PERANGKAT PEMBELAJARAN

(RPS, Rencana Penilaian & Evaluasi dan Rencana Tugas)

Dokumen ini telah divalidasi dan disahkan pada tanggal

Unit Penjamin Mutu	Ketua Program Studi
Hella Jusra, M.Pd	Meyta Dwi Kurniasih, M.Pd

Mengetahui,
Dekan FKIP UHAMKA

Dr. Desvian Bandarsyah, M.Pd

I. CPL, CPMK, Sub-CPMK

A. CPL Prodi yg dibebankan pd MK

CPL 2	Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika (S2)
CPL 3	Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila (S3)
CPL 9	Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri (S9)
CPL 11	Menginternalisasi misi persyarikatan Muhammadiyah dalam berbagai aspek kehidupan (S11)
CPL 12	Menguasai dan mengintegrasikan nilai-nilai islam dalam pengembangan dan penerapan ilmu pengetahuan (S12)
CPL 18	Menguasai konsep teoritis pengembangan pembelajaran matematika untuk melaksanakan pembelajaran di satuan Pendidikan dasar dan menengah (P4)
CPL 19	Menguasai konsep teoritis matematika yang diperlukan untuk studi ke jenjang berikutnya (P5)
CPL 24	Memiliki pengetahuan dasar matematika yang mengintegrasikan dengan nilai-nilai Al Islam Kemuhammadiyahan dan/atau bidang ilmu lainnya (P10)
CPL 25	Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora dan propetik yang sesuai dengan bidang keahliannya (KU1)
CPL 31	Mampu bertanggung jawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja yang berada di bawah tanggung jawabnya (KU7)
CPL 34	Mampu mengaplikasikan kosep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan perencanaan pembelajaran dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*) (KK1)
CPL 35	Mampu mengaplikasikan kosep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan pengelolaan pembelajaran dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*) (KK2)
CPL 36	Mampu mengaplikasikan kosep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan evaluasi pembelajaran dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*) (KK3)

B. CPMK

CPMK1	Mampu memecahkan masalah terkait metode numerik secara umum dengan menunjukkan sikap religious, bertanggung, dan mandiri. (CPL 2, CPL 3, CPL 9, CPL 18, CPL 19,)
CPMK2	Mampu menelaah permasalahan deret taylor dan analisis galat dengan menerapkan pemikiran logis serta kritis secara bertanggung jawab dan mandiri (CPL 11, CPL 12, CPL 19, CPL 25, CPL 31)

CPMK3	Mampu mengecek penyelesaian yang sesuai dengan solusi persamaan nirlanjar dan menunjukkan sikap religious, kinerja mandiri dan terukur (CPL 11, CPL 12, CPL 19)
CPMK 4	Mampu memilih masalah terkait solusi sistem persamaan lanjar dengan menunjukkan sikap religious, bertanggung, dan mandiri (CPL 9, CPL 19, CPL 25)
CPMK 5	Mampu menelaah permasalahan integrasi numerik dengan menunjukkan sikap religious dan mandiri (CPL 9, CPL 19, CPL 25)
CPMK 6	Mampu menelaah permasalahan turunan numerik dengan menunjukkan sikap religious dan mandiri (CPL 9, CPL 19, CPL 25)

C. Sub-CPMK

Sub-CPMK1	Mampu memecahkan, menyajikan, dan menunjukkan permasalahan matematika pada metode analitik dan metode numerik (C4, A4, P3)
Sub-CPMK2	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin (C4, A4, P5)
Sub-CPMK3	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang (C4, A4, P5)
Sub-CPMK4	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode tertutup pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi. (C5, A4, P5)
Sub-CPMK5	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode terbuka pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. (C5, A4, P5)
Sub-CPMK6	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian akar ganda dan akar polinom (C5, A4, P5)
Sub-CPMK7	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson (C5, A4, P5)
Sub-CPMK8	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan solusi sistem persamaan lanjar yaitu metode Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, Dekomposisi LU, Jacobi, dan Gauss-Seidel. (C5, A4, P5)
Sub-CPMK9	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian integrasi numerik yaitu metode pias, trapesium, dan newton-cotes, (C5, A4, P5)
Sub-CPMK 10	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian turunan numerik yaitu 3 pendekatan turunan numerik dan orde galat. (C5, A4, P5)

II. Rencana Pembelajaran Semester

	UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PROF DR HAMKA **FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN** **PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**						**Kode Dokumen**
RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER							
MATA KULIAH (MK)	**KODE**	**Rumpun MK**	**BOBOT (sks)**		**SEMESTER**		**Tgl Penyusunan**
Metode Numerik	30110429	MK Keprodian	**T=3**	**P=**	V		20 September 2022
OTORISASI	**Pengembang RPS**		**Koordinator RMK**		**Ketua PRODI**		
	Ayu Faradillah, M.Pd		**Ayu Faradillah, M.Pd**		**Meyta Dwi Kurniasih, M.Pd**		

Capaian Pembelajaran (CP)	**CPL-PRODI yang dibebankan pada MK**	
	CPL 2	Menjunjung tinggi nilai kemanusiaan dalam menjalankan tugas berdasarkan agama, moral, dan etika (S2)
	CPL 3	Berkontribusi dalam peningkatan mutu kehidupan bermasyarakat, berbangsa, bernegara, dan kemajuan peradaban berdasarkan Pancasila (S3)
	CPL 9	Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri (S9)
	CPL 11	Menginternalisasi misi persyarikatan Muhammadiyah dalam berbagai aspek kehidupan (S11)
	CPL 12	Menguasai dan mengintegrasikan nilai-nilai islam dalam pengembangan dan penerapan ilmu pengetahuan (S12)
	CPL 18	Menguasai konsep teoritis pengembangan pembelajaran matematika untuk melaksanakan pembelajaran di satuan Pendidikan dasar dan menengah (P4)
	CPL 19	Menguasai konsep teoritis matematika yang diperlukan untuk studi ke jenjang berikutnya (P5)
	CPL 24	Memiliki pengetahuan dasar matematika yang mengintegrasikan dengan nilai-nilai Al Islam Kemuhammadiyahan dan/atau bidang ilmu lainnya (P10)
	CPL 25	Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora dan propetik yang sesuai dengan bidang keahliannya (KU1)
	CPL 31	Mampu bertanggung jawab atas pencapaian hasil kerja kelompok dan melakukan supervisi dan evaluasi terhadap penyelesaian pekerjaan yang ditugaskan kepada pekerja yang berada di bawah tanggung jawabnya (KU7)

	CPL 34	Mampu mengaplikasikan kosep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan perencanaan pembelajaran dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*) (KK1)
	CPL 35	Mampu mengaplikasikan kosep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan pengelolaan pembelajaran dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*) (KK2)
	CPL 36	Mampu mengaplikasikan kosep dan prinsip pedagogi, didaktik matematika serta keilmuan matematika untuk melakukan evaluasi pembelajaran dengan memanfaatkan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup (*life skills*) (KK3)
	Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)	
	CPMK1	Mampu memecahkan masalah terkait metode numerik secara umum dengan menunjukkan sikap religious, bertanggung, dan mandiri. (CPL 2, CPL 3, CPL 9, CPL 18, CPL 19,)
	CPMK2	Mampu menelaah permasalahan deret taylor dan analisis galat dengan menerapkan pemikiran logis serta kritis secara bertanggung jawab dan mandiri (CPL 11, CPL 12, CPL 19, CPL 25, CPL 31)
	CPMK3	Mampu mengecek penyelesaian yang sesuai dengan solusi persamaan nirlanjar dan menunjukkan sikap religious, kinerja mandiri dan terukur (CPL 11, CPL 12, CPL 19)
	CPMK 4	Mampu memilih masalah terkait solusi sistem persamaan lanjar dengan menunjukkan sikap religious, bertanggung, dan mandiri (CPL 9, CPL 19, CPL 25)
	CPMK 5	Mampu menelaah permasalahan integrasi numerik dengan menunjukkan sikap religious dan mandiri (CPL 9, CPL 19, CPL 25)
	CPMK 6	Mampu menelaah permasalahan turunan numerik dengan menunjukkan sikap religious dan mandiri (CPL 9, CPL 19, CPL 25)
	Kemampuan akhir tiap tahapan belajar (Sub-CPMK)	
	Sub-CPMK1	Mampu memecahkan, menyajikan, dan menunjukkan permasalahan matematika pada metode analitik dan metode numerik (C4, A4, P3)
	Sub-CPMK2	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin (C4, A4, P5)
	Sub-CPMK3	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang (C4, A4, P5)
	Sub-CPMK4	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode tertutup pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi. (C5, A4, P5)
	Sub-CPMK5	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode terbuka pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. (C5, A4, P5)
	Sub-CPMK6	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian akar ganda dan akar polinom (C5, A4, P5)
	Sub-CPMK7	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson (C5, A4, P5)
	Sub-CPMK8	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan solusi sistem persamaan lanjar yaitu metode Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, Dekomposisi LU, Jacobi, dan Gauss-Seidel. (C5, A4, P5)
	Sub-CPMK9	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian integrasi numerik yaitu metode pias, trapesium, dan newton-cotes, (C5, A4, P5)
	Sub-CPMK 10	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian turunan numerik yaitu 3 pendekatan turunan numerik dan orde galat. (C5, A4, P5)

<table>
<tr><td>Deskripsi Singkat MK</td><td colspan="2">Pada mata kuliah ini mahasiswa belajar tentang metode numerik secara umum, deret taylor dan analisis galat dan menggunakan beberapa metode penyelesaian masalah berdasarkan solusi persamaan nirlanjar, solusi sistem persamaan lanjar, integrasi dan turunan numerik</td></tr>
<tr><td>Bahan Kajian: Materi Pembelajaran</td><td colspan="2">1. Metode Numerik Secara Umum
2. Deret Taylor dan Analisis Galat
3. Solusi Persamaan Nirlanjar
4. Solusi Sistem Persamaan Lanjar
5. Integrasi Numerik
6. Turunan Numerik</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pustaka</td><td>Utama :</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Faradillah, Ayu. 2020. Modul Metode Numerik. Jakarta. https://play.google.com/store/books/details/Ayu_Faradillah_Metode_Numerik?id=mFABEAAAQ
2. Munir, Rinaldi. 2003. Metode Numerik Revisi Ketiga. Jakarta: Informatika.</td></tr>
<tr><td>Pendukung :</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Atmika, I Ketut Adi. 2016. Diktat Mata Kuliah Metode Numerik. Denpasar. Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Udayana.
4. Fatahillah, A. (2013). Pemodelan Dan Penyelesaian Numerik Dari Permasalahan Penyebaran Asap Menggunakan Metode Volume Hingga. Saintifika, Vol. 15((1)), 88–96.
5. Feng, L. B., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., & Li, J. (2016). WITHDRAWN: High-order numerical methods for the Riesz space fractional advection–dispersion equations. Computers & Mathematics with Applications. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.01.015
6. Gatot, F., & Santoso, I. (2011). Analisis Perbandingan Metode Numerik Dalam Menyelesaikan Persamaan-Persamaan Serentak. Issn, (1), 19–39.
7. Khaidir, C. (2016). Pengembangan Buku Ajar Metode Numerik Berbasis Konstruktivisme Di Iain Batusangkar. Ta'dib, 19(1), 67. https://doi.org/10.31958/jt.v19i1.452
8. Mulyatna, F., & Kusumaningtyas, W. (2017). Simbolisasi dalam Metode Numerik sebagai Representasi Konsep dan Prosedur Fauzi Mulyatna 1 Wahyu Kusumaningtyas 2 1. 1(2), 147–172.
9. Pearson, J. W., Olver, S., & Porter, M. A. (2017). Numerical methods for the computation of the confluent and Gauss hypergeometric functions. In Numerical Algorithms (Vol. 74). https://doi.org/10.1007/s11075-016-0173-0
10. RAMADHANI UTAMI, N. N., WIDANA, I. N., & ASIH, N. M. (2013). Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Newton-Raphson Dan Metode Jacobian. E-Jurnal Matematika, 2(2), 11. https://doi.org/10.24843/mtk.2013.v02.i02.p032
11. Susanto, R., Azis, A., & Irjayanti, M. (2016). Pelatihan Penggunaan Komputer Dan Penggunaan Media Sosial Berbasis Internet. Retrieved from http://repository.ekuitas.ac.id/handle/123456789/205
12. Vahlia, I., & Agustina, R. (2016). Perbandingan Hasil Belajar Discovery Learning Berbasis Problem Solving Dan Group Investigation Berbasis Problem Solving Pada Pembelajaran Metode Numerik. AKSIOMA Journal of Mathematics Education, 5(1), 82–93. https://doi.org/10.24127/ajpm.v5i1.469</td></tr>
</table>

Dosen Pengampu	Ayu Faradillah dan Ayu Tsurayya
Matakuliah syarat	-

Mg Ke-	**Kemampuan akhir tiap tahapan belajar (Sub-CPMK)**	**Integrasi Keilmuan dengan nilai AIK dan kelimuan lainnya**	**Penilaian**		**Bentuk Pembelajaran, Metode Pembelajaran, Penugasan Mahasiswa, [Estimasi Waktu]**		**Materi Pembelajaran [Pustaka]**	**Bobot Penil aian (%)**
			Indikator	**Kriteria & Bentuk**	**Pembelajaran Luring (*offline*)**	**Pembelajaran Daring (*online*)**		
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**
1	Mampu memecahkan, menyajikan, dan menunjukkan permasalahan matematika pada metode analitik dan metode numerik (C4, A4, P3)	Bidang teknik	• Melalui diskusi dan studi kasus, mahasiswa memecahkan, menyajikan, dan menunjukkan permasalahan matematika pada metode analitik dan metode numerik dengan tepat	**Kriteria:** Ketepatan **Bentuk non-test:** Case Study	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** Studi Kasus: Penyelidikan perbedaan Metode Numerik dan Analitik dengan permasalahan matematika [PT+BM: (1+1) x (3x60")] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penyampaian RPS Metode Numerik 2. Menyepakati kontrak belajar selama satu semester 3. Menentukan Penanggung Jawab (PJ) kelas. 4. Membentuk kelompok untuk	1. e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id 2. video pembelajaran: https://www.youtube.com/watch?v=IUrrJkc_ya4	1. Definisi Metode Numerik 2. Kegunaan Metode numerik 3. Mengapa harus Mempelajari Metode Numerik? Dan Perbedaannya dengan metode analitik 4. Tahap-Tahap Memecahkan Persoalan secara Numerik Pustaka: [1] hlm. 3-7 [2] hlm. 1-15 [4] [6]	

					diskusi dan belajar bersama 5. Menyepakati sistem penilaian selama satu semester 6. Menonton video pembelajaran yang telah diupload di youtube. 7. Studi kasus tentang metode numerik secara umum dan perbedaan penyelesaian masalah dengan menggunakan metode analitik dan numerik			
2	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin (C4, A4, P5)	Al Kahfi ayat 25 *"Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi)"*	• Melalui diskusi, mahasiswa mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin dengan tepat	**Kriteria:** Ketepatan **Bentuk test:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin. 2. Pembuatan soal tentang deret taylor,	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin. 2. Pembuatan soal tentang deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin. [PT+BM: (1+1) x (3x60")]	1. e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id 2. video pembelajaran: https://www.youtube.com/watch?v=FZm8ri0y7X8	1. Deret taylor 2. Deret Taylor Terpotong 3. Deret Maclaurin Pustaka: [1] hlm. 8-16 [2] hlm. 16-58 [3]	**10**

				deret taylor terpotong, dan deret maclaurin.	Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin 2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin secara berkelompok 3. Pembahasan hasil diskusi			
3	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang (C4, A4, P5)	Al A'raf ayat 201 *"Sesungguhnya orang-orang yang bertakwa bila mereka ditimpa was-was dari syaitan, mereka ingat kepada Allah, maka ketika itu juga mereka melihat kesalahan-kesalahannya."*	• Melalui diskusi, mahasiswa mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang dengan teliti.	**Kriteria:** Ketelitian **Bentuk test:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang. 2. Pembuatan soal tentang sumber utama	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang. 2. Pembuatan soal tentang sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang.	1. e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id 2. video pembelajaran: https://www.youtube.com/watch?v=k_2AqMIHAB0	1. Sumber utama galat 2. Orde Penghampiran 3. Bilangan Titik Kambang Pustaka: [1] hlm. 17-24 [2] hlm. 59-125 [5]	**10**

				galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang.	[PT+BM: (1+1) x (3x60")] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang 2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang secara berkelompok 3. Pembahasan hasil diskusi			
4	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode tertutup pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan	Surah Al-Baqarah ayat 148 "Dan setiap umat mempunyai kiblat yang dia menghadap kepadanya. Maka berlomba-lombalah kamu dalam kebaikan. Dimana saja kamu berada, pasti Allah akan mengumpulkan kamu semuanya. Sungguh Allah	• Melalui diskusi dan pembelajaran kolaboratif, mahasiswa mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode tertutup pada	**Kriteria:** Ketepatan dan ketelitian. **Bentuk test:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan	1. e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id 2. video pembelajaran: https://www.youtube.com/watch?v=GQRMNWGtMjY	Solusi Persamaan Nirlanjar (Metode Tertutup) 1. Metode Bagi Dua 2. Metode Regulafalsi 3. Metode Perbaikan Regulafalsi Pustaka: [1] hlm. 17-24 [2] hlm. 59-125 [5]	**10**

	metode regulafalsi. (C5, A4, P5)	Mahakuasa atas segala sesuatu."	solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi dengan teliti dan tepat.	dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi. 2. Pembuatan soal tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi.	perbaikan metode regulafalsi. 2. Pembuatan soal tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi. [PT+BM: (1+1) x (3x60")] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi. 2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi secara berkelompok. 3. Pembahasan hasil diskusi			
5	Mampu membandingkan, menyesuaikan,	Surah Al-Baqarah ayat 148	• Melalui diskusi dan pembelajaran	**Kriteria:** Ketepatan dan ketelitian.	**BP:** Kuliah	1. e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id	Metode Terbuka pada Sistem Persamaan Nirlanjar:	**10**

	dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode terbuka pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. (C5, A4, P5)	"Dan setiap umat mempunyai kiblat yang dia menghadap kepadanya. Maka berlomba-lombalah kamu dalam kebaikan. Dimana saja kamu berada, pasti Allah akan mengumpulkan kamu semuanya. Sungguh Allah Mahakuasa atas segala sesuatu."	kolaboratif, mahasiswa mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode terbuka pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant dengan teliti dan tepat.	**Bentuk test:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. 2. Pembuatan soal tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant.	**MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. 2. Pembuatan soal tentang solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. [PT+BM: (1+1) x (3x60")] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. 2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan	2. video pembelajaran: https://www.youtube.com/watch?v=3dbNxj5g6kc	1. Metode Lelaran Titik Tetap 2. Metode Newton-Raphson 3. Metode Secant Pustaka: [1] hlm. 17-24 [2] hlm. 59-125 [5]	

					solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant secara berkelompok 3. Pembahasan hasil diskusi			
6	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian akar ganda dan akar polinom (C5, A4, P5)		• Melalui diskusi, mahasiswa mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian akar ganda dan akar polinom dengan teliti dan tepat.	**Kriteria:** Ketepatan dan ketelitian. **Bentuk test:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang akar ganda dan akar polinom. 2. Pembuatan soal tentang akar ganda dan akar polinom.	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50”)] **PM:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang akar ganda dan akar polinom. 2. Pembuatan soal tentang akar ganda dan akar polinom. [PT+BM: (1+1) x (3x60”)] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait solusi persamaan nirlanjar yaitu akar ganda dan polinom. 2. Diskusi tentang permasalahan-	e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id	Solusi persamaan nirlanjar: 1. Akar Ganda 2. Akar Polinom Pustaka: [1] hlm. 17-24 [2] hlm. 59-125 [5]	

					permasalahan solusi persamaan nirlanjar yaitu akar ganda dan polinom secara berkelompok 3. Pembahasan hasil diskusi			
7	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson (C5, A4, P5)		• Melalui diskusi, mahasiswa mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson dengan teliti dan tepat.	**Kriteria:** Ketepatan dan ketelitian. **Bentuk test:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson. 2. Pembuatan soal tentang sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson.	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** 1. Mahasiswa secara berkelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tentang sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson. 2. Pembuatan soal tentang sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson. [PT+BM: (1+1) x (3x60")] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap	1. e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id 2. video pembelajaran: https://www.youtube.com/watch?v=gkC3T-OTwTQ	Sistem dua persamaan nirlanjar yaitu: 1. Metode Lelaran Titik Tetap 2. Metode Newton Raphson. Pustaka: [1] hlm. 25-34 [2] hlm. 126-193	**10**

					dan newton raphson. 2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson secara berkelompok 3. Pembahasan hasil diskusi			
8	**Evaluasi Tengah Semester/Ujian Tengah Semester (100%)**							
9-11	Mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan solusi sistem persamaan lanjar yaitu metode Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, Dekomposisi LU, Jacobi, dan Gauss-Seidel. (C5, A4, P5)		• Melalui diskusi dan pembelajaran kolaboratif, mahasiswa mampu memilih, menyesuaikan dan membuat penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan solusi sistem persamaan lanjar yaitu metode Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, Dekomposisi LU, Jacobi, dan Gauss-Seidel.	**Kriteria:** Ketepatan dan ketelitian. **Bentuk test:** Presentasi dan pembuatan video	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50”)] **PM:** Presentasi dan pembuatan video. [PT+BM: (1+1) x (3x60”)] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait solusi sistem persamaan lanjar yaitu metode Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, Dekomposisi LU,	e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id	Solusi sistem persamaan lanjar 1. Metode Eliminasi Gauss 2. Metode eliminasi Gauss-Jordan 3. Metode Matriks Balikan 4. Metode Dekomposisi LU 5. Metode Jacobi 6. Metode Gauss-Seidel Pustaka: [1] hlm. 25-34 [2] hlm. 126-193	**20**

			dengan teliti dan tepat.		Jacobi, dan Gauss-Seidel. 2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan solusi sistem persamaan lanjar yaitu metode Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, Dekomposisi LU, Jacobi, dan Gauss-Seidel secara berkelompok 3. Pembahasan hasil diskusi			
12-13	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian integrasi numerik yaitu metode pias, trapesium, dan newton-cotes, (C5, A4, P5)		• Melalui diskusi dan pembelajaran kolaboratif, mahasiswa mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian integrasi numerik yaitu metode pias, trapesium, dan newton-cotes dengan teliti dan tepat.	**Kriteria:** Ketepatan dan ketelitian. **Bentuk test:** Presentasi dan pembuatan video	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** Presentasi dan pembuatan video. [PT+BM: (1+1) x (3x60")] Langkah-langkah pembelajaran. 1. Penampilan video pembelajaran terkait integrasi numerik yaitu metode pias, trapesium, dan newton-cotes	e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id	Integrasi Numerik 1. Metode Pias a. Kaidah Segiempat b. Kaidah Trapesium c. Kaidah Titik Tengah d. Kaidah Segiempat e. Kaidah Trapesium f. Kaidah Titik Tengah 2. Metode Newton-Cotes a. Kaidah Trapesium b. Kaidah Simpson 1/3 c. Kaidah Simpson 3/8 Pustaka: [1] hlm. 35-47 [2] hlm. 269-340	**20**

					2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan integrasi numerik yaitu metode pias, trapesium, dan newton-cotes secara berkelompok 3. Pembahasan hasil diskusi			
14-15	Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian turunan numerik yaitu 3 pendekatan turunan numerik dan orde galat. (C5, A4, P5)		• Melalui pembelajaran kolaboratif, mahasiswa mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian turunan numerik yaitu 3 pendekatan turunan numerik dan orde galat dengan teliti dan tepat.	**Kriteria:** Ketepatan dan ketelitian. **Bentuk test:** Presentasi dan pembuatan video	**BP:** Kuliah **MP:** Case Study, Small Group Discussion [TM: 1 x (3x50")] **PM:** Presentasi dan pembuatan video. [PT+BM: (1+1) x (3x60")] Langkah-langkah pembelajaran 1. Penampilan video pembelajaran terkait turunan numerik yaitu 3 pendekatan turunan numerik dan orde galat. 2. Diskusi tentang permasalahan-permasalahan turunan numerik yaitu 3 pendekatan turunan numerik dan orde galat secara berkelompok	e-learning: https://onlinelearning.uhamka.ac.id	Turunan Numerik 1. Tiga Pendekatan Turunan Numerik 2. Orde Galat Turunan Numerik Pustaka: [1] hlm. 110-127 [2] hlm. 350-374	**20**

					3. Pembahasan hasil diskusi			
16	**Evaluasi Akhir Semester / Ujian Akhir Semester (100%)**							

RENCANA TUGAS MAHASISWA 1

	UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PROF. DR. HAMKA **FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN** **PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**

RENCANA TUGAS MAHASISWA					
MATA KULIAH	Metode Numerik				
KODE		**Sks**	3	**SEMESTER 5**	
DOSEN PENGAMPU	Ayu Faradillah, Ayu Tsurayya				
BENTUK TUGAS					
Pembuatan soal matematika sesuai tema pertemuan					
JUDUL TUGAS					
Pembuatan Soal					
SUB CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH					

1. Mampu memecahkan dan menyesuaikan permasalahan matematika pada metode analitik dan metode numerik (C4, A4)
2. Mampu memilih dan menyesuaikan penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan deret taylor, deret taylor terpotong, dan deret maclaurin (C4, A4)
3. Mampu memilih dan menyesuaikan penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sumber utama galat, orde penghampiran, dan bilangan titik kambang (C4, A4)
4. Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode tertutup pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode bagi dua, metode regulafalsi, dan perbaikan metode regulafalsi. (C5, A4, P6)
5. Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian metode terbuka pada solusi persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap, metode newton raphson, dan metode secant. (C5, A4, P6)
6. Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian akar ganda dan akar polinom (C5, A4, P6)
7. Mampu memilih dan menyesuaikan penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan sistem dua persamaan nirlanjar yaitu metode lelaran titik tetap dan newton raphson (C5, A4)

DESKRIPSI TUGAS

Tugas ini dilakukan secara berkelompok dimana setiap kelompok membuat soal matematika. Setiap anggota kelompok membuat satu soal dan penyelesaiannya sesuai dengan tema materi pada pertemuan tersebut. Soal yang dibuat oleh kelompok akan diselesaikan oleh kelompok lainnya.

METODE PENGERJAAN TUGAS

1. Diskusi antara dosen dan setiap kelompok
2. Penyusunan Soal dan Jawaban
3. Pengoreksian soal dan jawaban oleh dosen
4. Penyebaran soal untuk kelompok lain
5. Penyelesaian jawaban dari soal kelompok lainnya.
6.

BENTUK DAN FORMAT LUARAN

Soal dan Penyelesaiannya

INDIKATOR, KRETERIA DAN BOBOT PENILAIAN

1. Diskusi antara dosen dan kelompok (bobot 20%)
2. Ketepatan pembuatan soal dan penyelesaiannya (bobot 50%)
3. Kesesuaian penyelesaian jawaban oleh kelompok lainnya (bobot 30%)

JADWAL PELAKSANAAN

No	Uraian Kegiatan	Jadwal Kegiatan
1	Diskusi antara dosen dan mahasiswa	Pertemuan ke 1-7
2	Penyusunan soal dan penyelesaiannya	Pertemuan ke 1-7
3	Pengerjaan jawaban oleh kelompok lain	Pertemuan ke 1-7

LAIN-LAIN

DAFTAR RUJUKAN

1. Faradillah, Ayu. 2020. Modul Metode Numerik. Jakarta. https://play.google.com/store/books/details/Ayu_Faradillah_Metode_Numerik?id=mFABEAAAQBAJ
2. Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik Revisi Ketiga.* Jakarta: Informatika.
3. Atmika, I Ketut Adi. 2016. Diktat Mata Kuliah Metode Numerik. Denpasar. Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Udayana.
4. Fatahillah, A. (2013). Pemodelan Dan Penyelesaian Numerik Dari Permasalahan Penyebaran Asap Menggunakan Metode Volume Hingga. *Saintifika*, *Vol. 15*((1)), 88–96.
5. Feng, L. B., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., & Li, J. (2016). WITHDRAWN: High-order numerical methods for the Riesz space fractional advection–dispersion equations. *Computers & Mathematics with Applications*. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.01.015
6. Gatot, F., & Santoso, I. (2011). Analisis Perbandingan Metode Numerik Dalam Menyelesaikan Persamaan-Persamaan Serentak. *Issn*, (1), 19–39.

7. Khaidir, C. (2016). Pengembangan Buku Ajar Metode Numerik Berbasis Konstruktivisme Di Iain Batusangkar. *Ta'dib*, *19*(1), 67. https://doi.org/10.31958/jt.v19i1.452
8. Mulyatna, F., & Kusumaningtyas, W. (2017). *Simbolisasi dalam Metode Numerik sebagai Representasi Konsep dan Prosedur Fauzi Mulyatna 1 Wahyu Kusumaningtyas 2 1*. *1*(2), 147–172.
9. Pearson, J. W., Olver, S., & Porter, M. A. (2017). Numerical methods for the computation of the confluent and Gauss hypergeometric functions. In *Numerical Algorithms* (Vol. 74). https://doi.org/10.1007/s11075-016-0173-0
10. Ramadhani Utami, N. N., Widana, I. N., & Asih, N. M. (2013). Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Newton-Raphson Dan Metode Jacobian. *E-Jurnal Matematika*, *2*(2), 11. https://doi.org/10.24843/mtk.2013.v02.i02.p032
11. Susanto, R., Azis, A., & Irjayanti, M. (2016). *Pelatihan Penggunaan Komputer Dan Penggunaan Media Sosial Berbasis Internet*. Retrieved from http://repository.ekuitas.ac.id/handle/123456789/205
12. Vahlia, I., & Agustina, R. (2016). Perbandingan Hasil Belajar Discovery Learning Berbasis Problem Solving Dan Group Investigation Berbasis Problem Solving Pada Pembelajaran Metode Numerik. *AKSIOMA Journal of Mathematics Education*, *5*(1), 82–93. https://doi.org/10.24127/ajpm.v5i1.469

Catatan: Jumlah RTM disesuaikan dengan jumlah tugas yang tertuang dalam RPS

RENCANA TUGAS MAHASISWA 2

Uhamka FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN	**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PROF. DR. HAMKA** **FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN** **PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**				
RENCANA TUGAS MAHASISWA					
MATA KULIAH	Metode Numerik				
KODE		**Sks**	3	**SEMESTER 5**	
DOSEN PENGAMPU	Ayu Faradillah, Ayu Tsurayya				
BENTUK TUGAS					
Pembuatan Makalah dan Video Presentasi/Pembelajaran					
JUDUL TUGAS					
Makalah dan video pembelajaran					
SUB CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH					
8. Mampu memilih dan menyesuaikan penyelesaian masalah matematika dengan menggunakan solusi sistem persamaan lanjar yaitu metode Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, Dekomposisi LU, Jacobi, dan Gauss-Seidel. (C5, A4) 9. Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian integrasi numerik yaitu metode pias, trapesium, dan newton-cotes, (C5, A4, P6) 10. Mampu membandingkan, menyesuaikan, dan membuat permasalahan dengan menggunakan penyelesaian turunan numerik yaitu 3 pendekatan turunan numerik dan orde galat. (C5, A4, P6)					
DESKRIPSI TUGAS					
Tugas ini diawali dengan diskusi gabungan antara dosen dan kelompok ahli pada setiap materi. Diskusi ini dimungkinkan untuk dilakukan di luar jam perkuliahan dimana bertujuan untuk bisa memahami materi yang akan dipresentasikan secara maksimal. Selanjutnya, mahasiswa akan bergabung dengan kelompok inti untuk menshare materi yang telah didiskusikan dengan dosen. Setelah menshare hasil diskusi masing-masing, mahasiswa secara berkelompok akan membuat makalah dan video pembelajaran yang akan digunakannya pada presentasi dipertemuan selanjutnya.					
METODE PENGERJAAN TUGAS					
7. Diskusi antara dosen dan kelompok ahli 8. Diskusi sesama mahasiswa yang telah dikuasai di kelompok ahli					

9. Pembuatan makalah
10. Pembuatan video pembelajaran
11. Diskusi

BENTUK DAN FORMAT LUARAN

1. Makalah
   Berisi penjelasan materi, contoh soal (minimal 2-3) dan penyelesaiannya, Latihan soal (minimal 5 soal) dan penyelesaiannya, dan Pekerjaan Rumah (PR) minimal 5 soal dan penyelesaiannya.
2. Video Pembelajaran
   Berisi penjelasan materi, contoh soal dan penyelesaiannya, Latihan soal tanpa penyelesaian, pekerjaan rumah tanpa penyelesaian, dan hasil diskusi pada presentasi berupa recording zoom.

INDIKATOR, KRETERIA DAN BOBOT PENILAIAN

4. Diskusi antara dosen dan kelompok ahli serta sesama mahasiswa (bobot 15%)
5. Ketepatan materi dan penyelesaian pada contoh dan Latihan soal (bobot 30%)
6. Kesesuaian pembuatan video pembelajaran (bobot 30%)
7. Presentasi (bobot 25%)

JADWAL PELAKSANAAN

No	Uraian Kegiatan	Jadwal Kegiatan
1	Diskusi antara dosen dan kelompok inti	Pertemuan ke 7-9
2	Diskusi antara sesama mahasiswa	Pertemuan ke 7-9
3	Pembuatan makalah dan video pembelajaran	Pertemuan ke 7-9
4	Presentasi	Pertemuan ke 10-15

LAIN-LAIN

DAFTAR RUJUKAN

13. Faradillah, Ayu. 2020. Modul Metode Numerik. Jakarta. https://play.google.com/store/books/details/Ayu_Faradillah_Metode_Numerik?id=mFABEAAAQBAJ
14. Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik Revisi Ketiga.* Jakarta: Informatika.
15. Atmika, I Ketut Adi. 2016. Diktat Mata Kuliah Metode Numerik. Denpasar. Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Udayana.
16. Fatahillah, A. (2013). Pemodelan Dan Penyelesaian Numerik Dari Permasalahan Penyebaran Asap Menggunakan Metode Volume Hingga. *Saintifika*, *Vol. 15*((1)), 88–96.
17. Feng, L. B., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., & Li, J. (2016). WITHDRAWN: High-order numerical methods for the Riesz space fractional advection–dispersion equations. *Computers & Mathematics with Applications*. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.01.015
18. Gatot, F., & Santoso, I. (2011). Analisis Perbandingan Metode Numerik Dalam Menyelesaikan Persamaan-Persamaan Serentak. *Issn*, (1), 19–39.

19. Khaidir, C. (2016). Pengembangan Buku Ajar Metode Numerik Berbasis Konstruktivisme Di Iain Batusangkar. *Ta'dib*, *19*(1), 67. https://doi.org/10.31958/jt.v19i1.452

20. Mulyatna, F., & Kusumaningtyas, W. (2017). *Simbolisasi dalam Metode Numerik sebagai Representasi Konsep dan Prosedur Fauzi Mulyatna 1 Wahyu Kusumaningtyas 2 1*. *1*(2), 147–172.

21. Pearson, J. W., Olver, S., & Porter, M. A. (2017). Numerical methods for the computation of the confluent and Gauss hypergeometric functions. In *Numerical Algorithms* (Vol. 74). https://doi.org/10.1007/s11075-016-0173-0

22. Ramadhani Utami, N. N., Widana, I. N., & Asih, N. M. (2013). Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Newton-Raphson Dan Metode Jacobian. *E-Jurnal Matematika*, *2*(2), 11. https://doi.org/10.24843/mtk.2013.v02.i02.p032

23. Susanto, R., Azis, A., & Irjayanti, M. (2016). *Pelatihan Penggunaan Komputer Dan Penggunaan Media Sosial Berbasis Internet*. Retrieved from http://repository.ekuitas.ac.id/handle/123456789/205

24. Vahlia, I., & Agustina, R. (2016). Perbandingan Hasil Belajar Discovery Learning Berbasis Problem Solving Dan Group Investigation Berbasis Problem Solving Pada Pembelajaran Metode Numerik. *AKSIOMA Journal of Mathematics Education*, *5*(1), 82–93. https://doi.org/10.24127/ajpm.v5i1.469

Catatan: Jumlah RTM disesuaikan dengan jumlah tugas yang tertuang dalam RPS

METODE NUMERIK

Created by

Ayu Faradillah

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UHAMKA, JAKARTA

Daftar Isi

Modul 1 Perkenalan

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan metode numerik secara umum

Salah satu tulisan matematika pertama kali adalah loh Babilonia YBC 7289 yang memberikan hampiran numerik seksagesimal dari $\sqrt{2}$, Panjang diagonal dari persegi satuan. Sasongko (2010) metode numerik merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan permasalahan model matematis dari berbagai bidang. Baik bidang teknik maupun sains. Metode numerik adalah teknik-teknik yang digunakan untuk memformulasikan masalah matematis agar dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan (Setiawan, 2006:25). Banyaknya permasalahan yang mustahil dapat diselesaikan secara analitik. Hal ini disebabkan seringnya menemukan sistem persamaan-persamaan yang besar dan tidak linier serta cakupan yang kompleks. Tipe masalah tersebut bisa diselesaikan dengan metode numerik (Vahlia & Agustina, 2016:83). Sebelum munculnya komputer modern metode numerik kerap kali tergantung pada interpolasi menggunakan tabel. Metode numerik banyak dimanfaatkan pada bidang Teknik untuk mendapatkan solusi hampiran yang akurat terhadap masalah-masalah yang sukar.

Misalnya

1. Membuat prakiraan cuaca numeris yang layak
2. Perhitungan trajektori wahana antariksa mensyaratkan pemecahan numerik yang akurat dari system persamaan differensial biasa

3. Perusahaan otomotif dapat meningkatkan keamanan kendaraan dengan menggunakan simulasi tabrakan kendaraan
4. Lembaga dana investasi pribadi menggunakan alat-alat dari seluruh bidang analisis numerik untuk menghitung nilai saham dan derivative yang lebih tepat daripada lainnya
5. Maskapai penerbangan menggunakan algoritme optimisasi canggih untuk menentukan harga tiket, pesawat terbang dan penugasan awak serta keperluan bahan bakar yang disebut juga dengan riset operasi.
6. Perusahaan asuransi menggunakan program numerik untuk analisis aktuaria.

Persoalan model matematika yang rumit tidak selalu bisa diselesaikan dengan metode analitik yang telah umum diketahui untuk mendapatkan solusi sejati, dimana metode analitik tersebut menggunakan rumus alajabar yang sering digunakan pada materi-materi sebelumnya. Beberapa masalah atau soal sulit untuk menemukan solusi sejatinya. Misalnya, (Munir, 2003:1)

1. Tentukan nilai p yang memenuhi persamaan:

   $$\sqrt{27.8e^{5x} - \frac{1}{x}} = cos^{-1}\frac{(120x^2 + \sqrt{2x}}{17x - 65}$$

2. Tentukan akar-akar persamaan polinom:

   $23.4x^7 - 1.25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$

3. Tentukan nilai maksimum fungsi tiga dimensi:

   $$f(x,y) = cos\frac{x - \sqrt{\sin(x)} + 3}{4 + (xy)^2} + \sin(3y - 1) - \tan\left(\frac{x(0.08 + \cos(x))}{y}\right)$$

Soal-soal diatas merupakan contoh soal yang akan sulit untuk ditentukan penyelesaiannya. Pada metode analitik dan metode numerik terdapat beberapa perbedaan pada solusi yang diperoleh, seperti pada tabel di bawah ini.

Tabel 1. Perbedaan Metode Analitik dan Numerik

Metode Analitik	Metode Numerik
Menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka	Selalu menghasilkan solusi berbentuk angka
Memberikan **solusi sejati** yaitu solusi yang memiliki **galat (eror)** sama dengan nol. Sehingga disebut juga dengan metode sejati.	Memberikan solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga dinamakan **solusi hampiran** tetapi solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Dan terdapat nilai **galat** yang tidak sama dengan nol

Sebagai contoh, selesaikanlah permasalahan integral tentu di bawah ini

A = $\int_{-2}^{2}(-x^2+9)dx$

Ketika melihat soal tersebut, Anda mungkin akan langsung tersirat untuk menggunakan Teknik pengintegralan yang telah dipelajari sebelumnya. Dengan menggunakan Teknik pengintegralan tersebut berarti Anda menggunakan metode analitik untuk menyelesaikannya.

$$\int ax^n dx = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$$

Sehingga akan menghasilkan

A=$\int_{-2}^{2}(-x^2+9)dx = \left[-\frac{x^2}{3}+9x\right]_{-2}^{2} = \left\{-\frac{2^2}{3}+9(2)\right\} - \left\{-\frac{(-2)^2}{3}+9(-2)\right\} = \frac{116}{3}$

Perhatikanlah bahwa $-\frac{x^2}{3} + 9x$ merupakan solusi analitik dalam bentuk fungsi matematik, sedangkan $\frac{116}{3}$ adalah nilai numerik integral tentu yang diperoleh dengan cara mengevaluasi fungsi matematik tersebut untuk batas-batas integrasi x = 2 dan x = -2.

Sekarang perhatikan jika menggunakan metode numerik,

Buatlah Grafik dari persamaan yang ada pada integral di atas yaitu $-x^2 + 9$ dengan diketahui titik potong dan titik puncaknya. Kemudian partisi batas-batas integrasinya menjadi empat bagian sama besar.

Titik Potong pada sumbu y: ....

Titik Puncak : ....

Setelah batas integrasinya dibagi menjadi empat bagian sama besar, maka akan terbentuk empat buah trapezium. Dimana luas dari bangun trapezium adalah

$$Ltrapesium = \frac{1}{2} x \ jumlah \ sis \ sejajar \ x \ tinggi$$

Maka diperoleh,

$L_{\text{trapesium1}}$ = ...

$L_{\text{trapesium2}}$ = ...

$L_{\text{trapesium3}}$ = ...

$L_{\text{trapesium4}}$ = ...

$L_{\text{trapezium}}$ total = ...

L trapesium total tersebut merupakan solusi hampiran atau metode numerik (tanda " $\approx$" artinya kira-kira). Sehingga galat (eror) solusi hampiran terhadap solusi sejati adalah

Galat = |solusi sejati – solusi hampiran|

= | .... - ....|

= ....

Modul 2 Deret Taylor dan Maclaurin

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menentukan penyelesaian deret Taylor, Maclaurin dan Taylor Tepotong

1. Deret Taylor

Deret taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaian pada persamaan diferensial.

Definisi Deret Taylor

Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \ldots$, menerus didalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \epsilon\ [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \epsilon [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluar (diekspansi) ke dalam deret Taylor:

(Turunannya Sampai Tak Hingga)

$$f(x) = \frac{(x - x_0)}{0!} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_m)^m}{m!} f^m(x_0)$$

Dengan

f(x) : fungsi dititik x

f(x_0) : fungsi dititik x_0

f', f'', … f^m : turunan pertama, kedua, …, ke-m dari fungsi

x – x_0 : jarak antara x dan x_0

! : operasi factorial

Contoh.

Hampiri fungsi $f(x) = \cos x$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 1$.

Penyelesaian.

$f(x) = \cos x$

$f'^{(x)} =$ ....

$f''^{(x)} = \cdots.$

$f'''^{(x)} = \cdots.$

$f''''^{(x)} = \cdots.$

.

.

dst

Substitusikan ke persamaan deret taylor dengan rumus diatas

$$F(x) = \frac{(x-x_0)}{0!}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_m)^m}{m!}f^m(x_0)$$

$$F(x) = cos(x_0) + \frac{(x-1)}{1!}\big(-sin(x_0)\big) + \frac{(x-1)^2}{2!}\big(-cos(x_0)\big) + \frac{(x-1)^3}{3!}\big(sin(x_0)\big) + \frac{(x-1)^4}{4!}\big(cos(x_0)\big) + \cdots$$

$$F(x) = cos(1) + \frac{(x-1)}{1!}\big(-sin(1)\big) + \frac{(x-1)^2}{2!}\big(-cos(1)\big) + \frac{(x-1)^3}{3!}\big(sin(1)\big) + \frac{(x-3)^4}{4!}\big(cos(1)\big) + \cdots$$

$$F(x) = cos(1) + \frac{(x-1)}{1}\big(-sin(1)\big) + \frac{(x-1)^2}{2\times 1}\big(-cos(1)\big) + \frac{(x-1)^3}{3\times 2}\big(sin(1)\big) + \frac{(x-3)^4}{4\times 3\times 2}\big(cos(1)\big) + \cdots$$

$$F(x) = cos(1) + \frac{(x-1)}{1}\big(-sin(1)\big) + \frac{(x-1)^2}{2}\big(-cos(1)\big) + \frac{(x-1)^3}{6}\big(sin(1)\big) + \frac{(x-1)^4}{24}\big(cos(1)\big) + \cdots$$

Dimisalkan bahwa $(x-1) = a$

$$F(x) = cos(1) + \frac{(a)}{1}\big(-sin(1)\big) + \frac{(a)^2}{2}\big(-cos(1)\big) + \frac{(a)^3}{6}\big(sin(1)\big) + \frac{(a)^4}{24}\big(cos(1)\big) + \cdots$$

$$F(x) = cos(1) + \frac{(a)}{1}\big(-sin(1)\big) + \frac{(a)^2}{2}\big(-cos(1)\big) + \frac{(a)^3}{6}\big(sin(1)\big) + \frac{(a)^4}{24}\big(cos(1)\big) + \cdots$$

$$F(x) = cos(1) + \frac{(a)}{1}\big(-sin(1)\big) + \frac{(a)^2}{2}\big(-cos(1)\big) + \frac{(a)^3}{6}\big(sin(1)\big) + \frac{(a)^4}{24}\big(cos(1)\big) + \cdots$$

$$F(x) = cos(1) - a\sin(1) - \frac{a^2}{2}\cos(1) + \frac{a^3}{6}\sin(1) + \frac{a^4}{24}\cos(1) + \cdots$$

Kasus tertentu apabila fungsi diperluas di sekitar $x_0 = 0$, maka deretnya dinamakan **deret Maclaurin** atau biasa juga disebut dengan **deret Taylor baku**. Kasus $x_0 = 0$ paling sering muncul dalam praktek.

Contoh.

Hampiri fungsi $f(x) = \cos x$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 0$.

Penyelesaian.

$f(x) = \cdots$

$f'^{(x)} = \cdots$

$f''^{(x)} = \cdots.$

$f'''^{(x)} = \cdots$

$f''''^{(x)} = \cdots$

Substitusikan ke persamaan deret taylor dengan rumus diatas

$$F(x) = \frac{(x - x_0)}{0!} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_m)^m}{m!} f^m(x_0)$$

$F(x) = ...$

Keterkaitan antara deret taylor dan metode numerik adalah menambahkan galat. Karena suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, maka dengan galat pada deret Taylor dipotong sampai suku orde tertentu. Simbol **galat** pada deret taylor adalah $\boldsymbol{R_n(x)}$**.** Deret taylor yang dipotong sampai suku orde ke-n dinamakan **deret Taylor terpotong** dan dinyatakan oleh:

$$F(x) = \underbrace{\boxed{f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_m)^m}{m!} f^m(x_0)}}_{\mathbf{P_n\ (x)}} + R_n(x),$$

dimana $Rn(x) \rightarrow \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c),\ galat\ x_0 < c < x.$

Contoh.

1. Tentukan deret Taylor terpotong dari persamaan di bawah ini.

   $F(x) = \cos x\ ;\ x_0 = 1, orde\ ke\ 3$

Penyelesaian

$f(x) = \cdots$

$f'^{(x)} = \cdots$

$f''^{(x)} = \cdots.$

$f'''^{(x)} = \cdots$

Substitusikan ke persamaan deret taylor terpotong dengan rumus.

$$F(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_m)^m}{m!} f^m(x_0) + R_n(x),$$

$F(x) = \ldots.$

2. Hitunglah hampiran nilai cos (0.2) dengan deret Maclaurin sampai suku orde n = 3.

Penyelesaian

$f(x) = \cdots$

$f'^{(x)} = \cdots$

$f''^{(x)} = \cdots.$

$f'''^{(x)} = \cdots$

Substitusikan ke persamaan deret Maclaurin dengan x_0 = ...

$F(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_m)^m}{m!} f^m(x_0) + R_n(x),$

$F(x) =$ ....

Latihan Soal

1. Hampiri fungsi-fungsi di bawah ini ke dalam deret Taylor disekitar $x_0 = 1$.
   a. $f(x) = 5\sin x^2$
   b. $f(x) = e^{2x}$
   c. $f(x) = \ln (x + 5)$
   d. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 7$
   e. $f(x) = e^x - x^2 + 7x$
2. Uraikan masing-masing fungsi pada no.1 ke dalam deret Maclaurin.
3. Hitunglah hampiran $f(x) = -2x^4 + 12x^2 - 20x + 8.5$ sampai suku orde $n = 3$.
4. Hitunglah hampiran nilai sin (0.8) dengan deret Maclaurin sampai suku orde $n = 6$.
5. Tentukan hampiran $f(x) = e^x - 1$ sampai orde-3 di sekitar $x_0 = 0$. Lalu hitung nilai f (0.0001).

Refleksi

1. Dalam menyelesaikan masalah tentang deret Taylor, Maclaurin dan Taylor Terpotong apa sajakah langkah-langkah penyelesaiannya?
   Tanggapan:
   a. ...
   b. ...
   c. ...
   d. ...
   e. ...
   f. ...
   g. ...

2. Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi tersebut?
   Tanggapan:
   ...

Modul 3 Analisis Galat

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan tentang analisis galat.

Pada metode numerik, hasil penyelesaian yang diperoleh merupakan hasil pendekatan. Akurasi yang dihasilkan mengacu pada seberapa deka tangka pendekatan/pengukuran terhadap solusi sejatinya. Subakti (2006:21) Galat atau eror timbul dari penggunaan aproksimasi yang meliputi dua hal, yaitu kesalahan pemotongan dan pembulatan. Pada modul 1 diketahui bahwa galat merupakan nilai mutlak dari solusi sejati dikurang solusi hampiran. Disimbolkan dengan

ε : galat

a : solusi sejati

$\hat{a}$: solusi hampiran

$\varepsilon = | a - \hat{a} |$

a. Sumber Utama Galat Numerik

Sumber utama galat pada metode numerik dibedakan menjadi tiga yaitu galat pemotongan (truncation error), galat pembulatan (round off error) dan galat total.

1) Galat pemotongan

Galat pemotongan timbul dikarenakan penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Munir (2006:25) Istilah pemotongan muncul karena banyak metode numerik yang diperoleh dengan penghampiran fungsi menggunakan deret Taylor. Hal ini disebabkan karena deret Taylor merupakan deret yang tak berhingga maka untuk penghampirannya harus dipotong atau dihentikan sampai suku orde tertentu.

Contoh.

$f(1) = x^3 + 5x^2 + x + 3\ ;\ x_0 = 0{,}5\ ; orde\ ke - 1$

Penyelesaian :

$f' = 3x^2 + 10x + 1$

$f'' = 6x + 10$

$f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 3$

$$= (0{,}5)^3 + 5(0{,}5)^2 + (0{,}5) + 3 + \frac{(1-0{,}5)}{1!} \times (3(0{,}5))^2 + 10(0{,}5+1) + \frac{(1-0{,}5)^2}{2!} \times (6(0{,}5) + 10)$$

$= 4{,}875 + 3{,}375 + 1{,}625 = 9{,}875 = 9{,}87 \rightarrow$ Galat Pemotongan

2) Galat pembulatan

Pengaplikasian komputer atau media lain dalam pembelajaran matematika memunculkan galat pembulatan. Misalkan pada sebuah kalkulator hanya dapat memunculkan bilangan riil dalam 8 digit sehingga ketika mengoperasikan $\frac{1}{6} = 0.166666666 \ldots$ di dalam kalkulator tersebut akan adalah 0.16666667.

Contoh.

$f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 3$

$= (0{,}5)^3 + 5(0{,}5)^2 + (0{,}5) + 3 + \frac{(1-0{,}5)}{1!} \times \left(3(0{,}5)\right)^2 + 10(0{,}5+1) + \frac{(1-0{,}5)^2}{2!} \times (6(0{,}5) + 10)$

$= 4{,}875 + 3{,}375 + 1{,}625 = 9{,}875 = 9{,}88 \rightarrow$ Galat Pembulatan

Angka bena

Angka bena adalah angka bermakna, angka penting atau angka yang dapat digunakan dengan pasti. Contoh.

1.2345	artinya memiliki 5 angka bena
0.1234	artinya memiliki 4 angka bena
0.00123	artinya memiliki 3 angka bena
123.450	artinya memiliki 6 angka bena
12.03450	artinya memiliki 7 angka bena
0.120	artinya memiliki 3 angka bena

3) Galat total

Galat total merupakan jumlah galat pemotongan dan pembulatan.

Contoh.

Tentukan deret Taylor terpotong dari persamaan di bawah ini.

$F(0.1) = \cos 0.1\ ;\ x_0 = 1, orde\ ke\ 3$

Galat Pemotongan

$$\uparrow$$

Cos (0.1) ≈ ....

≈ ....

≈ ....

≈ ....

$$\downarrow$$

Galat Pembulatan

b. Orde Penghampiran

Misalkan f(h) dihampiri dengan fungsi p(h). Jika $|p(h) - f(h)| \leq M|h^n|$, yang dalam hal ini M adalah konstanta riil > 0, maka kita katakan bahwa p(h) menghampiri f(h) dengan orde penghampiran O(h^n) dan kita tulis:

$$f(h) = P(h) + O(h)^n$$

Keterangan:

f(h) : fungsi dititik h.

$O(h)^n$: orde galat dari penghampiran fungsi.

Contoh.

$f(h) = \ Sin\, h\ ,\ \ ho = 0\ ,\quad Orde = 3$

$f'(h) = \cos\ h$

$f''(h) = \ -\sin\ h$

$f'''(h) = \ -\cos\ h$

$$f(h) = \sin(0) + \frac{(h-0)}{1!}\cos(0) + \frac{(h-0)^2}{2!}\ (-\sin(0)) + \frac{(h-0)}{3!}\ (-\cos(0)) + \ 0(h)^4$$

$$= 0 + h + 0 - \frac{h^3}{6} + \ O(h)^5$$

c. Bilangan Titik Kambang

Bilangan riil di dalam komputer seringkali disajikan dengan bentuk bilangan titik kambang. Bilangan titik kambang disimbolkan dengan *a* dan ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$a = \pm m$ x B^P

$a = \pm 0.\, d_1 d_2\, .\ .\ .\, dn$ x B^p

Keterangan:

m = mantisa (bilangan riil)

B = basis system bilangan

P = pangkat

Aritmatika Bilangan Titik Kambang

1) Penambahan

Contoh.

Hitunglah $1.557 + 0.04381 = ...$ (4 angka bena)

Penyelesaian:

$$\begin{array}{ccc} 1.557 & + & 0.04381 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0.1557 \text{ x } 10^1 & + & 0.04381 \text{ x } 10^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} 0.1557 & \text{x} & 10^1 & \rightarrow & & 0.1557 & \text{x} & 10^1 \\ 0.04381 & \text{x} & 10^0 & \rightarrow & & 0.004381 & \text{x} & 10^1 \; + \\ \hline & & & & & 0.160081 & \text{x} & 10^1 \\ & & & & \text{Pembulatan} & 0.1601 & \text{x} & 10^1 \\ & & & & \text{Pemotongan} & 0.1601 & \text{x} & 10^1 \end{array}$$

2) Pengurangan

Contoh.

Hitunglah $3.677 - 0.3283 = ...$ (5 angka bena)

Penyelesaian:

$$\begin{array}{ccc} 3.677 & + & 0.3283 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0.3677 \text{ x } 10^1 & + & 0.3283 \text{ x } 10^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} 0.3677 & \text{x} & 10^1 & \rightarrow & & 0.3677 & \text{x} & 10^1 \\ 0.3283 & \text{x} & 10^0 & \rightarrow & & 0.03283 & \text{x} & 10^1 \; - \\ \hline & & & & & 0.33487 & \text{x} & 10^1 \\ & & & & \text{Pembulatan} & 0.36767 & \text{x} & 10^4 \\ & & & & \text{Pemotongan} & 0.36766 & \text{x} & 10^4 \end{array}$$

3) Perkalian

Contoh.

Hitunglah $(0.253 \text{ x } 10^3)$ x $(1.462 \text{ x } 10^4) = \ldots.$ (4 angka bena)

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{lllllll}
0.253 & \text{x} & 10^3 & \rightarrow & 0.253 & & 10^3 \\
1.462 & \text{x} & 10^4 & \rightarrow & \underline{0.1462} & \text{x} & \underline{10^5} \; + \\
 & & & & 0.0369886 & \text{x} & 10^8 \\
 & & & & 0.369886 & \text{x} & 10^9 \\
 & & & \text{Pembulatan} & 0.3699 & \text{x} & 10^9 \\
 & & & \text{Pemotongan} & 0.3698 & \text{x} & 10^9
\end{array}
$$

4) Pembagian

Contoh.

Hitunglah $(0.8675 \text{ x } 10^{-5}) : (0.2543 \text{ x } 10^{-2}) = \ldots.$ (6 angka bena)

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{llll}
 & 0.8675 & & 10^{-5} \\
 & \underline{0.2543} & : & \underline{10^{-2}} \; - \\
 & 3.411325206 & \text{x} & 10^{-3} \\
 & 0.3411325206 & \text{x} & 10^{-2} \\
\text{Pembulatan} & 0.341133 & \text{x} & 10^{-2} \\
\text{Pemotongan} & 0.341132 & \text{x} & 10^{-2}
\end{array}
$$

Latihan Soal

1. Carilah akar persamaan kuadrat $x^2 - 10.1\,x + 1 = 0$ dengan rumus abc, dimana pada setiap hasil perhitungan antara maupun hasil perhitungan akhir dibulatkan dengan Teknik pembulatan dan pemotongan! (dengan 3 angka bena)
2. Diketahui beberapa bilangan titik kambang sebagai berikut.
   a. 0.5478372×10^{-3}
   b. 2.398761×10^{4}
   c. 0.3572891×10^{-2}
   d. 41.09384×10^{1}

   Jika bilangan-bilangan titik kambang di atas dioperasikan dan menghasilkan 5 angka bena, maka hitunglah (i) a + b + d ; (ii) a + c – b; (iii) ab -d; dan (iv) $\frac{b+c}{a}$
3. Tentukan orde penghampiran $f(h) = \ln 2x$ dimana $x_0 = 1.2$ sampai orde-4.
4. Tentukan orde penghampiran $f(h) = 3\sin 2x$ dimana $x_0 = 0.5$ sampai orde-5.
5. Tentukan orde penghampiran $f(h) = \tan x$ dimana $x_0 = 0$ sampai orde-4.
6. Tentukan orde penghampiran $f(h) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 7$ dimana $x_0 = 2.3$ sampai orde-2.
7. Tentukan orde penghampiran $f(h) = (31x^3 - 7x + 5)^2$ dimana $x_0 = 1.2$ sampai orde-4.
8. Tentukan orde penghampiran $f(h) = \sin 7x \sin 3x$ dimana $x_0 = 1.2$ sampai orde-4.
9. Tentukan orde penghampiran $f(h) = \sin^3 2x \cos 2x$ dimana $x_0 = 1.2$ sampai orde-4.
10. Tentukan orde penghampiran $f(h) = \cos^2 4x \sin 4x$ dimana $x_0 = 1.2$ sampai orde-4.

Refleksi

1. Dalam menyelesaikan masalah pada modul 3 ini, apa sajakah point penting yang harus diingat?
   Tanggapan:
   ...

2. Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi tersebut?
   Tanggapan:
   ...

Modul 4 Metode Tertutup pada Solusi Persamaan Nirlanjar

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

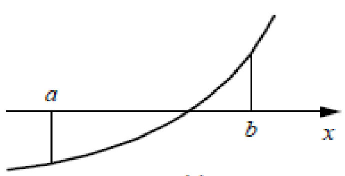
Mahasiswa dapat menentukan penyelesaian masalah solusi persamaan nirlanjar dengan menggunakan metode tertutup.

Dalam metode numerik, untuk mencari akar-akar dari suatu fungsi dapat dilakukan secara iteratif. Metode pencarian akar pada metode numerik dibagi menjadi dua, yaitu metode tertutup dan terbuka.

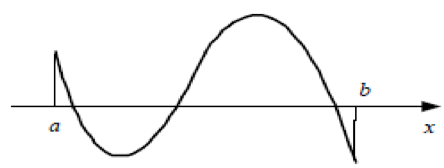
a. Metode Tertutup

Pada metode tertutup pada persamaan nirlanjar memerlukan selang [a,b] yang mengandung akar. Dalam sebuah selang mungkin terdapat lebih dari satu buah akar atau tidak ada akar sama sekali. Perhatikan grafik di bawah ini.

1. Jika f(a)f(b) < 0 maka terdapat akar sebanyak bilangan ganjil.

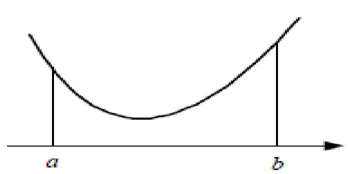


(a)

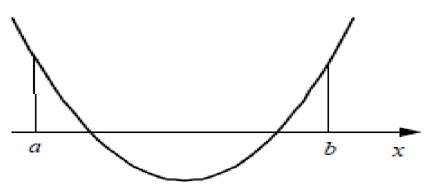


(b)

2. Jika f(a)f(b) < 0 maka terdapat akar sebanyak bilangan genap atau tidak ada akar sama sekali.



(a)

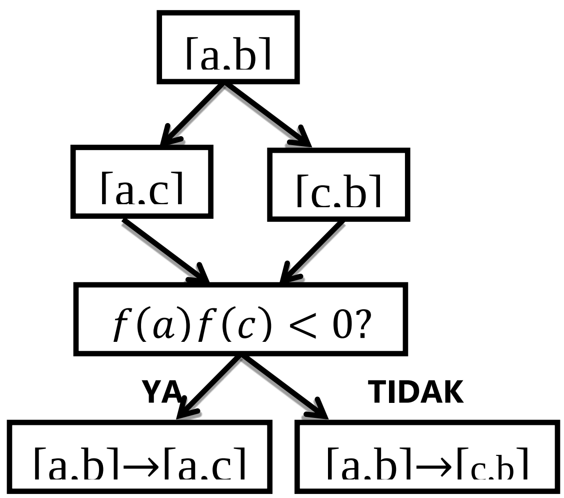


(b)

Ada dua metode klasik yang termasuk ke dalam metode tertutup, yaitu metode bagi dua dan metode regula-falsi.

1. Metode Bagi dua

Misalkan kita telah menentukan selang [*a*, *b*] sehingga $f(a)f(b) < 0$. Pada setiap kali lelaran, selang [*a*, *b*] kita bagi dua di $x = c$, sehingga terdapat dua buah selang yang berukuran sama, yaitu selang [*a*, *c*] dan [*c*, *b*]. Selang yang diambil untuk lelaran berikutnya adalah upaselang yang memuat akar, bergantung pada apakah $f(a)f(c) < 0$ atau $f(c)f(b) < 0$



untuk menentukan banyaknya jumlah leleran, digunakan rumus:

$$\boxed{R > \frac{In\,|b-a| - In\,(\varepsilon)}{In\,|2|}}$$

Langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah dengan menggunakan metode bagi dua sebagai berikut.

a) Substitusikan nilai pada selang tertutup [a,b] pada fungsi persamaan yang diketahui sehingga menghasilkan nilai f(a) dan f(b).

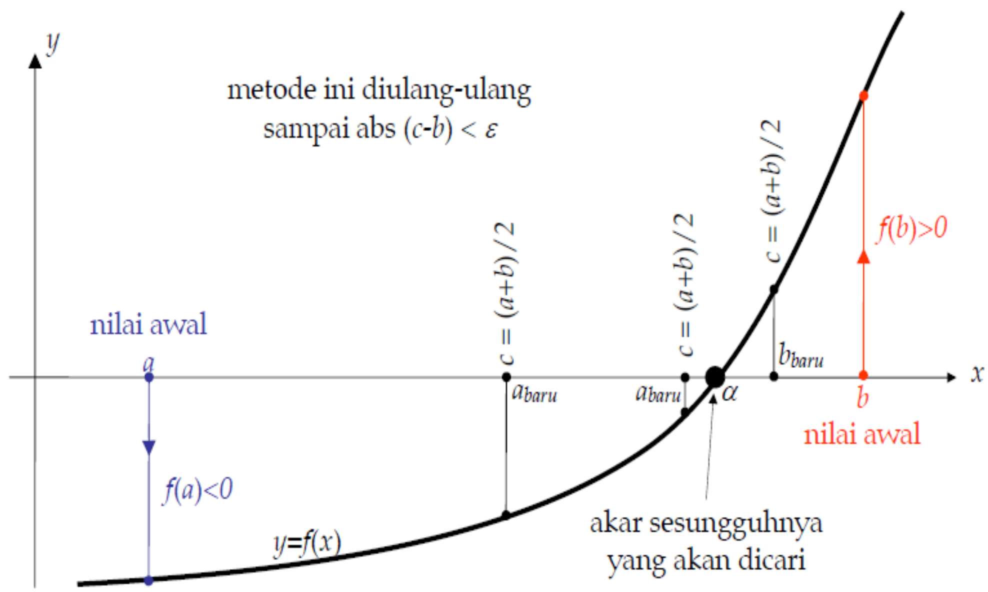
b) Tentukan nilai dari titik c dengan mengoperasikan $\frac{a+b}{2}$ dan substitusikan juga ke fungsi persamaan sehingga menghasilkan nilai f(c).

c) Untuk memperoleh selang baru ujikan f(a)f(c) < 0 jika ya maka selang baru adalah [a,c] tapi jika tidak maka selang baru adalah [c,b].

d) Selanjutnya lebarnya merupakan hasil mutlak dari pengurangan dari selang baru yang diperoleh.

e) Ulangi langkah-langkah di atas sampai hasil lebarnya kurang dari ε yang diketahui pada soal.

Perhatikan grafik metode bagi dua untuk mencari akar di bawah ini.



Contoh.

Tentukan akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan selang [0,1] dan $\varepsilon = 0{,}00001$ menggunakan metode bagi-dua

r	a	c	b	f(a)	f(c)	f(b)	sel baru	lebar
0	0,000000	...	1,000000	...	...	...	[c,b]	...
1	0,500000	...	1,000000	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...	...
3	...	...	...	...	...	...	...	...
4	...	...	...	...	...	...	...	...
5	...	...	...	...	...	...	...	...
6	...	...	...	...	...	...	...	...
7	...	...	...	...	...	...	...	...
8	...	...	...	...	...	...	...	...
9	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	...	...	...	...	...	...	...
11	...	...	...	...	...	...	...	...
12	...	...	...	...	...	...	...	...
13	...	...	...	...	...	...	...	...
14	...	...	...	...	...	...	...	...
15	...	...	...	...	...	...	...	...
16	...	...	...	...	...	...	...	...
17	...	...	...	...	...	...	...	...

Jadi, hampiran akarnya adalah x = ...

Jumlah lelaran yang dibutuhkan

$$R > \frac{\ln|b-a| - \ln|\varepsilon|}{\ln|2|}$$

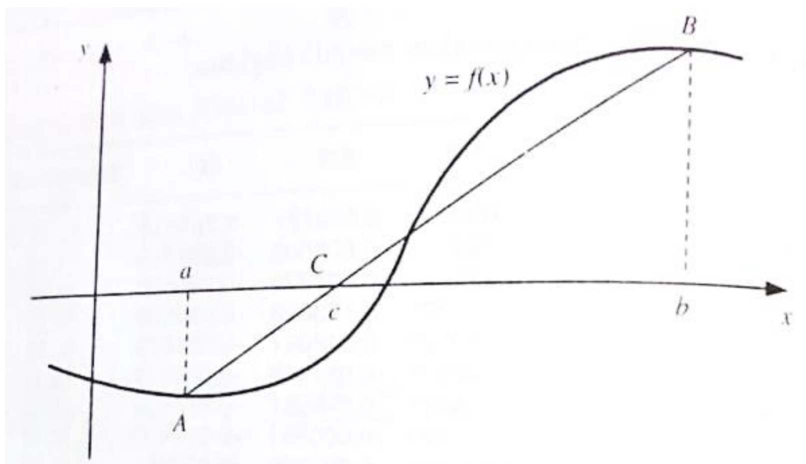
$$> \frac{\ln|1-0| - ln|0.00001|}{\ln\ |2|}$$

$> 16.6096 \quad > 17$

Jadi, dibutuhkan minimal 17 kali lelaran (*r* =0 sampai dengan *r* =16), sesuai dengan jumlah lelaran pada tabel, agar galat akar hampiran kurang dari ε.

2. **Metode Regula-Falsi**

Metode regula falsi disebut juga metode Interpolasi Linear atau metode Posisi Salah adalah metode yang digunakan untuk mecari akar-akar persamaan nonlinear melalui proses iterasi. Metode regula falsi merupakan metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selilih tinggi dari dua titik batas range. Solusi akar (atau akar-akar) dengan menggunakan metode Regula Falsi merupakan modifikasi dari Metode Bisection dengan cara memperhitungkan 'kesebangunan' yang dilihat pada kurva berikut.



Metode Regula Falsi menetapkan hampiran akar sebagai perpotongan antara garis yang melalui titik [*a, f(a)*] dan titik [*b, f(b)*] dengan sumbu-*x.* Jika titik potong tersebut adalah tersebut adalah *c*, maka akar terletak antara (*a,c)*atau *(c, b).* Sehingga didapatkan persamaan berikut dapat digunakan:

Gradien AB = Gradien CB

m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_b - y_c}{x_b - x_c}$

$\frac{y_b - y_a}{b-a} = \frac{y_b - y_c}{b-c}$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-o}{b-c}$

$[f(b) - f(a)](b - c) = f(b)(b - a)$

$(b - c) = \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$

$$\boxed{c = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}}$$

Contoh.

Tentukan akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan selang [0,1] dan $\varepsilon = 0{,}00001$ menggunakan metode regula-falsi.

Penyelesaian :

a = 0 ; b = 1

$f(a) = 1$; $f(b) = -2{,}281718$

$$c = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

$$c = 1 - \frac{-2{,}281718(1 - 0)}{-2{,}281718 - 1} = 0{,}304718$$

Tabel penyelesaian

r	a	C	b	f(a)	f(c)	f(b)	Sel Baru	Lebar
0	0,000000	0,304718	1,000000	1	0,891976	-2,281718	...	...
1	...	...	...	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...	...
3	...	...	...	...	...	...	...	...

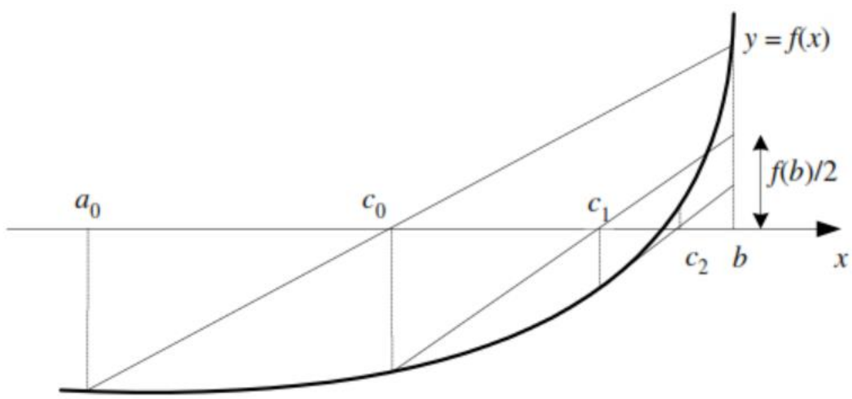
4	...	...	...	...	...	...	...	...
5	...	...	...	...	...	...	...	...
6	...	...	...	...	...	...	...	...
7	...	...	...	...	...	...	...	...
8	...	...	...	...	...	...	...	...
9	...	...	...	...	...	...	...	...
10	...	...	...	...	...	...	...	...
11	...	...	...	...	...	...	...	...
12	...	...	...	...	...	...	...	...
13	...	...	...	...	...	...	...	...
14	...	...	...	...	...	...	...	...
15	...	...	...	...	...	...	...	...
16	...	...	...	...	...	...	...	...
17	...	...	...	...	...	...	...	...
18	...	...	...	...	...	...	...	...
19	...	...	...	...	...	...	...	...
20	...	...	...	...	...	...	...	...
21	...	...	...	...	...	...	...	...

Maka hampiran akar x = ... , sampai pada lelaran ke 22

3. Perbaikan Metode Regula-Falsi

Untuk mengatasi kemungkinan kasus titik mandek, metode regula-falsi kemudian diperbaiki (modified false position method). Caranya, pada akhir lelaran r= 0, kita sudah memperoleh selang baru akan dipakai pada lelaran r= 1. Berdasarkan selang baru tersebut, tentukan titik ujung selang yang tidak berubah (jumlah perulangan > 1) - yang kemudian menjadi titik mandek. Nilai f pada titik mandek itu diganti menjadi setengah kalinya, yang akan dipakai pada lelaran r= 1. Misalkan fungsi $f(x)$cekung ke atas di dalam selang [a, b].

Setelah menghitung nilai c_0 pada lelaran r = 0, ujung selang buntuk lelaran r = 1 tidak berubah. Titik bmenjadi titik mandek. Karena itu, untuk lelaran r = 1, nilai



$f(b)$ yang dipakai adalah $\frac{f(b)}{2}$. Begitu juga untuk lelaran r = 2, nilai f(b) yang dipakai adalah setengah dari nilai $f(b)$ sebelumnya. Pada akhir lelaran r = 2, c2 sudah terletak di bawah kurvay = $f(x)$. Selang yang dipakai selanjutnya adalah [c1, c2]. Dengan cara ini kita dapat menghilangan titik mandek yang berkepanjangan.

Rumus untuk mencari C pada Metode Perbaikan Regula Falsi :

$$C = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Contoh.

Hitunglah akar $f(x) = e^x - 5x^2$ di dalam selang [0, 1] dengan $\mathcal{E}$= 0.00001 dan δ= 0.000001 adalah sebagai berikut.

Penyelesaian.

r	**a**	**c**	**b**	**f(a)**	**f(c)**	**f(b)**	**Sel baru**	**Lebar**
0	0.000000	0.304718	1.000000	1.000000	0.891976	-2.281718	[c,b]	0.695282
						(:) 2		
1	0.304718	...	1.000000	0.891976	...	-1.140859	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...	...
3	...	...	...	...	...	...	...	...
4	...	...	...	...	...	...	...	...
5	...	...	...	...	...	...	...	...
6	...	...	...	...	...	...	...	...
7	...	...	...	...	...	...	...	...

Jadi hampiran akar x = ... sampai lelaran ke-....

Latihan Soal

1. Gunakan metode bagi dua dan regula-falsi untuk menemukan akar persamaan Leonardo da Pisa yaitu $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ dalam selang [1; 1.5] dan $\mathcal{E} = 0.001$.
2. Hitunglah $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$; [5.8 , 5.9] ; $\mathcal{E} = 0.004$ dengan menggunakan metode regula-falsi dan perbaikan metode regula-falsi.
3. Dengan menggunakan metode bagi dua, carilah akar dari $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ pada interval [1,2] dan $\mathcal{E} = 0.0005$.
4. Carilah akar dari xe – x +1 = 0 dengan interval tertutup [-1, 0] dan $\mathcal{E} = 0.0001$. (Gunakan metode bagi dua, regula-falsi).

Refleksi

1. Dalam menyelesaikan masalah pada modul 4 ini, apa langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah dengan menggunakan metode regula-falsi dan perbaikan metode regula-falsi?
   Tanggapan:
   ...
2. Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi tersebut?
   Tanggapan:
   ...

Modul 5 Metode Terbuka pada Solusi Persamaan Nirlanjar

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat menentukan penyelesaian masalah solusi persamaan nirlanjar dengan menggunakan metode terbuka.

Metode pencarian akar yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah metode numerik selain dengan metode tertutup, bisa juga menggunakan metode terbuka. Berbeda dengan metode tertutup, pada metode terbuka tidak memerlukan selang pada interval tertutup untuk menemukan akar-akarnya. Yang diperlukan hanya sebuah atau dua buah tebakan awal. Hal tersebutlah yang mendasari metode pencarian akar ini dinamakan metode terbuka. Metode terbuka pada solusi persamaan nirlanjar ini dibagi menjadi tiga, yaitu metode lelaran titik tetap, metode Newton-Raphson dan metode secant.

1. Metode Lelaran Titik Tetap

Metode ini terkadang dinamakan juga metode lelaran sederhana, metode langsung, atau metode sulih beruntun. Kesederhanaan metode ini karena pembentukan prosedur lelarannya mudah dibentuk dan hanya menggunakan satu titik awal. Susunlah persamaan *f(x)* = 0 menjadi bentuk $x = g(x)$. Lalu, bentuklah menjadi prosedur lelaran

$$x_{r+1} = g(x_r)$$

dan terkalah sebuah nilai awal x_0, lalu hitung nilai x_1 , x_2 , x_3 ,..., yang mudah-mudahan konvergen ke akar sejati s sedemikian sehingga

$$f(s) = 0 \text{ dan } s = g(s).$$

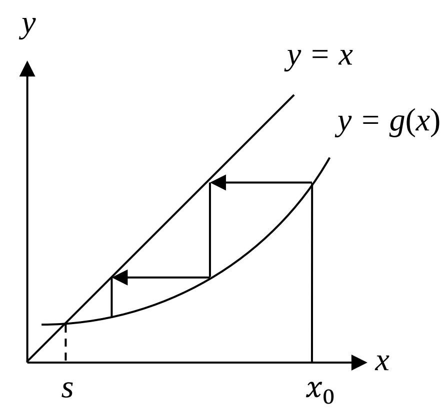
kondisi berhenti lelaran dinyatakan bila

$\left|x_{r+1} - x_r\right| < \varepsilon$

Jenis-jenis akar pada metode lelaran titik tetap ini dibagi menjadi empat yaitu.

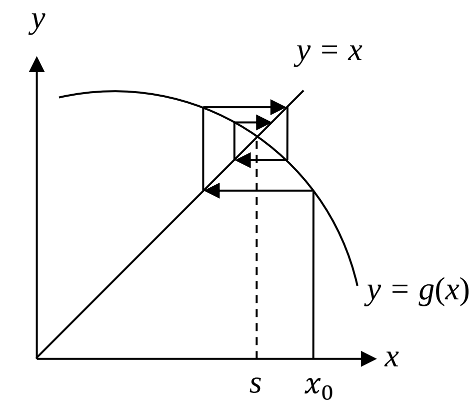
a. Konvergen monoton

Proses lelaran konvergen untuk beberapa nilai awal x_0, dengan proses lelarannya berbentuk zigzak yang mendekat ke akar $0 < g'(x) < 1$ atau nilai $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ dan x_i positif selalu naik atau turun.



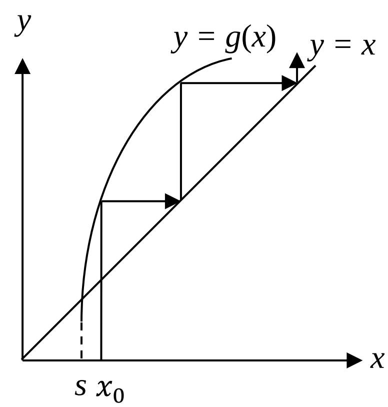
b. Konvergen berisolasi

Proses lelaran konvergen untuk beberapa nilai awal x_0, dengan proses lelarannya membentuk spiral yang mendekat ke akar $-1 < g'(x) < 0$ atau nilai $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ dan x_i negatif dan selalu naik turun.



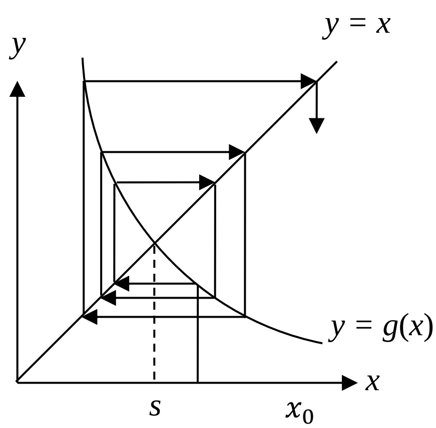
c. Divergensi monoton

Proses lelaran konvergen untuk beberapa nilai awal x_0, dengan proses lelarannya berbentuk zigzak yang menjauh dari akar $g'(x) > 1$. atau nilai $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$ dan x_i positif selalu naik atau turun.



d. Divergensi berisolasi

Proses lelaran konvergen untuk beberapa nilai awal x_0, dengan proses lelarannya membentuk spiral yang menjauh dari akar $g'(x) < -1$. atau nilai $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$ dan x_i negatif selalu naik turun.



Contoh.

Carilah akar persamaan $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ dengan metode lelaran titik-tetap. Gunakan ε = 0.000001

Penyelesaian

Karena pada soal di atas belum ditentukan terkaan x_0 maka tentukan dulu x_0

$x^2 - 2x - 3 = 0$ difaktorkan

$$(x - 3)\ (x + 1)$$

$x = 3 \quad x = -1$ diambil nilai x yang terbesar kemudian ditambahkan 1 , sehingga

$$x_0 = 3 + 1$$
$$x_0 = 4$$

Terdapat beberapa kemungkinan prosedur lelaran yang dapat dibentuk.

a. $x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 = 2x + 3$

$x = \sqrt{(2x + 3)}$ sehingga $x_{r+1} = \sqrt{(2x_r + 3)}$.

Contoh menghitung lelaran 1 :

$$x_1 = \sqrt{(2(4{,}0000000) + 3)}$$
$$= 3{,}3166247$$
$$|x_{r+1} - x_r| = 3{,}3166247 - 4$$

$= 0,6833752$

Dan seterusnya sampai $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$.

Tabel lelarannya :

r	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	4,0000000	-
1	...	...
2	...	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...
6	...	...
7	...	...
8	...	...
9	...	...
10	...	...
11	...	...
12	...	...
13	...	...
14	...	...

Nilai $|x_{r+1} - x_r|$ pada lelaran 0 tidak ada. Hal ini dikarenakan tidak ada lelaran lain di atas lelaran 0

Hampiran akar x = ...

Tabel di atas, jenis akarnya merupakan tabel konvergen monoton dikarenakan nilai X_r semakin kecil dan $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$

b. $x^2 - 2x - 3$

$-2x = -x^2 + 3$

$2x = x^2 + 3$

$x = \frac{x^2-3}{2}$ sehingga $x_{r+1} = \frac{{x_r}^2-3}{2}$

Tabel lelarannya :

r	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	4,0000000	-
1	…	…
2	…	…
3	…	…
4	…	…
5	…	…

Himpunan $x = \cdots$.

Tabel di atas, jenis akarnya merupakan tabel divergen. Hal ini dikarenakan nilai $\lvert x_{r+1} - x_r \rvert > \varepsilon$

c. $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x^2 - 2x = 3$$

$$x\,(x - 2) = 3$$

$$x = \frac{3}{x-2}$$

Tabel lelarannya :

r	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	4,0000000	-
1	…	…
2	…	…
3	…	…
4	…	…

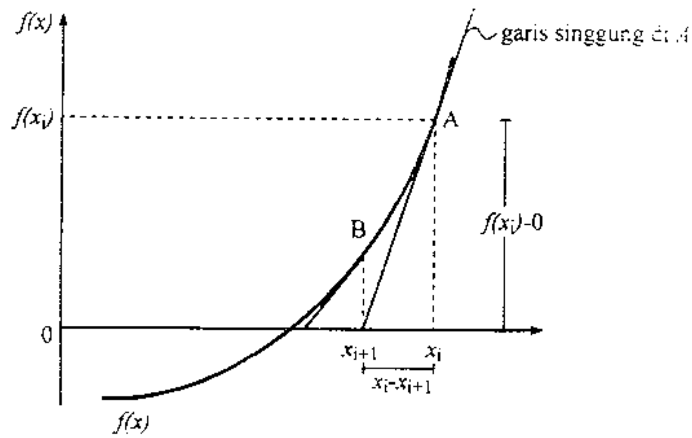
5	...	...
6	...	...
7	...	...
8	...	...
9	...	...
10	...	...
11	...	...
12	...	...
13	...	...
14	...	...
15	...	...
16	...	...
17	...	...

Himpunan $x = \cdots$

Tabel di atas merupakan tabel konvergen osiliasi. Hal ini dikarenakan nilai x_r selalu naik turun.

2. Metode Newton-Raphson

Jika terkaan awal pada akar adalah x_i sebuah garis singgung (tangen) dapat ditarik dari titik $[x_i, f(x_i)]$. Titik dimana garis singgung ini memotong sumbu x biasanya menghasilkan akar yang lebih baik. Metode Newton-Raphson dapat diturunkan berdasarkan tafsiran geometris ini (berdasarkan metode deret Taylor). Pada gambar grafik berikut turunan pertama di x_i setara dengan kemiringan :



Pembuktian metode Newton-Raphson berdasarkan grafik :

$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x_r) - 0}{x_r - x_{r+1}}$

$f'(x_r) = \frac{f\,(x_r)}{x_r - x_{r+1}}$

$x_r - x_{r+1} = \dfrac{f\,(x_r)}{f'(x_r)}$

$-x_{r+1} = -x_r + \frac{f\,(x_r)}{f'(x_r)}$dikali -1

$$\boxed{x_{r+1} = x_r - \frac{f\,(x_r)}{f'(x_r)}}$$ → rumus lelaran metode Newton-Raphson

Contoh.

Tentukan akar dari persamaan $4x^3 - 15x^2 + 17x - 6 = 0$ menggunakan Metode Newton-Raphson dengan $x_0 = 3$ dan $\varepsilon = 0{,}0001$!

Penyelesaian :

f(x) = $4x^3 - 15x^2 + 17x - 6$

f'(x) = $12x^2 - 30x + 17$

Contoh menghitung lelaran 1 :

- Subtitusi x_0 ke $f(x)$ dan $f'(x)$

$f(3)$ = 4(3)^3 – 15(3)^2 + 17(3) – 6 = 18

$f'(3)$ = 12(3)^2 – 30(3) + 17 = 35

- Subtitusi 18 dan 35 ke rumus lelaran metode Newton - Raphson

$x_1 = 3 - \frac{18}{35} = 2.48571$

- Kemudian hitung nilai $|x_{r+1} - x_r|$

$|x_1 - x_0|$ = 2,48571 – 3,00000 = 0,51429

- Lanjutkan langkah-langkah di atas hingga $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$

Tabel lelarannya :

r	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	3.00000	-
1	2.48571	0.51429
2	...	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...

Karena pada lelaran ketujuh $f(x_6) = 0$ maka akar dari persamaan tersebut adalah $x =$. ..

3. Metode Secant

Pada metode Newton-Raphson menerapkan evaluasi nilai turunan dari $f(x)$. Masalahnya tidak semua $f(x)$ tidak dapat diturunkan. Untuk menghindari hal tersebut diperkenalkan Metode *Secant*. Metode *Secant* merupakan perbaikan dari Metode Newton-Raphson, yaitu nilai turunan $f(x)$didekati dengan beda hingga (Δ)

Dalam metode Newton-Raphson

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \quad \textbf{(1)}$$

dan turunan dari $f(x)$ didekati dengan

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}} \quad \textbf{(2)}$$

Subtitusi persamaan **(2)** ke persamaan **(1)** menjadi

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{\frac{f\,(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}}$$

$$= x_r - f(x_r) \times \frac{x_r - x_{r-1}}{f\,(x_r) - f(x_{r-1})}$$

$$= x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f\,(x_r) - f(x_{r-1})}$$

Sehingga rumus lelaran dari metode *Secant* adalah

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f\,(x_r) - f(x_{r-1})}$$

Perhatikan rumus metode *Secant.* Pada rumus tersebut memerlukan dua taksiran awal untuk x. Namun, karena $f(x)$ tidak disyaratkan untuk bergani tanda di antara taksiran-taksiran, maka metode ini tidak digolongkan sebagai metode pengurung.

Contoh.

Tentukan akar-akar dari $f(x) = e^{-x} - x$ menggunakan metode *Secant* dengan taksiran-taksiran $x_0 = 0$ dan $x_1 = 1$ serta $\varepsilon = 0{,}0001$!

Penyelesaian.

Karena lelaran 1 nilai x_r – nya telah diketahui, maka tinggal mencari nilai $|x_{r+1} - x_r|$. Sehingga nilai $|x_1 - x_0|$= 1 – 0 = 1

Selanjutnya menghitung lelaran 2 :

- Mencari nilai $f(x_1)$ dan $f(x_0)$ dengan mensubtitusikan nilai x_1 dan x_0 ke persamaan $e^{-x} - x$.

$f(x_1)$ = $e^{-1} - 1 = -0{,}63212$ (karena $\varepsilon = 0{,}0001$, maka diambil 7 digit angka di belakang koma)

$f(x_0)$ = $e^0 - 0$ = $1{,}00000$

- Kemudian subtitusikan nilai $f(x_1), f(x_0), x_1$ dan x_0 ke rumus lelaran metode *Secant*.

$x_2 = 1 - \frac{(-0{,}63212)(1-0)}{(-0{,}63212)-1}$ =0,61271

- Lalu, hitung nilai $|x_{r+1} - x_r|$

$|x_2 - x_1|$ = 0,61271 – 1,00000 = 0,38729

- Lanjutkan langkah-langkah di atas hingga nilai $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$

Tabel lelarannya :

r	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	0,00000	-
1	...	...
2	...	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...

Himpunan $x = \cdots$

Latihan Soal

1. Tentukan akar hampiran dengan metode lelaran titik:
   a. f(x) = $x^3 - 2x + 1 = 0$ tetap. Gunakan $\varepsilon = 0.00001$ dan $x_0 = 2$!
   b. $f(x) = e^x - 5x^2$ Gunakan ε = 0,00001 dan x_0 = 0,5!

c. $f(x) = x^3 - 3x - 20 = 0$. Gunakan $\varepsilon = 0{,}00001$ dan $x_0 = 3$!

2. Tentukan akar menggunakan Metode Newton-Raphson.

   a. f(x) = $x^2 - 5x + 6 = 0$ dengan x_0 = 0 dan $\varepsilon = 0{,}01$!

   b. f(x) = $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ dengan x_0 = 1 dan $\varepsilon = 0{,}0001$!

   c. f(x) = $e^x - 5x^2 = 0$ dengan x_0 = 0,5 dan $\varepsilon = 0{,}00001$!

3. Tentukan solusi hampiran akar menggunakan metode secant.

   a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5{,}9$ Gunakan tebakan awal x_1=2,5 dan x_{i-1}=3,5 serta $\varepsilon_x =$ 0,0005 !

   b. $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$. Jika $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ \varepsilon = 0.005$,

   c. $f(x) = 2^x - x^4 = 0$. Jika $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ \varepsilon = 0.0001$,

   d. $f(x) = e^x - 2x^2 = 0$. Jika $x_0 = 2,\ x_1 = 3,\ \varepsilon = 0.001$,

Refleksi

Dalam menyelesaikan masalah pada modul 5 ini, apa sajakah langkah-langkah yang harus diperhatikan dalam menyelesaikan masalah tentang metode lelaran titik tetap, newton-raphson dan secant?

Tanggapan:

...

Modul 6 Akar Ganda dan Polinom

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menguasai penyelesaian akar ganda dan polinom

Akar ganda berpadanan dengan suatu titik dimana fungsi menyinggung sumbu x misalnya, akan ganda dua dihasilkan dari

$f(x) = (x-3)(x-1\,)(x-1)$ … … (1)

atau dengan mengalikan faktor-faktornya,

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

Persamaan tersebut mempunyai akar kembar karena satu nilai x menyebabkan dua faktor dalam Persamaan (1) sama dengan nol. Secara grafis, ini berpadanan terhadap kurva yang menyentuh sumbu x secara bersinggungan pada akar kembar tersebut.

Akar ganda-tiga (triple root) berpadanan dengan kasus dimana satu nilai x membuat tiga faktor dalam suatu persamaan sama dengan nol, seperti dalam

$f(x) = (x-3)(x-1\,)(x-1)(x-1)$

Atau dengan mengalikan faktor-faktornya,

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x - 3$

Ralston dan Rabinowitz (1978) telah menunjukkan bahwa perubahan sedikit dalam perumusan mengembalikannya ke kekonvergenan kuadrat, seperti dalam

$$x_{r+1} = x_r - m\frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \text{ … … (2)}$$

Dimana m adalah multiplisitas akar (yaitu,$m = 1$ untuk akar tunggal, $m = 2$ untuk akar kembar, $m = 3$ untuk akar ganda-tiga, dan seterusnya). Tentu saja, ini mungkin merupakan alternatif yang tidak memuaskan karena bergantung pada pengetahuan sebelumnya tentang multiplisitas akar.

Alternatif lain yang juga disarankan oleh Ralston dan Rabinowitz (1978) adalah mendefinisikan suatu fungsi baru $u(x)$, yaitu rasio (hasil bagi) fungsi terhadap turunannya seperti dalam

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \dots \dots (3)$$

Dapat diperlihatkan bahwa fungsi ini mempunyai akar pada lokasi yang sama seperti fungsi semula. Oleh karena itu, persamaan di atas dapat disubtitusikan ke dalam persamaan (3) dengan maksud mengembangkan suatu bentuk alternatif dari metode Newton-Raphson :

$$x_{r+1} = x_r - \frac{u(x_r)}{u'(x_r)} \dots \dots (4)$$

Persamaan (3) dapat didiferensialkan untuk memberikan

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \dots \dots (5)$$

Persamaan (3)dan (5) dapat disubstitusikan ke dalam Persamaan (4)dan hasilnya disederhanakan untuk menghasilkan

$$x_{r+1} = x_r - \frac{\dfrac{f(x_r)}{f'(x_r)}}{\dfrac{[f'(x_r)]^2 - f(x_r)f''(x_r)}{[f'(x_r)]^2}}$$

$$atau$$

$$x_{r+1} = x_i - \frac{f(x_r)f'(x_r)}{[f'(x_r)]^2 - f(x_r)f''(x_r)}$$

Meskipun rumus tersebut lebih disukai untuk akar ganda, namun ia kurang bagus sebab memerlukan lebih banyak komputasi daripada metode Newton Raphson yang baku.

Rumus tersebut berlaku secara umum, yaitu ia tetap dapat dipakai untuk pencarian akar tidak ganda sekalipun.

Contoh.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, dengan terkaan awal $x_0 = 0$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 8x + 5 \\ f''(x) &= 6x - 8 \end{aligned}$$

Dengan metode Newton-Rapshon yang baku:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{(xr^3 - 4xr^2 + 5xr - 2\,)}{(3xr^2 - 8xr + 5\,)}$$

Dengan metode Newton-Rapshon yang dimodifikasi:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)f'(x_r)}{[f'(x_r)]^2 - f(x_r)f''(x_r)}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{(xr^3 - 4xr^2 + 5xr - 2\,)(3xr^2 - 8xr + 5\,)}{(3xr^2 - 8xr + 5\,)^2 - (xr^3 - 4xr^2 + 5xr - 2\,)(6x_r - 8)}$$

Tabel lelarannya adalah:

Metode Newton-Rapshon Baku

$$x_{r+1} = x_r - \frac{(xr^3 - 4xr^2 + 5xr - 2\,)}{(3xr^2 - 8xr + 5\,)}$$

Metode Newton-Rapshon yang di modifikasi

$$x_{r+1} = x_r - \frac{(xr^3 - 4xr^2 + 5xr - 2\,)(3xr^2 - 8xr + 5\,)}{(3xr^2 - 8xr + 5\,)^2 - (xr^3 - 4xr^2 + 5xr - 2\,)(6x_r - 8)}$$

r	x_r	r	x_r
0	0.0000	**0**	0.0000

1	...	**1**	...
2	...	**2**	...
3	...	**3**	...
4	...	**4**	...
5	...	**5**	...
6	...	**6**	...
7	...	**7**	...
8	...	**8**	...
9	...	**9**	...
10	...	**10**	...
11	...	**11**	...

Lelaran konvergen ke akar $x = 1$. Terlihat dari tabel di atas bahwa metode newton yang dimodofikasi memiliki jumlah lelaran lebih sedikit.

2. Akar Polinom

Bentuk baku suatu persamaan yang memiliki akar polinom derajat ≥ n adalah

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

dengan n merupakan bilangan riil (0, 1, 2, ..., n). Polinom f(x) memiliki n buah akar, baik akar nyata maupun akar kompleks.

a. Metode Horner untuk Evaluasi Polinom

Menghitung langsung $p(x)$ untuk $x = 1$ tidak efektif sebab melibatkan banyak operasi perkalian. Metode Horner, atau disebut juga metode perkalian bersarang (*nested multiplication)* menyediakan cara perhitungan polinom dengan sedikit operasi perkalian. Dalam hal ini, polinom $p(x)$ dinyatakan sebagai perkalian bersarang

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x\left(a_2 + x\left(a_3 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x)\right)\right) \dots))$$

t	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
		tb_n	$\dots$	tb_2	tb_1
	$b_n=a_n$	$b_{n-1}=a_{n-1}+tb_n$		$b_1=a_1+tb_2$	$\boxed{b_0=a_0+tb_1}$

Polinom sisa

HasilEvaluasi :$p(t) = b_0$

Contoh.

Nyatakan $p(x) = x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 2$

Penyelesaian:

$p(x) = x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 2$ (15 operasi perkalian)

$p(x) = \left(\left(\left((x+2)x + 8\right)x + 8\right)x + 4\right)x + 2$ (hanya 5 operasi perkalian)

Dari pernyataan di atas jelas bahwa menggunakan metode perkalian bersarang akan jauh lebih efektif, tidak melakukan banyak operasi perkalian.

Perhitungan untuk $p(1)$ adalah

$$p(1) = \left(\left(\left((1+2)1 + 8\right)1 + 8\right)1 + 4\right)1 + 2 = 25$$

Metode perkalian bersarang untuk menghitung $p(t)$ sering kali dinyatakan dalam bentuk tabel Horner berikut: (untuk contoh di atas).

1	1	2	8	8	4	2
	1	3	11	19	23	
1	3	11	19	23	25	

Hasil evaluasi: $p(1) = 25$

Dan menghasilkan polinom sisa : $x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 19x + 23$

b. Pencarian Akar-akar Polinom

Proses perhitungan $p(x)$ untuk $x = t$ dengan menggunakan metode Horner sering dinamakan pembagian sintetis $p(x): (x - t)$, menghasilkan $q(x)$ dan sisa b_o

$$\left[\frac{p(x)}{(x-t)} = q(x)\right] + sisab_o$$

atau

$$p(x) = b_o + (x - t)q(x)$$

yang dalam hal ini,

$$q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_3x^2 + b_2x + b_1$$

Jika t adalah hampiran akar polinom$p(x)$ maka

$$p(t) = b_o + (t - t)q(t) = b_o + 0 = b_o$$

(perhatikan, jika t akar sejati, maka $b_o = 0$)

Akar-akar lain dari $p(x)$ dapat dicari dari polinom $q(x)$ sebab setiap akar $q(x)$ juga adalah akar $p(x)$. Proses reduksi polinom ini disebut deflasi (*deflation).* Koefisien-koefisien $q(x)$, yaitu $b_{n,}b_{n-1}, \dots, b_3, b_2, b_1$dapat ditemukan langsung dari tabel Horner.

Algoritmanya:

Misalkan akar polinom dihitung dengan metode Newton- Raphson,

$$\boldsymbol{x_{r+1}} = x_r - \frac{p(x)}{p'(x)}$$

Maka proses pencarian akar secara deflasi dapat dirumuskan dalam langkah 1 sampai 4 berikut ini.

Langkah 1

Menghitung $p(x_r)$ dapat dilakukan secara mangkus dengan metode Horner

Misalkan $t = x_r$ adalah hampiran akar polinom $p(x)$

$$p(x) = b_o + (x - x_r)q(x)$$

Perhitungan $p(x_r)$ menghasilkan

$$p(x_r) = b_o + (x_r - x_r)q(x_r) = b_o$$

Langkah 2

Menghitung $p'(x_r)$ secara mangkus:

Misalkan$t = x_r$ adalah hampiran akar polinom $p(x)$,

$$p(x) = b_o + (x - x_r)q(x)$$

Turunan dari p adalah

$$p'(x) = 0 + 1.q(x) + (x - x_r)q'(x) = q(x) + (x - x_r)q'(x)$$

Sehingga

$$p'(x) = q(x_r) + (x_r - x_r)q'(x_r) = q(x_r)$$

Langkah 3

$$\boldsymbol{x_{r+1}} = x_r - \frac{p(x)}{p'(x)}$$

Langkah 4

Ulangi langkah 1, 2 dan 3 sampai $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$

Contoh.

Temukan seluruh akar nyata polinom

$p(x) = x^6 + 4x^5 - 72x^4 - 214x^3 + 1127x^2 + 1602x - 5040$

Dengan tebakan awal $x_0 = 8$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode Newton-Raphson kita dapat memperoleh akar pertama yaitu 7.

Diketahui:

$$p(x) = x^6 + 4x^5 - 72x^4 - 214x^3 + 1127x^2 + 1602x - 5040$$

$$p'(x) = 6x^5 + 20x^4 - 288x^3 - 642x^2 + 2254x + 1602$$

$$x_0 = 8$$

Kemudian,

$$\boldsymbol{x_{r+1}} = x_r - \frac{p(x)}{p'(x)}$$

Maka:

$$\boldsymbol{x_1} = x_0 - \frac{x^6 + 4x^5 - 72x^4 - 214x^3 + 1127x^2 + 1602x - 5040}{6x^5 + 20x^4 - 288x^3 - 642x^2 + 2254x + 1602}$$

$$\boldsymbol{x_1} = 8 - \frac{68640}{109618} = 7{,}347$$

Setelah itu kita akan cari akar polinom derajat 6 dengan tebakan awal 8 (gunakan metode Newton-Raphson)

$$p(x) = x^6 + 4x^5 - 72x^4 - 214x^3 + 1127x^2 + 1602x - 5040$$
$$p'(x) = 6x^5 + 20x^4 - 288x^3 - 642x^2 + 2254x + 1602$$
$$x_0 = 8$$

Tabel Newton-Raphson

r	$\boldsymbol{x_r}$	$\boldsymbol{\lvert x_{r+1} - x_r \rvert}$
0	8,000	-
1	7,347	0,653
2	7,064	0,283
3	7,002	0,062
4	7,000	0,002
5	7,000	0,000

Hampiran akar $x = 7{,}000$

Deflasi→ $\boldsymbol{p(x) = (x - x_1)q(x) + b_0}$

Untuk mengetahui $q(x)$, lakukan skema horner yaitu :

7	1	4	-72	-214	1127	1602	-5040
		7	77	35	-1253	-882	5040
	1	11	5	-179	-126	720	0

Maka $q(x) = x^5 + 11x^4 + 5x^3 - 179x^2 - 126x + 720$

Setelah itu, ulangi cara penyelesaian seperti di atas hingga mendapatkan akar-akarnya yaitu -8, -5, -3, 2, 3 dan 7. Selesaikan soal tersebut pada kotak di bawah ini.

Latihan Soal

1. Tentukan seluruh akar akar nyata polinom $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0$ dengan tebakan awal $x_0 = 4$
2. Carilah akar-akar dari $f(x) = x^4 + 14x^3 + 47x^2 - 38x - 240$ dengan tebakan awal $x_0 = 3$
3. Carilah akar-akar dari $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ dengan tebakan awal $x_0 = -2$
4. Carilah akar-akar dari $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ dengan tebakan awal $x_0 = 2$

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 7 Sistem Dua Persamaan Nirlanjar

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan penyelesaian metode-metode yang ada pada sistem dua persamaan nirlanjar

Pada pembahasan modul 4 hanya menggunakan satu persamaan nirlanjar tapi pada modul 7 ini akan dikembangkan menjadi dua persamaan nirlanjar dengan bentuk umumnya sebagai berikut.

$f_1 (x_1, x_2, \ldots , x_n) = 0$

$f_2 (x_1, x_2, \ldots , x_n) = 0$

...

$f_n (x_1, x_2, \ldots , x_n) = 0$

Sistem dua persamaan nirlanjar ini dapat diselesaikan dengan menggunakan dua metode yaitu metode lelaran titik tetap dan Newton-Raphson.

1. **Metode Lelaran Titik Tetap**

   Lelaran Titik Tetap atau Iterasi Titik Tetap adalah suatu metode pencarian akar sebuah fungsi f(x) secara sederhana dengan menggunakan satu titik awal. Metode Iterasi Titik Tetap kadang-kadang dinamakan metode iterasi sederhana atau metode langsung atau metode substitusi beruntun.

   Perlu diketahui bahwa fungsi f(x) yang ingin dicari hampiran akarnya harus konvergen.

   Misal x adalah Fixed Point (Titik Tetap); fungsi f(x) bila g(x) = x dan f(x) = 0.

   Prosedur Metode Titik Tetap

1. Memisalkan f(x) adalah fungsi yang konvergen dengan f(x) = 0
2. Mengubah ke dalam bentuk x = g(x).
3. Mentukan nilai titik awal, misal x_1.
4. Mensubstitusikan titik awalnya ke persamaan g(x) sehingga $g(x_1) = x_2$, setelah itu titik x_2 yang diperoleh substitusikan lagi ke g(x) sehingga menghasilkan $g(x_2) = x_3$.
5. Jika dituliskan, dapat dilihat sebagai berikut:

Prosedur lelarannya titik-tetap untuk sistem dengan dua persamaan nirlanjar:

$x_{r+1} = g_1(x_r , y_r)$

$y_{r+1} = g_2(x_r , y_r)$

r = 0, 1, 2, ...

Contoh.

Selesaikan sistem persamaan nirlanjar berikut ini,

$f_1 (x, y) = x^2 + xy -10 = 0$

$f_2 (x, y) = y + 3xy^2 - 57 = 0$

(Akar sejatinya adalah x = 2 dan y = 3)

Penyelesaian:

Prosedur lelaran titik-tetapnya adalah

$x_{r+1} = \frac{10-Xr^2}{\mathrm{yr}}$

$y_{r+1} = 57 - 3x_{r+1}\, y_r^2$

Berikan tebakan awal $x_0 = 1.5$ dan $y_0 = 3.5$ dan $\varepsilon = 0.000001$

Tabel lelarannya adalah:

r	X	Y	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$	$\lvert y_{r+1} - y_r \rvert$
0	1.500000	3.500000	-	-
1	…	…	…	…
2	…	…	…	…
3	…	…	…	…
4	…	…	…	…

Ternyata lelarannya divergen]

Sekarang ubah persamaan prosedur lelarannya menjadi

$x_{r+1} = \sqrt{10 - Xr\ yr}$

$y_{r+1} = \sqrt{\frac{57-yr}{3Xr+1}}$

Tebakan awal x_0 = 1.5 dan y_0 = 3.5 dan ε = 0.000001. Hasilnya,

r	X	Y	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$	$\lvert y_{r+1} - y_r \rvert$
0	1.500000	3.500000	-	-

Akar x = 2.000000; y = 3.000000

2. Metode Newton-Raphson

Ingatlah kembali bahwa metode Newton-Raphson dapat diturunkan dari deret Taylor,

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r) f'(x_r)$$

atau

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, f'(x) \neq 0$$

Untuk fungsi dengan dua peubah, deret Taylor orde pertama dapat dituliskan untuk masing-masing persamaan sebagai

$$u_{r+1} = u_r + (x_{r+1} - x_r)\frac{\delta u_r}{\delta x} + (y_{r+1} - y_r)\frac{\delta u_r}{\delta y}$$

dan

$$v_{r+1} = v_r + (x_{r+1} - x_r)\frac{\delta v_r}{\delta x} + (y_{r+1} - y_r)\frac{\delta v_r}{\delta y}$$

Karena persoalan mencari akar, maka $u_{r+1} = 0$ dan $v_{r+1} = 0$, untuk memberikan

$$\frac{\delta u_r}{\delta x} x_{r+1} + \frac{\delta u_r}{\delta y} y_{r+1} = -u_r + x_r \frac{\delta u_r}{\delta x} + y_r \frac{\delta u_r}{\delta y}$$

dan

$$\frac{\delta v_r}{\delta x} x_{r+1} + \frac{\delta v_r}{\delta y} y_{r+1} = -v_r + x_r \frac{\delta v_r}{\delta x} + y_r \frac{\delta v_r}{\delta y}$$

Dengan sedikit manipulasi aljabar, kedua persamaan terakhir dapat dipecahkan menjadi

$$x_{r+1} = x_r - \frac{u_r \frac{\delta v_r}{\delta x} - v_r \frac{\delta u_r}{\delta x}}{\frac{\delta u_r}{\delta x}\frac{\delta v_r}{\delta y} - \frac{\delta u_r}{\delta y}\frac{\delta v_r}{\delta x}}$$

Penyebut dari masing-masing persamaan ini di acu sebagai **determinan Jacobi** dari sistem tersebut. Metode Newtom-Raphson dapat dirampatkan (*generalization*) untuk system dengan *n* persamaan.

Contoh.

Gunakan metode Newton-Rapshon untuk mencari akar

$f_1(x, y) = u = x^2 + xy - 10 = 0$

$f_2(x, y) = v = y + 3xy^2 - 57 = 0$

Dengan tebakan awal $x_0 = 1{,}5$ dan $y_0 = 3{,}5$

Penyelesaian.

$$\frac{\delta u_o}{\delta x} = 2x + y = 2(1{,}5) + 3{,}5 = 6{,}5$$

$$\frac{\delta u_o}{\delta y} = x = 1{,}5$$

$$\frac{\delta v_o}{\delta x} = 3y^2 = 3(3{,}5)^2 = 36{,}75$$

$$\frac{\delta v_o}{\delta y} = 1 + 6xy = 1 + 6(1{,}5) = 32{,}5$$

Determinan Jacobi untuk lelaran pertama adalah

$6{,}5(32{,}5) - 1.5(36{,}75) = 156{,}125$

Nilai-nilai fungsi dapat di hitung dari tebakan awal sebagai

$$u_o = (1{,}5)^2 + 1{,}5(3{,}5) - 10 = -2{,}5$$

$$v_o = (3{,}5)^2 + 3(1{,}5)(3{,}5)^2 - 57 = 1{,}625$$

Nilai dari x dan y pada lelaran pertama adalah

$$x_o = \frac{1,5 - (-2,5)(32,5) - 1,625(1,5)}{156,125} = 2,03603$$

dan

$$y_o = \frac{3,5 - (-2,5)(36,75) - 1,625(6,5)}{156,125} = 2,84388$$

Apabila lelarannya diteruskan, ia konvergen ke akar sejati $x = 2$ dan $y = 3$, metode Newton-Raphson mungkin saja divergen jika tebakan awal tidak cukup dekat ke akar. Penggambaran kurva masing-masing persamaan secara grafik dapat membantu pemilihan tebakan awal yang bagus.

Latihan Soal

1. Carilah akar persamaan $F_1(x,y) = 2x^2 + 2xy - 20 = 0$ dan $F_2(x,y) = y - xy^2 = 0$ dengan $x_0 = 3$ dan $y_0 = 0.375$ dengan $\varepsilon = 0.001$ selesaikan dengan menggunakan metode lelaran titik tetap persamaan nirlanjar.
2. Carilah akar persamaan $f_1(x,y) = x^2 + xy - 10 = 0$ dan $f_2(x,y) = 3xy^2 - 57 = 0$ dengan metode lelaran titik tetap. Gunakan ε = 0.000001 dan tebakan x_0 = 1.5 dan y_0 = 3.5
3. Selesaikan sistem persamaan nirlanjar dengan metode lelaran titik tetap berikut ini
   $f_1(x,y) = x + 3x^2y - 7 = 0$
   $f_2(x,y) = y^2 + xy - 6 = 0$
   $x_0 = 0.5$, $x_1 = 2.5$ dan $\varepsilon = 0.0005$
4. Gunakan metode Newton-Raphson untuk mencari akar :
   $f_1(x,y) = u = x^2 + xy - 10 = 0$
   $f_2(x,y) = v = y + 3xy^2 - 57 = 0$
   dengan tebakan awal x_0 = 1,5 dan y_0 = 3,5

5. Gunakan metode Newton-Raphson untuk mencari akar

   $f_1(x, y) = u = -x^2 + x - y + 0.5 = 0$

   $f_2(x, y) = v = x^2 - 5xy - y = 0$

   dengan tebakan awal $x_0 = y_0 = 1.2$
6. Tentukan titik potong kurva $f(x) = u = 2x^2 + 3y^2 - 50 = 0$ dengan kurva $g(x) = v = 2x^2 - y - 9 = 0$ dengan metode Newton Raphson, $x_0 = y_0 = 1$.

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 8 Solusi Sistem Persamaan Lanjar (1)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan penyelesaian metode-metode yang ada pada solusi system persamaan lanjar

Persamaan lanjar merupakan suatu bentuk persamaan-persamaan yang menyajikan banyak variabel bebas. Sebagai contoh bentuk persamaan lanjar dengan m persamaan dan n variabel bebas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

dimana:

a_{ij} untuk $i = 1$ s/d n dan $j = 1$ s/d n adalah koefisien atau persamaan

x_i untuk $i = 1$ s/d n adalah variabel bebas pada persamaan

Penyelesaian persamaan lanjar adalah penentuan nilai x_i untuk semua $i = 1$ s/d n yang memenuhi semua persamaan yang diberikan. Persamaan lanjar di atas dapat dinyatakan sebagai bentuk matriks yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan:

$Ax = B$

Dimana: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, dan\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Matriks **A** dinamakan dengan Matriks Koefisien dari persamaan lanjar, atau ada yang menamakan dengan matriks Jacobian. Vektor $\boldsymbol{x}$ dinamakan dengan vektor variabel (atau vektor keadaan) dan vektor **B** dinamakan dengan vektor konstanta. *Augmented Matrix* (matriks perluasan) dari persamaan lanjar adalah matriks perluasan A dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhirnya, dan dituliskan:

Augmented (A) = [A B]

Oleh sebab itu secara detail, augmented matriks dari persamaan lanjar dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Syarat-syarat untuk menyelesaikan persamaan lanjar.

1. Jumlah persamaan sama dengan jumlah variabel bebas, oleh sebab itu persamaan lanjar berupa bujursangkar.
2. Persamaan lanjar memiliki determinan bernilai tidak sama dengan nol.
3. Minimal ada satu nilai vektor konstanta B tidak nol atau ada $b_n \neq 0$.

Macam-macam metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan lanjar diantaranya adalah (1) metode eliminasi Gauss; (2) metode liminasi Gauss-Jordan; (3) metode matriks balikan; (4) metode dekomposisi LU; (5) metode lelaran Jacobi; dan (6) metode lelaran Gauss-Seidel.

1. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi gauss adalah metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yang menghilangkan atau mengurangi jumlah variabel. Sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variabel bebas. Dasar utamanya yaitu menjadikan persamaan linear yang terdiri dari beberapa bilangan yang tidak diketahui menjadi satu bilangan tak diketahui (dengan membuat suatu matriks segitiga atas atau bawah). Dalam menggunakan metode eliminasi Gauss ini, sebelumnya bentuk matriks diubah menjadi augmented matriks, seperti sistem persamaan berikut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode eliminasi Gauss adalah metode dimana bentuk matriks di atas, pada bagian kiri diubah menjadi matriks segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE (Operasi Baris Elementer).**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE) sendiri adalah suatu operasional pengubahan nilai elemen matriks berdasarkan barisnya, dengan tidak mengubah matriksnya. OBE pada baris ke-$i + k$ dengan dasar baris ke i dapat diformulasikan dengan:

$a_{i+k,j} = a_{i+k,j} - c. a_{i,j}$

dimana :

c adalah konstanta pengali yang diperoleh dari perbandingan nilai elemen $a_{i,i}$ dan $a_{i+k,i}$

Contoh.

Selesaikan sistem persamaan lanjar dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$2x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 17$

$x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 18$

Penyelesaian:

Augmented matriks pada persamaan lanjar diatas adalah:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 10 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & 18 \end{array}\right]$$

Sehingga, solusi sistem persamaan lanjar tersebut yaitu $x = (6, -3, 2)$

2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan adalah pengembangan metode eliminasi Gauss yaitu dengan cara membuat semua diagonal utama bernilai satu, sedangkan yang lain bernilai nol (segitiga bawah maupun segitiga atas bernilai nol) seperti gambar berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & d_3 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan lanjar diatas adalah:

$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \ldots, x_n = d_n$

Cara ini sama dengan cara yang digunakan pada metode eliminasi Gauss, yaitu dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) dan hasilnya langsung diperoleh pada kolom terakhir.

Contoh.

Selesaikan sistem persamaan lanjar berikut ini dengan metode eliminasi Gauss-Jordan:

$3x \quad + y \quad - z = 5$

$4x + 7y - 3z = 20$

$2x - 2y + 5z = 10$

Penyelesaian.

Bentuk persamaan lanjar tersebut menjadi augmented matriks :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 20 \\ 2 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

Sehingga, solusi sistem persamaan lanjar tersebut yaitu :

$$x = 1.51\ , y = 3.13\ , z = 2.65$$

Latihan Soal

1. Diketahui sistem persamaan lanjar:

$$\begin{aligned} x + 2y \ \ + z &= 6 \\ x + 3y + 2z &= 9 \\ 2x \ + y \ + 2z &= 12 \end{aligned}$$

   Tentukan nilai x, y, z dengan menggunakan metode eliminasi gauss!

2. Selesaikan persamaan lanjar berikut dengan metode eliminasi gauss:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \ - x_3 &= 2 \\ x_1 \ + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 \ - x_2 + 4x_3 &= 12 \end{aligned}$$

3. Carilah nilai x_1, x_2, x_3, x_4 pada persamaan lanjar dibawah ini menggunakan metode eliminasi Gauss.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -18 \\ 4x_1 \ + x_2 \ - x_3 \ + 2x_4 &= -11 \\ x_1 \ - x_2 \ - x_3 \ + 5x_4 &= -26 \\ 2x_1 \ - 3x_2 + 2x_3 \ - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

4. Carilah nilai x_1, x_2, x_3 pada persamaan lanjar dibawah ini menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8$$

5. Tentukan pemecahan SPL dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

   x + y + 2z = 9

   2x + 4y – 3z = 1

   3x + 6y – 5z = 0

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 9 Solusi Sistem Persamaan Lanjar (2)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan penyelesaian metode-metode yang ada pada solusi system persamaan lanjar

1. Metode Matriks Balikan

Suatu matriks bujusangkar A ukuran *n x n* dikatakan mempunyai Invers Matriks A^{-1} yang berukuran *n x n*, bila berlaku $A * A^{-1}$ = $A^{-1} * A$ = I_N (I_N adalah matriks indentitas berukuran *n x n*). Tidak setiap Matriks bujusangkar mempunyai invers. Syarat mempunyai invers adalah bahwa Determinan Matriks tersebut *tidak sama dengan nol*, atau Matriks merupakan Matriks *Nonsingular*.

Contoh Matriks I_N, untuk N = 3 adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk Matriks A berukuran (2x2). A = $\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ A(2,1) & A(2,2) \end{bmatrix}$

Dengan DET(A) = $A(1,1) * A(2,2) - A(1,2) * A(2,1)$.

Kita mempunyai rumus yang sangat mudah untuk menentukan inversnya,yakni

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \begin{bmatrix} A(2,2) & -A(1,2) \\ -A(2,1) & A(1,1) \end{bmatrix}$$

Jika Matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Maka $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$,hasilnya adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

Contoh.

Hitunglah Invers Matriks A : $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian.

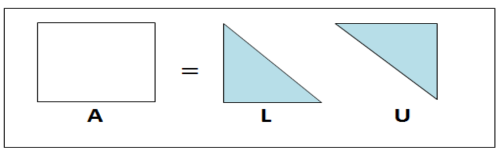
2. Metode Dekomposisi LU

Dekomposisi LU merupakan suatu metode untuk menemukan faktor-faktor dari suatu matriks. Metode dekomposisi LU, menggunakan cara pada sebuah sistem persamaan linear $Ax = b$, akan dapat diselesaikan dengan sangat mudah setelah matriks koefisien A (non singular/matriks yang memiliki invers) difaktorkan menjadi hasil kali antara matriks segitiga bawah dengan matriks segitiga atas.

a. Metode Pemfaktoran dengan Metode LU Gauss

Jika sebuah matriks A, $n \times n$ dapat difaktorkan menjadi suatu hasil kali matriks-matriks $n \times n$, yaitu :

A = LU



Dimana L adalah matriks segitiga bawah (*Lower*) dan U adalah matriks segitiga atas. Untuk mengubah matriks A menjadi matriks L dan U, terdapat langkah-langkah yang perlu diamati, yakni sebagai berikut :

Langkah 1. Buat terlebih dahulu matriks U atau matriks segitiga atas dengan menggunakan metode eliminasi *Gauss* untuk membentuk segitiga 0 pada segitiga bawah. Pada matriks ordo 3 × 3, maka terdapat 3 angka yang dieliminasi.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Buat matriks L atau matriks segitiga bawah dengan mengisi nilai pengali yang digunakan dalam membentuk angka 0 pada metode *Gauss* ketika membuat matriks U. Pengali ini diisi sesuai dengan posisi saat memproses suatu bilangan pada matriks. Pada matriks ordo 3×3, maka terdapat 3 angka pengali yang digunakan. Diagonal pada matriks L adalah 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Apabila kita melihat sistem persamaan aljabar linear sebelumnya, yaitu $Ax = b$, maka akan didapat $LUx = b$, Sehingga apabila kita misalkan $Ux = y$, maka kita akan mendapatkan $Ly = b$. Terdapat langkah-langkah untuk mengaplikasikan metode ini untuk menentukan faktor-faktor dari persamaan $Ax = b$, yakni sebagai berikut :

Langkah 1. Tuliskan kembali sistem persamaan $Ax = b$.

Langkah 2. Pada matriks A, tentukanlah matriks U dengan menggunakan metode eliminasi *Gauss*, membentuk 0 pada segitiga L. Lalu tentukanlah matriks segitiga L dengan mengisi segitiga L dengan angka-angka pengali pada saat mengeliminasi A dengan metode *Gauss*, dimana diagonal yang membatasi matriks L adalah 1, segitiga atas U pada L adalah 0. Contoh pada matriks berordo 3×3 berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 3. Buatlah persamaan $Ly = b$, kemudian tentukan nilai y.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Langkah 4. Buatlah persamaan $Ux = y$, kemudian tentukan nilai x.

;

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Contoh.

Tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 dari persamaan-persamaan linear berikut dengan menggunakan dekomposisi LU!

$$5x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 0$$

$$-8x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1$$

$$4x_2 + 26x_3 = 4$$

Penyelesaian.

- $AX = B$

  $$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ -8 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  $$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ -8 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 26 \end{bmatrix} \left(b_2 + \frac{8}{5} b_1\right) \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 26 \end{bmatrix} (b_3 - 4b_2) \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

  $$U = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- $LY = B$

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Maka nilai y_1, y_2 dan y_3; x_1, x_2 dan x_3 adalah

Latihan Soal.

1. Tentukan nilai x_1, x_2, x_3 dan x_4 dari persamaan-persamaan linear berikut dengan menggunakan dekomposisi LU!

$$x_1 + 2x_3 + 7x_4 = 11$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9$$
$$3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10$$

2. Tentukan matriks balikan dari matriks berikut!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan invers matriks berikut, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ menggunakan matriks balikan!

4. Selesaikan persamaan linier di bawah ini dengan metode LU dan eliminasi Gauss

$$4x_1 + \mathrm{x}_2 - x_3 = -2$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 10 Solusi Sistem Persamaan Lanjar (3)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan penyelesaian metode-metode yang ada pada solusi system persamaan lanjar

1. Metode Jacobi

Metode Iterasi Jacobi adalah metode iterasi yang menghitung nilai hampiran sekarang atau terbaru dengan mengacu pada nilai hampiran sebelumnya.

Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel konvergen untuk setiap SPL yang memiliki matriks koefisien bersifat dominan secara diagonal.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{C}\mathbf{b}$$

Untuk iterasi Jacobi ; ***M = -D^{-1}(L+U) dan C = D^{-1}***

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq 1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2,\ldots$$

Dalam bentuk system persamaan dapat ditulis menjadi

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

.

.

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_3^{(k)} - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}$$

Contoh.

Selesaikan sistem persamaan linear ini dengan Iterasi Jacobi:

4x – y + z = 7

4x – 8y + z = -21

-2x + y +5z =15

Penyelesaian.

- Sistem persamaan (1) dapat ditulis sebagai

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{21 + 4x + z}{8}$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$

- Sistem persamaan (2) menghasilkan proses iterasi Jacobi sebagai berikut:

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}$$

$$y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k - z_k}{8}$$

$$z_{k+1} = \frac{15 + 2x_k - y_k}{5}$$

- Dengan mengambil $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 2$, iterasi (3) menghasilkan :

$$x_1 = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1{,}75$$

$$y_1 = \frac{21 + 4 + 2}{8} = 3{,}375$$

$$z_1 = \frac{15 + 2 - 2}{5} = 3{,}00$$

r	Xr	yr	Zr	$\|Xr + 1 \ - Xr\|$	$\|Yr + 1 \ - \ Yr\|$	$\|Zr + 1 \ - \ Zr\|$
0	1.0000	2.0000	2,0000	-	-	-
1	1.7500	3,3750	3.0000	0.7500	1.3750	1.0000
2	…	…	…	…	…	…
3	…	…	…	…	…	…
4	…	…	…	…	…	…
5	…	…	…	…	…	…
6	…	…	…	…	…	…
7	…	…	…	…	…	…
8	…	…	…	…	…	…

Ternyata solusi eksak dari sistem Persamaan (1) diatas adalah $x_{19,}y_{19,}z_{19}$. Jadi proses iterasi Jacobi (3) konvergen kesolusi eksak.

Note. Lelaran berhenti ketika nilai |Xr+1 – Xr|, |Yr+1 – Yr| dan |Zr+1 – Zr| bernilai 0 atau paling mendekati 0.

2. Metode Gauss – Seidel

Metode Gaus – Seidel adalah metode iterasi yang menghitung nilai hampiran sekarang dengan mengacu pada nilai hampiran terbaru.

Dibandingkan dengan metoda Jacobi, metode Gaus-Seidel merupakan metode literasi yang paling umum digunakan, asumsikan bahwa diberikan himpunan n persamaan :

[A] [X] = [C]

Jika elemen-elemen diagonal semuanya tak nol, persamaan pertamanya dapat diselesaikan untuk x_1, yang kedua untuk x_2, dan seterusnya sehingga menghasilkan

$X_1 = \frac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$ .... *(a)*

$X_2 = \frac{c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$ .... *(b)*

$X_3 = \frac{c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n}{a_{33}}$ .... *(c)*

. .

. .

$X_n = \frac{c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$ ....*(d)*

Setelah diberikannya rumus persamaan , proses penyelesaian dapat dimulai dengan memakai terkaan-terkaan untuk bentuk x.Cara yang mudah untuk menentukan terkaan-terkaan awal adalah dengan mengasumsikan bahwa semuaya bernilai nol.nol-nol ini dapat disubtitusikan ke persamaan *1a* untuk mendapatkan nilai x_1.kemudian nilai x_1 yang telah didapat ini disubtitusikan kepersamaan *1b* bersama dengan terkaan terkaan nol sebelumnya untuk x_3,....,x_n, untuk menghitung nilai baru x_2.Prosesnya diulagi untuk tiap persamaan sampai persamaan *1d*dipakai untuk menghitung suatu taksiran x_n.Kemudian kembali kepersamaan pertama dan mengulangi keseluruhan prosedurenya sampai penyelesaia konvergen cukup dekat ke nilai nilai sejati.Nilai konvergen sejatinya dapat diperiksa dengan menggunakan persamaan :

$|\epsilon_{a,i}| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| 100\% < \epsilon_s$ ....*(e)*

Untuk semua i, dimana j dan j-1 adalah literasi literasi sekarang dan sebelumnya.

Contoh.

Gunakan metode Gaus-Seidel untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem persaman

$4x - y + z = 7$

$4x - 8y + z = -21$

$-2x + y + 5z = 15$

Dengan nilai awal $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$. solusi sejatinya adalah (2,4,3).

Penyelesaian.

Sistem persamaan dapat ditulis sebagai berikut :

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{21 + 4x + z}{8}$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$

r	Xr	Yr	Zr	|Xr+1 – Xr|	|Yr+1 – Yr|	|Zr+1 – Zr|
0	1.0000	2.0000	2.0000	-	-	-
1	1.7500	3.7500	2.9500	…	…	…
2	…	…	…	…	…	…
3	…	…	…	…	…	…
4	…	…	…	…	…	…
5	…	…	…	…	…	…
6	…	…	…	…	…	…

Jadi, x = … y = … z = ….

Note. Lelaran berhenti ketika nilai |Xr+1 – Xr|, |Yr+1 – Yr| dan |Zr+1 – Zr| bernilai 0 atau paling mendekati 0.

Latihan Soal

1. Pada soal-soal berikut, dengan mengambil $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, gunakan iterasi jacobi untuk mencari $x_{k,} y_{k,} z_{k,}$

   a. $10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$

      $-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 = 15$

      $-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 27$

      $-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 = -9$

   b. $3x + y - z = 5$

      $4x + 7y - 3z = 20$

      $2x - 2y + 5z = 10$

2. Gunakan metode Gaus-Seidel untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem persaman:

   a. $27x + 6y - z = 85$

      $6x + 15y + 2z = 72$

      $x + y + 54z = 110$

   b. $4x + 7y - 3z = 20$

      $2x - 2y + 5z = 10$

   c. $x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25,$

      $2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11,$

      $3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15.$

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 11 Integrasi Numerik (1)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menguasai penyelesaian-penyelesaian dengan menggunakan metode yang ada pada integrase numerik

Di dalam kalkulus, integral adalah satu dari dua pokok bahasan yang mendasar disamping turunan (*derivative*). Dalam kuliah kalkulus integral, anda telah diajarkan cara memperoleh solusi analitik (dan eksak) dari **integral Tak-tentu** maupun **integral Tentu**. Integral Tak-tentu dinyatakan sebagai

$$\int f\,(x)dx = F(x) + C$$

Terdapat dua pendekatan dalam menurunkan rumus integrasi numerik. Pendekatan pertama adalah berdasarkan tafsiran geometri integral Tentu. Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias (*strip*) yang berbentuk segiempat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias. Rumus, dalam bab ini disebut kaidah, integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam **metode pias**.

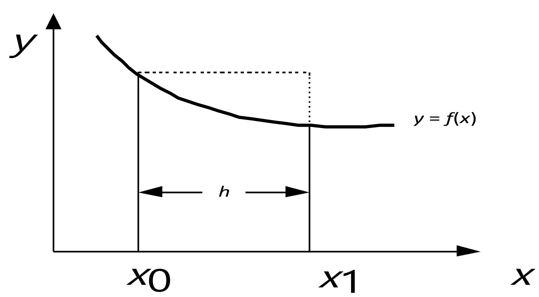
Pendekatan kedua adalah berdasarkan polinom interpolasi. Di sini fungsi *integrand* $f(x)$ dihampiri dengan polinom interpolasi $p_n(x)$. Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$ karena polinom lebih mudah diintegralkan ketimbang mengintegralkan $f(x)$. Rumus integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam **metode Newton-Cotes**, yaitu metode yang umum untuk menurunkan rumus integarsi numerik.

Metode Pias

Kaidah integrasi numerik yang dapat diturunkan dengan metode pias adalah (1) kaidah segiempat (*rectangle rule*); (2) kaidah trapesium (*trapezoidal rule*); dan (3) kaidah titik tengah (*midpoint rule*). Dua kaidah pertama pada hakekatnya sama, hanya cara penurunan rumusnya yang berbeda, sedangkan kaidah yang ketiga, kaidah titik tengah, merupakan bentuk kompromi untuk memperoleh nilai hampiran yang lebih baik.

a. Kaidah Segiempat

Pandang sebuah pias berbentuk empat persegi panjang dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ berikut.



Luas satu pias adalah (tinggi pias = $f(x_0)$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_0)$$

atau (tinggi pias = $f(x_1)$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_1)$$

Jadi,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_1)$$

$$2\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h[f(x_1) + f(x_0)]$$

Bagi setiap ruas persamaan hasil penjumlahan di atas dengan 2 untuk menghasilkan

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{h}{2}f(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + \cdots + hf(x_{n-1}) + \frac{h}{2}f(x_n)$$

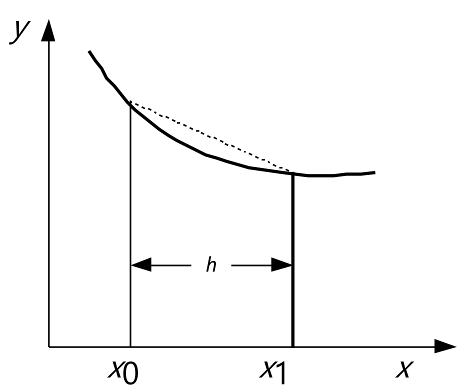
b. Kaidah Trapesium

Sebuah pias berbentuk trapesium dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ berikut.

Luas satu trapesium adalah

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0)]$$

Persamaan di atas ini dikenal dengan nama **kaidah trapesium**. Catatlah bahwa kaidah trapesium sama dengan kaidah segiempat.



Bila selang [*a*, *b*] dibagi atas *n* buah pias trapesium, kaidah integrasi yang diperoleh adalah **kaidah trapesium gabungan** (*composite trapezoidal's rule).*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \tfrac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \tfrac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \tfrac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_1 + f_n\right)$$

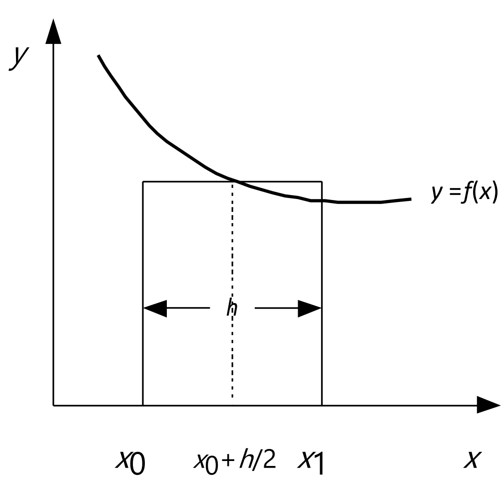
Dengan $f_r = f(x_r)$, r = 0, 1, 2, ...

c. Kaidah Titik Tengah

Sebuah pias berbentuk empat persegi panjaang dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ dan titik tengah absis $x = x_0 + h/2$. Luas satu pias adalah

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \approx f(x_{1/2})$$

Persamaan ini dikenal dengan nama **kaidah titik-tengah**.



Kaidah titik tengah gabungan adalah

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx hf(x_{1/2}) + hf(x_{3/2}) + \cdots + hf(x_{n-1/2})$$

$$\approx h(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}) \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2}$$

yang dalam hal ini,

$x_{r+1/2} = a + (r+1/2)h)$

dan $f_{r+1/2} = f(x_{r+1/2})$, r = 0, 1, 2, ..., n-1

Carilah Materi tentang **Galat** untuk Kaidah-kaidah yang ada pada metode pias!

Contoh.

`Gunakan kaidah segiempat, trapezium (dengan h= 0.1) dan titik tengah $\int_0^1 (4x - x^2)dx$.

Kemudian hitung galatnya dari masing-masing kaidah!

Penyelesaian.

Perhitungan secara analitik

$$\int_{0}^{1} (4x - x^2)dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = (2.1 - \frac{1}{3}.1) - 0 = \frac{5}{3}$$

Perhitungan dengan kaidah segiempat

h = jarak x_0 ke x_1 = 1

$$\int_{0}^{1} (4x - x^2)dx \approx h.fx_1 \approx (1).2x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = 1.(2.1 - \frac{1}{3}.1) - 0 = \frac{5}{3}$$

Perhitungan dengan kaidah trapezium

Jumlah pias adalah n = $\frac{(b-a)}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$

r	**x_r**	**$F(x_r)$**
0	0.0	...
1	0.1	...
2	0.2	...
3	0.3	...
4	0.4	...
5	0.5	...
6	0.6	...
7	0.7	...
8	0.8	...
9	0.9	...
10	1.0	...

Nilai integrasinya,

$$\int_0^1 (4x - x^2)dx \approx \frac{h}{2}[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + f_{10}]$$

Substitusikan nilai-nilai dari fungsi di atas

Perhitungan dengan kaidah titik tengah

Latihan Soal

1. Selesaikan dengan menggunakan kaidah segiempat, trapezium dan titik tengah. Ambil h = 0.2 dan gunakan 5 angka bena. Hitunglah integral di bawah ini.

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx$$

2. Gunakan kaidah trapezium dan titik tengah dengan satu segmen, dua segmen dan empat segmen untuk integral

$$\int_{1}^{2} (4x - x^2 dx$$

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 12 Integrasi Numerik (2)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menguasai penyelesaian-penyelesaian dengan menggunakan metode yang ada pada integrase numerik

Metode Newton-Cotes

Metode ini adalah metode yang umum untuk menurunkan kaidah integrasi numerik. Polinom interpolasi menjadi dasar metode ini. Idenya merupakan hampiran fungsi f(x) dengan polinom P_n (x).

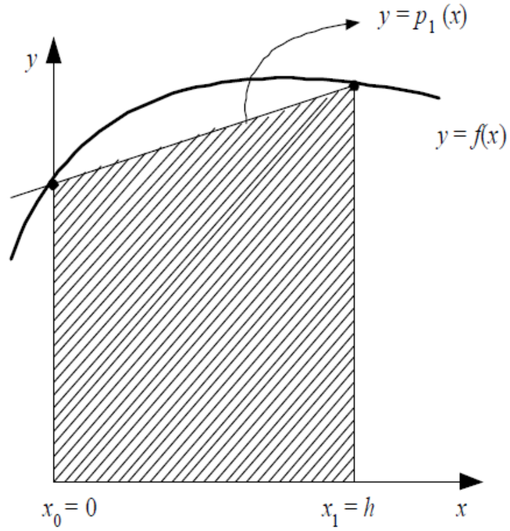
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

Dimana $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

Mengapa polinom interpolasi? Karena suku-suku polinom mudah diintegralkan dengan rumus integral yang sudah baku. Dalam metode Newton-Cotes ini dibagi menjadi beberapa kaidah integrase numerik, seperti (1) kaidah trapezium; (2) kaidah Simpson 1/3; dan (3) kaidah Simpson 3/8.

1. **Kaidah Trapesium**

   Diketahui dua buah titik (0, f(0)) dan (h, f(h)). Polinom interpolasi yang melalui kedua titik tersebut merupakan sebuah garis lurus. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrase adalah daerah di bawah gariis lurus tersebut.



Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 1 yang melalui kedua buah titik itu adalah

$$p_1(x) = f(x_0) + x\frac{\Delta f(x_0)}{h} = f_0 + x\frac{\Delta f_0}{h}$$

Integrasikan p_1 (x) di dalam selang [0,1]

$$I = \int_0^h f(x)dx \approx \int_0^h P_1(x)dx$$

$$\approx \int_0^h \left(f_0 + x\frac{\Delta f_0}{h}\right)dx$$

$$\approx xf_0 + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0 \Big|_{x=0}^{x=h}$$

$$\approx hf_0 + \frac{h}{2}\Delta f_0$$

$$\approx hf_0 + \frac{h}{2}(f_1 - f_0), \qquad sebab\ \Delta f_0 = f_1 - f_0$$

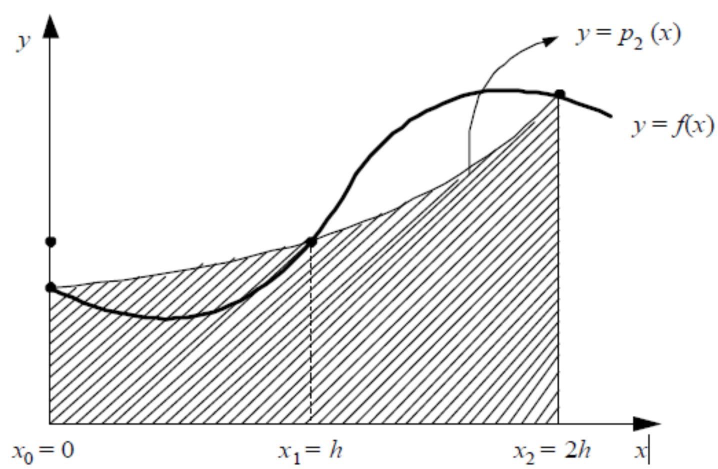
$$\approx \frac{h}{2}f_0 + \frac{h}{2}f_1 \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Jadi, kaidah trapezium adalah

$$\int_{0}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,(f_0 + f_1)$$

2. Kaidah Simpson 1/3

Hampiran nilai integrasi yang lebih baik dapat ditingkatkan dengan menggunakan polinom interpolasi berderajat yang lebih tinggi. Misalnya, f(x) dihampiri dengan polinom interpolasi derajat 2 sehingga grafiknya berbentuk parabola. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah parabola sehingga dibutuhkan 3 titik, misalnya (0,f(0)), (h,f(h)) dan (2h,f(2h)) seperti pada gambar di bawah ini.



Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga buah titik itu adalah

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f(x_0) = f_0 + x\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0$$

Integrasikan p_1 (x) di dalam selang [0,1]

$$I = \int_0^{2h} f(x)dx \approx \int_0^{2h} P_2(x)dx$$

$$\approx \int_0^{2h} \left(f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{h}\Delta^2 f_0\right) dx$$

$$\approx x f_0 + \frac{1}{2h}x^2 \Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h}\right)\Delta^2 f_0 \Big|_{x=0}^{x=2h}$$

$$\approx 2hf_0 + \frac{4h^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h}\right)\Delta^2 f_0$$

$$\approx 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h\right)\Delta^2 f_0$$

$$\approx 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \tfrac{h}{3}\Delta^2 f_0,\ sebab\ \Delta f_0 = f_1 - f_0$$

Dan

$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$

Maka, setelah disubstitusikan menjadi

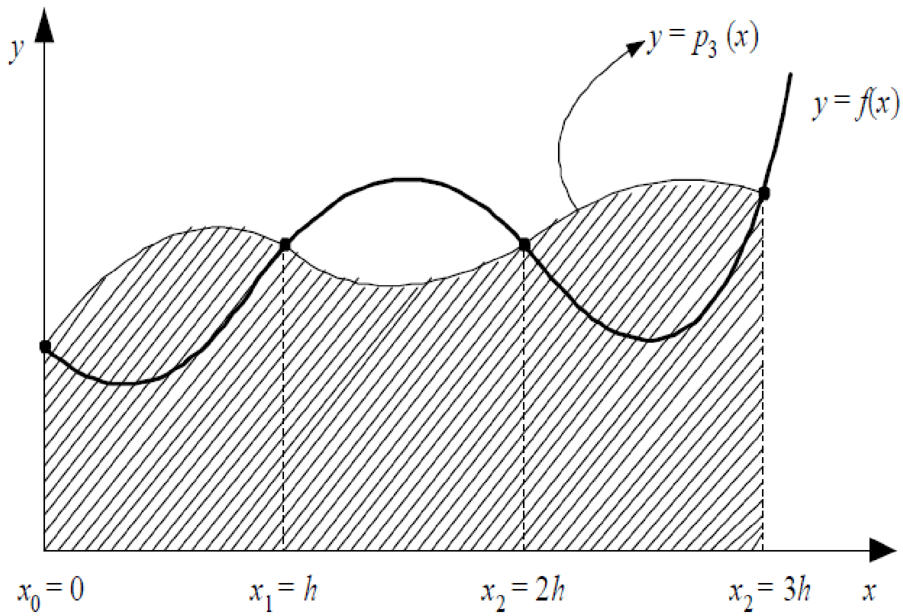
$$\approx 2hf_0 + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_2 + 4f_1 + f_0)$$

Persamaan ini dinamakan kaidah Simpson 1/3 karena pada persamaan diatas terdapat faktor 1/3.

3. Kaidah Simpson 3/8

Serupa dengan kaidah Simpson 1/3, hampiran nilai integrasi yang lebih teliti dapat ditingkatkan terus dengan menggunakan polinom interpolasi berderajat lebih tinggi pula. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah kurva polinom derajat 3 sehingga dibutuhkan 4 buah titik misalnya (0,f(0)), (h, f(h)), (2h,f(2h)) dan (3h,f(3h)).



Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga buah titik itu adalah

$$p_3(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f(x_0)$$

$$= f_0 + x\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f_0$$

Integrasikan p_1 (x) di dalam selang [0,1]

$$I = \int_0^{3h} f(x)dx \approx \int_0^{3h} P \quad (x)dx$$

$$\approx \int_0^{3h} \left(f_0 + x\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f_0\right)dx$$

$\approx \frac{3h}{8}(f_3 + 3f_2 + 3f_1 + f_0)$ yang merupakan kaidah Simpson 3/8

Carilah Materi tentang **Galat** untuk Kaidah-kaidah yang ada pada metode Newton-Cotes!

Contoh.

Hitunglah integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ dengan menggunakan kaidah trapezium, Simpson 1/3 dan Simpson 3/8. (dimana h = 0.125)

Penyelesaian.

Jumlah selang n = (1-0)/0.125 = 8

Tabel untuk kaidah trapezium, Simpson 1/3 dan Simpson 3/8

r	x_r	f_r
0	0	1
1	...	...
2	...	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...
6	...	...
7	...	...
8	...	...

Latihan Soal.

1. Hitung $\int_0^1 \sqrt{x}dx$ sampai lima angka bena dan h = 1/8. Gunakan kaidah trapezium dan Simpson 1/3 untuk menyelesaikannya!
2. Diketahui f(x) = $x^2 \cos(x^2)$, $1.5 \le x \le 2.5$ dan h = 0.1. Hitung nilai integral dari fungsi tersebut dengan menggunakan (1) kaidah trapezium; (2) kaidah Simpson 1/3; dan (3) kaidah Simpson 3/8.
3. Hitung $\int_1^{1.3} \sqrt{x}dx$ sampai lima angka bena dan h = 0.05. Bandingkan penyelesaian dengan menggunakan kaidah Simpson 1/3 dan Simpson 3/8 untuk menyelesaikannya!
4. HItung secara analitik $\int_a^b x^3 dx$. Nyatakan jawaban Anda dalam a dan b. Perlihatkan bahwa jika integral tersebut diselesaikan dengan kaidah Simpson 1/3 hasilnya sama dengan nilai integrasinya secara analitik!

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 13 Turunan Numerik (1)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menguasai penyelesaian-penyelesaian dengan menggunakan metode yang ada pada turunan numerik

Tidak berbeda dengan modul sebelumnya, Anda pun telah mempelajari definisi turunan fungsi pada mata kuliah Kalkulus Diferensial yaitu.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dalam kehidupan sehari-hari banyak menggunakan turunan fungsi untuk menghasilkan suatu penemuan terutama dalam bidang rekayasa. Misalnya untuk menghitung batas-batas galat interpolasi polinom atau untuk menghitung galat integrasi numerik dengan kaidah trapezium.

1. Tiga Pendekatan dalam Turunan Numerik

Pendekatan-pendekatan dalam turunan numerik dibedakan menjadi tiga, sebagai berikut.

a. Hampiran selisih-maju

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

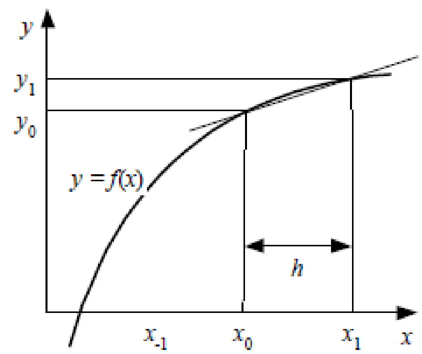
b. Hampiran selisih-mundur

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h} = \frac{f_0 - f_1}{h}$$

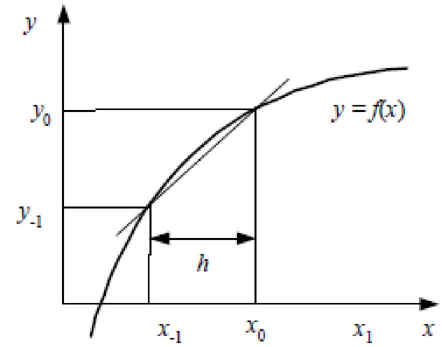
c. Hampiran selisih pusat

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

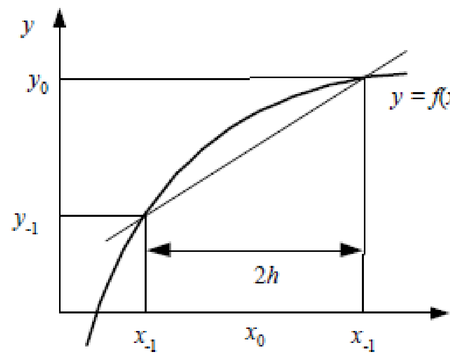
Secara geometris dapat dilihat dari grafik-grafik di bawah ini.



(a) Hampiran selisih-maju



(b) Hampiran selisih-mundur



(c) Hampiran selisih-pusat

Rumus-rumus turunan numerik berkaitan dengan tiga pendekatan di atas dapat diturunkan dengan du acara, yaitu deret Taylor dan polonom interpolasi

2. Penurunan Rumus Turunan denga Deret Taylor

Diketahui (x_i, f_i) dimana I = 0, 1, 2, …, n dimana

$x_i = x_0 + ih$ dan $f_i = f(x_i)$

Untuk menghitung f'(x) dimana $x = x_0 + sh$, $s \in R$ dengan ketiga pendekatan di atas.

a. Hampiran Selisih-Maju

Uraikan $f(x_{i+1})$ di sekitar x_i

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \cdots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \cdots$$

$$hf'_i = f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{2} f''_i + \cdots$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} f''_i$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

$$sehingga\ O(h) = -\frac{h}{2} f''_i, dimana\ x_i < t < x_{i+1}$$

b. Hampiran Selisih-mundur

Turunkanlah rumus deret Taylor sehingga menghasilkan hampiran selisih-mundur

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

c. Hampiran selisih-pusat

Turunkanlah rumus deret Taylor sehingga menghasilkan hampiran selisih-mundur

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{2h} + O(h)$$

3. Penurunan Rumus Turunan dengan Polinom Interpolasi

Misalkan diberikan titik dengan jarak sama,

$x_i = x_0 + ih$ dimana I = 0, 1, 2, …, n

dan $x = x_0 + sh$, $s \in R$

adalah titik yang akan dicari nilai interpolasinya. Polinom Newton-Gregory yang menginterpolasi seluruh titik data tersebut yaitu.

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + \frac{s\Delta f_0}{1!} + s(s-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + s(s-1)(s-2) \dots (s-(n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!} = F(s)$$

Dimana s = $\frac{x-x_0}{h}$

Turunan pertama dari f(x) adalah

$$f'^{(x)} = \frac{df}{dx} = \frac{dF}{ds}\frac{ds}{dx}$$

$$= \left(0 + \Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{s^2}{2} - s + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 f_0 + \cdots\right)\frac{1}{h}$$

$$= \left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + galat\right)\frac{1}{h}$$

Berdasarkan rumus di atas maka ketika menggunakan pendekatan pada turunan numerik sebagai berikut.

a. Hampiran selisih-maju

Bila digunakan titik-titik x_0 dan x_1, maka

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta f_0) = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

Bila menggunakan titik-titik x_0, x_1 dan x_2, maka

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0\right)$$

$$untuk\ titik\ \mathrm{x}_0 \rightarrow \mathrm{s}\ = \frac{\mathrm{x}_0 - x_0}{h} = 0\ sehingga$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_0)\right)$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

b. Hampiran selisih mundur

Bila digunakan titik-titik x_0 dan x_1, maka

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(\nabla f_0) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}$$

Carilah rumus hampiran selisih mundur jika digunakan x_0, x_1 dan x_2

c. Hampiran selisih-pusat

Carilah rumus hampiran selisih mundur jika digunakan x_0, x_1 dan x_2

Contoh.

Diketahui data

x	**F(x)**
1.3	3.669
1.5	4.482
1.7	5.474
1.9	6.686

2.1	8.166
2.3	9.974
2.5	12.182

Hitunglah dengan empat angka bena:

1. F'(1.7) dengan rumus hampiran selisih pusat orde $O(h^2)$
2. F'(1.4) dengan rumus hampiran selisih pusat orde $O(h^2)$

Penyelesaian.

Latihan Soal.

a. Turunkanlah rumus untuk turunan kedua pendekatan hampiran selisih-maju, selisih-mundur dan selisih-pusat dengan menggunakan deret Taylor dan polinom interpolasi.

b. Diketahui data

x	F(x)
1.000	0.54030
1.100	0.45360
1.198	0.36422
1.199	0.36329
1.200	0.36236
1.201	0.36143
1.202	0.36049
1.300	0.26750
1.400	0.16997

Hitunglah dengan empat angka bena:

a. $F'(1.2)$ dan $F''(1.2)$ untuk $h = 0.1$ dan $h = 0.0001$ dengan rumus hampiran selisih pusat orde $O(h^2)$ dan $O(h^4)$

b. Jika f(x) tabel di atas adalah $f(x) = \cos x$. Bandingkan jawaban yang Anda peroleh antara solusi sejati (numerik) dan ketiga pendekatan hampiran pada materi di atas.

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Modul 14 Turunan Numerik (2)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa dapat memahami dan menguasai penyelesaian-penyelesaian dengan menggunakan metode yang ada pada turunan numerik

1. Menentukan Orde Galat

Pada penurunan rumus turunan numerik dengan deret Taylor, kita dapat langsung memperoleh rumus galatnya. Lain halnya dengan polinom interpolasi, dimana penurunan rumus galatnya harus diturunkan dengan bantuan deret Taylor. Misalnya, pada pendekatan hampiran selisih-pusat, rumus galatnya adalah

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$E = f'(x_0) - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$E = f'(x_0) - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} = f'(x_0) - 1/2h[(f_0 + hf_0' + \tfrac{h^2}{2} f_0'' + \tfrac{h^3}{6} f_0''' + \ldots) -$$

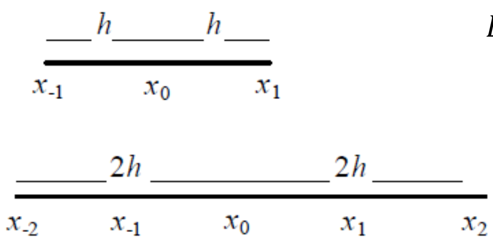
$$(f_0 - hf_0' + \tfrac{h^2}{2} f_0'' - \tfrac{h^3}{6} f_0''' + \ldots)]$$

$$E = f_0' - \frac{1}{2h}(2hf_0' + \tfrac{h^3}{3} f_0''' + \ldots) = -\tfrac{h^2}{6} f_0''' + \ldots = -\tfrac{h^2}{6} f'''(t) = \mathrm{O}(h^2)$$

Jadi, hampiran selisih-pusat memiliki galat E = $-\frac{h^2}{6} f'''(t), x_{-1} < t < x_1$

2. Ekstrapolasi Richardson

Ekstrapolasi Richardson juga dapat diterapkan pada turunan numerik untuk memperoleh solusi yang lebih teliti. Misalkan D(h) dan D(2h) adalah hampiran f' (x_0) dengan mengambil titik-titik masing-masing sejarak h dan 2h. Misalkan untuk menghitung f' (x_0) digunakan rumus hampiran beda-pusat orde O(h^2).



$$D(h) = \frac{1}{2}h\,(f_1 - f_{-1}) + O(h^2) = f_0' + Ch^2 + \cdots \text{ (i)}$$

$$D(2h) = \frac{1}{2(2h)}\,(f_2 - f_{-2}) + O((2h)^2)$$

$$= f_0' + C(2h)^2 + \cdots (ii)$$

Kurangi kedua persamaan tersebut D(h) – D(2h) = -3Ch^2

Sehingga $C = \frac{D(h) - D(2h)}{-3h^2}\ (iii)$

Substitusikan persamaan (ii) ke (iii)

Jadi, $f_0' = D(h) + \frac{1}{3}[D(h) - D(2h)]$

Contoh.

Diketahui data pada sebuah tabel.

x	f(x)
2.0	0.42298
2.1	0.40051
2.2	0.37507
2.3	0.34718
2.4	0.31729
2.5	0.28587
2.6	0.25337

2.7	0.22008
2.8	0.18649
2.9	0.15290
30	0.11963

Tentukan f'(2.5) dengan ektrapolasi Richardson bila D(h) dan D(2h) dihitung dengan rumus hampiran selisih-pusat orde O(h^2) sampai lima angka bena.

Penyelesaian.

D(h) → selang titik yang dipakai [2.4 ; 2.6] dan h = 0.1

x_{-1} = 2.4 ; x_0 = 2.5; dan x_1 = 2.6

$$D(h) = \frac{1}{2}h\,(f_1 - f_{-1}) = \frac{(0.25337 - 0.31729)}{2(0.1)} = -0.31960$$

D(2h) → selang titik yang dipakai [2.3 ; 2.7] dan h = 0.2

x_{-2} = 2.3 ; x_0 = 2.5; dan x_2 = 2.7

$$D(2h) = \frac{1}{2}h\,(f_2 - f_{-2}) = \frac{(0.22008 - 0.34718)}{2(0.2)} = -0.31775$$

Dengan rumus orde O(h^2) maka n = 2, jadi

$$f'(2.5) = f_0' = D(h) + \frac{1}{(2^2 - 1)}[D(h) - D(2h)]$$

$$f'(2.5) = f_0' = -0.31960 + \frac{1}{(2^2 - 1)}[-0.31960 - (-0.31775)] = -0.32050$$

Lanjutkan untuk perhitungan D(2h)

Latihan Soal.

1. Misalkan D(2h) dan D(4h) adalah hampiran $f'(x_0)$ dengan lebar selang 2h dan 4h menggunakan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^4)$. Turunkan rumus ektrapolasi Richardson untuk menghitung perkiraan $f'(x_0)$ yang lebih baik adalah

$$f'(x_0) = D(2h) + \frac{[D(2h) - D(4h)]}{15}$$

Kemudian tentukan hampiran f'(1.2) jika diketahui fungsinya f (x) = e^x dalam selang [0.8; 1.6] dengan h = 0.1.

Refleksi

Apakah kesulitan atau kendala yang Anda temui dalam menyelesaikan masalah tentang materi ini?

Tanggapan:

Daftar Pustaka

Ardi Pujiyanti, 2007. *Komputasi Numerik dengan Matlab*, Yogyakarta : Graha Ilmu.

Anton Rorres, 2004. *Aljabar Linear Elementer,* Jakarta : Erlangga.

Bambang Triatmodjo, 2002. *Metode Numerik dilengkapi dengan Komputer*, Yogyakarta : Beta Offset.

Daniel, William, dan Farida. 1986. *Studi Kasus Metode Numerik dengan Fortran IV.* Bandung: Penerbit Erlangga.

H.S. Suryadi. *Pengantar Metode Numerik.* Gundarma.

Hernadi, Julan. *Teori dan Komputasi Numerik Diferensial dan Integral.* 20s15 Yogyakarta : Graha Ilmu.

Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi 5.* Jakarta : Erlangga.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik Revisi Ketiga.* Jakarta: Informatika.

Pujiyanta, Ardi. 2007. *Komputasi Numerik dengan Matlab*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Sangadji. *Metode Numerik.* 2008. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Sasongko, Setia Budi. 2010. Metode Numerik dengan Scilab. Yogyakarta: CV.Andi Offset.

Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik.* Yogyakarta: Andi.

Subakti, Irfan. 2006. Metode Numerik. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November.

Triatmojo, Bambang. 2002. *Metode Numerik.*Yogyakarta: Beta Offset.

Triatmodjo, B. 2010. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta.

Triadmojo, Bambang. 2010. Metode Numerik (Dilengkapi dengan Program Komputer. Yogyakarta : Beta Offset.

Vahlia, I., & Agustina, R. (2016). Perbandingan Hasil Belajar Discovery Learning Berbasis Problem Solving Dan Group Investigation Berbasis Problem Solving Pada Pembelajaran Metode Numerik. *AKSIOMA Journal of Mathematics Education*, *5*(1), 82–93. https://doi.org/10.24127/ajpm.v5i1.469.

Yulistyanto, Bambang. *Aplikasi Untuk Teknik Sipil.* Yogyakara : Universitas Gajah Mada.