MODUL PEMBELAJARAN

MATEMATIKA TEKNIK

Emilia Roza, ST., MT., M.Pd.
Ir. Harry Ramza, MT., Ph.D.
M. Mujirudin, ST., MT.
Agus Fikri, ST., MT.

MODUL PEMBELAJARAN MATEMATIKA TEKNIK

MODUL PEMBELAJARAN MATEMATIKA TEKNIK

Emilia Roza, ST., MT., M.Pd.
Harry Ramzah, ST., MT., Ph.D
M. Mujirudin, ST., MT.
Agus Fikri, ST., MT.

Penerbit

Media Sains Indonesia

CV. MEDIA SAINS INDONESIA
Melong Asih Regency B40 - Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
www.medsan.co.id

Anggota IKAPI
No. 370/JBA/2020

MODUL PEMBELAJARAN MATEMATIKA TEKNIK

Emilia Roza, ST., MT., M.Pd.
Harry Ramzah, ST., MT., Ph.D
M. Mujirudin, ST., MT.
Agus Fikri, ST., MT.

Editor :
Rintho R. Rerung

Tata Letak :
Rizki R. Pratama

Desain Cover :
Syahrul Nugraha

Ukuran :
A4: 21 x 29,7 cm

Halaman :
viii, 91

ISBN :
978-623-362-368-1

Terbitan:
Februari 2022

PENERBIT MEDIA SAINS INDONESIA
(CV. MEDIA SAINS INDONESIA)
Melong Asih Regency B40 - Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
www.medsan.co.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan nikmat Iman, Islam dan sehat wal'afiat sehinggak bisa menyelesaikan modul pembelajaran Matematika Teknik 2 ini. Penulis juga menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyelesaian modul baik langsung maupun tidak langsung. Dengan kerendahan hati, perkenankan penulis menyampaikan rasa terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Gunawan Suryoputro, M.Hum. selaku Rektor Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA
2. Prof. Dr. Abdul Rahman Ghani, M.Pd. Selaku Wakil Rektor 1 Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA
3. Dr. Zamah Sari, MA. selaku Selaku Wakil Rektor 2 Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA
4. Dr. Tri Wintolo Apoko, M.Pd. Selaku Ketua Lembaga Pendidikan dan Pengajaran Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA
5. Dr. Sugema, M.Kom selaku Dekan Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA
6. Harry Ramzah, ST., MT., PhD selaku Ketua Program Studi Teknik Elektro Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA

Penulis

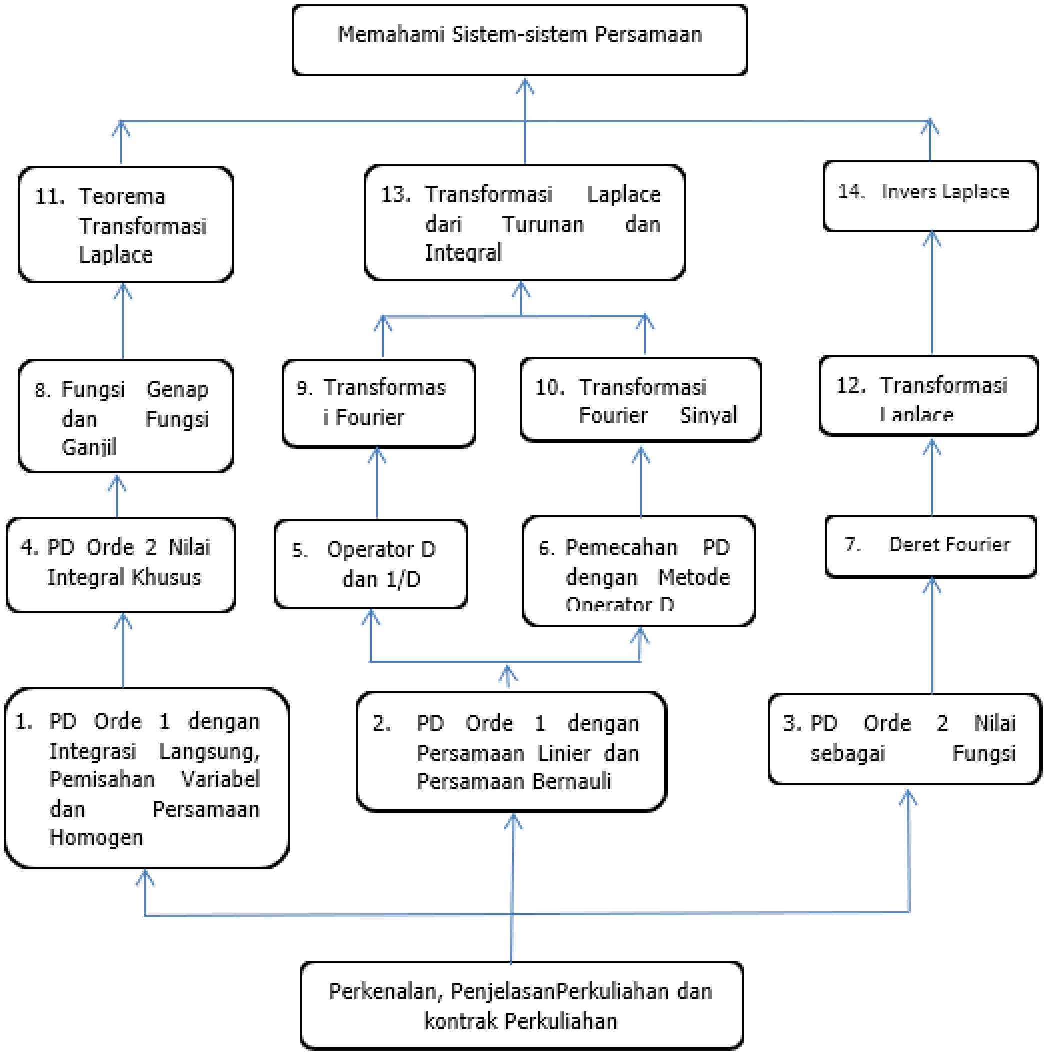
DAFTAR ISI

DESKRIPSI MATA KULIAH

Deskripsi Mata Kuliah

Mata kuliah Matematiaka Teknik 2 ini memberikan wawasan kepada mahasiswa tentang ilmu dasar dalam memodelkan dan menyelesaikan soal-soal rumit yang melibatkan sistem-sistem persamaan diferensial orde 1 dan 2, Operator D, deret dan transformasi Fourier serta transformasi Laplace dan Invernya.

Peta Kompesasi



MODUL 1

PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE SATU

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaikan Persamaan Differensial dengan cara Integral langsung, Pemisahan Variabel.

Materi 1 Pemecahan Persamaan Differensiak dengan Integral Lansung, Pemisahan variabael dan Persamaan Homogen

Persamaan differensial adalah persamaan fungsi yang dicari dengan proses diturunkan. Bentuk standar persamaan defferensial orde-1 fungsi $y(x)$ adalah $y' = f(x, y)$

Pemecahan Persamaan Diferensial bisa dilakukan dengan beberapa cara yaitu:

A. Dengan Integrasi Langsung
B. Dengan Pemisahan Variabel
C. Persamaan Homogen
D. Persamaan Linier Penggunaan Faktor Integral
E. Persamaan Bernoulli

Pemecahan dengan cara A, B dan C akan dibahas pada pertemuan pertama sedangkan cara D dan E akan dibahas pada pertemuan kedua

A. Pemecahan dengan Integrasi Langsung

Persamaannya dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$ dapat dipecahkan langsung dengan integrasi biasa dengan menggunakan rumus: $y = \int f(x)dx$

Contoh $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$

Jawab:

Langkah 1. Kalikan dx ke sisi kanan $dy = (3x^2 - 6x + 5)dx$

Langkah 2. Integralkan ke dua sisi $\int dy = \int(3x^2 - 6x + 5)dx$

Hasil:

$$y = \frac{3}{2+1}x^{2+1} - \frac{6}{1+1}x + \frac{5}{0+1}x^{0+1}$$
$$= x^3 - 3x^2 + 5x + c$$

Pemecahan dengan Pemisahan Variabel

Jika persamaan yang diberikan berbentuk $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, adanya variabel y yang muncul di ruas kanan menghalangi kita untuk menggunakan cara integrasi langsung

Kita tinjau persamaan dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x), F(y)$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{F(y)}$ memberikan $\int F(y)dy = \int f(x)dx$

Contoh: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+1}$

Jawab:

Langkah 1. Kali silang persamaan menjadi $(y+1)dy = 2xdx$

Langkah 2. Integralkan kedua ruas $\int (y+1)dy = \int 2xdx$

Hasil: $\frac{y^2}{2} + y = x^2 + c$

B. Persamaan Homogen

Persamaan $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ dengan sifat $f(tx, ty) = f(x, y)$ dapat diselesaikan dengan mentransformasikan nilai y menjadi$y = vx$, agar dapat dipisahkan baru kemudian dicari turunannya dengan rumus $\frac{dvx}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$

Contoh: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{2x}$

Jawab:

Langkah 1. Ubah$y = vx$ sehingga persamaan menjadi $\frac{dvx}{dx} = \frac{2x+3vx}{2x}$

Langkah 2. Turunkan bagian kiri persamaan sehingga menjadi $v.1 + x\frac{dv}{dx} = \frac{x(1+3v)}{2x}$

Sederhanakan persamaan sehingga menjadi $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{2}$

Langkah 3. Gabungkan variabel v ke bagian kanan $x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{2} - v$

Samakan penyebut persamaan disebelah kanan $x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v-2v}{2}$

Sehingga persamaan menjadi $x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{2}$

Langkah 4. Setelah menemukan bentuk ini selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan pemisahan variabel yaitu:

$$\int \frac{2}{1+v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$
$$2\, ln(1+v) = ln\, x + c$$
$$ln(1+v)^2 = ln\, x + ln\, A$$
$$ln(1+v)^2 = ln(x.A)$$
$$(1+v)^2 = Ax$$

Langkah 5 Kembalikan persamaan ke bentuk semula dimana $y = vx$ atau $v = \frac{y}{x}$ $\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = Ax$

$$\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 = Ax$$
$$(x+y)^2 = Ax^3$$

Latihan 1

1. Selesaikan persamaan di bawah ini dengan cara integral langsung

   a. $x\frac{dy}{dx} = 5x^3 + 4$

   b. $x\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x - 3$

2. Selesaikan persamaan di bawah ini dengan cara pemisahan variabel

   a. $\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$

   b. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{2+x}$

   c. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+xy^2}{x^2y-x^2}$

   d. $(1-x)^2\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

3. Selesaikan persamaan di bawah ini dengan cara persamaan homogen

   a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

   b. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$

Jawaban Latihan 1

$1. av. \dfrac{5x^3}{3} + 4Inx$

$b. \dfrac{x^2}{2} + 2x - Inx^3$

$2. a. ln(1 + y) = x + \dfrac{x^2}{2}$

$b. y = 1 + x$

$c. ln\, y + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{x} + ln\, x$

$d. ln(1 + y^2) = -\dfrac{1}{1+x}$

$3. a. y = x\, ln|kx|$

$b. y^4 = c_1 x^8 - x^4 \rightarrow (c_1 = k^4)$

Rangkuman 1

Persamaan diferensial orde 1 sederhana yang hanya memiliki satu variable maka bisa diselesaikan langsung dengan mengiintegral persamaan. Tetapi jika persamaan memiliki 2 variabel, yaitu x dan y maka maka kita harus memisahan terlebih dahulu masing-masing variable baru kemudian diintegralkan. Cara lain menyelesaikan persamaan dua variable adalah menggunakan persamaan homogen yaitu dengan memisalkan nilai y dengan vx.

Tes Formatif 1

Selesaikan persamaan di bawah ini sesuai dengan perintah yang diberikan:

1. $x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 \sin 3\, x + 4$ Integral Langsung
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{xy}$ Pemisahan Variabel
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{y+1}$ Pemisahan Variabel
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ (Homogen)

Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1. $y = -\frac{\cos 3x}{3} - \frac{4}{x}$
2. $y = \sqrt{x^2+1}$

3. $\frac{y^2}{2} + y = \frac{x^3}{3} + x$
4. $x^2 + y^2 = ky$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 1.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 2. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 2

PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE SATU

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaikan Persamaan bentuk Homogen, Linier, dan Bernauli

Materi 2 Persamaan Differensial Orde Satu dengan Persamaan Linier dan Persamaan Bernauli

A. Persamaan Linier

Persamaan diferensial tersebut adalah linear, jika $f(x,y)$ dapat dituliskan sebagai $f(x,y) = -p(x)y + q(x)$ (artinya, sebagai fungsi dari x dikalikan y, ditambah satu lagi fungsi dari x. Persamaan orde -1 dapat selalu ditulis sebagai $\frac{dy}{dx} + Py = Q$

Nilai Faktor Integral (FI) untuk persamaan di atas adalah$e^{\int Pdx}$. Jika persamaan dikalikan dengan nilai FInya, maka akan terlihat pola yang dihasilkan adalah $yFI = \int QFIdx$. Selanjutnya sisi bagian kanan dapat diselesaikan dengan persamaan integral biasa.

Contoh:$\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$

Dari soal kita dapat mengetahui bahwa nilai P = 5 dan $Q = e^{2x}$

Jawaban:

Langkah 1. Cari nilai Faktor Integrasi

Nilai FI $e^{\int Pdx} = e^{\int 5dx} = e^{5x}$

Langkah 2. Kalikan semua ruas $\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$ dengan nilai FI.

Persamaan berubah menjadi

$$e^{5x}.\frac{dy}{dx} + 5y.e^{5x} = e^{2x}.e^{5x}$$

$$e^{5x}.\frac{dy}{dx} + y.5e^{5x} = e^{7x}$$

Dengan mengingat bentuk persamaan $\frac{d(u.v)}{dx} = u\frac{dv}{du} + v\frac{du}{dx}$ maka persamaan di atas bisa disederhanakan menjadi $\frac{d(y.e^{5x})}{dx} = e^{7x}$ Lalu pindahkan dx ke sisi kanan. Persaman menjadi $d(y.e^{5x}) = e^{7x}dx$ selanjutnya integralkan ke dua sisi.

Langkah 3. Persamaan di integralkan

Persamaan yang dihasilkan $y.e^{5x} = \int e^{7x}dx$ atau $y.e^{5x} = \int e^{2x}e^{5x}dx$ jika kita bandingkan dengan persamaan awal adalah berbentuk $y.FI = \int QFIdx$

$$y.e^{5x} = \int e^{7x}dx$$
$$y.e^{5x} = \frac{e^{7x}}{7} + c$$
$$y = \frac{\frac{e^{7x}}{7} + c}{e^{5x}} = \frac{e^{7x-5x}}{7} + c.e^{-5x}$$
$$y = \frac{e^{2x}}{7} + c.e^{-5x}$$

Untuk memudahkan penyelesaian persamaan diferensial linear ini kita bisa langsung menggunakan rumus $y.FI = \int QFIdx$ setelah mendapatkan nilai FI

B. Persamaan Bernoulli

Persamaan diferensial Bernouli memiliki bentuk $\frac{dy}{dx} + Py = Q.y^n$ dengan P dan Q adalah fungsi x (atau konstanta)

Langkah-langkah penyelesaian persamaan adalah:

1. Bagilah kedua ruas dengan y^n sehingga persamaan menjadi

   $y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q$, Jika kita misalkan $y^{1-n} = z$ maka diferensial dari z menghasilkan $\frac{dz}{dx} = (1-n).y^{-n}\frac{dy}{dx}$

2. Persamaan yang dihasilkan, dikali dengan (1-n) maka persamaan akan menjadi $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)Py^{1-n} = (1-n)Q$

Jika kita perhatikan pola pada bagian pertama bagian kiri persamaan merupakan nilai$\frac{dz}{dx}$. Jika pada bagian kedua yaitu nilai $(1-n)P$ kita dianggap sebagai P1 dan y^{1-n} sebagai z. Sedangkan pada bagian kanan persamaan yaitu $(1-n)Q$ kita anggap sebagai Q1 maka persamaan berubah menjadi $\frac{dz}{dx}+P_1.z=Q_1$ (pola seperti persamaan linier). Sehingga penyelesaian persamaan ini bisa dilanjutkan menggunakan penyelesaian persamaan linier.

Contoh:$\frac{dy}{dx}+\frac{1.}{x}y=xy^2$

Langkah 1. Bagi kedua ruas dengan $y^n \Rightarrow y^2$atau kalikan dengan $y^{-n} \Rightarrow y^{-2}$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1.}{x}y.y^{-2}=xy^2.y^{-2}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1.}{x}y^{-1}=x$$

Langkah 2. Misalkan $z=y^{1-n} \Rightarrow z=y^{1-2}=y^{-1}$

Langkah 3. Cari nilai $\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$

Langkah 4. Samakan nilai dz/dx dengan bagian pertama persamaan pada langkah 1. Karena ada perbedaan nilai minus (-) maka kalikan persamaan tersebut dengan -1,

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=-x$$

Langkah 5. Ubah persamaan kedalam persamaan z yaitu $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-x$ yang memiliki bentuk $\frac{dz}{dx}+Pz=Q$

Langkah 6. Selanjutnya persamaan dapat diselesaikan dengan Faktor Integrasi dengan $P=-\frac{1}{x}$ dan $Q=-x$

Nilai FI $e^{\int Pdx}=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}$

Langkah 7. Kalikan semua ruas $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-x$ dengan nilai FI.

Persamaan berubah menjadi

$$x^{-1}\frac{dz}{dx}-x^{-1}.\frac{1}{x}z=-x.\frac{1}{x}$$

$$x^{-1}\frac{dz}{dx} - x^{-2}z = -1$$

Dengan mengingat bentuk persamaan $\frac{d(u.v)}{dx} = u\frac{dv}{du} + v\frac{du}{dx}$ maka persamaan di atas bisa disederhanakan menjadi $\frac{d(z.x^{-1})}{dx} = -1$

Lalu pindahkan dx ke sisi kanan. Persaman menjadi $d(z.x^{-1}) = -1dx$ selanjutnya integralkan ke dua sisi.

Langkah 8. Persamaan di integralkan

Persamaan yang dihasilkan $z.x^{-x} = -\int dx$ atau $z.x^{-x} = \int -x.(x)^{-1}dx$ jika kita bandingkan dengan persamaan awal adalah berbentuk $y.FI = \int QFIdx$

$$z.x^{-1} = \int -dx$$
$$z.x^{-1} = -x + c$$
$$z = -x^2 + cx$$

Latihan 2

1. Selesaikan persamaan menggunakan persamaan linier

   a. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

   b. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$

   c. $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^4$

2. Selesaikan persamaan menggunakan persamaan bernauli $\frac{dy}{dx} - x^3y = xy^3$

Jawaban Latihan 2

1. a. $y = \frac{e^{3x}}{5} + e^{-2x}c$

   b. $y = \frac{c}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$

   c. $y = x^5 + cx^4$

2. $y = \frac{x^2}{3} + \frac{2c}{x^4}$

Rangkuman 2

Persamaan differensial orde satu dengan pola $\frac{dy}{dx} + Py = Q$dapat diselesaikan menggunakan persamaan linier sedangkan jika polanya persamaan seperti $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ maka persamaan ini terlebih dahulu diselesaikan menggunakan persamaan bernauli hingga diperoleh pola seperti persamaan linier. Selanjutnya persamaan dapat diselesaikan dengan menggunakanf persamaan linier.

Tes Formatif 2

Selesaikan persamaan di bawah ini!

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y = x^4$ (Linier)
2. $\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$ (Bernauli)

Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1. $y = \frac{c}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$
2. $y = \frac{1}{ce^{\frac{x^2}{2}+1}}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 2.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 3. Bagus! Jika masih di bawah 80%,

Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 3

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE KEDUA

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaikan persamaan differensial orde 2 menggunakan Fungsi Komplentar

Materi 3 Nilai sebagai Fungsi Komplementer

Dalam praktek, banyak persoalan teknik yang melibatkan persamaan diferensial orde kedua dalam bentuk $\boldsymbol{a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)}$

Dimana: a, b, c = koefisien-koefisien konstanta

F(x) = fungsi x yang diketahui

A. Kita tinjau persamaan pada keadaan khusus yaitu nilai f(x) = 0

Bentuk persamaan menjadi: $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$

Pada saat nilai f(x) = 0, kita akan medapatkan hasil berupa nilai sebagai fungsi komplementer.

Bila ada dua keadaan dimana pada Keadaan I: y = u dan keadaan II: y = v, u dan v kedua-duanya fungsi x. Maka jawaban untuk persamaan keadaan I dan II tersebut adalah:

Keadaan I: $a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0$

Keadaan II: $a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv = 0$

Jika kedua persamaan dijumlahkan, maka diperoleh

$$a\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) + c(u + v) = 0$$

Kita ketahui bahwa persamaan defferensial orde satu untuk u+v adalah

$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Persamaan orde 2 menjadi $\frac{d^2}{dx^2}(u+v) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}$

Sehingga persamaan yang dijumlahkan dapat di tulis sebagai

$$a\frac{d^2}{dx^2}(u+v) + b\frac{d}{dx}(u+v) + c(u+v) = 0$$

Terlihat bahwa persamaan tersebut kembali ke bentuk persamaan semula, dimana y digantikan dengan (u+v).

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Dari persamaan $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$, Jika nilai a = 0, maka akan diperoleh persamaan orde pertama dari kelompok yang sama yaitu $b\frac{dy}{dx} + cy = 0$jika dibagi b persamaan menjadi $\frac{b}{b}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{b}y = 0$ jika dimisalkan $k = \frac{c}{b}$ maka$\frac{dy}{dx} + ky = 0$

Dengan menggunakan pemisahan variabel, kita dapat memecahkan persamaan $\frac{dy}{dx} = -ky$menggunakan persamaan integral $\int\frac{dy}{y} = -\int kdx$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int kdx$$

$$Iny = -kx + c$$

$$y = e^{-kx+c}$$
$$y = e^{-kx}.e^{c}$$
$$y = Ae^{-kx}$$

Jika – k kita nyatakan dengan m maka $y = Ae^{mx}$

Jika $y = Ae^{mx}$ maka $\frac{dy}{dx} = Ame^{mx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} = Am^2e^{mx}$

Nilai di atas kita digunakan untuk menjawab persamaan orde kedua yaitu mengganti nilai y, dy/dx dan d2y/dx2 dengan nilai-nilai di atas.

Caranya adalah:

Langkah 1. Persamaan$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$disubsitusikan menjadi

$$a.Am^2e^{mx} + b.Ame^{mx} + c.Ae^{mx} = 0$$

Langkag 2. Bagi kedua ruas denganAe^{mx}sehingga persamaan menjadi

$$am^2 + bm + c = 0$$

Jenis pemecahan yang kita dapatkan bergantung kepada akar-akar persamaan dari karakteristiknya.

a. Bisa kedua akarnya bernilai riil dan berbeda atau 2 rill yang sama.

Persamaan kuadrat memberikan dua harga m yaitu m1 dan m2. Sehingga nilai y menjadi $y_1 = Ae^{m_1x}$ dan $y_2 = Be^{m_2x}$

Sehingga pemecahan masalah untuk persamaan

$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$ adalah $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$

Dengan nilai A, B adalah dua konstanta sembarang, dan m1, m2 adalah akar-akar dari persamaan $am^2 + bm + c = 0$

Persamaan karakteristik ini, dapat diperoleh langsung dari persamaan $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$dengan mengganti nilai $\frac{d^2y}{dx^2}$ dengan m^2, $\frac{dy}{dx}$dengan m, dan y dengan 1.

Contoh: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 10y = 0$

Langkah 1. Rubah persamaan menjadi persamaan karakteristiknya yaitu

$m^2 + 3m - 10 = 0$

Langkah 2. Cari nilai m1 dan m2 menggunakan penfaktoran atau rumus persamaan kuadrat

$(m-2)(m+5) = 0$

Maka m = 2 dan m = -5

Jadi pemecahan dari persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 10y = 0$ adalah $y = Ae^{2x} + Be^{-5x}$

b. Untuk nilai yang kedua akar persamaan karakteristiknya adalah kompleks maka nilainya adalah $m = \alpha + j\beta$yaitu $m_1 = \alpha + j\beta$dan $m_2 = \alpha - j\beta$

Pemecahan persamaannya berbentuk:$y = Ce^{(\alpha+j\beta)x} + De^{(\alpha-j\beta)x}$

Jika di sederhanakan menjadi $y = Ce^{\alpha x}.e^{j\beta x} + De^{\alpha x}.e^{-j\beta x}$

$$y = e^{\alpha x}\{Ce^{j\beta x} + De^{-j\beta x}\}$$

Pada bilangan kompleks nilai

$e^{jx} = cos\, x + j\, sin\, x$ dan $e^{-jx} = cos\, x - j\, sin\, x$

$e^{j\beta x} = cos\, \beta\, x + j\, sin\, \beta\, x$ dan $e^{-j\beta x} = cos\, \beta\, x - j\, sin\, \beta\, x$

Dengan demikian pemecahan persamaan bisa juga ditulis menjadi: $y = e^{\alpha x}\{C(cos\, \beta\, x + j\, sin\, \beta\, x) + D(cos\, \beta\, x - j\, sin\, \beta\, x)\}$

$$y = e^{\alpha x}\{(C + D)\, cos\, \beta\, x + j(C - D)\, sin\, \beta\, x\}$$
$$y = e^{\alpha x}\{A\, cos\, \beta\, x + B\, sin\, \beta\, x\}$$

Dengan nilai A = C + D dan B = j (C-D)

Jika$m_1 = \alpha + j\beta$, pemecahan dapat dituliskan sebagai

$$y = e^{\alpha x}\{A\, cos\, \beta\, x + B\, sin\, \beta\, x\}$$

Contoh: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

Langkah 1. Rubah persamaan ke bentuk karekteristiknya yaitu:

$$m^2 + 4m + 9 = 0$$

Langkah 2. Cari nilai m1 dan m2 dengan menggunakan rumus kuadratik

$$\therefore m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{(16 - 36)}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm 2j\sqrt{5}}{2} = -2 \pm j\sqrt{5}$$
$$m_1 = -2 + j\sqrt{5}$$
$$m_2 = -2 - j\sqrt{5}$$

Dalam hal ini $\alpha_{1,2} = -2$ dan $\beta = \pm\sqrt{5}$

Jadi pemecahannya adalah $y = e^{-2x}\{A\, cos\, \sqrt{5}\, x + B\, sin\, \sqrt{5}\, x\}$

Latihan 3

Selesaikan persamaan berikut pada keadaan khusus f(x) = 0

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 10y = 0$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$

Jawaban Latihan 3

1. $y = Ae^{-3x} + Be^{-2x}$
2. $y = Ae^{3x} + Be^{4x}$
3. $y = e^{x}\{A\,cos\,3\,x + B\,sin\,3\,x\}$
4. $y = A\,cos\,4\,x + B\,sin\,4\,x$

Rangkuman 3

Persamaan differensial orde 2 pada keadaan khusus yaitu f(x) = 0 dapat diselesaikan menggunakan cara pemfaktoran yang akan menghasilkan 3 keadaan yaitu:

1. Hasil berupa dua bilangan real yang sama

2. Hasil berupa dua bilangan real yang berbeda

3. Hasil berupa bilangan kompleks

Tes Formatif 3

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} - 9y = 0$

3. $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

Jawaban Tes Formatif 3

1. $y = Ae^{-x} + Be^{-4x}$

2. $y = Ae^{-x} + Be^{9x}$

3. $y = e^{-\frac{5}{4}x}\left\{A\,cos\frac{\sqrt{23}}{4}x + B\,sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right\}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 3.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 4. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 4

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE KEDUA

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaikan persamaan differensial orde 2 menggunakan Integral Khusus

Materi 4 Nilai Integral Khusus

B. Penyelesaian untuk persamaan untuk $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

Dimana: a, b, c = koefisien-koefisien konstanta

F(x) = fungsi x yang diketahui

Persamaan menghasilkan 2 nilai y yaitu:

1. Nilai sebagai Fungsi Komplementer (FK) seperti dijelaskan pada bagian I
2. Nilai sebagai Integral khusus

Gabungan kedua hasil tersebut menjadi penyelesaan dari persamaan di atas.

Nilai sebagai Fungsi Komplementer (FK) berbentuk $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} + X$ ditambah dengan jawaban yang diperoleh menggunakan Integral Khusus.

Nilai Integral khusus dapat diperoleh dengan merubah persamaan ke bentuk umum fungsi berderajat dua lalu cari nilai turunan pertama dan keduanya. Kemudian bentuk umum tersebut disubsitusikan sesuai dengan koefisien-koefisiennya.

Contoh $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = x^2$

Langkah 1. Cari nilai untuk Fungsi Komplementer yaitu f(x) = 0

$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

Langkah 2. Rubah ke persamaan karekteristiknya yaitu $m^2 - m - 6 = 0$

Langkah 3. Dengan faktorisasi atau rumus kuadratik diperoleh nilai m_1= -2 dan m_2= 3

Nilai m merupakan nilai y untuk fungsi Komplementer yaitu:

$y = Ae^{-2x} + Be^{3x}$

Langkah 4. Cari nilai Integral Khusus dengan cara merubah persamaan ke bentuk umum fungsi berderajat dua yaitu $y = Cx^2 + Dx + E$lalu cari nilai turunan pertama dn keduanya yaitu: $\frac{dy}{dx} = 2Cx + D$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} = 2C$

Langkah 5. Subsitusikan bentuk umum fungsi berderajat dua di atas ke dalam persamaan yang ada di soal $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = x^2$Sehingga persamaan menjadi:

$$2C - (2Cx + D) - 6(Cx^2 + Dx + E) = x^2$$
$$2C - 2Cx - D - 6Cx^2 - 6Dx - 6E) = x^2$$
$$-6Cx^2 - (6D + 2C)x + (2C - D - 6E) = x^2$$

Langkah 6. Samakan persamaan dibagian kanan dengan yang bagian kiri satu persatu untuk mendapatkan nilai-nilai konstanta A, B, C, D, E.

a. Kita dimulai dari persamaan kuadrat

$$-6Cx^2 = x^2$$
$$-6C = 1$$
$$C = -\frac{1}{6}$$

b. Untuk bagian ke dua yaitu nilai x. Nilai x pada bagian kanan tidak ada maka nilainya adalah 0.

$$-(6D + 2C)x = 0$$
$$(6D + 2C) = 0$$
$$6D = -2C$$

Masukkan nilai C yang sudah diperoleh di atas ke persamaan

$$6D = -2.(-\frac{1}{6}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$D = \frac{1}{3} x \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

c. Untuk bagian ke tiga adalah nilai konstanta. Nilai konstanta pada bagian kanan tidak ada maka nilainya adalah 0.

$$(2C - D - 6E) = 0$$
$$6E = 2C - D$$

Masukkan nilai C dan D yang sudah diketahui hasilnya sehingga:

$$6E = 2.(-\frac{1}{6}) - \frac{1}{18}$$
$$6E = -\frac{2}{6} - \frac{1}{18}$$
$$6E = \frac{-6-6}{18} = \frac{-12}{18}$$
$$E = \frac{-12}{18} x \frac{1}{6} = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}$$

Langkah 7. Nilai C, D, E dimasukkan ke dalam persamaan y untuk nilai integral khusus menjadi: $y = -\frac{x^2}{6} + \frac{x}{18} - \frac{1}{9}$

Langkah 8. Gabungkan Jawaban pada Fungsi Komplementari dan Integral Khusus menjadi:

$$y = Ae^{-2x} + Be^{3x} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{18} - \frac{1}{9}$$

Latihan 4

Carilah Fungsi Komplemen (FK), Integral Khususnya (IK) dan Jawaban Umum dari persamaan berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 5e^{-3x}$$

Jawaban Latihan 4

$$y = Ae^{-x} + Be^{5x} + \frac{5e^{-3x}}{26}$$

Rangkuman 4

Persamaan differensial orde 2 pada saat $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

Akan menghasilkan 2 nilai yaitu Fungsi komplemen (FK) yang diselesaikan dengan menganggap persamaan sebagai kondisi khusus f(x) = 0 dan penyelesaian dengan integral khusus dengan menjadikan persamaan ke bentuk umum

Tes Formatif 4

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = sin\,4\,x$

Jawaban Tes Formatif 4

$$y = -\frac{sin\,4\,x}{14} + \frac{cos\,4\,x}{12}$$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 4 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 4.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 5. Bagus! Jika masih di bawah 80%,

Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 4, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 5

METODE OPERATOR D

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaikan persamaan differential dan integral dengan lebih mudah menggunakan operator D

Materi 5 Operator D dan 1/D

1. Operator D sama artinya dengan differensial

Simbol $\frac{d}{dx}$ menyatakan suatu proses atau operasi penentuan koefisien diferensial dari fungsi yang dikenainya, karena itu simbol semacam ini sering disebut operator.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Kita boleh menggunakan simbol lain seperti simbol D untuk menyatakan operasi tersebut.

$$D = \frac{d}{dx}$$
$$Jadi \frac{dy}{dx} = Dy$$

D menyatakan koefisien differensial pertama

D2 menyatakan koefisien differensial kedua

D3 menyatakan koefisien differensial ketiga

Dan seterusnya Dn menyatakan koefisien differensial ke-n

Contoh:

$1. D(\sin x) = \cos x$

$2. D(e^{kx}) = ke^{kx}$

$3. D^2(3 \sin x + \cos 4x) = D(3 \cos x - 4 \sin 4x)$
$= -3 \sin x - 16 \cos 4x$

2. Operator Invers 1/D sama artinya dengan integral

Proses integrasi terhadap x dengan menghilangkan konstanta integrasinya

$\frac{1}{D^2} = \left(\frac{1}{D}\right)^2$ Sehingga $\frac{1}{D^2} f(x)$ menyatakan hasil integrasi fungsi f(x) terhadap x dua kali dengan menghilangkan konstanta integrasinya

Contoh:

$1. \frac{1}{D}(\sin x) = -\cos x$
$2. \frac{1}{D}(e^{3x}) = \frac{e^{3x}}{3}$
$3. \frac{1}{D^2}(x^2 + 5x - 4) = \frac{1}{D}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)$
$= \frac{x^4}{12} + \frac{5x^3}{6} - 2x^2$

3. Teorema memecahkan persamaan deferensial dengan metode operator D

Teorema I

$F(D)\{e^{ax}\} = e^{ax}F(a) - - - -(1)$

Gantikan nilai D dengan a baik konstanta nyata atau kompleks

Contoh 1

$1. D(e^{ax}) = ae^{ax}$
$2. D^2(e^{ax}) = a^2e^{ax}$
$3. (D^2 + 2D)(e^{ax}) = D^2(e^{ax}) + 2D(e^{ax})$
$= a^2e^{ax} + 2ae^{ax}$
$= e^{ax}(a^2 + 2a)$

$4. (D^2 + 5D - 3)(e^{ax}) = e^{ax}(a^2 + 5a - 3)$
$5. (D^2 - 5)(e^{2x}) = e^{2x}(2^2 - 5)$
$= -e^{2x}$

Perhatikan bahwa hasilnya adalah pernyataan semula dengan D digantikan dengan nilai a. Hal ini berlaku untuk setiap fungsi D yang dikerjakan.

Kaidah ini juga selalu berlaku, apapun fungsi D yang bekerja pada e^{ax}

Contoh:

$$\frac{1}{D-2}\{e^{5x}\} = e^{5x}.\frac{1}{5-2} = \frac{e^{5x}}{3}$$

TEOREMA II

$$F(D)\{e^{ax}V\} = e^{ax}F(D+a)\{V\} - - - -(2)$$

Dengan a adalah konstanta nyata atau kompleks

Tinjaulah

$$(D^2 + D + 3)\{e^{ax}V\}$$
$$D\{e^{ax}V\} = e^{ax}D\{V\} + ae^{ax}V$$
$$= e^{ax}[D\{V\} + aV]$$
$$D^2\{e^{ax}V\} = e^{ax}[D^2\{V\} + aD\{V\} + ae^{ax}[D\{V\} + aV]$$
$$= e^{ax}[D^2\{V\} + 2aD\{V\} + a^2V]$$

Sehingga

$$(D^2 + D + 3)\{e^{ax}V\}$$
$$= e^{ax}[D^2\{V\} + 2aD\{V\} + a^2V] + e^{ax}[D\{V\} + aV] + 5e^{ax}V$$
$$= e^{ax}[(D^2 + 2aD + a^2)\{V\} + (D+a)\{V\} + 5V]$$
$$= e^{ax}[(D+a)^2 + (D+a) + 3]\{V\}$$

Contoh:

$$(D+4)\{e^{2x}x^2\}$$
$$a = 2, V = x^2$$
$$(D+4)\{e^{2x}x^2\} = e^{2x}\{(D+2) + 4\}\{x^2\}$$
$$= e^{2x}(D+6)\{x^2\}$$
$$= e^{2x}(Dx^2 + 6x^2)$$
$$= e^{2x}(2x + 6x^2)$$
$$= e^{2x}(6x^2 + 2x)$$

TEOREMA III

$$F(D^2)\begin{Bmatrix} \sin a\,x \\ \cos a\,x \end{Bmatrix} = F(-a^2)\begin{Bmatrix} \sin a\,x \\ \cos a\,x \end{Bmatrix}$$

Contoh:

1. $(D^2 + 4)\{\sin 4\,x\} = (-16 + 4)\sin 4\,x = -12\sin 4\,x$
2. $\frac{1}{D^2 - 1}\{\cos 2\,x\} = \frac{1}{-4-1}\cos 2\,x = -\frac{1}{5}\cos 2\,x$

Latihan 5

1. Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan operator D

$a. D(x^2 + 6x - 5)$
$b. (2D^2 - 1)\{sin\, x\}$

2. Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan operator 1/D

$a. D(x^2 + 6x - 5)$
$b. (2D^2 - 1)\{sin\, x\}$

3. Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan Teorema I

$a. (2D^2 + 5D - 2)\{e^{3x}\}$
$b. \frac{1}{D^2 + 4}\{e^{-3x}\}$

4. Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan Teorema II

$a. (D^2 + 2D - 3)\{e^{3x}\, sin\, 2\, x\}$
$b. \frac{1}{D^2 + 4D + 5}\{e^{-2x}x^3\}$

5. Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan Teorema III

$\frac{1}{D^2 + 4}\{sin\, 3\, x + cos\, 3\, x\}$

Jawaban Latihan 5

$1. a. 2x + 6$
$b. sin\, x$

$2. a. \frac{x^5}{5}$
$b. -\frac{sin\, 3\, x}{9} + 2\, cos\, x$

$3. a. 31e^{3x}$
$b. \frac{e^{-3x}}{13}$

$4a. e^{3x}\{8\, sin\, 2\, x + 16\, cos\, 2\, x\}$

$b. e^{-2x}\left\{\frac{x^5}{20} + x^3\right\}$

$5. -\frac{(sin\, 3x + cos\, 3x)}{5}$

Rangkuman 5

Dengan menggunakan operator D operasi differensial dan inegral dapat diselesaikan menggunakan operasi aljabar sehingga penyelesaiannya menjadi lebih mudah.

Tes Formatif 5

1. $D(x^2e^{3x})$
2. $\frac{1}{D^2}(3x^2 + \sin 2x)$
3. $\frac{1}{D^2 - 3D - 2}\{e^{5x}\}$
4. $\frac{1}{D^2 - 5}\{\sin x + \cos 3x\}$
5. $(D^2 - 3D + 4)\{e^{-x} \cos 3x\}$
6. $\frac{1}{D^2 - 8D + 16}\{e^{4x}x^2\}$

Jawaban Tes Formatif 5

1. $e^{3x}(3x^2 + 2x)$
2. $\frac{1}{4}(x^4 - \sin 2x)$
3. $\frac{e^{5x}}{8}$
4. $-\frac{\sin x}{6} - \frac{\cos 3x}{14}$
5. $e^{-x}(15 \sin 3x - \cos 3x)$
6. $\frac{e^{4x}x^4}{12}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 5 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 5.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 6. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 5, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 6

METODE OPERATOR D

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaikan persamaan differential dan integral dengan lebih mudah menggunakan operator D

Materi 6 Pemecahan Persamaan Differensial dengan Metode Operator D

Jawaban umum suatu persamaan defferensial ordo 2 dengan koefisien konstan terdiri atas dua bagian yang berbeda.

Jawaban umum = fungsi komplementer (FK) + integral khusus (IK)

Fungsi komplementer dapat diperoleh dengan mudah, yaitu dengan memecahkan persamaan karakteristiknya, yang diperoleh dari persamaan semula dengan menggantikan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2, \frac{dy}{dx} = m, y = 1$$

Jenis akar-akar persamaan kuadrat yang terbentuk menentukan macam fungsi komplementernya. Apakah Keduanya akarnya nyata dan berbeda, Kedua akarnya nyata dan sama, atau Kedua akarnya kompleks

Integral khusus yang telah diselesaikan menggunakan pemisahan menjadi bentuk umum untuk fungsi f(x) pada ruas kanan, kemudian bentuk umum tersebut disubsitusikan ke dalam persamaan yang diberikan dan menentukan konstanta-konstanta yang ada dengan menyamakan semua koefisien dalam kedua ruas.

Dengan menggunakan operator D, fungsi komplementernya (FK) dicari dengan persamaan karakteristiknya, sedangkan untuk integral khusus (IK) dapat digunakan cara berikut:

Contoh: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$

Fungsi Komplementer:

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$
$$(m+1)(m+3) = 0$$
$$maka$$
$$m_1 = -1, m_2 = -3$$

Maka nilai FK $\quad y = Ae^{-x} + Be^{=3x}$

Integral Khusus: Pertama-tama kita tuliskan persamaan dalam operator D.

$$D^2y + 4Dy + 3y = e^{2x}$$
$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{2x}$$
$$y = \frac{1}{(D^2 + 4D + 3)}\{e^{2x}\}$$

Berasarkan teorema I kita dapatkan

$$y = \frac{1}{(D^2 + 4D + 3)}\{e^{2x}\}$$
$$= \frac{1}{(2^2 + 4.2 + 3)}\{e^{2x}\}$$
$$= \frac{e^{2x}}{15}$$

Maka nilai IK $y = \frac{e^{2x}}{15}$

Sehingga nilai FK + IK menjadi $y = Ae^{-x} + Be^{-3x} + \frac{e^{2x}}{15}$

Jika diketahui nilai $\quad x = 0, y = \frac{7}{15}, \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{3}$, maka

$$y = Ae^{-x} + Be^{-3x} + \frac{e^{2x}}{15}$$
$$\frac{7}{15} = Ae^0 + Be^0 + \frac{e^0}{15}$$
$$\frac{7}{15} = A + B + \frac{1}{15}$$
$$A + B = \frac{6}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y = Ae^{-x} + Be^{-3x} + \frac{e^{2x}}{15}$$
$$\frac{dy}{dx} = -Ae^{-x} - 3Be^{-3x} + \frac{2e^{2x}}{15}$$
$$jika, x = 0, dan \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{3}, maka$$
$$-\frac{5}{3} = -Ae^0 - 3Be^0 + \frac{2e^0}{15}$$
$$-\frac{5}{3} = -A - 3B + \frac{2}{15}$$

$$-A-3B=-\frac{5}{3}-\frac{2}{15}$$
$$-A-3B=\frac{-25-2}{15}$$
$$-A-3B=\frac{-27}{15}\ldots\ldots\ldots.(2)$$

Persamaan 1 dan 2 dijumlahkan

$$A+B=\frac{6}{15}$$
$$-A-3B=\frac{-27}{15}$$
$$\underline{\hspace{4cm}}+$$
$$-2B=-\frac{21}{15}$$
$$B=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$$

$$A+B=\frac{6}{15}$$
$$A+\frac{7}{10}=\frac{6}{15}$$
$$A=\frac{6}{15}-\frac{7}{10}=\frac{12-21}{30}=\frac{-9}{30}$$
$$A=-\frac{3}{10}$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$y=Ae^{-x}+Be^{-3x}+\frac{e^{2x}}{15}$$
$$y=-\frac{3}{10}e^{-x}+\frac{7}{10}e^{-3x}+\frac{e^{2x}}{15}$$

Latihan 6

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=e^{5x}$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+7y=e^{-x}$

Jawaban Latihan 6

1. $y=Ae^{-3x}+Be^{-3x}+\frac{e^{5x}}{64}$

2. $y=e^{-2x}\left\{A\cos 2\sqrt{3}\,x+B\sin 2\sqrt{3}\,x\right\}+\frac{e^{-x}}{4}$

Rangkuman 6

Dengan menggunakan operator D, persamaan differensial dengan pola seperti persaman berikut ini $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$ memberikan daerah hasil dari penjumlahan dari hasil fungsi komplementernya (FK) dan proses integral khusus (IK).

Tes Formatif 6

1. $\frac{1}{D^2-3D-2}\{e^{5x}\}$
2. $\frac{1}{D^2-5}\{sinx + cos3x\}$
3. $D^2 - 3D + 4\{e^{-x}cos3x\}$
4. $\frac{1}{D^2-8D+16}\{e^{4x}x^2\}$

Jawaban Tes Formatif 6

1. $e^{3x}(3x^2 + 2x)$
2. $\frac{1}{4}(x^4 - sin2x)$
3. $\frac{e^{5x}}{8}$
4. $-\frac{sinx}{6} - \frac{cos3x}{14}$
5. $e^{-x}(15sin3x - cos3x)$
6. $\frac{e^{4x}x^4}{12}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 6 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 6.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)}x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 7. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 6, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 7

TRANSFORMASI FOURIER

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menentukan deret Fourier dari suatu fungsi Mampu membedakan antara deret Fourier fungsi genap dan ganjil Mampu membedakan sifat-sifat Transformasi Fourier

Materi 7 Deret Fourier

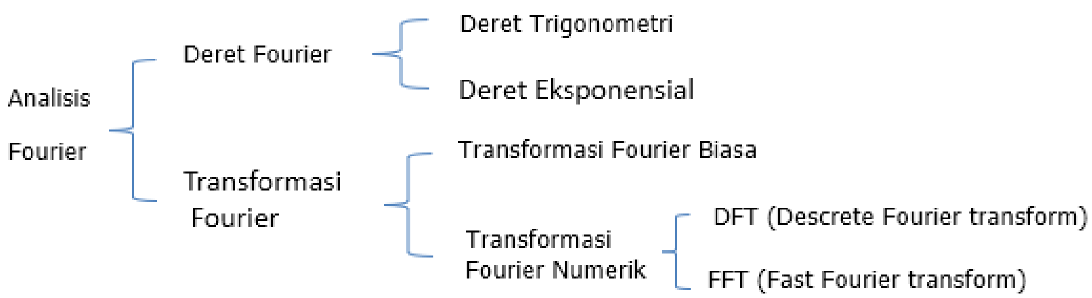
Tiga operasi matematika merupakan jantung dari pengolahan data adalah transformasi Fourier, Konvolusi dan Korelasi

Transformasi Fourier memindahkan data dari kawasan waktu ke kawasan frekuensi dan sebaliknya

Konvolusi adalah operasi penggantian setiap elemen input dengan fungsi output yang terskala di dalam bahasa matematika merupakan filter. Seperti masuknya gelombang ke dlam bumi

Korelasi adalah salah satu metode untuk mengukur kesamaan antara dua kelompok data

Diagram Analisis Fourier



Analisis Fourier aplikasi yang paling penting dalam pemodelan dan penyelesaian persamaan diferensial (PDE) terkait dengan masalah batas dan nilai awal mekanika, aliran panas, elektrostatika, dan bidang lainnya.

Analisis Fourier memungkinkan kita untuk memodelkan fenomena periodik yang sering muncul diteknik seperti bagian mesin yang berputar, arus listrik bolak-balik atau gerakan planet.

Analisis Fourier untuk merepresentasikan fungsi-fungsi rumit ke dalam fungsi periodik sederhana, yaitu cosinus dan sinus. Representasinya disebut deret tak hingga. Analisis Fourier ini mencakup tiga area luas yaitu: Deret Fourier, rangkaian orthonormal (ekspansi Sturm – Liouville) dan integral Fourier dan transformasi.

Prinsip analisis Fourier adalah menganalogikan sinyal watu kontinyu sebagai sinyal waktu diskrit, karena hanya beda pada pendefinisian waktunya saja, dimana fungsi kontinyu berlalu untuk semua waktu, sedangkan fungsi diskrit hanya untuk waktu tertentu saja, sehingga notasi t berubah menjadi n dan tanda integral (∫) menjadi sigma (Σ).

Fungsi periodik dengan frekuensi ω_0 dapat digambarkan sebagai penjumlahan dari fungsi sinus ataupun cosinus.

Deret Fourier sebagai salah satu cara untuk merepresentasikan frekuensi untuk sinyal periodic yang berbentuk sinyal domain, sedangkan Transformasi Fourier Diskrit (TFD) presentasi dari sinyal periode dan non-periodik ke domain frekuensi. Transformasi Fourier meliputi: Circuit Designer, Signal Processing and Communications, Image Processing dan Optik memegang peranan penting dalam bidang Teknik.

Titik awal pusat analisis Fourier adalah Deret Fourier tak terbatas yang dirancang untuk merepresentasikan fungsi periodik umum, yaitu cosinus dan sinus.

Deret Fourier dibagi 2 yaitu:

1. Deret Trigonometri
2. Deret Eksponensial

Bentuk Trigonometri dari Deret Fourier

F (t) = f (t + T)

F (t) menyatakan sebuah bentuk gelombang arus atau tegangan

T adalah periode

f (t) dapat dinyatakan dengan deret tak berhingga Teorema Fourier yaitu:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\, cos\, \omega_0\, t + a_2\, cos\, 2\, \omega_0 t + \ldots + a_\infty\, cos\, \infty\, \omega_0 t +$$
$$b_1\, sin\, \omega_0\, t + b_2\, sin\, 2\, \omega_0 t + \ldots + b_\infty\, sin\, \infty\, \omega_0 t + \ldots$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n\, cos\, n\, \omega_0 . t + b_n\, sin\, n\, \omega_0 . t$$

Grafik fungsi periodik memiliki karakteristik dapat diperoleh dengan pengulangan grafik secara periodik dalam interval panjang p. Fungsi periodik yang dikenal adalah cosinus, sinus, tangen, dan cotangen.

A. FUNGSI PERIODIK

Jika fungsi periodik dalam interval (-L, L) dengan periode 2L, maka f(x) dapat dinyatakan dalam bentuk deret (Deret Fourier)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n\, cos \frac{n\pi x}{L} + b_n\, sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\, cos \frac{n\pi x}{L}}$$

$$jika --- n = 0, maka$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L\int \frac{0.\pi x}{2}} f(x).\, cos$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L\int} f(x).\, cos$$

$$karena: cos\, 0 = 1, maka$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\, sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Dengan C_k adalah

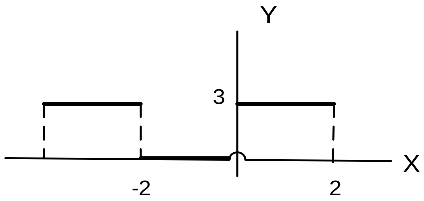
$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum \begin{matrix} N-1 \\ k=0 \end{matrix} \int_{-L}^{L} x(n).\, e^{-j2\pi kn/N}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots N-1$$

Contoh: Penderetan $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 2 \end{cases}$

(L=2, Periode 4)



Penyelesaian:

Langkah 1. Cari nilai a0 dengan rumus $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

Dari gambar kita ketahui periodenya aadalah 4 (-2 sampai 2) sehingga L = 2 (setengah periode), f(x) bernilai 0 untuk -2 sampai 0 dan bernilai 2 untuk 0 sampai 2.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0.\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3\,dx$$
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3\,dx$$
$$a_0 = \frac{3x}{2}\Big|_0^2 = \frac{3(2-0)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Langkah 2. Cari nilai an

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, n = 0,1,2,...$$
$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0.\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3.\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3.\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$a_n = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{n\pi x}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$
$$a_n = 3\left(\frac{1}{n\pi} - 0\right)\left(\sin\frac{2n\pi}{2} - \sin\frac{0.n\pi}{2}\right)$$
$$a_n = \frac{3}{n\pi}(\sin n\pi - 0)$$
$$a_n = \frac{3}{n\pi}.\sin n\pi$$

Langkah 3. Dari rumus an yang diperoleh cari 5 nilai an untuk n= 1, 2, 3, 4, 5

$$a_1 = \frac{3}{\pi}.sin\,\pi = 0$$
$$a_2 = \frac{3}{2\pi}.sin\,2\,\pi = 0$$
$$a_3 = \frac{3}{3\pi}.sin\,3\,\pi = 0$$
$$a_4 = \frac{3}{4\pi}.sin\,4\,\pi = 0$$
$$a_5 = \frac{3}{5\pi}.sin\,5\,\pi = 0$$
$$karena: sin\,n\,\pi = 0$$

Dari nilai a1 -a5 di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa

nilai an = 0 untuk semua n

Langkah 4. Cari nilai bn

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx, n = 0,1,2,...$$
$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0.\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3.\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$b_n = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3.\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$b_n = \frac{3}{2}.\left(-\frac{2}{n\pi x}\right)cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}$$
$$b_n = 3.\left(-\frac{1}{n\pi}+0\right)\left(cos\frac{2n\pi}{2} - cos\frac{0.n\pi}{2}\right)$$
$$b_n = -\frac{3}{n\pi}(cos\, n\,\pi - 1)$$
$$b_n = \frac{3}{n\pi}.(1 - cos\, n\,\pi)$$

Langkah 5. Dari rumus bn yang diperoleh cari 5 nilai bn untuk n=1, 2, 3, 4, 5....

$$b_1 = \frac{3}{\pi}.(1 - cos\,\pi)$$
$$b_1 = \frac{3}{\pi}.(1-(-1)) = \frac{3}{\pi}.(1+1)$$
$$b_1 = \frac{6}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{3}{2\pi}.(1 - cos\,2\,\pi)$$
$$b_2 = \frac{3}{2\pi}.(1-1)$$
$$b_2 = 0$$

$$b_2 = \frac{3}{2\pi}.(1 - cos\,2\,\pi)$$
$$b_2 = \frac{3}{2\pi}.(1-1)$$
$$b_2 = 0$$

$$b_3 = \frac{3}{3\pi}.(1 - cos\,3\,\pi)$$
$$b_3 = \frac{1}{\pi}.(1-(-1)) = \frac{1}{\pi}.(1+1)$$
$$b_3 = \frac{2}{\pi}$$

$$b_4 = \frac{3}{4\pi}.(1 - cos\,4\,\pi)$$
$$b_4 = \frac{3}{4\pi}.(1-1)$$

$$b_4 = 0$$
$$b_5 = \frac{3}{5\pi}.(1 - cos\, 5\,\pi)$$
$$b_5 = \frac{3}{5\pi}.(1 - (-1)) = \frac{3}{5\pi}.(1 + 1)$$
$$b_5 = \frac{6}{5\pi}$$

Hasil yang diperoleh untuk nilai b1 sampai b5 dapat disimpulkan bahwa pada saat n genap maka bn = 0. Sedangkan untuk nilai n ganjil diperoleh nilai yaitu:$b_1 = \frac{6}{\pi}, \quad b_3 = \frac{2}{\pi}, \quad b_5 = \frac{6}{5\pi}, \ldots$

Langkah 6 Buat deret Fourier dengan memasukkan nilai a0, an dan bn yang telah dihasilkan.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(a_n\, cos \frac{n\pi x}{L} + b_n\, sin \frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$f(x) = \frac{3}{2} + 0 + b_1\, sin \frac{\pi x}{2} + b_3\, sin \frac{3\pi x}{2} + b_5\, sin \frac{5\pi x}{2} \ldots.$$
$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} sin \frac{\pi x}{2} + \frac{6}{3\pi} sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{6}{5\pi} sin \frac{5\pi x}{2} \ldots.$$
$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3\pi} sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5\pi} sin \frac{5\pi x}{2} \ldots.\right)$$

Deret Fourier dari persamaa f (x) di atas dapat disederhanakan menjadi

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)} . sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

Latihan 7

1. Cari deret Fourier dari $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

(periode 2Π, L = Π)

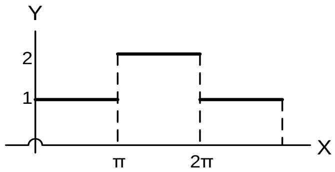
2. Diketahui sinyal seperti berikut Periode = 2π:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 2 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Tentukan a0, an, bn dan Deret Fouriernya

Jawaban Latihan 7

1. Gambar



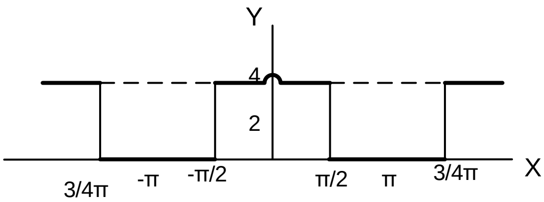
Nilai

$$a_0 = 3$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$$

Persamaan Deret Fourier

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)}.sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

2. Gambar



Nilai $a_0 = 4$

$a_n = 0, n = genap$

$a_n = \frac{8}{n\pi}(n = 1,5,9,\ldots)$

$a_n = -\frac{8}{n\pi}(n = 3,7,11,\ldots)$

$b_n = 0$

Persamaan Deret Fourier

$$f(x) = 2 + \frac{8}{\pi}\left\{cos\,x - \frac{1}{3}cos\,3\,x + \frac{1}{5}cos\,5\,x - \frac{1}{7}cos\,7\,x + \ldots\right\}$$

Rangkuman 7

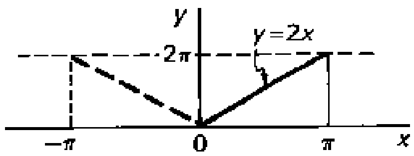
Untuk menyelesaikan deret Fourier terlehih dahulu kita perlu mencari nilai a0, an dan bn dari persamaan dengan rumus

$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\int\frac{n\pi x}{L} f(x).cos$ dan $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\int\frac{n\pi x}{L} f(x).sin$

Setelah diperoleh nilai-nilai tersebut dimasukkan dalam persamaan deret Fourie yaitu $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$

Tes Formatif 7

1. Cari a0, an, bn dan deret Fourier dari gambar dibawah ini



Jawaban Tes Formatif 7

1. $a_0 = 2\pi$

   $a_n = 0(genap)$

   $a_n = -\dfrac{8}{n^2\pi}(ganjil)$

   $b_n = 0$

   Deret Fourier

   $$f(x) = \pi - \frac{8}{\pi}\left\{\cos x + \frac{1}{9}\cos 3\,x + \frac{1}{25}\cos 5\,x + \ldots\right\}$$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 7 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 7.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup

< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 8. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 7, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 8

TRANSFORMASI FOURIER

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu membedakan antara deret Fourier fungsi genap dan ganjil

Materi 8 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

1. Fungsi Genap

   Jika nilai f(-x) = f(x), maka fungsi f(x) adalah fungsi genap (symmetric)

   Pada perderetan fungsi genap nilai suku-suku sinus adalah 0, maka nilainya bn = 0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,xdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos n\,xdx$$

2. Fungsi Ganjil

Jika nilai f (-x) = - f(x), maka fungsi f(x) adalah fungsi ganjil (kewsynnetric)

Pada perderetan fungsi ganjil nilai suku-suku cosinus adalah 0, maka nilai a0 dan an = 0

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\,xdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin n\,xdx$$

Contoh soal

1. $f(x) = x^2, \pi \leq x \leq \pi (periode 2\pi)$

   Karena nilai f (-x) = f(x), maka penderetan fungsi adalah fungsi genap.

   Ini berarti nilai bn = 0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx$$

$$a_0 = \frac{2}{3\pi}x^3 \Big|_0^\pi = \frac{2}{3\pi}(\pi^3)$$
$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\, dx$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n} sin\, n\, x + \frac{2x}{n^2} cos\, n\, x - \frac{2}{n^3} sin\, n\, x\right)\Big|_0^\pi$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{2\pi}{n^2} cos\, n\, \pi - 0\right)$$
$$a_n = \frac{4}{n^2} cos\, n\, \pi$$
$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} cos\, n\, x$$
$$atau = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{cos\, x}{1^2} - \frac{cos\, 2\, x}{2^2} + \frac{cos\, 3\, x}{3^2} - \frac{cos\, 4\, x}{4^2} + \ldots\right)$$

2. Penderetan $f(x) = x, 0 < x < 2(periode 2)$

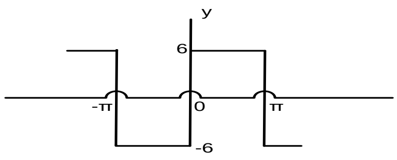
Perderetan dalam deret sinus (sinus 1/2 jangkauan), yang dicari penyelesaiannya hanya bn

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$
$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\, sin\frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{-2x}{n\pi} cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{-4}{n^2\pi^2} sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$
$$b_n = \frac{-4}{n\pi} cos\, n\, \pi$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi} cos\, n\, x\, sin\frac{n\pi x}{2}$$
$$atau = \frac{4}{n}\left(sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4} sin\frac{4\pi x}{2} - \ldots\right)$$

Latihan 8

Cari deret Fourier dari gambar dibawah ini



Jawaban Latihan 8

$a_0 = 0$

$a_n = 0$

$b_n = 0(genap)$

$b_n = \frac{24}{n\pi}(ganjil)$

Persamaan Deret Fourier

$$f(x) = \frac{24}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right\}$$

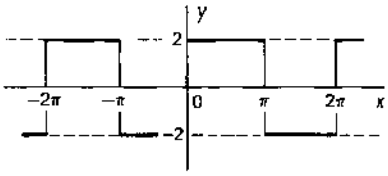
Rangkuman 8

Dengan mengetahui bahwa suatu persamaan termasuk fungsi genap atau ganjil maka, dapat memudahkan dalam mencari nilai a0, an dan bn. Jika fungsi adalah fungsi genap maka kita cukup mencari nilai a0 dan an saja karena nilai bn = 0. Sedangkan jika fungsi adalah fungsi ganjil maka nilai a0 dan an = 0. Sehingga kita cukup mencari nilai bn saja.

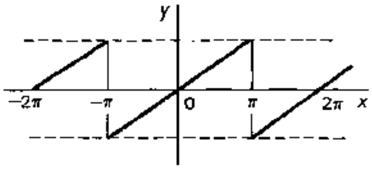
Tes Formatif 8

Tentukan fungsi dari gambar dibawah ini apakah termasuk fungsi genap atau ganjil

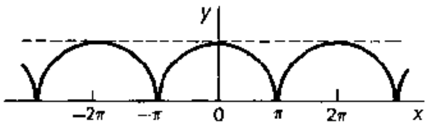
1



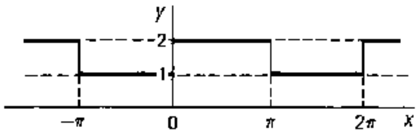
2



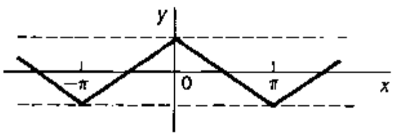
3



4



5



Jawaban Tes Formatif 8

1. Fungsi Ganjil
2. Fungsi Ganjil
3. Fungsi Genap
4. Bukan Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil
5. Fungsi Genap

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 8 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 8.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup

< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 9. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 8, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 9

TRANSFORMASI FOURIER

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu membedakan sifat-sifat Transformasi Fourier

Materi 9 Transformasi Fourier

Prosedur Transformasi Fourier

1. Sinyal didigitalisasi dengan waktu cuplik 2 dt
2. Letakkan waktu nol ditengah-tengah sampel. Karena panjang sinyal 0.5 detik, maka periode atau frekuensi dasar (harmonik pertama) diambil juga 0.5 detik sehingga frekuensi dasarnya 1/0.5 = 2 Hz
3. Lakukan transformasi cosinus dengan cara membuat gelombang cosinus frekuensi 2 Hz dengan panjang yang sama 0.5 detik lalu dicuplik setiap 2 mdt
4. Kalikan sampel demi sampel (sampel sinyal x sampel cosinus) dan jumlahkan semua hasilnya. Agar angkanya tidak terlalu besar dapat dinormalisasikan terhadap hasil jumlah perkalian yang maksimum
5. Kemudian plot hasil penjumlahan di atas pada sumbu frekuensi 2 Hz
6. Dengan cara yang sama lakukan untuk gelombang cosinus pada frekuensi harmonik berikutnya (4,6,8 ...) Hz. Hasilnya ditunjukkan pada gambar dibawah ini
7. lakukan transformasi sinus dengan tahapan yang sama pada langkah transformasi cosinus
8. Setelah diperoleh spektrum dari transformasi cosinus dan sinus, lalu hitung spektrum amplitudo dan phasenya dengan menggunakan persamaan 4.6
9. Pekerjaan transformasi fourier dapat dipercepat dengan menggunakan metode cooley Tukey (Fash Fourier Transform) yang dikerjakan oleh komputer

Jumlah 2 fungsi periodik bukan merupakan fungsi periodic, jika jumlah periodenya bilangan irrasioanal

Contoh : sin x dan sin (x√2) masing-masing merupakan fungsi periodik dengan periode 2π dan 2π/√2, namun jika kedua fungsi dijumlah yaitu sin t + sin (t√2) maka bukan fungsi periodic lagi.

Transformasi Fourier Waktu Diskrit

Transformasi Fourier dari x (n) didefinisikan sebagai:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega n}$$

X (ω) merupakan isi dari frekuensi sinyal x (n). Artinya, X (ω) adalah dekomposisi dari nilai x (n) sebagai komponen frekuensinya.

Inver dari transformasi Fourier diskrit adalah:

$$X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega).e^{j\omega n}\,d\omega$$

Perbedaan dari transformasi Fourier waktu kontinyu dan waktu diskrit adalah:

1. Kisaran frekuensi dari Transformasi Fourier sinyal waktu kontinyu adalah (-∞, ∞), sedangkan pada transformasi Fourier sinyal waktu-diskrit frekuensi berkisar pada nilai (-π; π) atau ekivalennya adalah (0; 2π)
2. Transformasi Fouriernya adalah penjumlahan (sigma) sebagai ganti dari integral, karena sinyal diskrit dalam waktu. Karena X (ω) merupakan fungsi periodik dengan variabel ω, sehingga memenuhi syarat espansi deret Fourier, yang diekspresikan sebelumnya. Dari definisi X(ω) menjelaskan bahwa koefisien/konstanta Fourier adalah X(n)

Akan ada persoalan konvergensi karena bentuk transformasi Fourier berupa deret tak berhingga. Dimana deret tak berhingga dikatakan konvergen jika dan hanya jika deret tersebut nilainya tidak tak berhingga (< ∞)

Jika deret tak berhingga bersifat konvergen maka transformasi Fourier dari suatu sinyal waktu diskrit ada (dapat ditentukan), secara matematis ditulis:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

Maka:

$$|X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n). e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

Sehingga sebelum menghitung transformasi Fourier dari sebuah sinyal waktu diskrit, terlebih dahulu mengetahui korvengensi dari sinyal tersebut.

Contoh:

1. Tentukan transformasi Fourier dari $X(n) = a^n - 1 < a < 1$

Jawab: Barisan X (n) dapat dijumlahkan secara absolut (konvergen) karena IaI < 1,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Sehingga transformasi Fourier dari x (n) bisa dihitung dengan rumus:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n). e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n \; X(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

2. Tentukan transformasi Fourier dari

$$x(n) = \begin{cases} A \\ 0 \end{cases} \qquad 0 \leq n \leq L-1$$

$$others$$

Jawab:

Langkah 1 cek dulu konvergensi barisnya

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty$$

Karena x (n) konvergen, maka transformasi Fourier ada. Selanjutnya kita hitung transformasi Fourier sinyal tersebut dengan rumus:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n} = A(e^0 + e^{j\omega} + e^{j2\omega} + \ldots + e^{-j(L-2)\omega} + e^{-j(L-1)\omega}$$

Deret kita perpanjang sampai n= ∞ bertujuan agar deret menjadi lebih

sederhana,

Seperti contoh dibawah ini:

$$e^0 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + \ldots + e^{-j(L-1)\omega} + e^{-jL\omega} + e^{-j(L+1)\omega} + \ldots + e^{-j\infty\omega}$$

Untuk menjumlahkan deret keseluruhan kita gunakan formula penjumlahan geometri adalah:

$S_\infty = \frac{a}{1-r}, r \neq 1$ $\qquad \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$

Dan jumlah untuk deret mulai $e^{-jL\omega}$ sampai $e^{-j\infty\omega}(= e^{-\infty})$ adalah $\frac{e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}$

Maka hasil penjumlahan deret menjadi:

$$A\left(\frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \frac{e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}\right) = A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$X(\omega) = A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}$$

Tabel Transformasi Fourier

No	X(n)	X(ω)
1	δ(n)	1
2	$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0}$
3	1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi n)$
4	$a^n u(n)$ dengan $\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5	U(n)	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi t)$
6	$(n+1)a^n u(n)$ dengan $\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7	$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi t)$

Beberapa Fungsi dari Transformasi Fourier yaitu:

1. Transformasi Fourier untuk funrsi impils satuan $[\delta(t-t_0)]$

Jika diketahui:$f(t) = [\delta(t-t_0)]$ maka transformasi Fouriernya adalah:

$$F(j\omega) = \Im|f(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\,e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)dt = e^{-j\omega t_0}$$

Dengan kata lain: $\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$

Jika: $f(t) = \delta(t)$ maka transformasi Fouriernya menjadi $e^{-j\omega 0} = 1$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

2. Jika diketahui $F(t) = \delta(\omega - \omega_0)$ maka f(t) adalah invers dari Transformasi Fourier yaitu:

$$f(t) = \Im^{-1}[F(j\omega] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,F(j\omega)d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

Atau dengan kata lain: $\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta(\omega-\omega_0)$ t

Contoh: Carilah Transformasi Fourier dari cos ω_0t

Jawab: Ditinjau Rumus Euler: $cos\,\omega_0\,t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$

Dan Sifat Transformasi Fourier $\Im[f_1(t)] + \Im[f_2(t)] = \Im[f_1(t) + f_2(t)]$

Maka $\Im[cos\,\omega_0\,t] = \Im\left[\frac{e^{j\omega_0 t}}{2}\right] + \Im = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$

Maka $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ Apabila tandanya berubah, maka $e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

Transformasi Fourier dari cosinus dapat dicari dengan bantuan Rumus Euler

$$\Im[cos\,\omega_0\,t] = \Im\left[\frac{e^{j\omega_0 t}}{2}\right] + \Im\left[\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]$$
$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

Atau dapat dinotasikan $cos\,\omega_0\,t \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$

Dari Transformasi Fourier: $e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

Jika dipilih $\omega_0 = 0$maka di dapat $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

Jika 1 dikalikan dengan konstanta K, maka: $K \leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega)$

a. Transformasi Fourier untuk Fungsi eksponensial $e^{-at}u(t)$ adalah

b. $\Im[e^{-at}u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-at}u(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+a)t}dt$

$$= \frac{e^{-(j\omega+a)t}}{-(j\omega+a)}\Big|_0^\infty = \frac{0-1}{-(j\omega+a)} = \frac{1}{a+j\omega}$$

c. Atau dapat dinotasikan $e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$

Tabel berikut merangkum Transformasi Fourier untuk beberapa fungsi;

No	X(n)	X(ω)
1	δ(t)	1
2	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
3	$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
4	1	$2\pi\delta(\omega)$
5	1/A	$\frac{2\pi\delta(\omega)}{A+j\omega}$
6	0	$\omega\delta(\omega)$
7	$cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
8	$sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)]$
9	*Sgn(t)*	$\frac{2}{j\omega}$
10	*U(t)*	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
11	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
12	$e^{-at}cos\omega_d t u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_d^2}$
13	$e^{-at}sin\omega_d t u(t)$	$\frac{\omega_d^2}{(a+j\omega)^2+\omega_d^2}$
14	$u(t+\frac{1}{2}T)-u(t-\frac{1}{2}T)$	$T\frac{sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$

Latihan 9

Tentukan Transformasi Fourier dari sin ω_0t

Jawaban latihan 9

Dengan Rumus Euler: $sin\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t})$

Dan dengan sifat Transformasi Fourier

$$\Im[f_1(t)] - \Im[f_2(t)] = \Im[f_1(t) - f_2(t)]$$

Maka $\Im[sin\, \omega_0\, t] = \Im\left[\frac{e^{j\omega_0 t}}{2}\right] - \Im\left[\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)$

Maka $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ Apabila tandanya berubah, maka $e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$

Untuk Transformasi Fourier dari sebuah sinus dapat dicari dengan bantuan Rumus Euler

$$\Im[sin\, \omega_0\, t] = \Im\left[\frac{e^{j\omega_0 t}}{2}\right] - \Im\left[\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]$$
$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Atau dapat dinotasikan $sin\, \omega_0\, t \leftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)$

Dari Transformasi Fourier: $e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$

Jika dipilih $\omega_0 = 0$ maka di dapat $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

Jika 1 dikalikan dengan konstanta K, maka: $K \leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega)$

Rangkuman 9

Transformasi Fourier Waktu Diskrit dari x (n) dinyatakan sebagai:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).\, e^{-j\omega n}$$

Inver dari transformasi Fourier diskrit dapat dinyatakan dengan:

$$X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega).\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 9 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 9.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik

70 - 79	Cukup
< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 10. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 9, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 10

TRANSFORMASI FOURIER

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu membedakan sifat-sifat Transformasi Fourier

Materi 10 Transformasi Fourier Sinyal Waktu Diskrit

Sifat-sifat Transformasi Fourier

- Linieritas
- Pergeseran Waktu
- Pergeseran Frekuensi
- Perubahan skala
- Pengembalian Waktu
- Konvolusi Periodik

1. Linieritas

Jika $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, maka $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$

Sifat linieritas yang lain adalah: $F(ax_1(t) + bx_2(t)) \leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$

Dimana: a dan b adalah konstanta sedangkan $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ adalah fungsi kontinyu.

2. Pergeseran Waktu

Efek dari pergeseran waktu adalah dengan cara menambahkan suku bilangan linier yaitu -t0 pada spektrum aslinya yaitu X(ω) sehingga dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Contoh: Diketahui nilai X (ω) dari sebuah x (t) adalah $4\,sin\frac{\pi}{2}$. Tentukan nilai X (ω) apabila x (t) menjadi $x(t-4)$

Jawab: Sesuai rumus, nilai $t_0 = 4$, sehingga nilai X (ω) dari $x(t-4)$ adalah

$X() = 4\,sin\frac{\pi}{2}e^{-j\omega 4} = 4e^{-j\omega 4}\,sin\frac{\pi}{2}$

3. Pergeseran Frekuensi

Pergeseran frekuensi merubah persamaan menjadi:

$x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

Contoh: Jika diketahui nilai X (ω) dari sebuah x (t) adalah $4\,sin\frac{\pi}{2}$. Tentukan nilai x (t) jika X (ω) nya menjadi $4\,sin(\frac{\pi}{2} - 2)$

Jawab: Dengan menggunakan sifat pergeseran frekuensi, maka:

$$X(\omega) = 4\,sin\frac{\pi}{2}$$
$$X(\omega - \omega_0) = 4\,sin(\frac{\pi}{2} - 2)$$

Maka $\omega_0 = 2)$ sehingga: $x(t) = x(t)e^{j\omega_0 t} = x(t)e^{j2t}$

4. Perubahan Skala

Perubahan skala terjadi jika terjadi kompresi dimensi waktu dari sebuah sinyal (a>1) yang mengakibatkan ekspansi spektrumnya, sebaliknya jika terjadi ekspensi dimensi waktu (a<1) akan mengakibatkan kompresi spektrumnya. Hal ini digambarkan pada persamaan berikut: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Contoh: Apabila diketahui nilai X (ω) dari sebuah x (t) adalah $4\,sin\frac{\pi}{2}$. Tentukan nilai X (ω) jika nilai x (t) berubah menjadi x (2t).

Jawab: Dengan menggunakan sifat perubahan skala, maka:

$$x(t) \rightarrow X(\omega) = 4\,sin\frac{\pi}{2}$$
$$x(2t) = X(\omega) = \frac{1}{|2|}X\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}4\,sin\left(\frac{\pi/2}{2}\right) = 2\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

5. Pengembalian Waktu

Sifat pembalikan waktu pada transformasi Fourier dapat digambarkan dengan persamaan berikut: $x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$

Contoh: Diketahui nilai X (ω) dari sebuah x (t) adalah $4\,sin\frac{\pi}{2}$. Cari nilai X (ω) jika nilai x (t) berubah menjadi x (-t).

Jawab: Dengan menggunakan sifat pembalikan waktu

$x(t) \rightarrow X(\omega) = 4\,sin\frac{\pi}{2}$

$x(-) \rightarrow X(-\omega) = 4\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

6. Konvolusi Periodik

Konvolusi 2 buah sinyal x_1 (t) dan x_2 (t), yang dilambangkan sebagai x_1(t) *x_2(t), menghasilkan sinyal baru x (t) dan didefinisikan dengan persamaan berikut

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau x_1(t) * x_2(t)$$

$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$

Dimana x (t) adalah output, x_1 (t) adalah input berupa sinyal diskrit dan x_2 (t) adalah respons impuls dari sistem.

Latihan 10

Jika diketahui Transformasi Fourier X (ω_0) dari x (t) adalah $-2\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, tentukan Tranformasi Fourier untuk:

1. $X(-t)$
2. $X(t+3)$
3. $X(5t)$

Jawaban Latihan 10

1. $x(-t) \rightarrow X(-\omega) = -2\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2. $X(\omega + 3) = -2\,sin(-\frac{\pi}{3} + 3)$

3. $x(5t) = X(\omega) = \frac{1}{|5|}X\left(\frac{\omega}{5}\right) = \frac{1}{5}(-2)\,sin\left(\frac{-\pi/3}{5}\right) = -\frac{2}{5}sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)$

Rangkuman 10

Transformasi Fourier memiliki 6 sifat yaitu:

1. Linieritas yaitu $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
2. Pergeseran Waktu yaitu $x(t-t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. Pergeseran Frekuensi yaitu $x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$
4. Perubahan skala yaitu $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

5. Pengembalian Waktu yaitu $x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$
6. Konvolusi Periodik yaitu $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$

Tes Formatif 10

1. Jika diketahui Transformasi Fourier X (ω_0) dari sebuah x (t) adalah $4\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, tentukan Tranformasi Fourier untuk:

   a. $X(-t)$

   b. $X(t-5)$

   c. $X(3t)$

Jawaban Tes Formatif 10

1.

   a. $x(-t) \rightarrow X(-\omega) = 4\,sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

   b. $X(\omega - 5) = 4\,sin(\frac{2\pi}{3} - 5)$

   c. $x(3t) = X(\omega) = \frac{1}{|3|}X\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{4}{3}sin\left(\frac{2\pi/3}{3}\right) = \frac{4}{3}sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 10 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 10.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 11. Bagus! Jika masih di bawah 80%,

Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 10, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 11

TRANSFORMASI LAPLACE

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaian perhitungan Transformasi Laplace menggunakan rumus dan tabel transformasi Laplace Mampu menggunakan Transformasi Laplace dalam menyelesaikan Persamaan Differensial

Materi 11 Transformasi Laplace

Solusi untuk persamaan differensial yang diperoleh dari pemodelan matematik, terdiri dari solusi *steady state* (didapat jika semua kondisi awal nol) dan solusi *transien* (mewaili pengaruh dari kondisi awal)

Salah satu tools yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut adalah Transformasi Laplace. Transformasi Laplace mengkonversikan persamaan differensi (dalam domin t) ke dalam peramaan aljabar dalam domain s, yang lebih mudah disederhanakan dibandingkan persamaan differensia dalam doman t. Solusi dalam domain t dapat diperoleh dengan melakukan operasi invers pada transformasi Laplace tersebut.

Transformasi Laplace mempresentasikan input, output dan system sebagai entitas yang berbeda, yang dapat diselesaikan dengan aljabar sederhana. Keterbatasan dari Tranformasi Laplace yang bekerja di domain frekuensi, adalah bernilai benar bila sistem bersifat linier

Transformasi Laplace ditemukan oleh ilmuan matematika asal Prancis (1749-1827) yaitu Pierre Simon Laplace.

Definisi transformasi Laplace dari fungsi F(s) adalah

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$$

Sedangkan Inverse dari Transformasi Laplace $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$

Syaratnya adalah fungsi f (t) harus bernilai real dan kontinyu untuk interval waktu yang dievaluasi, jika tidak transformasi Laplace tidak dapat digunakan

Tabel Transformasi Laplace

No	f(t)	L(f)	No	F(t)	L(f)
1	1	$\frac{1}{s}$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	9	$\cosh a t$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
4	t^n n=0, 1, 2, 3 …	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh a t$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
5	t^a a positif	$\frac{\Gamma(a+1)}{a+1}$	11	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Contoh:

Tentukan transformasi Laplace untuk fungsi berikut:

1. $F(t) = 1$

$$L\{f(t)\} = L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt$$
$$= \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{s}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s}$$

2. $F(t) = t$

$$L\{f(t)\} = L\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt$$
$$= t.\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$
$$= t.\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^\infty$$
$$= 0 - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{s^2}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s^2}$$

3. $F(t) = e^{at}$

$$L\{f(t)\} = L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt$$
$$= \left(-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right)\Big|_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{s+a}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s+a}$$

4. $F(t) = sin\, a\, t$

$$L\{f(t)\} = L\{sin\, a\, t\}$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt = -\frac{1}{a}cos\, a\, t. e^{-st} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\, cos\, a\, tdt$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt = -\frac{1}{a}cos\, a\, t. e^{-st} - \frac{s}{a}\left(\frac{1}{a}sin\, a\, t. e^{-st} + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\, sin\, a\, tdt\right)$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt = -\frac{1}{a}cos\, a\, t. e^{-st} - \frac{s}{a^2}sin\, a\, t. e^{-st} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\, sin\, a\, tdt$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt + \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\, sin\, a\, tdt = -\frac{1}{a}cos\, a\, t. e^{-st} - \frac{s}{a^2}sin\, a\, t. e^{-st}$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = -\frac{1}{a}cos\, a\, t. e^{-st} - \frac{s}{a^2}sin\, a\, t. e^{-st}\Big|_0^\infty$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = -\frac{1}{a}\{(cos\, a\, \infty). e^{-s\infty}) - (cos\, a\, 0). e^{-s0})$$
$$-\frac{s}{a^2}\{(sin\, a\, \infty. e^{-s\infty}) - (sin\, a\, 0. e^{-s0})$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = -\frac{1}{a}(0-1) - \frac{s}{a^2}\{0-0)$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a}$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt = \frac{\frac{1}{a}}{\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)} = \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{a^2+s^2}{a^2}\right)} = \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{(s^2+a^2)}{a^2}\right)}$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, sin\, a\, t)dt = \frac{a}{s^2+a^2}$$

5. $F(t) = cos\, a\, t$

$$L\{f(t)\} = L\{cos\, a\, t\}$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, cos\, a\, t)dt = \frac{1}{a}sin\, a\, t. e^{-st} + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\, sin\, a\, tdt$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, cos\, a\, t)dt = \frac{1}{a}sin\, a\, t. e^{-st} + \frac{s}{a}\left(\frac{1}{a}(-\, cos\, a\, t)e^{-st} - \frac{(-s)}{a}\int_0^\infty e^{-st}(-\, cos\, a\, t)dt\right)$$
$$\int_0^\infty (e^{-st}\, cos\, a\, t)dt = \frac{1}{a}sin\, a\, t. e^{-st} - \frac{s}{a^2}cos\, a\, t. e^{-st} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty (e^{-st}\, cos\, a\, t)dt$$

$$\int_0^\infty (e^{-st}\cos a\,t)dt + \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty (e^{-st}\cos a\,t)dt = \frac{1}{a}\sin a\,t.e^{-st} - \frac{s}{a^2}\cos a\,t.e^{-st}\Big|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty (e^{-st}\cos a\,t)dt\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a}\{(\sin a\,.\infty).e^{-s\infty} - (\sin a\,.0).e^{-s0}\}$$

$$-\frac{s}{a^2}\{(\cos a\,.\infty).e^{-s\infty} - (\cos a\,.0).e^{-s0}\}$$

$$\int_0^\infty (e^{-st}\cos a\,t)dt\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a}\{(0-0\} - \frac{s}{a^2}\{0-1\}$$

$$\int_0^\infty (e^{-st}\cos a\,t)dt\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{s}{a^2}$$

$$\int_0^\infty (e^{-st}\cos a\,t)dt = \frac{\frac{s}{a^2}}{\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)} = \frac{\frac{s}{a^2}}{\left(\frac{a^2+s^2}{a^2}\right)} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Latihan 11

1. $F(t) = -8t$
2. $F(t) = t^3$
3. $F(t) = 5e^{2t} + 7e^{-t}$

Jawaban Latihan 11

1. $-\frac{8}{s^2}$
2. $\frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$
3. $\frac{5}{s-2} + \frac{7}{s+1}$

Rangkuman 11

Transformasi Laplace dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}t$$

Untuk hasil yang diperoleh dapat dilihat pada tabel transformasi Laplace

Tes Formatif 11

1. $F(t) = e^{-6t}$
2. $F(t) = te^{-8t}$
3. $F(t) = 3\sin\frac{t}{2}$

Jawaban Formatif 11

1. $\frac{1}{s+6}$

2. $\frac{1}{(s+8)^2}$
3. $\frac{6}{4s^2+1}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 11 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 11.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 12. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 11, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 12

TRANSFORMASI LAPLACE

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menggunakan Transformasi Laplace dalam menyelesaikan Persamaan Differensial

Materi 12 Teorema Transformasi Laplace

Teorema Transformasi Laplace

1. Linieritas $L[af(t)] = aF(s)$

   $L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$

2. Differensiasi $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - F(0)$

   $L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - f(0) - \frac{df(0)}{dt}$

3. Integrasi $L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} - \frac{\int f(0)}{dt}$

4. Nilai awal $lim_{t\to 0}\, f\,(t) = lim_{t\to 0}\, s\, f(s)$

5. Nilai akhir $lim_{t\to 0}\, f\,(t) = lim_{t\to 0}\, s\, f(s)$

6. Pergeseran waktu $L[f(t-\tau)] = e^{-st}F(s)$

Translasi Pada Sumbu s

Teorema 1 Teorema Translasi Pertama

Jika $L\{f(t)\} = F(s)$ dan a adalah sebuah bilangan rill, maka $L\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$

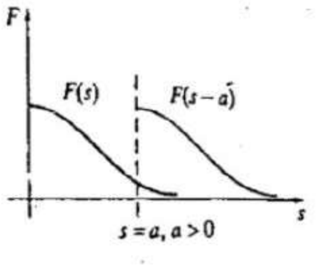
Pembuktian

$$L\{\quad ^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, f(t)dt$$

$$= F(s-a)$$

Jika s adalah bilangan riil, maka grafik dari F(s-a) adalah grafik dari F(s) yang bergeser pada sumbu s sepanjang IaI. Jika jika a<0 grafik bergeser sepanjang a satuan ke kiri. a>0, kemudan grafik dari F(s) bergeser sepanjang a satuan ke kanan, Dapat dituliskan dalam bentuk $L\{e^{at}f(t)\} = L\{f(t)\}|s \to s - a$

Dimana s→ s-a berarti transformasi laplace F(s) dari f(t) dengan menganti simbol menjadi s-a



Contoh:

Tentukan: a. $L\{e^{5t}t^3\}$ b. $L\{e^{-2t}\cos 4\,t\}$

Penyelesaian:

a. $L\{e^{at}f(t)\} = L\{f(t)\}_{s\to s-a}$

$L\{e^{5t}t^3\} = L\{t^3\}_{s\to s-5}$

$= \frac{3!}{s^{3+1}}|s \to s - 5$

$= \frac{3!}{s^4}|s \to s - 5$

$= \frac{6}{(s-5)^4}$

b. $L\{e^{at}f(t)\} = L\{f(t)\}_{s\to s-a}$

$L\{e^{-2t}\cos 4\,t\} = L\{\cos 4\,t\}_{s\to s+2}$

$= \frac{s}{s^2+4^2}|s \to s + 2$

$= \frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}$

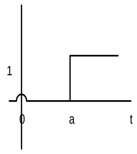
$= \frac{s+2}{(s+2)^2+16}$

Translasi Pada Sumbu t

Unit step function (fungsi tangga satuan) didefinisikan sebagai

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0, 0 \le t < a \\ 1, t \ge a \end{cases}$$

Pada saat t<a funsi bernilai 0, sehingga merepresentasikan kondisi alat belum dinyalakan, sedangkan pada saat t≥a fungsi bernilai 1, dan merepresentasikan kondisi alat sudah menyala. Fungsi u (t-a) dapat diinterpretasikan sebagai kondisi menekan tombol switch on dari suatu alat elektronik pada waktu t-a.



Teorema 2 Teorema Translasi Kedua

Jika $F(s) = L\{f(t)\}$ dan a > 0, maka $L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

Pembuktian dengan menggunakan sifat-sifat penjumlahan dalam integral

$\int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt$ 2 integral yaitu:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{-\infty}^{0} e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt + \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt$$

Sekarang kita misalkan v= t-a, dv = dt pada integral terakhir maka:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)}f(v)dv = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dve^{-as}\{f(t)\}$$

Contoh: Tentukan $\{\cos t\, u(t-\pi)\}$

Penyelesaian: Dengan menggunakan rumus penjumlahan untuk fungsi cos (bentuk alternatif teorema translasi kedua), dimana g (t) = cos t dan a = π, maka

g (t + π) = cos (t + π) = - cos t $\{\cos u\,(t-\pi)\} = -e^{-as}\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}$

Soal Latihan 12

1. $L\{5\sin 3x - 17e^{-2t}\}$
2. $L\{2x^2 - 3x + 4\}$
3. $L\{x\cos\sqrt{7}\,x\}$

Jawaban Latihan 12

1. $\frac{15}{s^2+9} - \frac{17}{s+2}$
2. $\frac{4}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}$
3. $\frac{s^2-7}{(s^2+7)^2}$

Rangkuman 12

Padanan dari persamaan $L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ untuk transformasi Laplace dari fungsi dari t adalah: $L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$

Tes Formatif 12

1. $F(t) = e^{-t} \cos 2t$
2. $F(t) = 2 \sin^2 \sqrt{3}\, t$
3. $F(t) = e^{-5t}\sqrt{t}$

Jawaban Formatif 12

1. $\frac{s-1}{(s-1)^2+4}$
2. $\frac{12}{s^3+12s}$
3. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(s+5)^{-3/2}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 12 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 12.

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 13. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 12, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 13

TRANSFORMASI LAPLACE

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menggunakan Transformasi Laplace dari Turunan pertama dan kedua

Materi 13 Transformasi Laplace dari Turunan

Metode penyelesaian masalah awal pada persamaan differensial biasa dimana operasi kalkulus pada fungsi digantikan oleh operasi aljabar pada transformasi.

Transformasi Laplace dari Turunan pertama dan kedua adalah:

$L\{f') = sL(f) - f(0)$
$L\{f'') = s^2L(f) - sf(0) - f'(0)$

Pembuktikan pertama dilakukan dengan mengasumsikan tambahan yang kontinu. Kemudian di integralkan menjadi

$$L\{f') = \int_0^\infty e^{-st}f^1(t)dt = [e^{-st}f(t)]\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = [0 - f(0)] + sL(f)$$
$$= sL(f) - f(0)$$

Pembuktikan kedua

$L\{f'') = sL(f^1) - f'(0) = s[sL(f) - f(0)] - f'(0)$
$= s^2L(f) - sf(0) - f'(0)$

Untuk rumus $L\{f^n)$

$L\{f^n) = s^nL(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

Contoh:

1. Cari Laplace dari $f(t) = t\,sin\,\omega\,t, jika --\!\!-\!\!\rightarrow f(0) = 0 \& f'(0) = 0$

   Jawab:

   Langkah 1. Cari Transformasi Laplace dari turunan pertama dan kedua serta masukkan nilai f (0) dan f' (0)

   $L\{f') = sL(f) - f(0) = sL(f) - 0 = sL(f)$

$L\{f''\} = s^2L(f) - sf(0) - f'(0) = s^2L(f) - s.0 - 0 = s^2L(f))$

Langkah 2. Cari differensia (turunan) pertama dan kedua dari f (t)

$f'(t) = sin\,\omega\,t + \omega t\,cos\,\omega\,t$

$f''(t) = 2\omega\,cos\,\omega\,t - \omega^2 t\,sin\,\omega\,t$

Langkah 3. Laplacekan f” (t) dengan memasukkan nilai Laplace dari cos ωt (lihat tabel transformasi Laplace) yaitu $L(cos\,\omega\,t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ dan nilai t sin ωt sebagai nilai dari L (f) lihat soal, sehingga persamaan menjadi

$$L(f'') = 2\omega\frac{s}{s^2+\omega^2} - \omega^2 L(f)$$

Langkah 4. Samakan nilai L (f”) pada langkah 3 dengan L (f”) pada langkah 1

$$L(f'') \Rightarrow 2\omega\frac{s}{s^2+\omega^2} - \omega^2 L(f) = s^2L(f)$$

$$2\omega\frac{s}{s^2+\omega^2} = s^2L(f) + \omega^2L(f)$$

$$2\omega\frac{s}{s^2+\omega^2} = L(f)(s^2+\omega^2)$$

$$\frac{2\omega\frac{s}{s^2+\omega^2}}{(s^2+\omega^2)} = L(f)$$

$$2\omega\frac{s}{s^2+\omega^2}\,x\,\frac{1}{(s^2+\omega^2)} = L(f)$$

$$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2} = L(f)$$

$$L(f) = \frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Maka nilai $L(f) = L(t\,sin\,\omega\,t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

2. Selesaikan $y' - 5y = 0 - -\!\!\!\rightarrow y(0) = 2$

Jawab:

Langkah 1. Transformasi Laplace persamaan

$$L\{y'\} - 5L\{y\} = L(0)$$

$$L\{y'\} = sL(y) - y(0) = sL(y) - 2$$

$$sLy - 2 - 5Ly = 0$$

$$(s-5)Ly = 2$$

$$L\{y\} = \frac{2}{s-5}$$

Langkah 2. Inverskan persamaan Laplace yang diperoleh

$$L^{-1}\{\frac{2}{s-5}\} = 2e^{5x}$$

3. Cari laplace dari $g(t) = sin\,\omega\,t, jika --\!\!\longrightarrow g(0) = 0$,g'(0) $= \omega$

Jawab:

Langkah 1. Cari Transformasi Laplace dari turunan pertama dan kedua serta masukkan nilai f (0) dan f' (0)

$$L\{g') = sL(g) - g(0) = sL(g) - 0 = sL(g)$$

$$L\{g'') = s^2L(g) - sg(0) - g'(0) = s^2L(g) - s.0 - \omega$$
$$= s^2L(g) - \omega$$

Langkah 2. Cari differensia (turunan) pertama dan kedua dari f (t)

$$f'(t) = \omega\,cos\,\omega\,t$$

$$f''(t) = -\omega^2\,sin\,\omega\,t$$

Langkah 3. Laplacekan f" (t) dengan memasukkan nilai sin ωt sebagai nilai dari L (g) lihat soal, sehingga persamaan menjadi $L(f'') = -\omega^2L(g)$

Langkah 4. Samakan nilai L (f") pada langkah 3 dengan L (f") pada langkah 1

$$L(g'') \Rightarrow s^2L(g) - \omega = -\omega^2 sL(g)$$
$$s^2L(g) + \omega^2L(g) = \omega$$
$$L(g)(s^2 + \omega^2) = \omega$$
$$L(g) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$$

Pada contoh soal 1 $\quad L(f) = L(cos\,\omega\,t) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)}$

Maka pada soal ini $\quad L(g) = L(sin\,\omega\,t) = \frac{\omega}{s}L(cos\,\omega\,t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Soal Latihan 13

1. Cari laplace dari $f(t) = cos\,\omega\,t, jika --\!\!\longrightarrow f(0) = 1, f'(0) = 0$
2. Selesaikan $y' - 5y = e^{5x} --\!\!\longrightarrow y(0) = 0$
3. Selesaikan $y'' + 4y = 0 --\!\!\longrightarrow y(0) = 2, y'(0) = 2$

Jawaban Latihan 13

1. $L(f) = L(cos\, \omega\, t) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)}$
2. $L^{-1}\{\frac{1}{(s-5)^2}\} = xe^{5x}$
3. $L^{-1}\{\frac{2s+2}{s^2+4}\} = 2\, cos\, 2\, x + sin\, 2\, x$

Rangkuman 13

Transformasi Laplace digunakan untuk menyelesaikan soal-soal nilai awal yang diberikan melalui persamaan differensial linier orde ke-n dengan koefisien-koefisien konstan bersama-sama dengan kondisi-kondisi awal yang dispesifikasikan. Pertama-tama transformasi Laplace pada kedua sisi dari persamaan, sehingga memperoleh suatu persamaan aljabar untuk L {s). Kemudian selesaikan untuk memperoleh L (s) secara aljabar, kemudian invers transformasi Laplace untuk memperoleh $y(x) = L^{-1}\{Y(s)\}$

Tes Formatif 13

1. $y' + y = te^{-t} - -\!\!-\!\!\rightarrow y(0) = -2$
2. $y' + 20y = 6\, sin\, 2\, t - -\!\!-\!\!\rightarrow y(0) = 6$
3. $y'' + 2y' - 3y = \sin 2t - -\!\!-\!\!\rightarrow y(0) = y'(0) = 0$ $y'' + y' + y = 0 - -\!\!-\!\!\rightarrow y(0) = 4, y'(0) = -3$

Jawaban Formatif 13

1. $y = -2e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t} = -\frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^3}$
2. $y = \frac{1}{101}(609e^{-20t} + 30\, sin\, 2\, t - 3\, cos\, 2\, t) = \frac{1}{101}\left(\frac{609}{s+20} + \frac{60}{s^2+4} - \frac{3s}{s^2+4}\right)$
3. $y = \frac{1}{10}e^{t} - \frac{1}{26}e^{-3t} - \frac{4}{65}cos\, 2\, t - \frac{7}{65}sin\, 2\, t = \frac{1}{10(s-1)} - \frac{1}{26(s+3)} - \frac{4s}{65(s^2+4)} - \frac{14}{65(s^2+2)}$
4. $y = 4e^{-1/2t}\, cos\, \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-1/2t}\, sin\, \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{4\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$f

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 13 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 13.

$$Tigkat\ penguasaan = \frac{(Jumlah\ jawabam\ yang\ benar)}{(Jumlah\ soal)} x100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan belajar 14. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 13, terutama bagian yang belum dikuasai.

MODUL 14

INVERS LAPLACE

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
- Diskusi - Question Based Learning - Metode Latihan	1 x 150 menit	Mampu menyelesaikan Invers Transformasi Laplace dengan metode pecahan parsial

Materi 14 Invers Laplace

Menyelesaikan persoalan dalam domain-s ralatf lebih mudah daripada dalam domain waktu. Untuk medapatkan penyelesaikan/solusi dalam domain waktu diperlukan transformasi Laplace balik (invers)

Pada pokok bahasan ini, diuraikan metode mendapatkan invers dengan menggunakan metode pecahan parsial

Invers Laplace (Transformai Laplace Balik)

Hubungan Transformasi Laplace dan Transformasi Fourier:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)\, e^{-\sigma t}] e^{-j\omega} dt$$

Dari relasi invers dapat diperoleh

$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \;\; x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)\, e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$

1. Integral Kontur

   Dengan$s = \sigma + j\omega$ diperoleh formula transformasi Laplace Balik (Invers)

   $$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s)\, e^{st} ds$$

   Mencari invers dengan metode melibatkan Intgral Kontur dalam bidang kompleks yang relatif sulit, karena itu digunakan metode yang lain

2. Metode Pecahan Parsial

Suatu fungsi rasional dalam s dapat ditulis

$$\frac{N(s)}{D(s)} = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$$

Dimana T, berbentuk

$$\frac{A}{(s+p)^n} atau \frac{Bs+C}{(s^2+as+b)^m}$$

Beberapa Bentuk Pecahan Parsial

Polinomial(s^2+as+b) dalam persamaan di atas adalah polynomial yang tidak dapat direduksi, bergantung kepada bentuknya maka terdapat beberapa kasus yang berbeda yaitu:

a. Kasus 1: Faktor orde-1 tidak berulang

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\ldots(s+p_n)}$$

$$X(s) = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \frac{A_3}{s+p_3} + \ldots \frac{A_n}{s+p_n}$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

$$= A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + A_3 e^{-p_3 t} + \ldots A_n e^{-p_n t}$$

Contoh:

1) Cari Invers Laplace dari $X(s) = \frac{s+1}{s^2+8s+15}$

Jawab:

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+8s+15}\right\}$$

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+5)} = \frac{A_1}{(s+3)} + \frac{A_2}{(s+5)}$$

$$A_1 = (s+3)\frac{s+1}{(s+3)(s+5)}|s=-3 = \frac{s+1}{(s+5)}|s=-3 = \frac{-3+1}{-3+5}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

$$A_2 = (s+5)\frac{s+1}{(s+3)(s+5)}|s=-5 = \frac{s+1}{(s+3)}|s=-5 = \frac{-5+1}{-5+3}$$

$$= \frac{-4}{-2} = 2$$

$$X(s) = \frac{-1}{(s+3)} + \frac{2}{(s+5)}$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left(\frac{-1}{(s+3)} + \frac{2}{(s+5)}\right)$$

$$x(t) = (-e^{-3t} + 2e^{-5t})u(t)$$

2) Cari Invers Laplace dari

$$X(s) = \frac{s-2}{s^3+5s^2+4s}$$

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^3+5s^2+4s}\right\}$$

$$X(s) = \frac{s-2}{s(s+4)(s+1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+4)} + \frac{A_3}{(s+1)}$$

$$A_1 = s\frac{s-2}{s(s+4)(s+1)}|s=0 = \frac{s-2}{(s+4)(s+1)}|s=0 = \frac{0-2}{(0+4)(0+1)}$$

$$= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = (s+4)\frac{s-2}{s(s+4)(s+1)}|s=-4 = \frac{s-2}{s(s+1)}|s=-4 = \frac{-4-2}{-4(-4+1)}$$

$$= \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = (s+1)\frac{s-2}{s(s+4)(s+1)}|s=-1 = \frac{s-2}{s(s+4)}|s=-1 = \frac{-1-2}{-1(-1+4)}$$

$$= \frac{-3}{-3} = 1$$

$$X(s) = -\frac{2}{s} - \frac{1}{2(s+4)} + \frac{1}{(s+1)}$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left(-\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+4)} + \frac{1}{(s+1)}\right)$$

$$x(t) = (-\frac{1}{2} - \frac{e^{-4t}}{2} + e^{-t})u(t)$$

b. Kasus 2: Faktor orde-1 berulang

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p)^n}$$

$$X(s) = \frac{A_1}{(s+p)} + \frac{A_2}{(s+p)^2} + \frac{A_3}{(s+p)^3} + \ldots \frac{A_n}{(s+p)^n}$$

$$A_n = (s+p)^n \frac{N(s)}{D(s)}|s=-p$$

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}}(s+p)^n\frac{N(s)}{D(s)}|s=-p$$

$$k = 1,2,3\ldots n-1$$

Contoh:

1) Cari Invers Laplace dari

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+1}$$

Jawab

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+1}\right\}$$
$$X(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+1)^2}$$
$$A_2 = (s+1)^2\frac{s+2}{(s+1)^2}|s = -1 = s+2|s = -1 = -1+2 = 1$$
$$A_1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}(s+1)^2\frac{s+2}{(s+1)^2}|s = -1 = \frac{d}{ds}(s+2)|s = -1 = 1$$
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}$$
$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}\right)$$
$$x(t) = (e^{-t} + te^{-t})u(t)$$

3) Cari Invers Laplace dari

$$X(s) = \frac{8s-4}{s^3-3s^2-9s-5}$$

Jawab:

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{8s-4}{s^3-3s^2-9s-5}\right\}$$
$$X(s) = \frac{8s-4}{(s-5)(s+1)^2} = \frac{B}{(s-5)} + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+1)^2}$$
$$B = (s-5)\frac{8s-4}{(s-5)(s+1)^2}|s = 5 = \frac{8s-4}{(s+1)^2}|s = 5 = \frac{40-4}{36} = 1$$
$$A_2 = (s+1)^2\frac{8s-4}{(s-5)(s+1)^2}|s = -1 = \frac{8s-4}{(s-5)}|s = -1 = \frac{-8-4}{-6} = 2$$
$$A_1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}(s+1)^2\frac{8s-4}{(s-5)(s+1)^2}|s = -1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\frac{8s-4}{(s-5)}|s = -1$$
$$A_1 = \frac{8(s-5)-(8s-4)}{(s-5)^2}|s = -1 = \frac{8(-1-5)-(8(-1)-4)}{(-1-5)^2}$$
$$= \frac{-48+12}{36} - 1$$
$$X(s) = \frac{1}{(s-5)} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2}$$
$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2}\right)$$
$$x(t) = (e^{5t} - e^{-t} + 2te^{-t})u(t)$$

c. Kasus 3: Faktor orde-2

$$D(s)(s^2+ps+q)$$
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$
$$X(s) = \frac{N(s)}{(s^2+p_1s+q_1)\ldots(s^2+p_ns+q_n)}$$

$$X(s) = \frac{A_1 s + B_1}{(s^2 + p_1 s + q_1)} + \ldots + \frac{A_n s + B_n}{(s^2 + p_n s + q_n)}$$

Cari Invers Laplace dari

$$X(s) = \frac{s+6}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

Jawab:

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+6}{s^3 + s^2 + s + 4}\right\}$$
$$X(s) = \frac{s+6}{(s^2+4)(s+1)} = \frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{C}{(s+1)}$$
$$C = (s+1)\frac{s+6}{(s^2+4)(s+1)}|s = -1 = \frac{s+6}{(s^2+4)}|s = -1 = \frac{-1+6}{(1+4)} = \frac{5}{5} = 1$$
$$X(s) = \frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{1}{(s+1)} = \frac{(As+B)(s+1) + (s^2+4)}{(s^2+4)(s+1)}$$
$$X(s) = \frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{1}{(s+1)} = \frac{As^2 + (A+B)s + B + (s^2+4)}{(s^2+4)(s+1)}$$
$$X(s) = \frac{(A+1)s^2 + (A+B)s + B + 4}{(s^2+4)(s+1)}$$
$$\frac{s+6}{(s^2+4)(s+1)} = \frac{(A+1)s^2 + (A+B)s + B + 4}{(s^2+4)(s+1)}$$
$$A + 1 = 0 \rightarrow A = -1$$
$$A + B = 1 \rightarrow -1 + B = 1 \rightarrow B = 2$$
$$X(s) = \frac{-s+2}{(s^2+4)} + \frac{1}{(s+1)} = \frac{-s}{(s^2+2^2)} + \frac{2}{(s^2+2^2)} + \frac{1}{(s+1)}$$
$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left(\frac{-s}{(s^2+2^2)} + \frac{2}{(s^2+2^2)} + \frac{1}{(s+1)}\right)$$
$$x(t) = (-\cos 2t + \sin 2t + e^{-t})u(t)$$

Latihan 14

Cari Invers Laplace dari:

1. $X(s) = \frac{s+3}{s^2-s-21}$
2. $X(s) = \frac{2}{(s^2+1)(s-1)^2}$
3. $X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}$

Jawaban Latihan 14

1. $\frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}$
2. $\cos x - e^x + xe^x$

3. $-\frac{4}{65}cos\, t+\frac{7}{65}sin\, t+\frac{4.5}{65}e^{-22t}\, cos\, 2\, t+\frac{1}{130}e^{-2t}\, sin\, 2\, t$

Rangkuman 14

Apabila bentuk transformasi laplace dapat ditransformasikan ke dalam bentuk manipulasi aljabar maka akan mudah mengidentifikasi transformasi Laplace invers. Caranya adalah mengkonversikan penyebutnya ke dalam salah satu bentuk (tidak berulang atau berulang, orde 1 atau orde 2) dan kemudian melakukan hal yang serupa terhadap pembilang.

Tes Formatif 14

Cari Invers Laplace dari:

1. $X(s)=\frac{-3}{s-2}$
2. $X(s)=\frac{12}{3s+9}$
3. $X(s)=\frac{s^2}{(s^2+3)^2}$
4. $X(s)=\frac{1}{s^3+s^2+s+1}$
5. $X(s)=\frac{2s-13}{s(s^2-4s+13)}$

Jawaban Tes Formatif 14

1. $-3e^{2x}$
2. $4e^{-3x}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{6}(sin\,\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}x\,cos\,\sqrt{3}\,x)$
4. $\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}cos\,x+\frac{1}{2}sin\,x$
5. $-1+e^{2x}\,cos\,3\,x$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci Jawaban Tes Formatif 14 yang terdapat di bagian modul ini.

Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul 14.

$$\text{Tingkat Penguasaan}=\frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}}\text{x100\%}$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100	Baik Sekali
	80 - 89	Baik
	70 - 79	Cukup
	< 70	Kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulang materi Kegiatan Belajar 14, terutama bagian yang belum dikuasai.

DAFTAR PUSTAKA

1. Erwin Kreysziq, Edvance Engeenering Mathematic, Jhon Willes & Son, Inc
2. Richard Bronson Ph.D, Gabriel B. Costa, Ph.D, Teori dan Soal Persamaan Differensial, Erlangga
3. K.A. Stround, Matematika Teknik Jilid 1, Erlangga
4. K.A. Stround, Matematika Teknik Jilid 1, Erlangga
5. Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steeven E. Rigdon, Kalkulus Jilid 1, Erlangga, 2010
6. Risnawati Ibnas, **Persamaan Differensial Eksak Dengan Faktor Integrasi,** Jurnal MSA Vol. 5 No. 2 Ed. Juli - Desember 2017, pp 91-99
7. Sagita Charolina Sihombing, Agus Dahlia, Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dan Dua disertai Nilai Awal dengan menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher dan Felhberg (RKF45), Jurnal Matematika Integratif. Vol. 14, No. 1 (2018), pp. 51-60.
8. Rizqona Maharani, Aplikasi Transformasi Laplace Pada Persamaan Differensial Orde Dua Untuk Pendulum Sederhana Dan Pendulum Fisis, Jurnal KONSTANTA, Vol. 1 No. 1 Juli-Desember 2017, pp. 1-17

Tim Penulis

Emilia Roza, ST., MT., M.Pd.

Penulis lulus S1 Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Mercu Buana., melanjutkan Pendidikan S2 sebagai Magister Pendidikan bidang Penelitian dan Evaluasi Pendidikan di Program Pasca Sarjana Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA UHAMKA), dilanjutkan dengan Pendidikan S2 sebagai Magister Teknik Elektro Universitas Mercu Buana. Sejak tahun 1999 hingga sekarang menjadi pengajar di Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA (UHAMKA).

Ir. Harry Ramza, MT., Ph.D.

Penulis adalah Doktor (PhD) bidang Teknik Elektro Jurusan Teknik Elektrikal, Elektronika dan Sistem Teknologi, Fakultas Kejuruteraan dan Pembangunan Alam., Universitas Kebangsaan Malaysia, Selangor Darul Ehsan (UKM). Penulis menerima gelar Sarjana Teknik dalam bidang Teknik Telekomunikasi pada Institut Teknologi Indonesia dan Magister Teknik (M. Eng) pada Jurusan Optoelektroteknika dan Aplikasi Laser, Fakultas Teknik, Universitas Indonesia. Pada saat ini penulis bertugas sebagai dosen dan peneliti pada Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik., Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA, Jakarta, serta anggota Student IEEE Malaysian Chapter, anggota Himpunan Fisika Indonesia (HFI), anggota Persatuan Insinyur Indonesia, anggota Masyarakat Optik Indonesia (MOI) dan anggota pengurus pusat Asosiasi Flowsitometri Indonesia (AFI).

M. Mujirudin, ST., MT.

Penulis lulusan S1 Teknik Elektro bidang Teknik Elektronika dan Telekomunikasi (TTE), Fakultas Teknik Universatas Hasanuddin Makassar. Melanjutkan pendidikan S2 sebagai Magister Teknik bidang Teknik Control Industri, di program pasca sarjana Fakultas Teknik Universitas Indonesia (UI), jakarta. Sejak tahun 1997 hingga sekarang menjadi pengajar di Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknik UHAMKA.

Agus Fikri, ST., MT.

Penulis menyelesaikan S1 Jurusan Teknik Metalurgi Universitas Indonesia dan S2 bidang Manajemen Produksi dan Teknik Mesin di Universitas Trisakti dan Universitas Pancasila. Mulai mengajar dan menjadi Dosen Tetap di Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA (UHAMKA) sejak tahun 1998 pada bidang Teknik Metalurgi dan Material, selain itu lima belas tahun terakhir penulis juga mengajar pada bidang Matematika di Program Studi Teknik Mesin, Informatika, dan Elekro untuk matakuliah Kalkulus, Aljabar Linier dan Matematika Teknik.

Indonesia
menulis

Buku Matematiaka Teknik ini memberikan wawasan kepada mahasiswa tentang ilmu dasar dalam memodelkan dan menyelesaikan soal-soal rumit yang melibatkan sistem-sistem persamaan diferensial orde 1 dan 2, Operator D, deret dan transformasi Fourier serta transformasi Laplace dan Invernya.

TIM PENULIS

1. Emilia Roza, ST., MT., M.Pd.
2. Ir. Harry Ramza, MT., Ph.D.
3. M. Mujirudin, ST., MT.
4. Agus Fikri, ST., MT.

Untuk akses **Buku Digital,**
Scan **QR CODE**

Media Sains Indonesia

Media Sains Indonesia
Melong Asih Regency B.40, Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
Email : penerbit@medsan.co.id
Website : www.medsan.co.id

IKAPI

GET IT ON Google Play

ISBN 978-623-362-368-1 (PDF)
9 786233 623681