

3.3. Ortogonalitas

Pada bagian terakhir bab sebelumnya, kita sudah mendefinisikan notasi dari “sudut” antara vektor-vektor di R^n. Pada bagian ini, kita akan fokus pada notasi “sifat tegak lurus”. Vektor-vektor tegak lurus dalam R^n memiliki peran yang sangat penting dalam berbagai macam aplikasi.

3.3.1. Vektor Ortogonal

Ingat kembali formula (20) pada bagian sebelumnya bahwa sudut θ antara dua vektor bukan nol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam R^n didefinisikan dengan formula:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Akan mendapatkan nilai $\theta = \frac{\pi}{2}$ jika dan hanya jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Sehingga kita buat definisi berikut:

DEFINISI 1

Dua buah vektor bukan nol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam R^ndikatakan ortogonal (tegak lurus) jika $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Kita juga setuju bahwa vektor nol dalam R^n adalah ortogonal untuk setiap vektor di R^n. Suatu himpunan tidak kosong dari vektor dalam R^n dikatakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor yang berbeda berada dalam himpunan adalah ortogonal. Suatu himpunan ortogonal dari vektor satuan disebut himpunan ortonormal.

Contoh 1. Vektor Ortogonal

(a) Tunjukkan bahwa $\mathbf{u} = (-2,3,1,4)$ dan $\mathbf{v} = (1,2,0,-1)$ adalah vektor-vektor ortogonal dalam R^4.
(b) Tunjukkan bahwa himpunan $S = (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ dari vektor satuan standar adalah himpunan ortogonal dalam R^3

Solusi

(a) Vektor-vektor akan ortogonal karena:
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$
(b) Kita harus menunjukkan bahwa semua pasangan vektor yang berbeda adalah ortogonal, yaitu:
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$$

Bukti secara geometris dapat dilihat pada gambar 3.2.2, tetapi dapat dilihat dengan baik dalam perhitungan:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0$$
$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$$

Pada contoh 1 tidak diperlukan pengecekan bahwa:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Karena hasil pada perhitungan pada contoh 1 itu sendiri dan sifat simetri dari perkalian titik.

3.3.2. Menentukan Garis dan Bidang dengan Titik dan Normal

Salah satu pembelajaran dalam geometri analitis bahwa suatu garis dalam R^2 ditentukan secara tunggal dengan kemiringan dan satu titik pada garis tersebut, dan suatu bidang dalam R^3 ditentukan secara tunggal dengan inklinasi (kecenderungan) dan satu titik pada bidang tersebut. Salah satu cara untuk menentukan kemiringan dan inklinasi adalah menggunakan vektor **n** non nol, yang disebut **normal**, yaitu vektor yang ortogonal ke garis atau ke bidang. Sebagai contoh, gambar 3.3.1 menunjukkan garis yang melalui titik $P_0(x_0, y_0)$ yang memiliki normal $\mathbf{n} = (a, b)$ dan bidang yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ yang memiliki normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Baik garis maupun bidang direpresentasikan dengan persamaan vektor berikut:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad (1)$$

Dimana P salah satu sebarang titik (x, y) pada garis atau sebarang titik (x, y, z) pada bidang. Vektor $\overrightarrow{P_0P}$ dapat diekspresikan dalam bentuk komponen sebagai:

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) \ \text{[garis]}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \ \text{[bidang]}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \ \text{[garis]} \qquad (2)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \ \text{[bidang]} \qquad (3)$$

Persamaan (2) dan (3) disebut **persamaan titik-normal** dari garis dan bidang.

Contoh 2. Persamaan Titik-Normal

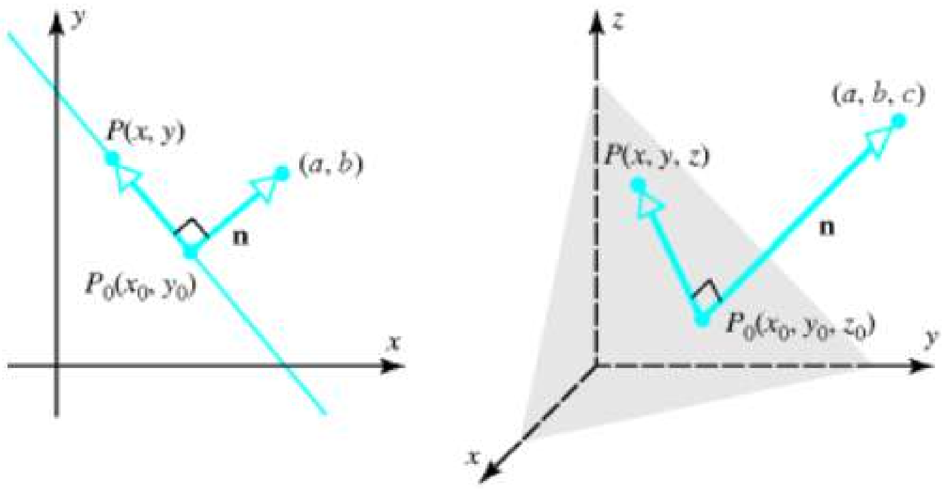
Dari formula (2) bahwa dalam R^2, persamaan berikut:

$$6(x - 3) + (y + 7) = 0$$

Merepresentasikan garis yang melalui titik $(3, -7)$ dengan normal $\mathbf{n} = (6,1)$.
Dan dari formula (3) bahwa dalam R^3, persamaan berikut:

$$4(x-3)+2y-5(z-7)=0$$

Merepresentasikan bidang yang melalui titik $(3,0,7)$ dengan normal $\mathbf{n}=(4,2,-5)$.



Gambar 3.3. 1. Garis dan Bidang dengan Titik dan Normal

Jika memenuhi dan sesuai, persamaan (2) dan (3) dapat digandakan dan konstanta digabungkan, maka hal ini mengarah pada teorema berikut:

TEOREMA 3.3.1

(a) Jika a dan b konstanta dimana keduanya tidak nol, maka persamaan menjadi:

$$ax+by+c=0 \tag{4}$$

Yang merupakan representasi garis di R^2 dengan normal $\mathbf{n}=(a,b)$.

(b) Jika a, b, dan c konstanta dimana ketiganya tidak nol, maka persamaan menjadi:

$$ax+by+cz+d=0 \tag{5}$$

Yang merupakan representasi bidang di R^3 dengan normal $\mathbf{n}=(a,b,c)$.

Contoh 3. Vektor Ortogonal pada Garis dan Bidang melalui Titik Pusat

(a) Persamaan $ax+by=0$ merepresentasikan suatu garis yang melalui titik pusat di R^2. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{n}_1=(a,b)$ terbentuk dari koefisien-koefisien persamaan dan ortogonal terhadap garis, ortogonal ke semua vektor sepanjang garis.
(b) Persamaan $ax+by+cz=0$ merepresentasikan suatu bidang yang melalui titik pusat di R^3. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{n}_2=(a,b,c)$ terbentuk dari

koefisien-koefisien persamaan dan ortogonal terhadap bidang, ortogonal ke semua vektor sepanjang bidang.

Solusi Kita selesaikan kedua permasalahan secara bersamaan. Kedua persamaan dapat ditulis sebagai:

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0 \text{ dan } (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$$

Atau dengan alternatif lain yaitu:

$$\mathbf{n}_1 \cdot (x, y) = 0 \text{ dan } \mathbf{n}_2 \cdot (x, y, z) = 0$$

Pada kedua persamaan menunjukkan bahwa $\mathbf{n}_1$ ortogonal ke semua vektor (x, y) pada garis dan $\mathbf{n}_2$ ortogonal ke semua vekor (x, y, z) pada bidang (lihat gambar 3.3.1).

Ingat kembali bahwa:

$$ax + by = 0 \text{ dan } ax + by + cz = 0$$

Adalah persamaan homogen. Contoh 3 mengilustrasikan bahwa persamaan homogen dalam dua atau tiga variabel yang tidak diketahui dapat dituliskan dalam bentuk vektor, yaitu:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{6}$$

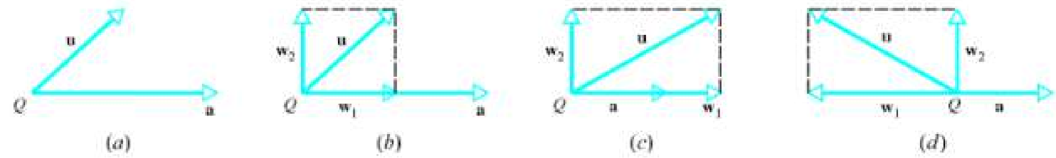
Dimana n adalah vektor koefisien dan x adalah vektor dari yang tidak diketahui. Dalam R^2 disebut bentuk vektor dari suatu garis melalui titik pusat, dan dalam R^3 disebut bentuk vektor dari suatu bidang melalui titik pusat.

Berdasarkan Tabel 1 pada bagian 3.2, berapa banyak cara lain Anda menuliskan (6) jika **n** dan **x** adalah ekspresi dalam bentuk matrik?

3.3.3. Proyeksi Ortogonal

Dalam banyak aplikasi sangat diperlukan melakukan "dekomposisi" suatu vektor **u** ke dalam suatu penjumlahan dua bentuk, satu bentuk menjadi perkalian skalar dari vektor **a** bukan nol secara spesifik, dan yang kedua menjadi vektor ortogonal pada **a**. Sebagai contoh, jika **u** dan **a** adalah vektor-vektor dalam R^2 yang diposisikan sehingga titik awalnya bertemu di titik Q, maka kita dapat membuat dekomposisi sebagai berikut (lihat gambar 3.3.2):

- Jatuhkan tegak lurus dari ujung **u** ke garis melalui **a**.
- Buat vektor $\mathbf{w}_1$ dari Q ke kaki tegak lurus.
- Buat vektor $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$



Gambar 3.3. 2. Proses Proyeksi Ortogonal

Pada gambar 3.3.2(b) sampai (d), $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ dimana $\mathbf{w}_1$ paralel terhadap $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{w}_2$ ortogonal terhadap $\mathbf{a}$.

Karena:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

Maka kita mendapatkan dekomposisi $\mathbf{u}$ kedalam jumlah dua vektor ortogonal, bentuk pertama adalah perkalian skalar dengan $\mathbf{a}$ dan kedua vektor ortogonal terhadap $\mathbf{a}$.

Teorema berikut menunjukkan bahwa hasil di atas, dimana diilustrasikan dengan vektor dalam R^2, dapat diterapkan juga di R^n.

TEOREMA 3.3.2. Teorema Proyeksi

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{a}$ adalah vektor-vektor dalam R^n, dan jika $\mathbf{a} \neq 0$, maka $\mathbf{u}$ dapat diekspresikan secara tepat satu cara dalam bentuk $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ dimana $\mathbf{w}_1$ adalah perkalian skalar dengan $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{w}_2$ ortogonal terhadap $\mathbf{a}$.

Bukti Karena vektor $\mathbf{w}_1$ menjadi perkalian skalar dengan $\mathbf{a}$, pasti memiliki bentuk

$$\mathbf{w}_1 = k\mathbf{a} \tag{7}$$

Tujuan kita adalah menemukan nilai skalar k dan vektor $\mathbf{w}_2$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{a}$ sedemikian sehingga:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{8}$$

Kita dapat menemukan k dengan menggunakan (7) dan menuliskan (8) sebagai:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2$$

Dan kemudian menerapkan Teorema 3.2.2 dan 3.2.3 untuk memperoleh:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2 + (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a}) \tag{9}$$

Karena $\mathbf{w}_2$ ortogonal terhadap $\mathbf{a}$, bentuk terakhir dari (9) pasti 0, sehingga k memenuhi persamaan:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2$$

Dari sini kita peroleh:

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

Sebagai nilai yang mungkin untuk k. Bukti dapat dilengkapi dengan menuliskan (8) sebagai:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - k\mathbf{a} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

Dan kemudian konfirmasikan bahwa $\mathbf{w}_2$ adalah ortogonal terhadap $\mathbf{a}$ dengan menunjukkan bahwa $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$ (Kami tinggalkan detailnya untuk Anda).

Vektor $\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{w}_2$ dalam Teorema Proyeksi memiliki nama yang terkait, dimana vektor $\mathbf{w}_1$ disebut proyeksi ortogonal dari $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{a}$ atau kadangkala disebut vektor komponen dari $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$, dan vektor $\mathbf{w}_2$ disebut komponen dari $\mathbf{u}$ ortogonal terhadap $\mathbf{a}$. Vektor $\mathbf{w}_1$ pada umumnya dinotasikan dengan simbol $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$, dalam kasus ini mengikuti formula (8) yaitu $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$. Ringkasnya,

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \tag{10}$$

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \tag{11}$$

Contoh 4. Proyeksi Ortogonal pada Garis

Tentukan proyeksi ortogonal dari vektor $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ dan $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ pada garis L yang membentuk sudut θ dengan sumbu x posistif dalam R^2.

Solusi Seperti yang diilustrasikan pada gambar 3.3.3, $\mathbf{a} = (\cos\theta, \sin\theta)$ adalah vektor satuan sepanjang garis L, sehingga permasalahan kita yang pertama adalah menemukan proyeksi ortogonal dari $\mathbf{e}_1$ sepanjang $\mathbf{a}$. Karena:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \text{ dan } \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a} = (1,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta$$

Dengan mengikuti formula (10), maka proyeksinya adalah:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = (\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta)$$

Kemudian, karena $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a} = (0,1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta$, dengan formula (10) diperoleh:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e_2} = \frac{\mathbf{e_2} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = (\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta)$$

Contoh 5. Komponen Vektor dari **u** Sepanjang **a**

Misalkan $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ dan $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$. Tentukan komponen vektor **u** sepanjang **a** dan komponen vektor **u** ortogonal terhadap **a**.

Solusi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

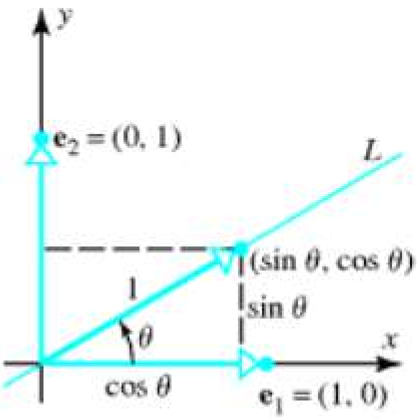
Maka komponen vektor **u** sepanjang **a** adalah:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

dan komponen vektor **u** ortogonal terhadap **a** adalah:

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

Sebagai pengecekan, Anda boleh memverifikasi bahwa vektor $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ dan **a** adalah saling tegak lurus dengan menunjukkan perkalian titik antara keduanya adalah nol.



Gambar 3.3. 3. Proteksi Ortogonal Pada Garis

Kadangkala kita lebih tertarik pada norm dari komponen vektor **u** sepanjang **a** daripada komponen vektor itu sendiri. Formula untuk menentukan normnya dapat diperoleh dengan menurukan formula menjadi:

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\| = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right|\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\|$$

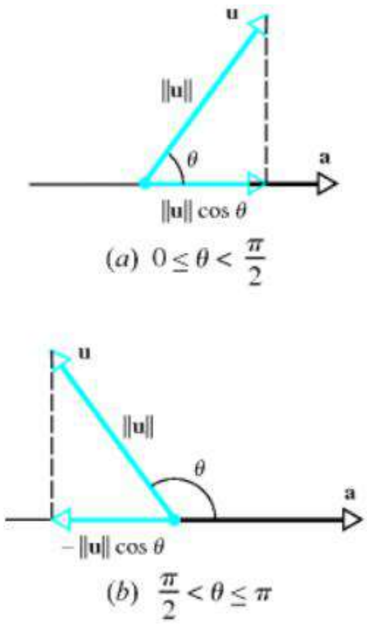
Dimana persamaan kedua berikut diperoleh dari bagian (c) Teorema 3.2.1 dan bentuk ketiga dari fakta bahwa $\|\mathbf{a}\|^2 > 0$. Sehingga:

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} \tag{12}$$

Jika θ menotasikan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{a}$, maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{a}\|\cos\theta$, sehingga (12) dapat juga dituliskan sebagai:

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\||\cos\theta| \tag{13}$$

(Verifikasi). Interpretasi geometris dari hasil ini diberikan pada gambar 3.3.4.



Gambar 3.3. 4. Interpretasi Geometris Komponen Vektor dari u Sepanjang a

3.3.4. Teorema Pythagoras

Pada bagian 3.2 kita menemukan banyak teorema tentang vektor di R^2 dan R^3 yang juga memenuhi untuk R^n. Contoh lain dari temuan tersebut adalah generalisasi Teorema Phytagoras berikut (lihat gambar 3.3.5).

TEOREMA 3.3.3. Teorema Phytagoras dalam R^n

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor ortogonal dalam R^n dengan produk dalam Euclid, maka:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \tag{14}$$

Bukti Karena $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor ortogonal, kita memiliki $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, dimana:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

Contoh 6. Teorema Phytagoras di R^4

Kita sudah diperlihatkan dalam contoh 1 bahwa vektor-vektor:

$$\mathbf{u} = (-2,3,1,4) \text{ dan } \mathbf{v} = (1,2,0,-1)$$

Adalah ortogonal. Verifikasi Teorema Phytagoras untuk vektor-vektor tersebut!

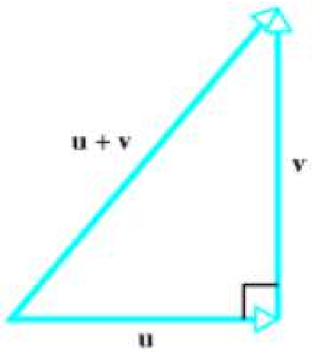
Solusi Kami meninggalkan verifikasi untuk Anda konfirmasi bahwa

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1,5,1,3)$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 36$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 30 + 6$$

Dengan demikian, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$



Gambar 3.3. 5. Generalisasi Teorema Phytagoras

3.3.5. Opsional: Masalah Jarak

Kita sekarang akan menunjukkan bagaimana proyeksi ortogonal dapat digunakan untuk menyelesaikan tiga masalah jarak berikut ini:

Masalah 1. Tentukan jarak antara titik dengan garis di R^2.

Masalah 2. Tentukan jarak antara titik dengan bidang di R^3.

Masalah 3. Tentukan jarak antara dua bidang paralel di R^3.

Metode untuk menyelesaikan dua masalah pertama adalah dengan teorema selanjutnya. Karena bukti dari dua permasalahan sama, kita akan membuktikan bagian (b) dan meninggalkan bagian (a) sebagai latihan.

TEOREMA 3.3.4

(a) Dalam R^2 jarak D antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dan garis $ax + by + c = 0$ adalah:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{15}$$

(b) Dalam R^3 jarak D antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan garis $ax + by + cz + d = 0$ adalah:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{16}$$

Bukti (*b*) Misalkan $Q(x_1, y_1, z_1)$ adalah suatu titik pada bidang. Posisi normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ sehingga titik awal ada di Q. Seperti yang diilustrasikan pada gambar 3.3.6, jarak D adalah sama dengan panjang proyeksi ortogonal $\overrightarrow{QP_0}$ terhadap $\mathbf{n}$. Sehingga, dengan mengikuti formula (12) diperoleh:

$$D = \left\|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{QP_0}\right\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Tetapi,

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Sehingga,

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{17}$$

Karena titik $Q(x_1, y_1, z_1)$ berada pada bidang yang diberikan, koordinatnya memenuhi persamaan pada bidang, jadi:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

Atau

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Substitusikan d ke (17) menghasilkan (16).

Contoh 7. Jarak antara Titik dan Bidang

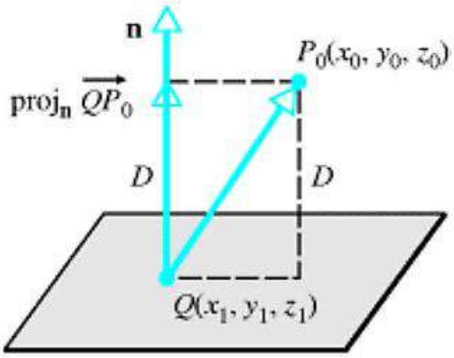
Tentukan jarak D antara titik $(1, -4, -3)$ dan bidang $2x - 3y + 6z = -1$!

Solusi Karena formula jarak dalam Teorema 3.3.4 mengharuskan persamaan garis dan persamaan bidang ditulis dengan nol di sebelah kanan, pertama kita perlu menuliskan kembali persamaan bidang sebagai:

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

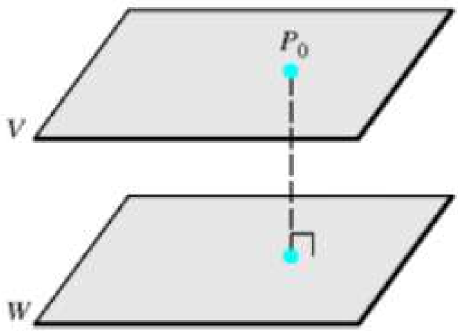
Dan dari situ kita peroleh:

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$



Gambar 3.3. 6. Jarak D dari P_0 ke Bidang

Masalah jarak yang ketiga yang dinyatakan di atas adalah menentukan jarak antara dua bidang paralel di R^3. Seperti yang disugestikan pada gambar 3.3.7, jarak antara bidang V dan bidang W dapat diperoleh dengan menentukan suatu titik P_0 dalam salah satu bidang, dan menghitung jarak antara titik dengan bidang lainnya.



Gambar 3.3. 7. Jarak antara Bidang V dan W sama dengan jarak antara P_0 dan W

Contoh 8. Jarak antara Bidang-Bidang Paralel

Bidang-bidang

$$x + 2y - 2z = 3 \text{ dan } 2x + 4y - 4z = 7$$

Adalah paralel karena normal-normal bidang itu, $(1,2,-2)$ dan $(2,4,-4)$ adalah vektor-vektor paralel. Tentukan jarak antara bidang-bidang tersebut!\

Solusi Untuk menentukan jarak D antara bidang-bidang tersebut, kita dapat memilih sebarang titik pada salah satu bidang dan menghitung jaraknya ke bidang yang lain. Dengan mengatur $y = z = 0$ pada persamaan $x + 2y - 2z = 3$ kita peroleh titik $P_0(3,0,0)$ pada bidang ini. Dari (16), jarak antara P_0 dan bidang $2x + 4y - 4z = 7$ adalah:

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

Latihan 3.3

Untuk soal nomor 1 – 2, tentukan apakah **u** dan **v** adalah vektor-vektor ortogonal.

1. (a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (2, 0 - 3)$
   (b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$ dan $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
   (c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$ dan $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$
   (d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8)$ dan $\mathbf{v} = (5, 3, 7)$

2. (a) $\mathbf{u} = (2, 3)$ ddan $\mathbf{v} = (5, -7)$
   (b) $\mathbf{u} = (-6, -2)$ dan $\mathbf{v} = (4, 0)$
   (c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$ dan $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$
   (d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$ dan $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$

Untuk soal nomor 3 – 4, tentukan vektor-vektor manakah yang termasuk dalam himpunan ortogonal.

3. (a) $\mathbf{v_1} = (2, 3)$ dan $\mathbf{v_2} = (3, 2)$
   (b) $\mathbf{v_1} = (-1,\ 1)$ dan $\mathbf{v_2} = (1, 1)$
   (c) $\mathbf{v_1} = (-2, 1, 1)$ $\mathbf{v_2} = (1, 0, 2)$, dan $\mathbf{v_3} = (-2, -5, 1)$
   (d) $\mathbf{v_1} = (-3, 4, -1)$ $\mathbf{v_2} = (1, 2, 5)$, dan $\mathbf{v_3} = (4, -3, 0)$

4. (a) $\mathbf{v_1} = (2, 3)$ dan $\mathbf{v_2} = (-3, 2)$
   (b) $\mathbf{v_1} = (1, -2)$ dan $\mathbf{v_2} = (-2, 1)$
   (c) $\mathbf{v_1} = (1, 0, 1)$ $\mathbf{v_2} = (1, 1, 1)$, dan $\mathbf{v_3} = (-1, 0, 1)$
   (d) $\mathbf{v_1} = (2, -2, 1)$ $\mathbf{v_2} = (2, 1, -2)$, dan $\mathbf{v_3} = (1, 2, 2)$

5. Tentukan vektor satuan sehingga ortogonal terhadap $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ dan $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$

6. (a) Tunjukkan bahwa $\mathbf{v} = (a, b)$ dan $\mathbf{w} = (-b, a)$ adalah vektor-vektor ortogonal.
   (b) Gunakan hasil bagian (a) untuk menentukan dua vektor yang ortogonal terhadap $\boldsymbol{v} = (2, -3)$.
   (c) Tentukan dua vektor satuab yang ortogonal terhadap $(-3, 4)$.

7. Apakah titik-titik $A(1,1,1), B(-2,0,3)$, dan $C(-3,-1,1)$ membentuk titik-titik segitiga dengan tepat? Jelaskan jawaban Anda!

8. Ulangi soal nomor 7, untuk titik-titik $A(3,0,2), B(4,3,0)$, dan $C(8,1,-1)$.

Untuk soal nomor 9 – 12, tentukan bentuk titik-normal dari persamaan bidang melalui P dan memiliki $\mathbf{n}$ sebagai normal.

9. $P(-1,3,-2)$, $\mathbf{n} = (-2,1,-1)$
10. $P(1,1,4)$, $\mathbf{n} = (1,9,8)$
11. $P(2,0,0)$, $\mathbf{n} = (0,0,2)$
12. $P(0,0,0)$, $\mathbf{n} = (1,2,\ 3)$

Untuk soal nomor 13 – 16, tentukan apakah bidang-bidang berikut paralel.

13. $4x - y + 2z = 5$ dan $7x - 3y + 4z = 8$
14. $x - 4y - 3z - 2 = 0$ dan $3x - 12y - 9z - 7 = 0$
15. $2y = 8x - 4z + 5$ dan $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$
16. $(-4,1,2) \cdot (x,y,z) = 0$ dan $(8,-2,-4) \cdot (x,y,z) = 0$

Untuk soal nomor 17 – 18, tentukan bidang-bidang yang saling tegak lurus.

17. $3x - y + z - 4 = 0$ dan $x + 2z = -1$
18. $x - 2y + 3z = 4$ dan $-2x + 5y + 4z = -1$

Untuk soal nomor 19 – 20, tentukan $\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\|$

19. (a) $\mathbf{u} = (1,-2)$, $\mathbf{a} = (-4,-3)$
    (b) $\mathbf{u} = (3,0,4)$, $\mathbf{a} = (2,3,3)$

20. (a) $\mathbf{u} = (5,6)$, $\mathbf{a} = (2,-1)$
    (b) $\mathbf{u} = (3,-2,6)$, $\mathbf{a} = (1,2,-7)$

Untuk soal nomor 21 – 28, tentukan komponen vektor **u** sepanjang **a** dan komponen vektor **u** ortogonal terhadap **a**.

21. $\mathbf{u} = (6,2)$, $\mathbf{a} = (3,-9)$

22. $\mathbf{u} = (-1, -2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3)$
23. $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$
24. $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$
25. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a} = (0, 2, -1)$
26. $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$
27. $\mathbf{u} = (2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a} = (4, -4, 2, -2)$
28. $\mathbf{u} = (5, 0, -3, 7)$, $\mathbf{a} = (2,\ 1, -1, -1)$

Untuk soal nomor 29 – 32, tentukan jarak antara titik dan garis.

29. $4x + 3y + 4 = 0$; $(-3, 1)$
30. $x - 3y + 2 = 0$; $(-1, 4)$
31. $y = -4x + 2$; $(2, -5)$
32. $3x + y = 5$; $(1, 8)$

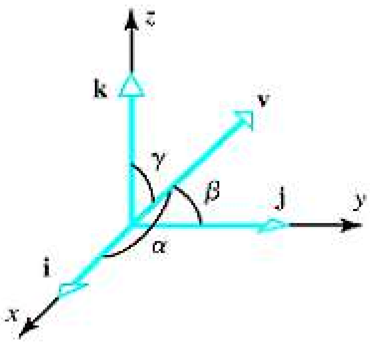
Untuk soal nomor 33 – 36, tentukan jarak antara titik dengan bidang

33. $(3, 1, -2)$; $x + 2y - 2z = 4$
34. $(-1, -1, 2)$; $2x + 5y - 6z = 4$
35. $(-1, 2, 1)$; $2x + 3y - 4z = 1$
36. $(0, 3, -2)$; $x - y - z = 3$

Untuk soal nomor 37 – 40, tentukan jarak antara bidang-bidang paralel berikut.

37. $2x - y - z = 5$ dan $-4x + 2y + 2z = 12$
38. $3x - 4y + z = 1$ dan $6x - 8y + 2z = 3$
39. $-4x + y - 3z = 0$ dan $8x - 2y + 6z = 3$
40. $2x - y + z = 1$ dan $8x - 2y + 6z = 0$

41. Misalkan $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ adalah vektor satuan sepanjang sumbu positif x, y, z dari koordinat persegi panjang dalam 3 dimensi. Jika $\mathbf{v} = (a, b, c)$ adalah vektor bukan nol, maka sudut α, β, dan γ antara $\mathbf{v}$ dan vektor , berturut-turut, disebut sudut langsung dari $\mathbf{v}$ (lihat gambar soal nomor 41), dan banyaknya $\cos\alpha$, $\cos\beta$, dan $\cos\gamma$ disebut cosinus langsung dari $\mathbf{v}$.
    (a) Tunjukkan bahwa $\cos\alpha = \frac{a}{\|\mathbf{v}\|}$
    (b) Tentukan $\cos\beta$ dan $\cos\gamma$
    (c) Tunjukkan bahwa $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
    (d) Tunjukkan bahwa $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$



Gambar 3.3. 8. Soal Nomor 41

42. Gunakan hasil pada soal nomor 41 untuk mengestimasi derajat terdekat dari sudut bahwa diagonal dari kotak dengan dimensi 10 cm $\times$ 15 cm $\times$ 25 cm terbentuk dengan sisi-sisi kotak.

43. Tunjukkan bahwa jika $\mathbf{v}$ adalah ortogonal terhadap $\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{w}_2$, maka $\mathbf{v}$ ortogonal terhadap $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$ untuk semua skalar k_1 dan k_2.

44. Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ vektor-vektor bukan nol dalam ruang 2 dan 3 dimensi, dan misalkan $k = \|\mathbf{u}\|$ dan $l = \|\mathbf{v}\|$. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{w} = l\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ mengiris susut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

45. Buktikan bagian (a) dari Teorema 3.3.4.
46. Apakah mungkin memiliki

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{a}?$$

Jelaskan jawaban Anda!

oOoEndoOo

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (2013). *Elementary Linear Algebra, Binder Ready Version*. John Wiley & Sons.

Davis, H. T., & Thomson, K. T. (2000). *Linear Algebra and Linear Operators in Engineering: With Applications in Mathematica®* (Vol. 3). Elsevier.

Strang, G. (1988). "Linear Algebra and Its Applications." Academic Press, New York.

Biodata Penulis

Joko Soebagyo lahir di Jakarta yang merupakan anak keempat dari enam bersaudara. Beliau menyelesaikan pendidikan di SDN Cilincing 5 Jakarta tahun 1990, SMPN 53 Jakarta tahun 1993, STMN 54 Jakarta tahun 1996 dan Stara-1 (S1) Pendidikan Matematika di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta tahun 2003. Gelar Magister Pendidikan didapat di Universitas Negeri Jakarta pada tahun 2014 dengan konsentrasi pendidikan matematika. Gelar Doktor didapat pada Stara-3 (S3) di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2018.

Beliau sekarang aktif sebagai dosen di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta, di Program Studi Teknik Informatika STT Wastukancana Purwakarta, dan di PGSD Universitas Terbuka.

Samsul Maarif lahir di Pemalang, Jawa Tengah yang merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Beliau menyelesaikan pendidikan di SD Bulakan 04 tahun 1997, SMP N 1 Randudongkal tahun 2000, STM Texmaco Pemalang tahun 2003 dan Stara-1 (S1) Pendidikan Matematika di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta tahun 2009. Gelar Magister Pendidikan didapat di Universitas Pendidikan Indonesia pada tahun 2012 dengan konsentrasi pendidikan matematika. Gelar Doktor didapat pada Stara-3 (S3) di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2018. Beliau sekarang aktif sebagai dosen di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta. Disamping itu beliau menjabat sebagai ketua program studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta Periode 2018 - sekarang. Buku yang pernah ditulis beliau berjudul *Pembelajaran Geometri Berbantu Cabri II Plus*.

Sigid Edy Purwanto lahir di Jakarta, merupakan anak pertama dari tiga bersaudara. Beliau menyelesaikan pendidikan di SDN Kapuk 09 Cengkareng Jakarta tahun 1988, SMPN 45 Cengkareng Jakarta tahun 1991, SMAN 33 Cengkareng Jakarta tahun 1994 dan Stara-1 (S1) Pendidikan Matematika di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta tahun 1999. Gelar Magister Pendidikan didapat di Universitas Negeri Malang pada tahun 2003 dengan konsentrasi pendidikan matematika. Gelar Doktor didapat pada Strata-3 (S3) di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2010.

Beliau sekarang aktif sebagai dosen di Program Studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta. Di samping itu beliau menjabat sebagai ketua program studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta Periode 2019 - sekarang. Buku yang pernah ditulis beliau berjudul *Aljabar Abstrak (Teori Group).*