KOMBINATORIAL

&

PELUANG DISKRIT

KOMBINATORIAL

- Kombinatorial adalah cabang Matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek.
- Solusi yang diperoleh dengan kombinatorial adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunannya.

Percobaan

- Kombinatorial didasarkan pada hasil yang diperoleh dari suatu percobaan.

Contoh percobaan dan hasilnya :

1. Melempar dadu
2. Melempar koin uang Rp 100,-
3. Memilih 5 orang wakil
4. Menyusun jumlah kata yang panjangnya 5 huruf

Kaidah Dasar Menghitung.

- Kaidah dasar menghitung yang digunakan dalam kombinatorial :

  kaidah perkalian dan

  kaidah penjumlahan.

- Kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan dapat diperluas hingga mengandung lebih dari dua percobaan.

1. Kaidah perkalian
   bila percobaan 1 dan percobaan 2 dilakukan, maka terdapat $p \times q$ hasil percobaan (atau menghasilkan $p \times q$ kemungkinan jawaban).

2. Kaidah penjumlakan
   bila hanya satu percobaan saja yang dilakukan (percobaan 1 atau percobaan 2), terdapat $p + q$ kemungkinan hasil percobaan (menghasilkan $p + q$ kemungkinan jawaban) yang mungkin terjadi.

Contoh

Misalkan 2 buah dadu yang berbeda warnanya (merah dan putih) dilontarkan. Ada berapa macam cara untuk mendapatkan jumlah angka 4 atau 8 ?

Cara untuk mendapatkan jumlah angka = 4 adalah sebagai berikut :

Dadu merah	Dadu putih
1	3
2	2
3	1

Ada tiga cara

Cara untuk mendapatkan jumlah angka = 8 adalah sebagai berikut :

Dadu merah	Dadu putih
2	6
3	5
4	4
6	2
5	3

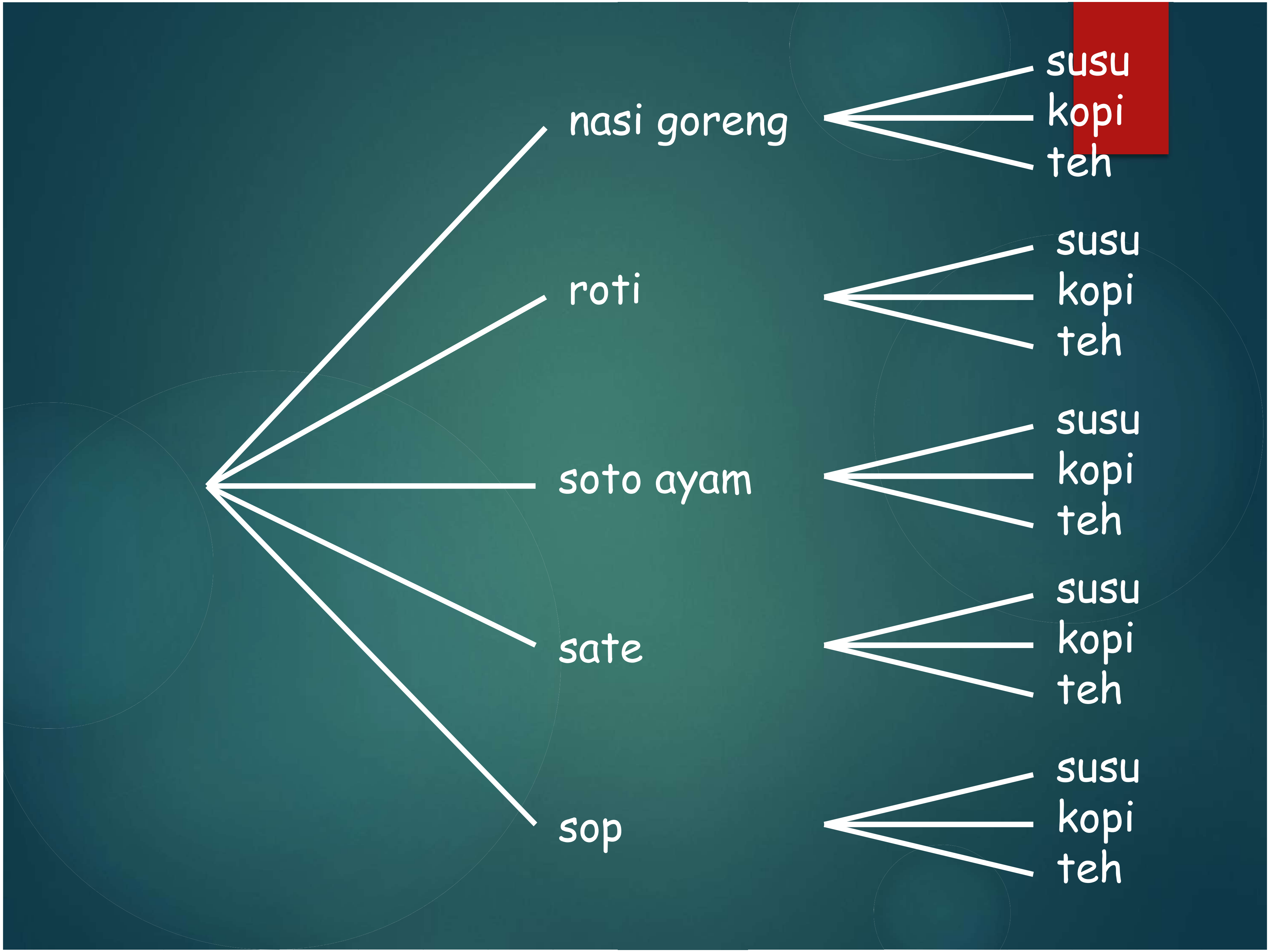
Ada lima cara

Jadi untuk mendapatkan jumlah angka 4 atau 8 adalah 3 + 5 = 8 cara

Contoh

Sebuah restoran menyediakan lima jenis makanan, misalnya nasi goreng, roti, soto ayam, sate dan sop, serta ketiga jenis minuman yaitu susu, kopi, dan the. Jika setiap orang boleh memesan satu makanan dan satu minuman, berapa nbanyak pasangan makanan dan minuman yang dapat dipesan?

Dari persoalan diatas, kita dapat menggunakan diagram pohon untuk menentukan jumlah pasangan makanan dan minuman yang akan dipesan.


nasi goreng
susu
kopi
teh
roti
susu
kopi
teh
soto ayam
susu
kopi
teh
sate
susu
kopi
teh
sop
susu
kopi
teh

Perluasan Kaidah Menghitung.

Jika n percobaan masing – masing mempunyai $p_1, p_2, \ldots p_n$ hasil percobaan yang mungkin terjadi yang dalam hal ini setiap p_1 tidak bergantung pada pilihan sebelumnya, maka jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah :

a. $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ (kaidah perkalian)
b. $P_1 + p_2 + \ldots + p_n$ (kaidah penjumlahan)

Contoh

Jika ada sepuluh pertanyaan yang masing – masing bisa dijawab benar atau salah, berapakah kemungkinan kombinasi jawaban yang dibuat

$$\frac{B/S}{1}\quad\frac{B/S}{2}\quad\frac{B/S}{3}\quad\frac{B/S}{4}\quad\frac{B/S}{5}\quad\frac{B/S}{6}\quad\frac{B/S}{7}\quad\frac{B/S}{8}\quad\frac{B/S}{9}\quad\frac{B/S}{10}$$

$$(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^{10}$$

Contoh

Misal terdapat 6 buah buku berbahasa inggris, 8 buah buku berbahasa perancis, dan 10 buah buku berbahasa jerman. Masing – masing buku berbeda judulnya. –masing Berapa jumlah cara memilih :

a. 3 buah buku, masing – masing dari tiap buah buku yang berbeda bahasa,
b. 1 buku sembarang bahasa

(a) Jumlah cara memilih 3 buah buku, masing-masing dari tiap bahasa adalah (6)(8)(10) = 480 cara.

(b) Jumlah cara memilih 1 buah buku (sembarang bahasa) = 6 + 8 + 10 = 24 cara

Contoh

Berapa nilai k sesudah kode program Pascal berikut dieksekusi?

```
k : = 0
for p1 : = 1 to n1 do
    k : = k + 1 ;
for p2 : = 1 to n2 do
    k : = k + 1 ;
.
.
.
for pm : = 1 to nm do
    k : = k + 1 ;
```

m buah kalang (pengulangan) **for**. Dieksekusi sebanyak n_i kali. Nilai k selalu ditambah 1 (nilai k pada awalnya 0). Setiap kalang dilaksanakan **tidak secara bersamaan**, maka nilai k dihitung dgn **kaidah penjumlahan**. Jadi $k = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Contoh

Berapa nilai k sesudah kode program Pascal berikut dieksekusi?

```
k := 0
for p1 := 1 to n1 do
   for p2 := 1 to n2 do
     .
     .
     .
       for pm := 1 to nm do
     k := k + 1 ;
```

m buah kalang (pengulangan) for-do bersarang (*nested*).
Dieksekusi sebanyak n_i kali.
Nilai k selalu ditambah 1 (nilai k pada awalnya 0).
Setiap kalang dilaksanakan secara bersamaan, maka nilai k dihitung dgn kaidah perkalian.
Jadi $k = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$.

Contoh

Jika terdapat 64 posisi pengisian bit yang masing-masing memiliki 2 kemungkinan nilai, 0 atau 1, maka jumlah kombinasi kunci yang harus dicoba adalah :

$$(2)(2)(2)(2)(2)\cdots(2)(2)\,(sebanyak\;64\;kali) = 2^{64}$$

$$= 18.446.744.073.709.551.616$$

Contoh

Suatu bilangan dibentuk dari angka-angka
$\underbrace{2, 3, 4, 5, 7, 8, \text{dan } 9}_{\text{7 angka}}$

Misalkan pengulangan angka tidak dibolehkan.

Berapa banyak bilangan 4 angka yang kurang dari 5000 namun habis dibagi 5 yang dapat dibentuk dari angka-angka tersebut?

Ada 4 angka bilangan yang akan dibentuk : _ _ _ _

Karena disyaratkan bilangan kelipatan 5, maka angka paling kanan hanya dapat diisi dengan angka 5 saja (satu cara) → _ _ _ 5

Angka posisi ke 1 dapat diisi dengan 3 cara (yaitu 2, 3 dan 4) → < 5000

Angka posisi ke 2 dapat diisi dengan 5 cara (2 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke 1 dan ke 4) 7 – 2 = 5

Angka posisi ke 3 dapat diisi dengan 4 cara (3 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke 1, ke 2 dan ke 4) 7 – 3 = 4

Karena seluruh posisi angka harus terisi, maka kita menggunakan kaidah perkalian, yaitu 3x5x4x1 = 60 buah.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Informasi terkecil yang dapat disimpan di dalam memori komputer adalah *byte*.
Setiap byte disusun oleh 8-bit.

Berapa banyak jumlah byte yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11' ?

Misalkan :

A = himpunan byte yang dimulai dengan '11'
B = himpunan byte yang diakhiri dengan '11'
$A \cap B$ = himpunan byte yang berawal dan berakhir dengan '11'

$A \cup B$ = himpunan byte yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

Jumlah byte yang dimulai dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah, karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan '11', sehingga cukup mengisi 6 posisi bit sisanya.
Jadi $|A| = 64$

1 1 - - - - - - → 8 bit

Jumlah byte yang diakhiri dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah,
Jadi $|B| = 64$

- - - - - - 1 1

Jumlah byte yang berawal dan berakhir dengan '11' ada 2^4 16 buah, karena 2 posisi pertama dan 2 posisi terakhir sudah diisi dengan '11', sehingga tinggal mengisi 4 posisi bit di tengah saja. Jadi $|A \cap B| = 16$

1 1 - - - - 1 1

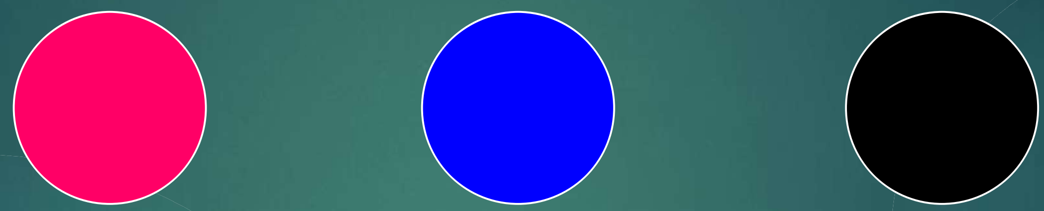
Menggunakan prinsip inklusi-eksklusi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^6 + 2^6 - 2^4$$
$$= 64 + 64 - 16 = 112 \text{ buah}$$

Permutasi

Definisi : Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

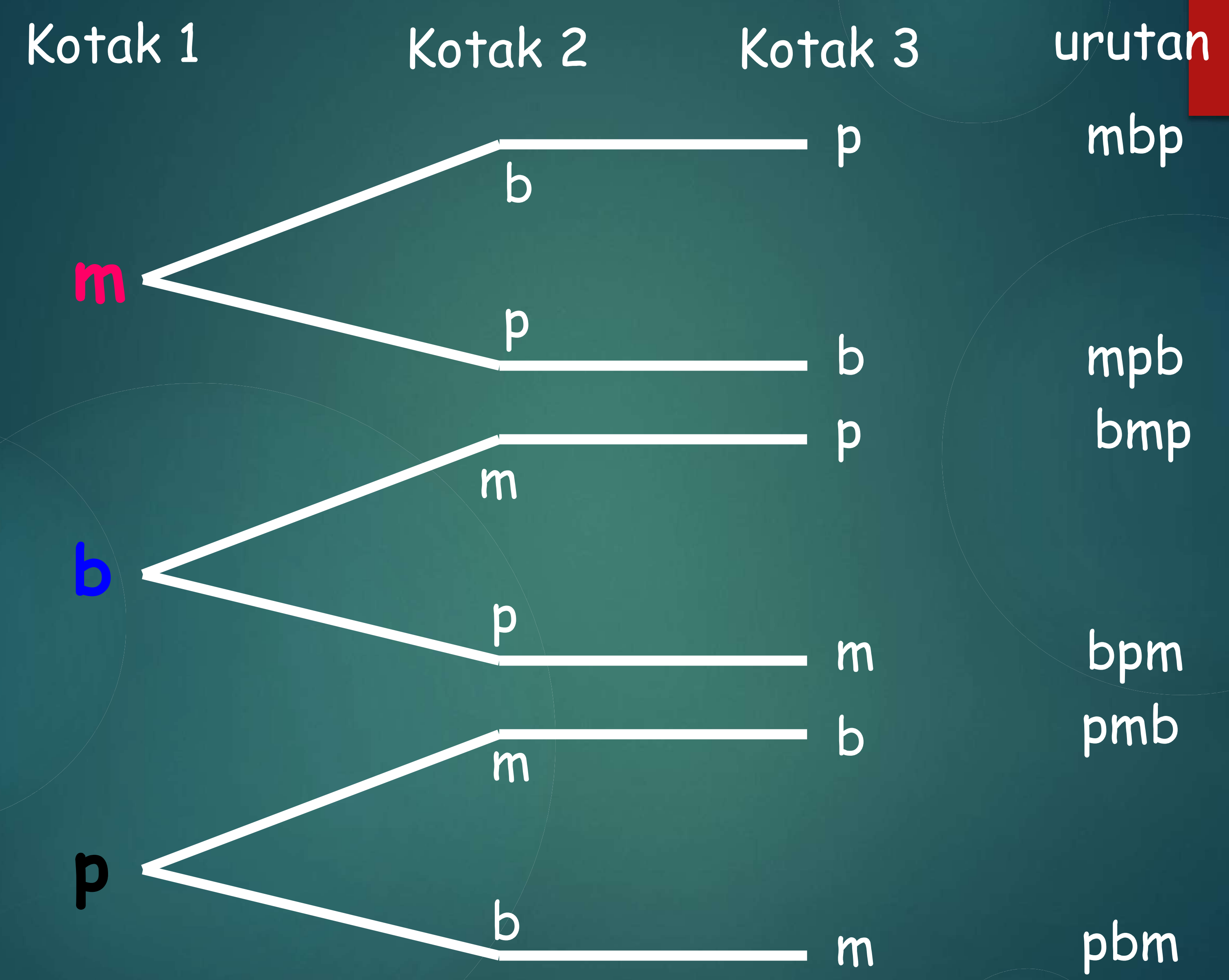
Bola :



m b p

Kotak :

1 2 3



Kemungkinan urutan berbeda (3)(2)(1) = 3! = 6 buah

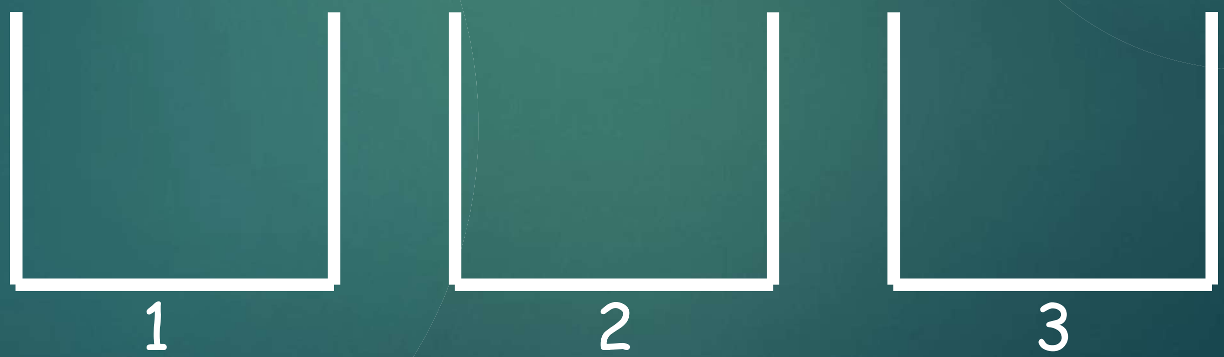
Permutasi

- **Definisi 6.1**: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian .
- Menurut kaidah perkalian permutasi dari n objek adalah :

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots\ldots (2)(1) = n! \qquad (6.1)$$

Bola :

Kotak :



Kemungkinan urutan berbeda (6)(5)(4) = 120 buah

Jika contoh dirampatkan (bentuk secara umum) sehingga ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

Kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola (ada n pilihan)
Kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 1)$bola (ada $n-1$ pilihan)
Kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 2)$bola (ada $n-2$ pilihan)

Kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari $(n-(r-1))$bola(ada $n-r+1$ pilihan)

Menurut kaidah perkalian, jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah → $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$

Permutasi-r

Jumlah susunan berbeda dari pemilihan r objek yang diambil dari n objek disebut permutasi – r, dilambangkan dengan P(n,r) , yaitu :

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad r \leq n \qquad (6.2)$$

Definisi 6.2 : Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$. Dalam hal ini pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

Jumlah cara memasukkan 6 buah bola yang berbeda warnanya ke dalam 3 buah kotak adalah

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

Jumlah kemungkinan urutan 2 dari 3 elemen himpunan $A = \{a, b, c\}$ adalah

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

Bila $r = n$, maka persamaan (6.2) menjadi sama dengan (6.1)

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Contoh

Berapa banyak " kata " yang terbentuk dari kata **BOSAN** ?

Cara 1 : $(5)(4)(3)(2)(1) = 120$ buah kata
Cara 2 : $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

Contoh

Berapa banyak cara penyusunan 15 puzzle seperti contoh dibawah ini?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

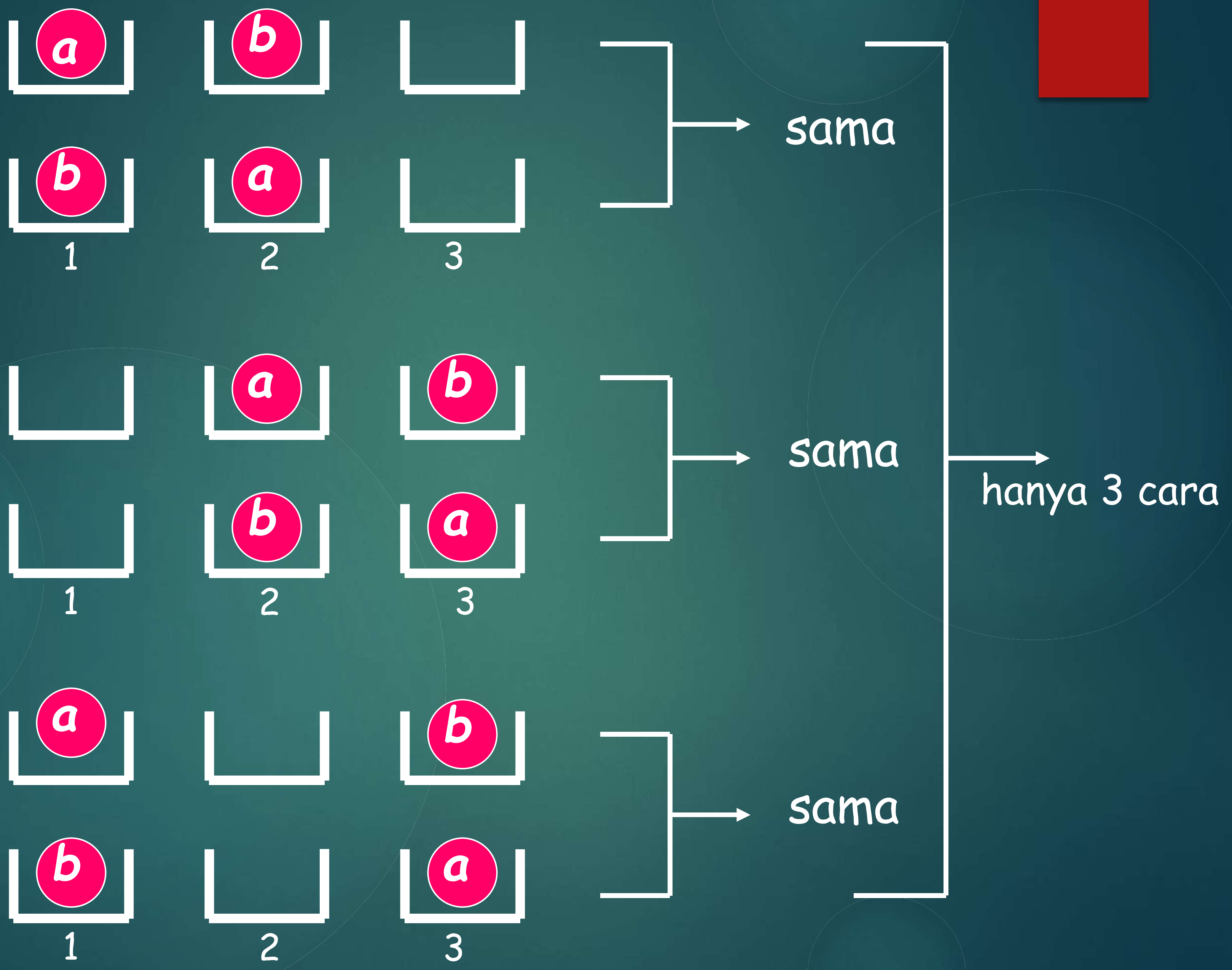
Cara 1 : P (16, 15) → salah, karena sel kosong tidak dianggap sebagai sebuah objek berbeda dari yang lain.

P (16, 16) = 16! → betul

Kombinasi

- Kombinasi adalah bentuk khusus dari pemutasi.
- Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan.
- Urutan abc, bca dan acb dianggap sama dan dihitung sekali.

Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama



Jumlah cara memasukkan 2 buah bola yang warnanya sama ke dalam 3 buah kotak

$$\frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$

Sekarang bila jumlah bola **3** dan jumlah kotak **10**, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

Karena ada **3!** cara memasukkan bola yang warnanya merah semua.

Secara umum, jumlah cara memasukkan **r** buah bola yang berwarna sama ke dalam **n** buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Rumus $C = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ disebut rumus **kombinasi-r**,

dan dilambangkan dengan $C(n, r)$

atau $\dbinom{n}{r}$

Kombinasi - r

- Definisi 6.4 : Kombinasi r elemen dari n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.
- Rumus :

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (6.3)$$

C(n,r) dibaca " n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek

Interpretasi kombinasi

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$
Jumlah himpunan bagian dengan 2 elemen yang dapat dibentuk dari himpunan *A* ada 3 buah, yaitu :

$$\left.\begin{array}{l} \{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\} \end{array}\right\rangle \text{3 buah}$$

atau $$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3\ buah$$

Contoh 6.27 :

Ada berapa cara dapat memilih 3 dari 4 elemen himpunan $A = \{a, b, c, d\}$?

Ini adalah persoalan kombinasi karena urutan kemunculan ketiga elemen tersebut tidak penting

Himpunan bagian A dengan 3 elemen	Permutasi setiap himpunan bagian
$\{a, b, c\}$	abc,acb,bca,bac,cab,cba
$\{a, b, d\}$	abd,adb,bda,bad,dab,dba
$\{a, c, d\}$	acd,adc,cda,cad,dac,dca
$\{b, c, d\}$	bcd,bdc,cdb,cbd,dbc,dcb

Untuk setiap 3 elemen ada 3! = 6 urutan yang berbeda (permutasi $P = n!$).

Jadi jumlah cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan adalah

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

yaitu himpunan {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, dan {b, c, d}.

Contoh

Sebuah koin yang mempunyai sisi A dan sisi B di lempar keatas sebanyak 4 (empat) kali.
Berapakah jumlah kemungkinan munculnya sisi A sebanyak 3(tiga) kali?

Penyelesaian :
Ini adalah persoalan dari kombinasi karena kita tidak mementingkan kapan sisi A tersebut muncul.
Jadi, jumlah kemungkinan munculnya sisi A sebanyak 3(tiga) kali adalah

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{(4)\,3!}{3!\cdot 1!} = 4$$

Contoh

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Panitia : 6 orang, jumlah wanita lebih banyak dp jumlah pria

Panitia terdiri dari 5 wanita, 1 pria →
dapat dibentuk dengan $C(10,5) \times C(8,1)$

Panitia terdiri dari 4 wanita, 2 pria →
dapat dibentuk dengan $C(10,4) \times C(8,2)$

Panitia terdiri dari 6 wanita, 0 pria →
dapat dibentuk dengan $C(10,6) \times C(8,0)$

Jumlah cara pembentukan panitia seluruhnya = $C(10,5) \times C(8,1) + C(10,4) \times C(8.2) + C(10,6) \times C(8,0)$

Contoh

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Andaikan apartemen A, B, C ditempati masing-masing oleh 4, 3 dan 3 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,4) \times C(6,3) \times C(3,3)$

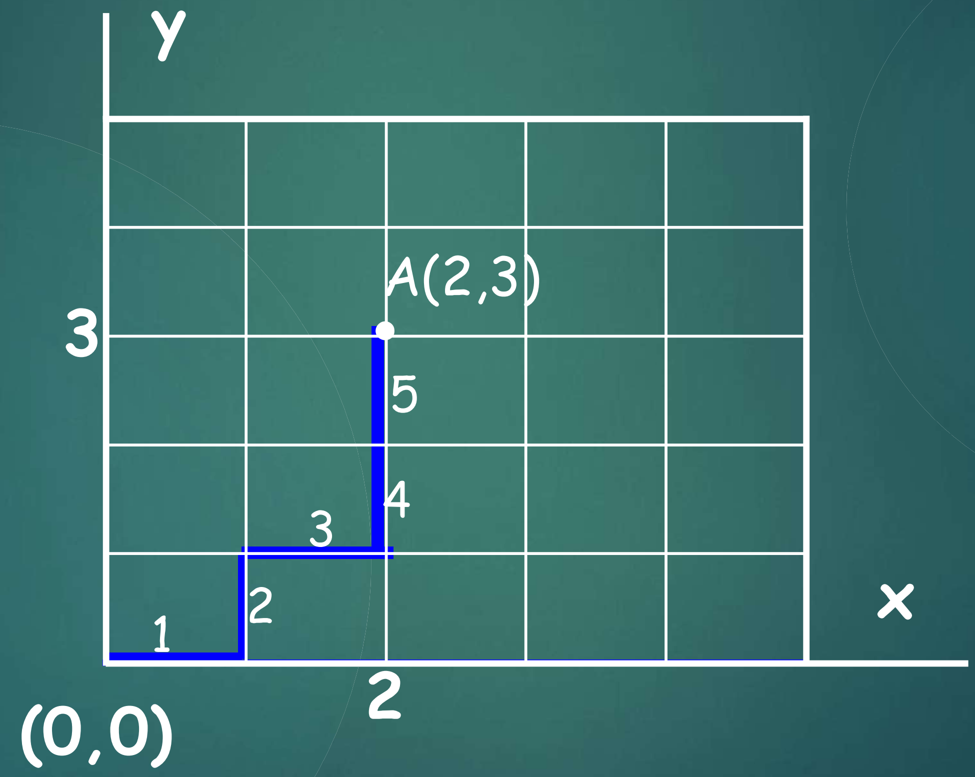
Andaikan apartemen A, B, C ditempati masing-masing oleh 3, 4 dan 3 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,3) \times C(7,4) \times C(3,3)$

Andaikan apartemen A, B, C ditempati masing-masing oleh 3, 3 dan 4 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,3) \times C(7,3) \times C(4,4)$

Total seluruh cara menyewakan = $C(10,4)C(6,3) + C(10,3)C(7,4) + C(10,3)C(7,3)$

$= 3C(10,4)C(6,3)$

Contoh



Gambar 6.4

Panjang lintasan = ***m*** + ***n*** langkah (***m*** horizontal dan ***n*** vertikal)

Contohnya, pada gambar 6.4

Panjang lintasan dari (0,0) ke *A*(**2**,**3**) = 2 + 3 = **5**

Banyaknya lintasan =

$$= C(2+3, 2) = C(5, 2) = \frac{5!}{(2!)(3!)} = 10$$

$$= C(2+3, 3) = C(5, 3) = \frac{5!}{(3!)(2!)} = 10$$

$$\boxed{C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Kita mempunyai n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama – *indistinguishable*). Misalkan dari n **buah bola** itu terdapat

n_1 bola diantaranya berwarna 1,

n_2 bola diantaranya berwarna 2,

n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$

Dengan demikian, permutasi n buah bola yang mana

n_1 diantaranya berwarna 1,

n_2 bola berwarna 2,...

n_k bola berwarna k adalah :

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \qquad (6.4)$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots n_k!} \qquad (6.5)$$

Dinamakan kombinasi bentuk umum (*generalized combination*)

Kita dapat melihat bahwa **tidak ada** perbedaan antara permutasi bentuk umum dengan kombinasi bentuk umum.

Keduanya dapat dihitung dengan rumus yang sama

$$P(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)=C(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Contoh

S = {M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I}

huruf M = 1 buah (n_1)
huruf I = 4 buah (n_2)
huruf S = 4 buah (n_3)
huruf P = 2 buah (n_4)
n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11 buah = jumlah elemen himpunan S

Ada **2 cara** yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan ini, keduanya memberikan hasil yang sama :

Cara 1 : Jumlah *string* =

$$P(11; 1, 4, 4, 2) = \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \textit{ buah}$$

Cara 2 : Jumlah *string* =

$$= C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \textit{ buah}$$

GENERALISASI PERMUTA
DAN KOMBINASI

1) Permutasi Dengan Pengulangan

Menghitung banyaknya permutasi saat pengulangan diperbolehkan dapat dilakuka menggunakan prinsip perkalian, seperti pada contoh berikut.

Contoh 1

Berapa banyak string dengan panjang n dapat dibentuk dari huruf alphabet?

Jawab

Misal n adalah 2

A = (aa, ab, ac,…,az) = 26

B = (bb, ba, bc,…,bz) = 26

.

Z = (zz, za, zb,….,zy) = 26

Jadi, hasil dari alphabet A-Z = 26+26+26+…+26 = 676

Dalam rumus generalisasi permutasi n^r = 26^2 = 676

GENERALISASI PERMUTASI DAN KOMBINASI

Teorema 1
Banyaknya permutasi $-r$ pada himpunan dengan n elemen jika pengulan diperbolehkan adalah n^r.

Bukti

Dalam permutasi $-r$ pada himpunan dengan n objek, karena pengulangar diperbolehkan, maka ada n cara untuk memilih elemen pada masing – ma posisi dalam permutasi $-r$. Sehingga berdasarkan aturan perkalian, ada sebanyak n^r permutasi $-r$ jika pengulangan diperbolehkan.

GENERALISASI PERMUTASI DAN KOMBINASI

2) Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh 2

Dalam sebuah keranjang terdapat buah apel, jeruk, dan mangga. Masing - masing j buah-buahan tersebut sedikitnya berjumlah empat buah. Jika kita ingin mengambil buah-buahan dari dalam keranjang, Berapa banyak
cara memilih keempat buah-buahan itu jika urutannya tidak diperhatikan?

Jawab

Kemungkinan yang ada :

4 apel	4 jeruk	4 mangga
3 apel,1 jeruk	3 apel,1 mangga	3 jeruk,1 apel
3 jeruk,1 mangga	3 mangga,1 apel	2 jeruk,1 apel,1 mangga
2 apel,2 jeruk	2 apel,2 mangga	2 apel,1 jeruk,1 mangga
2 jeruk,2 mangga	3 mangga,1 jeruk	2 mangga,1 apel,1 jeruk

Berarti banyaknya kombinasi-4 dengan pengulangan dari tiga himpunan ({{apel, jer mangga}}) ada 15.

GENERALISASI PERMUTASI DAN KOMBINASI

Teorema 2

Ada C (n+r−1,r)=C(r+n−1,n−1) kombinasi-r dari himpunan dengan n eleme dimana pengulangan elemen diperbolehkan.

Menggunakan contoh 2

Kemungkinan diambil 4 buah yaitu 3 apel,1 jeruk

A		J		M
***	|	*	|	

Maka C (r+n−1,n−1) = C (4+2,2)

n-1 adalah banyanya penyekat

r adalah jumlah bintang

GENERALISASI PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh 3

12 kelereng berwarna merah didistribusikan kepada 4 orang. Berapa banyak ca mendistribusikan ke-12 kelereng tersebut?

Jawab

n = 4

r = 12

Maka salah satu contoh situasinya dapat digambarkan sebagai berikut

$$\star\star|\star\star\star|\star|\star\star\star\star\star\star$$

Sehingga banyaknya cara mendistribusikan ke-12 kelereng tersebut adalah

$$C(n+r-1, r) = C(r+n-1, n-1)$$

$$C(4+12-1, 12) = C(12+4-1, 4-1)$$

$$C(15, 12) = C(15, 3)$$

$$\frac{15!}{12!3!} = 455 \text{ cara}$$

GENERALISASI PERMUTASI DAN KOMBINASI

Contoh 4

Berapa banyak solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 11$. Jika x_1, x_2, x_3 adalah bulat nonnegatif

Jawab

Berdasarkan Teorema 2 diperoleh

n = 3

r = 11

C (n+r−1, r) = C (r+n−1, n−1)

C (3+11−1, 11) = C (11+3−1, 3−1)

C (13, 11) = C (13, 2)

$\frac{13!}{11!2!}$ = 78 solusi

Prinsip Sangkar Burung (Pigeonhole Princi

Prinsip sangkar burung (*pigeonhole principle*) menyatakan
jika n burung terbang menuju m sangkar dan $n > m$, maka
sedikit ada satu sangkar yang memuat dua atau lebih bu

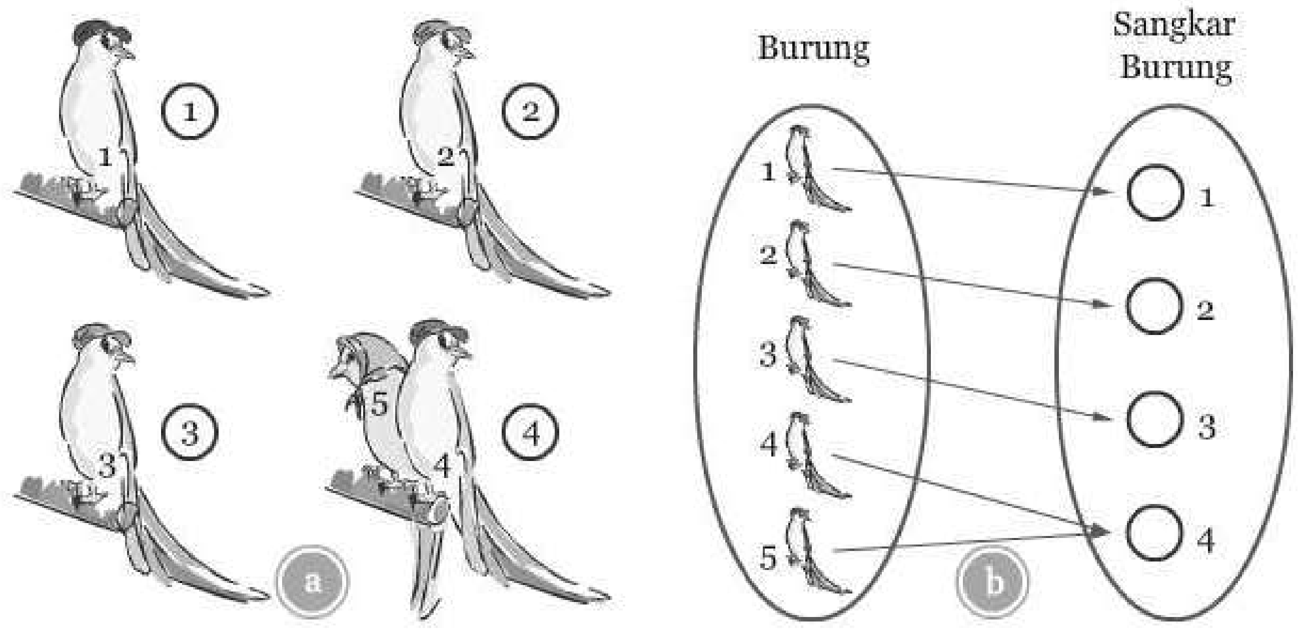
Prinsip Pigeonhole

Teorema 1 [Prinsip Pigeonhole]
Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dimana $n > m$, maka rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati

Bukti

Misalkan kesimpulan dari pernyataan tersebut salah, sehingga setiap ruma merpati memuat paling banyak satu merpati. Karena ada m rumah merpat paling banyak m merpati yang bisa dimuat. Padahal ada n merpati yang ter dan $n > m$, akibatnya kita dapatkan sebuah kontradiksi. Jadi, pengandaian sehingga kesimpulannya terdapat rumah merpati yang memuat paling sedi dua merpati.

Prinsip ini dapat diilustrasikan oleh gambar di bawah ini untuk
dan m = 4.



Prinsip Pigeonhole

Sehingga dapat disimpulkan bawhwa, ***Prinsip Sangkar Burung (Pigeonhole Principle)*** *yaitu Suatu fungsi dari himpunan hingga ke himpunan hingga ya kecil, tidak dapat satu-satu: Paling sedikit ada dua anggota domain yang m bayangan yang sama di kodomain.*

CONTOH 1

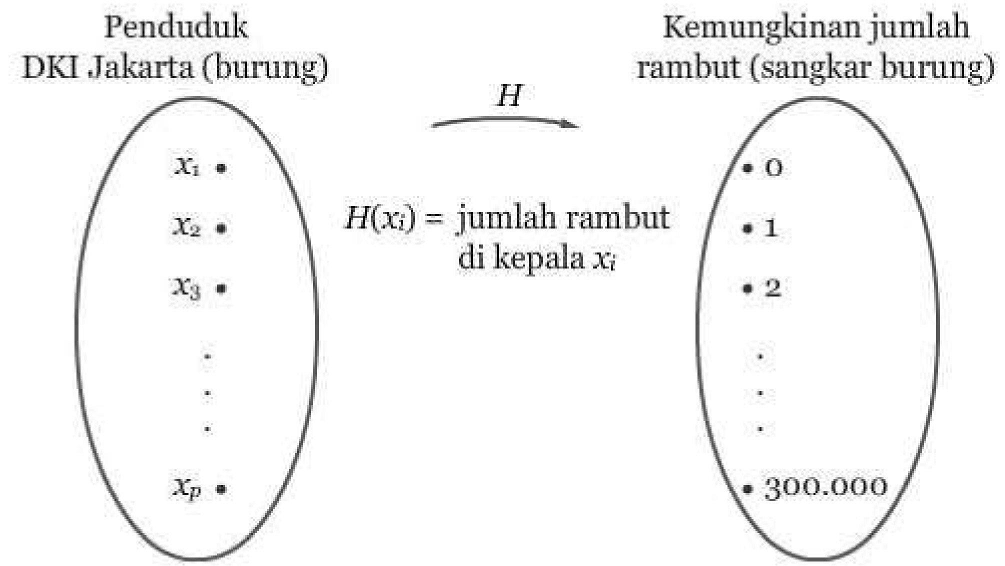
Dari seluruh penduduk DKI Jakarta tahun 2013, apakah paling s ada dua orang yang memiliki jumlah rambut yang sama di kepal mereka?

jawab

Jawabannya adalah IYA.
Kita ibaratkan,
Burung = warga DKI
Sangkar burung = semua kemungkinan dari jumlah rambut pada setiap kepal penduduk Jakarta.

Misal, populasi dari penduduk DKI Jakarta adalah P. Berdasarkan data dari Bappeda Jakarta tahun 2013, jumlah penduduk Jakarta adalah sekitar 9 juta Selain itu, seperti kita ketahui jumlah rambut yang dapat tumbuh di kepala manusia paling banyak adalah 300.000. Didefinisikan suatu fungsi H dari himpunan semua penduduk DKI Jakarta $\{x1, x2, x3, \ldots, xp\}$ ke himpunan {0, 3, …, 300.000}

Gambar contoh 1



Lanjutan…

Karena jumlah penduduk DKI Jakarta lebih banyak daripada kemun
jumlah rambut pada kepala manusia, maka *H* bukan merupakan f
satu-satu. Sehingga, paling sedikit ada dua anak panah yang men
pada bilangan yang sama. Atau dengan kata lain, paling sedikit ad
penduduk DKI Jakarta yang memiliki jumlah rambut yang sam

Prinsip Pigeonhole

Contoh 2

Diantara 367 orang, tunjukkan bahwa sedikitnya ada dua orang yang memi
ulang tahun yang sama.

Jawab

Karena dalam setahun hanya ada 366 kemungkinan hari ulang tahun, maka
ada sedikitnya dua orang yang punya hari ulang tahun yang sama.

Prinsip Pigeonhole

Contoh 3

Pada saat pembentukan tugas kelompok yang dibagi menjadi enam kelomp tujuh mahasiswa tidak masuk kuliah sehingga mereka belum terdaftar dala kelompok yang sudah dibagi. Tunjukkan bahwa paling sedikit ada dua mah yang bergabung dalam satu kelompok!

Jawab

Untuk menjawab pertanyaan ini kita bisa mengunakan Teorema 1. Asumsik bahwa tujuh mahasiswa yang tidak masuk kuliah sebagai banyaknya merpa banyaknya kelompok pada tugas kuliah tersebut sebagai rumah merpati. S berdasarkan Teorema 1 akan ada satu kelompok yang memuat paling sedik mahasiswa yang tidak masuk kuliah.

Prinsip Pigeonhole

Teorema 2

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X kesuatu himpunan terhingga Y dan $|X| > |Y|$,maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$.

Bukti

Menggunakan Prinsip Pigeonhole Bentuk Pertama dengan mengasumsikan X sebagai himpunan merpati dan Y sebagai himpunan rur merpati. Selanjutnya kita memasangkan merpati x kerumah merpati $f(x)$. jumlah merpati lebih banyak dari rumahnya, maka terdapat paling sedikit d merpati, $x_1, x_2 \in X$ yang dipasangkan kerumah merpati yang sama, yaitu f $f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$.

Prinsip Pigeonhole

Contoh 4

Ketua Program Studi Matematika akan membuat kode mata kuliah untuk mata kuliah-mata ku
bidang studi matematika dengan cara menambahkan tiga angka pada huruf KPM. Terdapat 51
kuliah yang harus diberi kode dan tiga angka yang harus ditambahkan pada huruf KPM harus l
antara 101 sampai dengan 200. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit dua mata kuliah yang
kode dengan angka berurutan.

Jawab

Misalkan A adalah himpunan mata kuliah yang akan diberi kode huruf KPM yang dilanjutkan d
bilangan antara 101 sampai 200, $|A| = 51$. Misalkan pula B adalah himpunan bilangan antara
sampai 200 yang memenuhi, setiap $x, y \in B, |x - y| > 1x$. Dalam hal ini B adalah himpunan
antara 101 sampai 200 yang tidak berurutan sehingga maksimal $|B| = 49$. Jika setiap elemen
di A dipetakan ke B (ini akan sama dengan usaha untuk memberi kode mata kuliah sedemikia
diantara dua mata kuliah tidak ada kode yang berurutan) maka berdasarkan Teorema 2 akan a
sedikitnya dua elemen katakanlah $x_1, x_2 \in A$ sedemikian hingga $f(x_1) = fx_2$. Jika hasil ini dik
kembali dengan usaha untuk memberi kode mata kuliah sedemikian hingga diantara dua mata
tidak ada kode yang berurutan, maka akan ada mata kuliah yang diberi kode yang sama. Pada
boleh ada dua mata kuliah dengan kode yang sama, maka salah satu mata kuliah dengan kode
sama harus diberi kode bilangan antara $x, y \in B. |x - y| = 1$. Akibatnya, akan ada sedikit dua
kuliah yang diberi kode dengan bilangan berurutan.

Generalisasi Prinsip Pigeonhole

Teorema 3 [Generalisasi Prinsip Pigeonhole]
Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X kesuatu him
terhingga Y, dimana $|X| = n, |Y| = m\ dan\ \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = k$, maka terdapat paling
sedikit k anggota $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ sedemikian hingga$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f$

Bukti

Andaikan kesimpulan salah, maka terdapat paling

banyak $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1 = k - 1$ anggota $x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in X$ sedemikian hingga

$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{k-1})$$

Dengan asumsi ini, maka banyaknya anggota X paling banyak adalah:

$m(k-1) < m(k-1+1) = m \times \frac{n}{m} = n$ yang merupakan sebuah kontradiksi
karena itu, terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, \dots, x_k \in\in X$ sedemikian hir

$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_k)$$

Generalisasi Prinsip Pigeonhole

Contoh 5

Berapakah jumlah minimum mahasiswa yang dibutuhkan dalam kelas mate
diskrit sedemikian hingga sedikitnya ada 6 mahasiswa yang memiliki nilai g
yang sama jika ada lima kemungkinan nilai grade matematika diskrit yaitu
dan **E**?

Jawab

Jumlah minimum mahasiswa yang dibutuhkan dalam kelas matematika dis
sedikitnya ada 6 mahasiswa yang memiliki nilai grade yang sama adalah nil
terkecil $n \in Z$ sedemikian hingga $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil = 6$. Nilai terkecil $n \in Z$ tersebut yait
$5 \times 5 + 1 = 26$. Jika kita hanya memiliki 25 mahasiswa maka sedikitnya ha
5 mahasiswa yang memiliki nilai grade yang sama. Oleh karenanya, 26 adal
jumlah minimum mahasiswa sedemikian hingga sedikitnya ada 6 mahasisw
memiliki nilai grade yang sama.

TEOREMA BINOMIAL

Kata binomial berasal dari dua kata, yakni **bi** = dua, dan **nomial** = unsur atau variabel.

Teorema Binomial adalah suatu cara untuk menjabarkan bentuk pangkat $(a+b)^n$, untuk n adalah bilangan bulat

Teorema Binomial menjelaskan pengembangan aljabar pada suatu deret pangkat binomial.
Example :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Penjabaran dari $(a+b)^3$ yang merupakan perkalian 3 faktor $(a+b)$, yaitu

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

Contoh

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)^3 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Jabarkan $(2x-3y)^5$.

$$\begin{aligned}
(2x-3y)^5 &= C(5,0)(2x)^{5-0}(-3y)^0 + C(5,1)(2x)^{5-1}(-3x)^1 + \\
&\quad C(5,2)(2x)^{5-2}(-3y)^2 + C(5,3)(2x)^{5-3}(-3x)^3 + \\
&\quad C(5,4)(2x)^{5-4}(-3y)^4 + C(5,5)(2x)^{5-5}(-3x)^5 \\
&= (2x)^5 + 5(2x)^4(-3y) + 10(2x)^3(-3y)^2 + 10(2x)^2(-3y)^3 + \\
&\quad 5(2x)(-3y)^4 + (-3y)^5 \\
&= 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5
\end{aligned}$$

$\sqrt{123}$

Teori Binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ yaitu suku ke-(k+1) adalah C(n,k). Bilangan C(n,k) disebut Koefisien Binomial

STUDY HARD!

+ × ÷

Teorema 1 [Teorema Koefisien Binomial]
Misalkan x dan y adalah variabel, dan n adalah bilangan bulat nonnegatif, maka

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Contoh 1

Jabarkan bentuk $(x + y)^3$

$$(x + y)^3 = \sum_{k=0}^{3} C(3,k)x^{3-k}y^k$$

$$= C(3,0)\, x^{3-0}.y^3 + C(3,1)\, x^{3-1}.y^1 + C(3,2)\, x^{3-2}.y^2 + C(3,3)\, x^{3-3}.y^3$$

$$= 1.\ x^3.y + 3.x^2.y^2 + 3.\ x.y^2 + 3.1.y^3$$

$$= x^3.y + 3.x^2.y^2 + 3.\ x.y^2 + 3y^3$$

Contoh 2

Tentukan suku ke 4 dari $(x - y)^5$

Suku ke-4, maka k=3.
sehingga suku ke-4 adalah
- 10

$$C(5,3).x^{5-3}.(-y)^3 = -10x^2y^3$$

Contoh 3

Contoh 1

Berapakah nilai koefisien dari $x^{12}y^{13}$ pada ekspansi $(x+y)^{25}$?

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5.200.300$$

Contoh 4

Tunjukan bahwa $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^{n-k} y^k$$

Ambil x = y = 1 didapat:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

SEGITIGA PASKAL

Segitiga Pascal merupakan koefisienkoefisien binomial yang tersusun dalam bentuk segitiga. Bentuk susunan segitiga ini muncul dalam tulisan Blaise Pascal yang berjudul Traite du triangle arithmetique (1653).
Meski dikenal dengan nama Pascal, ternyata segitiga Pascal telah dipelajari beberapa abad sebelumnya seperti oleh Al-Karaji (953 – 1029), Omar Khayyam (1048 – 1131), Jia Xian (1010 – 1070) dan Yang Hui (1238 – 1290).

Setiap baris segitiga pascal menyatakan koefisien untuk tiap nilai n pada $(a+b)^n$ secara berurut dimulai dari n = 0

- Identitas paskal bersama dengan syarat awal $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, untuk semua bilangan bulat n dapat digunakan secara rekursif untuk mendefinisikan koefisien binomial.

Definisi rekursif ini berguna dalam penghitungan koefisien binomial karena hanya memuat penjumlahan (bukan perkalian) dari bilangan bulat.

- Identitas paskal adalah pengetahuan dasar untuk penyusunan koefisien binomial secara geometris dalam bentuk segitiga, seperti pada gambar berikut

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}
\end{array}
$$

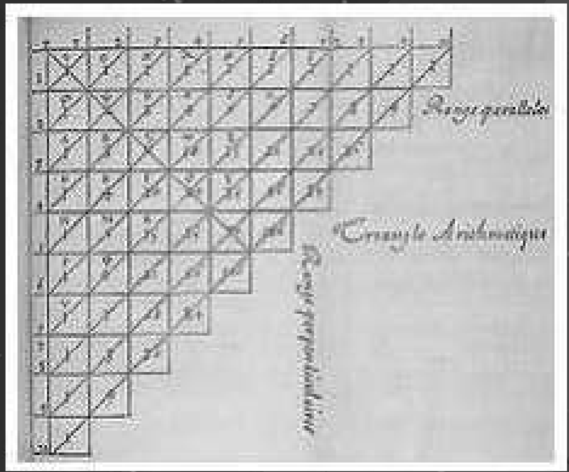
Berdasarkan identitas paskal

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

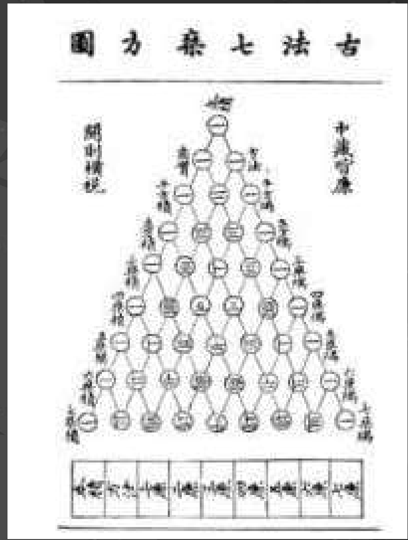
$$
\begin{array}{c}
\mathbf{1} \\
\mathbf{1 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 2 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \\
\mathbf{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1}
\end{array}
$$

- Baris ke-n pada segitiga terdiri atas koefisien binomial $\binom{n}{k}$,k=0,1,2,...,n

- Identitas paskal menunjukkan bahwa saat koefisien binomial yang bertetangga pada segitiga ini dijumlahkan, koefisien pada baris selanjutnya yang berada diantara dua koefisien ini dihasilkan dari penjumlahan tersebut.



SEGITIGA PASCAL VERSI BLAISE PASCAL



SEGITIGA PASCAL VERSI YANG HUI

IDENTITAS PASKAL

TEOREMA 1: IDENTITAS PASCAL

Untuk n, r bilangan bulat, $n \geq 1$, dan $0 \leq r \leq n$, berlaku

$$\binom{n}{r \quad s} = \binom{n-1}{r-1 \quad s} + \binom{n-1}{r \quad s-1}.$$

Bukti

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{r-1 \quad s} + \binom{n-1}{r \quad s-1} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,s!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(s-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,r}{r!\,s!} + \frac{(n-1)!\,s}{r!\,s!} \\
&= \frac{(n-1)!\,(r+s)}{r!\,s!} \\
&= \frac{n!}{r!\,s!} \\
&= \binom{n}{r \quad s} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

BARISAN KOSONG KE ENAM BELAS PADA SEGITIGA PASCAL

```
                                        1
                                    1       1
                                1       2       1
                            1       3       3       1
                        1       4       6       4       1
                    1       5      10      10       5       1
                1       6      15      20      15       6       1
            1       7      21      35      35      21       7       1
        1       8      28      56      70      56      28       8       1
    1       9      36      84     126     126      84      36       9       1
1      10      45     120     210     252     210     120      45      10       1
1      11      55     165     330     462     462     330     165      55      11       1
1      12      66     220     495     792     924     792     495     220      66      12       1
1      13      78     286     715    1287    1716    1716    1287     715     286      78      13       1
1      14      91     364    1001    2002    3003    3432    3003    2002    1001     364      91      14       1
1      15     105     455    1365    3003    5005    6435    6435    5005    3003    1365     455     105      15       1
1      16     120     560    1820    4368    8008   11440   12870   11440    8008    4368    1820     560     120      16       1
```

SUMBER

1. Trisna,Untung. (2011). Perluasan Segitiga Pascal. Yogyakarta.
http://p4tkmatematika.org/file/ARTIKEL/Artikel%20Matematika/Segitiga%20Pascal%20dan%20Perluasannya%233.pdf

2. Modul kuliah: Kombinatorika
http://emodul-matematika.fmipa.unej.ac.id/ModulKombinatorika/Koefisien%20Binomial.html

3, Koefisien Binomial.
http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/KHUSNUL_NOVIANIGSIH/KOEFISIEN_BINOMIAL.pdf

LATIHAN SOAL

Relasi Rekursif

Definisi Relasi Rekursif

Relasi rekursif berasal dari dua kata yaitu ***relasi*** dan ***rekursif***. *Relasi* berari hubungan atau keterkaitan, sedangkan *rekursif* berarti pengulangan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa relasi rekursif adalah hubungan yang berulang.

Definisi secara umum :

Suatu barisan didefinisikan secara rekursif, jika kondisi awal barisan ditentukan dan suku-suku barisan selanjutnya dinyatakan dalam hubungannya dengan sejumlah suku-suku yang sudah dinyatakan sebelumnya.

Suatu relasi rekursi untuk sebuah barisan $\{a_n\}$ merupakan suatu rumus untuk menyatakan a_n kedalam satu atau lebih suku-suku sebelumnya dari barisan tersebut, untuk suatu bilangan bulat non-negatif n. Suatu barisan disebut solusi dari sebuah relasi rekursi jika suku-suku pada barisan tersebut memenuhi relasi rekursinya.

Contoh 1 :

Misal $\{a_n\}$ barisan yang memenuhi relasi rekursi

$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk n $\geq 2, lalu\ misalkan\ a_0 = 3\ dan\ a_1 = 5\ tentukan\ nilai\ a_2\ dan\ a_3$

Jawab :

Karena $a_2 = a_1 - a_0, maka\ a_2 = 5 - 3 = 2$

Karena $a_3 = a_2 - a_1, maka\ a_3 = 2 - 5 = -3$

Contoh 2:

Tentukan barisan yang merupakan solusi dari relasi rekursi $a_n = 3a_n - 1$, jika diketahui a_0=2

Jawab :

$$a_n = 3a_n$$
$$a_n = 3(3a_{n-2}) = 3^2.a_{n-2}$$
$$a_n = 3(3(3a_{n-3})) = 3^3.a_{n-3}$$
$$a_n = 3^n.a_{n-n} = 3^n.a_0$$
$$a_n = 2.3^n$$

Sehingga barisan $a_n = 2.3^n$ merupakan solusi dari relasi rekursi $a_n = 3a_n - 1$, dengan nilai awal a_0=2

Relasi rekursif linear koefiesien konstan

Bentuk umum relasi rekursif linear koefisien konstan

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = f(n)$$

Dimana c_i untuk i= 0,1,2,3…,k adalah konstan dan f(n) adalah sebuah fungsi numerik dengan variable n.

Relasi rekursif tersebut dikatakan relasi rekursif linear berderajat k, jika c_0 *dan* c_k kedua nya tidak bernilai nol.

Contoh :

- $2a_n + 2a_{n-1} = 3^n$ adalah relasi rekursif linear berderajat 1
- $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ adalah relasi rekursif linear berderajat 2 yang bersesuaian dengan masing-masing suku dari relasi tersebut, perhatikan setiap koefisien dan tanda tiap suku.

Contoh 1

Tentukan solusi dari relasi rekursi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, dengan $a_0 = 2$, dan $a_1 = 7$.

Jawab

Bentuk ***persamaan karakteristik*** dari relasi rekursi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

Pindahkan semua suku ke ruas kiri.

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$$

Karena relasi di atas memiliki derajat 2, maka bentuk polinomial derajat 2 yang bersesuaian dengan masing-masing suku dari relasi tersebut, perhatikan setiap koefisien dan tanda tiap suku.

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$$
$$\downarrow$$
$$r^2 - r - 2r^0 = 0$$
$$r^2 - r - 2 = 0$$

Persamaan di atas disebut persamaan karakteristik, dan memiliki 2 akar berbeda yaitu $r_1 = 2$ dan $r_2 = -1$ yang disebut ***akar-akar karakteristik***.

Bentuk ***solusi umum*** dari relasi rekursi yang memiliki 2 akar ***berbeda*** adalah

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n}$$

Sehingga solusi umum dari relasi rekursi di atas adalah

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-1)^n$$

Untuk suatu c_1, c_2 bilangan real.

Untuk mendapatkan solusi khusus, gunakan nilai awal yang diketahui.

$$a_0 = 2 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot (-1)^0$$
$$2 = c_1 + c_2 \quad \text{.......................................(1)}$$
$$a_1 = 7 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot (-1)^1$$
$$7 = 2c_1 - c_2 \quad \text{.......................................(2)}$$

Persamaan (1) dan (2) dapat diselesaikan dengan metode substitusi/eliminasi untuk mendapatkan $c_1 = 3$ dan $c_2 = -1$.

Sehingga solusi khusus dari relasi rekursi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ adalah $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$. ♥

Contoh 2

Tentukan solusi dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, dengan $a_0 = 1$, dan $a_1 = 6$.

Jawab

Bentuk persamaan karakteristik dari relasi rekursi tersebut.

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$
$$\downarrow$$
$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$$
$$\downarrow$$
$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

Persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar karakteristik ***kembar*** yaitu $r_1 = r_2 = 3$.

Bentuk ***solusi umum*** dari relasi rekursi yang memiliki 2 akar ***kembar*** adalah

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot nr_1^n}$$

Sehingga solusi umum dari relasi rekursi di atas adalah

$$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n(3)^n$$

Untuk suatu c_1, c_2 bilangan real.

Untuk mendapatkan solusi khusus, gunakan nilai awal yang diketahui.

$$a_0 = 1 = c_1 \cdot 3^0 + c_2 \cdot 0(-1)^0$$
$$1 = c_1 \quad \text{.............(1)}$$
$$a_1 = 6 = c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 1(3)^1$$
$$6 = 3c_1 + 3c_2 \quad \text{.............(2)}$$

Persamaan (1) dan (2) dapat diselesaikan dengan metode substitusi/eliminasi untuk mendapatkan $c_1 = 1$ dan $c_2 = 1$.

Sehingga solusi khusus dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ adalah $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$. ♥

Contoh 3

Tentukan solusi dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, dengan $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ dan $a_2 = 15$.

Jawab

Bentuk persamaan karakteristik dari relasi rekursi tersebut.

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$
$$\downarrow$$
$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$
$$\downarrow$$
$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar karakteristik ***berbeda*** yaitu $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ dan $r_3 = 3$.

Bentuk ***solusi umum*** dari relasi rekursi yang memiliki 3 akar ***berbeda*** adalah

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n}$$

Sehingga solusi umum dari relasi rekursi di atas adalah

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot 3^n$$

Untuk suatu c_1, c_2, c_3 bilangan real.

Untuk mendapatkan solusi khusus, gunakan nilai awal yang diketahui.

$$a_0 = 2 = c_1 + c_2 + c_3$$
$$a_1 = 5 = c_1 + 2c_2 + 3c_3$$
$$a_2 = 15 = c_1 + 4c_2 + 9c_3$$

3 persamaan di atas dapat diselesaikan dengan metode substitusi/eliminasi untuk mendapatkan $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ dan $c_3 = 2$.

Sehingga solusi khusus dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ adalah $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$. ♥

Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit

Contoh :

Gunakan Fungsi Pembangkit Biasa untuk menyelesaikan relasi rekursif berikut. $a_0 = 1$, $a_1 = 3$; $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$, $n \geq 2$.

Penyelesaian :

Misal P(x) adalah Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n). Maka menurut definisi,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Karena untuk $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$, kalau kedua ruas dari persamaan ini dikali x^n kemudian "dijumlahkan" untuk $n = 2$ sampai $n = \sim$, diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\sim} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\sim} (2a_{n-1} + 4^{n-1}) x^n,$$

ekuivalen dengan;

$$\sum_{n=2}^{\sim} a_n x^n = 2\sum_{n=2}^{\sim} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\sim} 4^{n-1} x^n . \qquad (3.3.1)$$

Ruas kiri persamaan (3.3.1) adalah:

$$\sum_{n=2}^{\sim} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\sim} a_n x^n - a_0 - a_1 x$$

$$= P(x) - 1 - 3x$$

Suku pertama ruas kanan persamaan (3.3.1) adalah

$$2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n} = 2\ x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}$$

$$= 2x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - a_0\Big)$$

$$= 2x\ (P(x) - 1)$$

$$= 2x\ P(x) - 2x$$

Suku kedua ruas kanan persamaan (3.3.1) adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1}x^{n} = x \sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1}x^{n-1}$$

$$= x\ \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (4x)^{n-1} - 1\Big)$$

$$= x\ \Big(\frac{1}{1-4x} - 1\Big)$$

$$= \frac{x}{1-4x} - x$$

Sehingga persamaan (3.3.1) menjadi,

$$P(x) - 1 - 3x = 2x\,P(x) - 2x + \frac{x}{1-4x} - x,$$

ekuivalen dengan,

$$P(x) = \frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)}.$$

Karena

$$\frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)} = \frac{1/2}{1-4x} + \frac{1/2}{1-2x}$$

maka

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-4x} + \frac{1}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(4^n + 2^n)x^n$$

Karena a_n adalah koefisien x^n dalam $P(x)$, maka penyelesaian relasi rekursif yang dimaksud adalah,

$$a_n = ½(4^n + 2^n), \text{ untuk } n \geq 0.$$

Contoh 2:Menyelesaikan relasi rekursif dengan menggunakan Fungsi Pembangkit Eksponensial (FPE).

(note) :

1. pada dasarnya relasi rekursif dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi pembangkit.
2. Untuk jenis relasi rekursif tertentu, lebih mudah diselesaikan dengan fungsi pembangkit eksponensial daripada fungsi pembangkit biasa

Jawablah pertanyaan berikut :

Gunakan Fungsi Pembangkit untuk Menyelesaikan relasi rekursif berikut
$a_0 = 1$; $a_n = na_{n-1} + 2^n, n \geq 1$.

Penyelesaian

Misalkan $P(X)$ adalah FPE dari barisan (a_n) → $P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$

Kalikan kedua ruas bagian rekursif $a_n = n\, a_{n-1} + 2^n$ dengan $\frac{x^n}{n!}$ kemudian 'dijumlah' untuk n=1 sampai n=∞, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (n\, a_{n-1} + 2^n) \frac{x^n}{n!}$$

Ekuivalen dengan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} - 1 = x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} - 1\right)$$

Sehingga,

$$P(x) - 1 = xP(x) + e^{2x} - 1$$

Disederhanakan

$$P(x) = \frac{e^{2x}}{1-x}$$

Selanjutnya, akan dicari a_n yaitu koefisien dalam P(x)

Karena $P(x) = e^{2x}\frac{1}{1-x}$

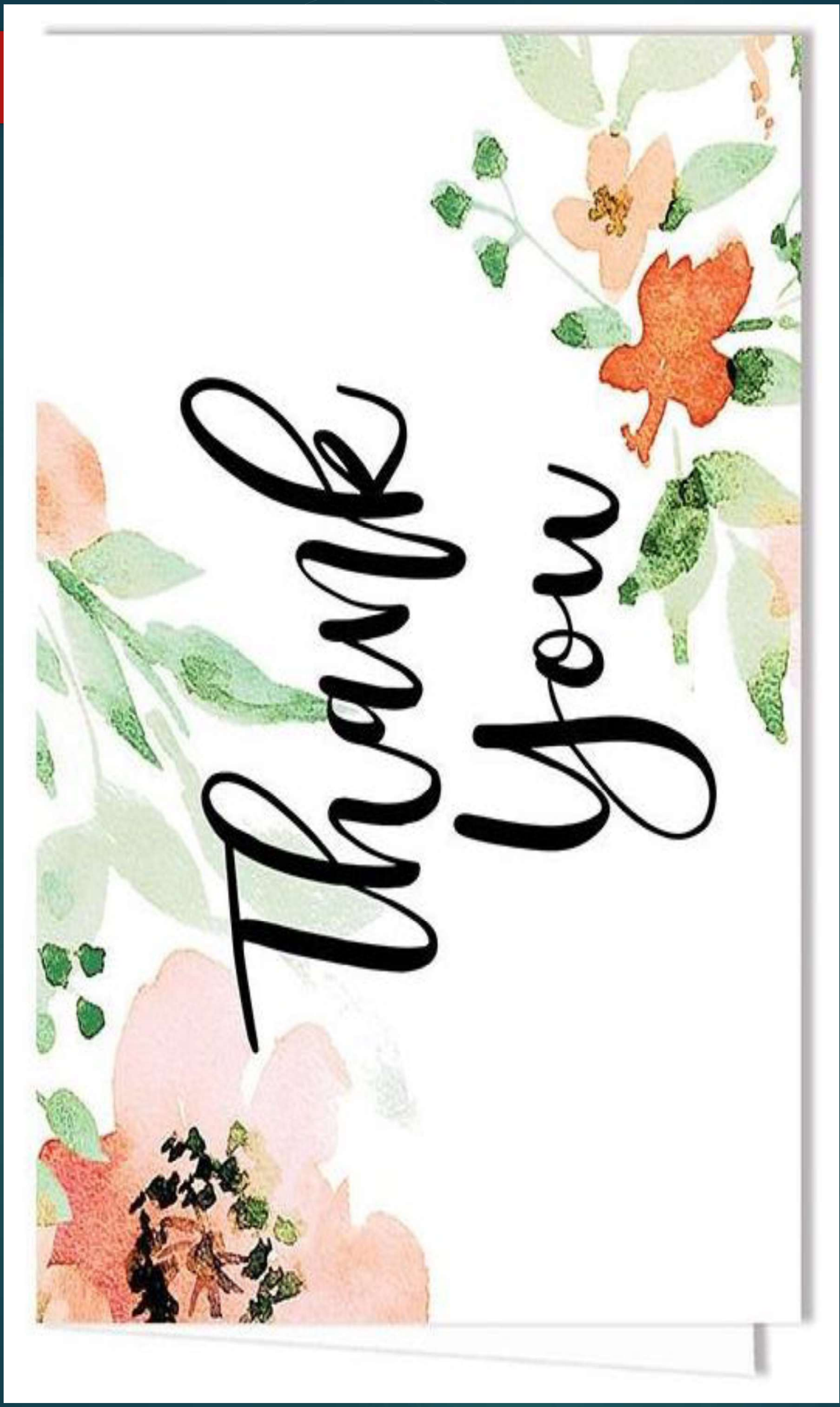
$= (\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!})x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n!\,(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}) \frac{x^n}{n!},$

Maka solusi relasi rekursif yang dimaksud adalah

$$a_n = n!\,(\textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}, \qquad n \geq 0.$$


Thank You

Latihan soal

1. Untuk bilangan bulat nonnegatif n,apakah barisan $a_n = 3n$ merupakan solusi bagi relasi rekursi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$
2. Tentukan Solusi dari relasi rekursif $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ dengan kondisi awal $a_0 = 1, a_1 = -2$ dan $a_2 = -1$.
3. Tentukan solusi dari relasi rekursi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dengan $a_0 = 1\ dan\ a_1 = 5$
4. Tentukan relasi rekursif $an - 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$ untuk n ≥ 3 dengan $a_0 = 1, a_1 = 2$ dan $a_2 = 4$.!
5. Gunakan fungsi pembangkit biasa untuk menyelesaikan persamaan berikut!
$$a_n = 5a_{n-1} + 3^n; n \geq 1$$
6. Selesaikan relasi rekursif dari $a_n = a_{n-1} + n$ dengan $a_0 = 2, n = 1,2, \ldots$ dengan fungsi pembangkit eksponensial

REKURSIF DENGAN FUNGSI PEMBANGKIT DAN DERANGEMENT (PENGACAKAN)

Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit

A. Relasi Rekursif Linear Homogen Koefisien Konstanta

Relasi rekursif homogen dengan koefisien konstanta dapat diselesaikan dengan fungsi pembangkit biasa.

Contoh : $\boxed{a_0 = 2, a_1 = 5, a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 (n \geq 2)}$

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan relasi rekursif diguanakan fungsi pembangkit biasa

Misalkan fungsi pembangkit biasa dari barisan tersebut adalah

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, Maka

Kedua ruas bagian rekursif dikali $\boxed{a_n x^n - 5a_{n-1}x^n + 6a_{n-2}x^n = 0}$

Ambil $\sum$ untuk $n \geq 2$, diperoleh.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - 5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0$$

$$P(x) - 2 - 5x - 5x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 6x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = 0$$

$$P(x) - 2 - 5x - 5x[P(x) - 2] + 6x^2P(x) = 0$$

$$P(x) - 2 - 5x - 5xP(x) + 10x + 6x^2P(x) = 0$$

$$(1 - 5x + 6x^2)P(x) = 2 - 5x$$

$$P(x) = \frac{2 - 5x}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$$

$$P(x) = (2 - 5x)\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

$$P(x) = (2 - 5x)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} x^n$$

$$P(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} x^n - 5x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} x^n$$

$$P(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} x^n - 5\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k} x^n$$

Sehingga a_n adalah koefisien x^n dalam P (X) yaitu

$$a_n = \begin{cases} 2\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} & ; n = 0 \\ 2\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} - 5\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k} & ; n \geq 1 \end{cases}$$

digunakan dengan cara mempartisi pecahan supaya tidak menghasilkan perkalian antar sigma sehingga dihasilkan bentuk penyelesaian yang lebih sederhana

$$P(x) = \frac{2 - 5x}{(1 - 2x)(1 - 3x)} = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 3x}$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n)x^n$$

Sehingga a_n adalah koefisien x^n dalam P (x) yaitu $a_n = 2^n + 3^n$

b. Relasi Rekursif Linear Homogen Koefisien Nonkonstanta

Relasi rekursif homogen dengan koefisien nonkonstanta dapat diselesaikan dengan fungsi pembangkit eksponensial.

Contohnya : $\boxed{a_0 = 1, a_n - na_{n-1} = 0}$

Penyelesainnya :

Untuk menyelesaikan relasi rekursif diguanakan fungsi pembangkit biasa

Misalkan fungsi pembangkit biasa dari barisan tersebut adalah

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$Maka

Kedua ruas bagian rekursif dikali dengan $\frac{x^n}{n!}$

$$a_n \frac{x^n}{n!} - na_{n-1} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Ambil $\sum$ untuk $n \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$P(x) - 1 - x \sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)!} = 0$$

$$P(x) - 1 - xP(x) = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!}$$

koefisien $\frac{x^n}{n!}$ Dalam $P(x)$

C. Relasi Rekursif Linear Nonhomogen Koefisien Konstanta

Relasi rekursif nonhomogen dengan koefisien konstanta dapat diselesaikan dengan fungsi pembangkit biasa.

Contohnya : $a_n = 5a_{n-1} + 3^n; \quad n \geq 1$ $a_0 = 2$

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan relasi rekursif tersebut akan digunakan fungsi pembangkit biasa.

misalkan FPB dari barisan tersebut adalah p(x)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad \text{, maka}$$

Kedua ruas bagian rekursif dikali dengan x^n

$$a_n x^n = (5a_{n-1} + 3^n)x^n; \quad n \geq 1$$

Ambil $\sum$ untuk $n \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (5a_{n-1} + 3^n)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 x^0 = 5\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$$

$$p(x) - 1 = 5x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - 1$$

$$p(x) - 1 = 5xp(x) + \frac{1}{1-3x} - 1$$

$$p(x) = 5xp(x) + \frac{1}{1-3x}$$

$$(1-5x)p(x) = \frac{1}{1-3x}$$

$$p(x) = \frac{1}{1-3x} \quad \frac{1}{1-5x}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 3^k 5^{n-k}\right)x^n$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k 5^{n-k} \qquad ; n \geq 0$$

D. Relasi Rekursif Linear Nonhomogen Koefisien Nonkonstanta

Relasi rekursif nonhomogen dengan koefisien nonkonstanta dapat diselesaikan dengan fungsi pembangkit eksponensial.

Contohnya : $D_n = n\, D_{n-1} + (-1)^n \quad ; n \geq 1$

$a_0 = 1$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan relasi rekursif tersebut akan digunakan fungsi pembangkit eksponensial.

Misalkan FPE dari barisan tersebut adalah P (x) maka

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

K ırsif dikali dengan $\frac{x^n}{n!}$

$$a_n \frac{x^n}{n!} = n\, a_{n-1} \frac{x^n}{n!} + n! \frac{x^n}{n!}$$

Ambil $\sum$ untuk $n \geq 1$

dengan demiki ... adalah:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} - a_0 \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_{n-1} \frac{x^n}{n(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$p(x) - 2 = x\, p(x) + \frac{1}{1-x} - x^0$$

$$(1-x)\, p(x) = \frac{1}{1-x} + 1$$

$$p(x) = \frac{2-x}{1-x} \; \frac{1}{1-x}$$

$$= (2-x)\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

$$= (2-x) \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

$$= (2-x) \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)\, x^n$$

$$= 2 \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)\, x^n - \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)\, x^{n+1}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} n!\,(n+1) \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} n\, n! \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = 2n!(n+1) - n\,n! \qquad ; n \geq 0$$

Derangement atau pengacakan

- Derangement atau pengacakan adalah sebuah permutasi dengan syarat setiap obyek yang dipermutasikan tidak boleh menempati tempatnya semula.
- Misal terdapat n elemen yang disusun pada suatu barisan dan notasi 1,2,3,...n. Selanjutnya, n elemen tersebut dipermutasikan pada barisan yang sama sedemikian hingga tidak ada satu elemen yang menempati tempatnya semula.

Misalnya, diberikan barisan 1,2,3,4. 3,1,4,2, dan 4,3,2,1, adalah contoh dari pengacakan barisan 1,2,3,4. Sedangkan 3,1,2,4 bukan hasil pengacakan dari barisan 1,2,3,4, karena angka 4 menempati posisi semula. Dapat disimpulkan bahwa derangement dari n obyek untuk menetukan Banyaknya Pengacakan dari n obyek adalah

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}) \qquad ; n \geq 2$$

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 0$$

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} ; n \geq 0$$

$$= n! \left\{ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} - \frac{3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right\}, n \geq 0$$

Contoh Soal

Seorang pegawai baru di tempat penitipan topi suatu rumah makan menerima titipan topi dari n pengunjung, tetapi ia lupa untuk menomori topitopi tersebut. Ketika para pengunjung hendak mengambil kembali topi mereka, pegawai ini memilih secara acak dari topi yang tersisa. Berapakah peluangnya bahwa tidak ada seorang pun yang menerima topinya kembali?

<u>Jawaban</u>

Peluang bahwa tidak ada seorang pun

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$$

Latihan Soal

1. GUNAKAN FUNGSI PEMBANGKIT BIASA UNTUK MENYELESAIKAN RELASI REKURSIF TERSEBUT : $a_0 = 1, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}, n \geq 2$
2. GUNAKAN FUNGSI PEMBANGKIT UNTUK MENYELESAIKAN RELASI REKURSIF BERIKUT : $a_0 = 1, a_n = na_{n-1} + 2^n, n \geq 1$
3. MISALKAN a_n MENYATAKAN BANYAKNYA CARA UNTUK MENEMPATKAN N OBJEK BERBEDA DIDALAM 5 KOTAK. TULIS DAN SELESAIKAN RELASI REKURSIF UNTUK a_n ....?

Fungsi Pembangkit untuk Kombinasi

Misalkan A adalah himpunan huruf-huruf pembentuk kata “MATEMATIKA”. Tentukan banyaknya cara menyusun n-huruf dari A, dengan syarat semua huruf harus muncul.

Penyelesaian:

A = (M, A, T, E, I, K)

P(x) = $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6$

$= x^6\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6$

$= x^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^6$

$= x^6 \sum_{k=0}^{\infty}\binom{6-1+k}{k} x^k$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{5+k}{k} x^{k+6}$

Misal: k + 6 = n maka k = n – 6

P(x) $= \sum_{n-6=0}^{\infty}\binom{n-1}{n-6} x^n$

Jadi banyaknya cara menyusun n-hutuf dari A, dengan syarat semua huruf muncul adalah koefisien x dari fungsi pembangkit, yaitu:

$$a_n = \begin{cases} 0, n < 6 \\ \binom{n-1}{n-6}, n \geq 6 \end{cases}$$

Contoh Soal

1. Dengan berapa cara 60 objek yang identik dapat ditempatkan di dalam 4 sel (kotak) yang berbeda sedemikian hingga setiap kotak mendapat paling sedikit satu objek

Penyelesaian

Karena ada 4 kotak dan setiap kotak mendapat paling sedikit satu objek, maka fungsi pembangkit adalah

$P(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^4$

$= x^4 \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$, untuk $|x| < 1$

$= x^4 \sum_{r=0}^{\infty} \binom{4+r-1}{r} x^r$

$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^{r+4}$

Jadi banyaknya cara menempatkan 60 objek yang identik ke dalam 4 kotak yang berbeda sedemikian hingga tiap kotak mendapat paling sedikit satu objek adalah koefisien

x^{60} dalam p(x), yaitu $\binom{56+3}{56} = \binom{59}{56} = 32.509$

Berapa banyak cara memilih K huruf dari kata "PESAWAT" sedemikian hingga Paling banyak 3A dan tepat 1T

Diketahui : P, S, W, T

Vocal : A, E

Penyelesaian :

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3)x(1 + 1 + x^2 + \cdots)^4$$

$$= \frac{(1-x^4)}{1-x} \cdot x\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$$

$$= x - x^5 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^5$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^{n+5}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+3}{n-1} x^{n} - \sum_{n=5}^{\infty} \binom{n-1}{n-5} x^{n}$$

$$An \begin{cases} 0 \,;\, n = 0 \\ \binom{n+3}{n-1} ; 1 \le n \le 4 \\ \binom{n+3}{n-1} - \binom{n-1}{n-5} ; n \ge 5 \end{cases}$$

Fungsi Pembangkit untuk Permutasi

Ada berapa banyak kata sandi dengan panjang 4, yang dapat dibentuk dari huruf-huruf pembentuk kata UMG, dengan syarat huruf konsonan terambil maksimal 1 dan vokal maksimal 2?

Penyelesaian:

Syarat: $0 \leq U \leq 2, 0 \leq M, G \leq 1$

Fungsi pembangkit dari permasalahan ini yaitu:

$$F(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)(1 + x)^2$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)(1 + 2x + x^2)$$

$$= 1 + 3x + \left(1 + \frac{1}{2!} + 2\right)x^2 + (1 + 1)x^3 + \frac{1}{2!}x^4$$

$$= 1 + 3x + \frac{7}{2}2!\frac{x^2}{2!} + 12\frac{x^3}{3!} + 12\frac{x^4}{4!}$$

Jadi banyaknya kata sandi dengan panjang 4 yang dibentuk dari huruf U M G adalah koefisien dari $\frac{x^4}{4!}$, yaitu 12.

Adapun 12 kata sandi tersebut adalah: UUMG, UUGM, UMUG, UMGU, UGUM, UGMU, MUUG, MUGU, MGUU, GUUM, GUMU, GMUU.

Barisan Biner

Barisan biner didefinisikan sebagai barisan yang memuat 2 angka (2 digit) yang berbeda :

- Barisan binair → 0, 1

Contoh : 101001

Contoh Soal :

Ada berapa barisan biner r-angka yang memuat 0 sebanyak bilangan genap dan 1 sebanyak genap pula?

$$P(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^2$$

Dengan menggunakan rumus **Ekspansi Maclaurin**, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right) + \frac{1}{2} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2^3 \cdot \frac{x^4}{4!} + 2^5 \cdot \frac{x^6}{6!} + \cdots \end{aligned}$$

Banyaknya barisan yang dimaksud sama dengan koefisien $\frac{x^r}{r!}$ dalam $P(x)$, yaitu

$$a_r = \begin{cases} 0, & \text{bila r ganjil} \\ 1, & \text{bila r} = 0 \\ 2^{r-1}, & \text{bila r genap}, r > 0 \end{cases}$$

Barisan Kuartener

Barisan kuarternar didefinisikan sebagai barisan yang memuat 4 angka yang berbeda:

- Barisan kuarternair → 0, 1, 2, 3

Contoh : 120032

Contoh Soal :

Berapa banyak barisan kuarternair r-angka yang memuat paling sedikit: satu 1, satu 2, dan satu 3

$$P(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3$$

$$= e^x(e^x - 1)^3$$

$$= e^x(e^{3x} - 3e^{2x} - 3e^x - 1)$$

$$= e^{4x} - 3e^{3x} - 3e^{2x} - e^x$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(4x)^r - 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(3x)^r + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(2x)^r - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}x^r$$

Banyak barisan kuarternair r-angka dengan syarat tersebut adalah koefisien $\frac{1}{r!}x^r$ dalam $P(x)$, yaitu

$$\boxed{4^r - 3\cdot 3^r + 3\cdot 2^r - 1}$$

Untuk $r = 3$: Banyak barisan kuarternair 3-angka dengan syarat tersebut adalah

$$\boxed{\begin{aligned} &4^3 - 3\cdot 3^3 + 3\cdot 2^3 - 1 \\ &= 64 - 81 + 24 - 1 = 6 \end{aligned}}$$

Soal latihan

1. Misalkan aku mempunyai tas warna merah, putih dan biru. Ada berapa cara kita mengambil baju dengan syarat merah terambil ganjil, putih paling banyak 5 dan biru paling sedikit 14.
2. Tentukan banyak cara mengambil n huruf dan huruf-huruf pembentuk kata "**G R E S I K**" , sedemikian setiap vokal terambil.
3. Ada berapa banyak cara membagi n bola yang berbeda kedalam 5 kotak yang berbeda dengan syarat satu kotak mendapatkan bola sebanyak genap?
4. Tentukan banyaknya barisan biner n angka yang memuat angka nol sebanyak ganjil dan angka 1 sebanyak genap.
5. Tentukan banyak cara menempatkan n objek kedalam k kotak, sedemikian tidak ada kotak yang kosong:
   a. Objek berbeda dan kotak berbeda FPE
   b. Objek berbeda dan kotak identif FPE $\times\ {}^{1}/_{k!}$

Referensi

- http://eprints.umg.ac.id/357/1/Nur%20Fauziyah%20%28Matematika%20Diskrit%29%20%281%29.pdf

PEMBAHASAN

Prinsip Inklusi dan Eksklusi merupakan perluasan ide dalam Diagram Venn beserta operasi irisan dan gabungan, namun dalam pembahasan kali ini konsep tersebut diperluas, dan diperkaya dengan ilustrasi penerapan yang bervariasi dalam matematika kombinatorik.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Banyaknya anggota himpunan gabungan antara himpunan Adan himpunan B merupakan jumlah banyaknya anggota dalam himpunan tersebut dikurangi banyaknya anggota di dalam irisannya.

Dengan demikian,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

—CONTOH 1

Dalam sebuah program studi pendidikan matematika yang terdiri atas 350 mahasiswa,terdapat 175 mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan 225 mahasiswa yang mengambil mata kuliah analisis kompleks, dan 50 mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan analisis kompleks. Ada berapa mahasiswa di dalam perkuliahan itu jika setiap mahasiswa mengambil mata kuliah persamaan diferensial,analisis kompleks, atau kedua-duanya?

—PEMBAHASAN CONTOH 1

Misalkan :

- A adalah mahasiswa yang mengambil persamaan diferensial
- B adalah mahasiswa yang mengambil analisis kompleks.
- Maka AB merupakan himpunan mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah tersebut.

Maka,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 175 + 225 - 59$$
$$= 350$$

kesimpulannya,

terdapat **350** mahasiswa di dalam kelas yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial, analisis kompleks, atau kedua-duanya.

Karena banyaknya siswa keseluruhan di dalam kelas tersebut adalah 350 mahasiswa, artinya tidak terdapat mahasiswa yang tidak memilih salah satu dari kedua mata kuliah itu.

CONTOH 2

Di sebuah jurusan dalam suatu perguruan tinggi terdapat 134 mahasiswa tingkat 3. Dari sekian banyak mahasiswa tersebut, 87 di antaranya mengambil mata kuliah teori graf diskrit,73 mengambil mata kuliah matematika ekonomi, dan 29 mengambil mata kuliah teori graf danmatematika ekonomi. Berapa banyak mahasiswa yang tidak mengambil sebuah mata kuliah baik dalam teori graf maupun dalam matematika ekonomi?

—PEMBAHASAN CONTOH 2

Untuk menentukan banyaknya mahasiswa tingkat 3 yang tidak mengambil mata kuliah teori graf ataupun matematika ekonomi, kurangilah banyaknya mahasiswa yang mengambil mata kuliah darisalah satu mata kuliah ini dari keseluruhan banyaknya mahasiswa tingkat 1.

Misalkan :

- A merupakan himpunan semua mahasiwa tingkat 3 yang mengambil mata kuliah teori graf,
- B adalah himpunan mahasiswa yang mengambil mata kuliah matematika ekonomi.

Maka $n(A)=87$, $n(B)=73$, dan $n(A \cap B) = 29$

PEMBAHASAN CONTOH 2

Banyaknya mahasiswa tingkat 3 yang mengambil mata kuliah teori graf atau matematika ekonomi adalah :

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 87 + 73 - 29$

$= 160 - 29$

$= 131$

kesimpulannya,

terdapat sebanyak **134 – 131 = 3** mahasiswa tingkat 3 yang tidak mengambil mata kuliahteori graf ataupun matematika ekonomi.

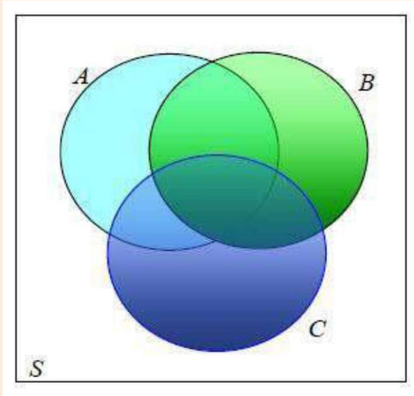
PEMBAHASAN SELANJUTNYA

Berikutnya akan diuraikan bagaimana cara-cara menentukan banyaknya anggota dalam gabungan antara himpunan terhingga dari sebuah himpunan. Hasil ini kemudian akan dikembangkan menjadi sebuah prinsip yang dinamakan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

Sebelum membicarakan gabungan dari n himpunan, dengan n sebagai bilangan bulat positif,sebuah rumusan bagi banyaknya anggota dalam gabungan 3 himpunan A, B, dan C akan diturunkan.

Untuk menyusun rumus ini perlu diingat bahwa $n(A)+n(B)+n(C)$ membilang tiap anggota tepat satu kali dari ketiga himpunan tersebut satu kali, anggota yang tepat 2 kali dari himpunan-himpunan itu adalah dua kali, dan anggota-anggota dalam 3 himpunan tersebut 3kali.

Diilustrasikan dalam Gambar berikut :



Ekspresi final ini membilang tiap anggota satu kali, apakah itu 1, 2 atau 3 dalam 3 himpunan.

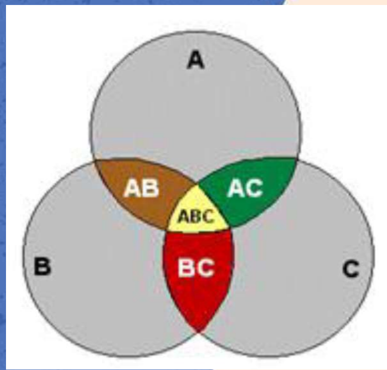
Jadi,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Prinsip inklusi-eksklusi dapat dirampatkan untuk operasi lebih dari dua buah himpunan. **Untuk tiga buah himpunan** A, B, dan C berlaku teorema berikut.

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan berhingga, maka berhingga dan

Bukti:



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Misalkan $|A \cup B| = D$ … (1), sehingga $|A \cup B \cup C| = |D \cup C|$

$|D \cup C| = |D| + |C| - |D \cap C|$ … (2)

$|D \cap C| = |(A \cup B) \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C|$ … (Sifat Distributif)

$|D \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$ …(3)

Perhatikan bahwa untuk mendapatkan $|(A \cap C) \cup (B \cap C|$

Harus dikurangi $|A \cap B \cap C|$ karena ketika kita mengambil $|A \cap C|$, telah termasuk di dalamnya $|A \cap B \cap C|$ begitupula ketika kita mengambil $|B \cap C|$, juga termasuk di dalamnya $|A \cap B \cap C|$. Dengan kata lain, kita mengambil $|A \cap B \cap C|$ sebanyak 2 kali yang mana agar kita hanya mengambilnya satu kali, kita harus mengurangi penjumlahan antara $|A \cap C|$ dan $|B \cap C|$ dengan $|A \cap B \cap C|$.

Selanjutnya, kita subtitusikan pers (3) ke pers (2):

$$|D \cup C| = |D| + |C| - |D \cap C|$$

$$|D \cup C| = |D| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|)$$

$$|D \cup C| = |D| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

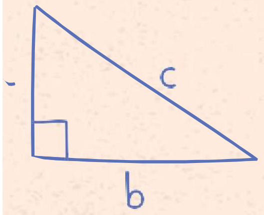
Subtitusi pers (1).:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\boxed{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|}$$



$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = \sqrt{c^2 + b^2}$

$b = \sqrt{c^2 + a^2}$

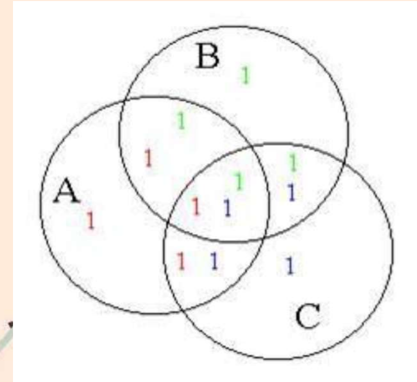
Sehingga, untuk r buah himpunan berlaku teorema berikut:

Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_r$ adalah himpunan berhingga maka berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| +$$

$$\cdots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

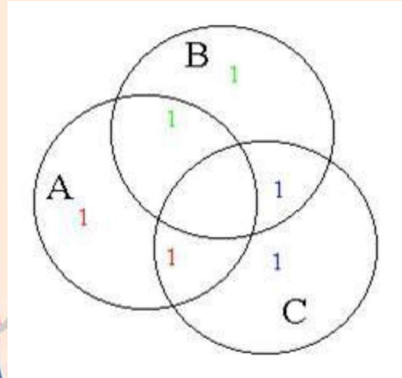
Perluasan Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk tiga himpunan



Terlihat bahwa daerah yang beririsan dihitung berulang-ulang.

- Angka 1 merah menunjukkan daerah yang terlibat ketika |A| dihitung,
- Angka 1 hijau menunjukkan daerahyang terlibat ketika |B| dihitung,dan
- Angka 1 biru menunjukkan daerah yang terlibat ketika |C| dihitung.

Perluasan Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk tiga himpunan



Terlihat bahwa penghitungan hampir benar, kecuali pada daerah di mana ketiga himpunansama-sama beririsan.

- $|A \cap B|$ dikurangkan (dua 1 merah diambil) ,
- $|A \cap C|$ dikurangkan (dua 1 biru diambil), dan
- $|B \cap C|$ dikurangkan (dua 1 hijau diambil)

PROCESS

Maka perlu ditambahkan kembali $|A \cap B \cap C|$.

Jadi **Rumus Prinsip Inklusi Eksklusi Untuk Tiga Himpunan** adalah :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \wedge B| - |A \wedge C| - |B \wedge C| + |A \wedge B \wedge C|$$

ATAU

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \wedge B) - n(A \wedge C) - n(B \wedge C) + n(A \wedge B \wedge C)$$

TAMBAHAN

Berdasarkan prinsip inklusi eksklusi, formula untuk menghitung banyaknya anggota himpunan hasil gabungan empat himpunan hingga.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

Latihan Soal

1. Misalkan ada 1467 mahasiswa angkatan 2011 di ITB. 97 orang di antaranya adalah mahasiswa Prodi Informatika, 68 mahasiswa Prodi Matematika, dan 12 orang mahasiswa double degree Informatika dan Matematika. Ada berapa orang yang tidak kuliah di Departemen Matematika atau Informatika?
2. Sebuah lembaga pendidikan menyediakan tiga jurusan bahasa yaitu Bahas Inggris, Jepang, dan Mandarin. Setiap pelajar dalam lembaga tersebut boleh memilih lebih dari satu jurusan. Misalkan ada 1232 pelajar yang mengambil jurusan bahasa Inggris, 879 orang mengambil jurusan bahasa Jepang, 114 orang mengambil jurusan bahasa Mandarin, 103 orang mengambil jurusan bahasa Inggris dan Jepang, 23 orang mengambil jurusan bahasa Inggris dan mandarin, dan 14 orang mengambil jurusan bahasa Jepang dan Mandarin. Jika jumlah pelajar dalam lembaga itu ada 2092 orang, berapakah banyaknya pelajar yangmengambil jurusan bahasa Inggris, Jepang, dan Mandarin?
3. Berapa banyak solusi dari $x_1 + x_2 + x_3 = 11$
   jika x_1, x_2, dan x_3 bilangan bulat nonnegatif dengan $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6$?

THANK YOU !!

ANY QUESTION?