PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

Pengenalan Konsep Persamaan Diferensial | Persamaan Diferensial Orde Satu
Persamaan Diferensial Linier Orde Dua| Transformasi Laplace
Pengaplikasian Persamaan Diferensial dalam Kehidupan

Penulis:
Ayu Faradillah
Ayu Tsurayya

DILENGKAPI BARCODE VIDEO PEMBELAJARAN

UHAMKA PRESS

PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

Pengenalan Konsep Persamaan Diferensial | Persamaan Diferensial Orde Satu
Persamaan Diferensial Linier Orde Dua| Transformasi Laplace
Pengaplikasian Persamaan Diferensial dalam Kehidupan

Penulis:
Ayu Faradillah
Ayu Tsurayya

DILENGKAPI BARCODE VIDEO PEMBELAJARAN

Penulis

Ayu Faradillah
Ayu Tsurayya

Cetakan I, Maret 2021
ISBN 978-623-7724-19-3

Diterbitkan oleh:

UHAMKA PRESS
Anggota IKAPI, Jakarta
Jl. Gandaria IV, Kramat Pela, Kebayoran Baru, Jakarta Selatan.
e-mail: uhamkapress@yahoo.co.id

PRAKATA

Assalamua'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Segala Puji dan Syukur kami panjatkan selalu kepada Tuhan Yang Maha Esa atas Rahmat, Taufiq, dan Hidayah yang sudah diberikan sehingga kami bisa menyelesaikan buku ajar yang berjudul **Pengantar Persamaan Diferensial**. Penulisan buku ini bertujuan untuk membantu mahasiswa memahami materi-materi persamaan diferensial melalui pembahasan di buku maupun di video pembelajaran yang tersedia pada barcode. Buku ini juga akan memberikan informasi mengenai Persamaan Diferensial Implisit dan Eksplisit, Persamaan Diferensial Orde Satu, Persamaan Diferesial Orde Dua, Transformasi Laplace, dan Aplikasi Persamaan Diferensial pada Kehidupan Sehari-hari.

Penulis menyadari bahwa proses penulisan buku ini dibantu oleh pihak sehingga buku ini bisa selesai. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu memberikan wawasan dan bimbingan kepada penulis sebelum maupun ketika menulis buku panduan ini.

Penulis juga menyadari bahwa buku yang penulis buat masih tidak belum bisa dikatakan sempurna. Maka, penulis meminta dukungan dan masukan dari para pembaca, agar kedepannya penulis bisa lebih baik lagi di dalam menulis sebuah buku.

Billahi Fi Sabililhaq Fastabiqul Khairat, Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Bekasi, Maret 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BARCODE

Scan Barcode di bawah, untuk mengakses seluruh video pembelajaran dalam Buku Pengantar Persamaan Diferensial.

BAB 1

PERSAMAAN DIFERENSIAL IMPLISIT DAN EKSPLISIT

A. Konsep

Konsep turunan sebagai bagian utama dari materi kalkulus dipikirkan oleh dua ahli diwaktu yang hampir berdekatan. Seorang ilmuwan ahli matematika dan fisika asal Inggris bernama Sir Isaac Newton pada tahun 1642-1727 dan seorang ahli matematika asal Jerman bernama Gootfried Wilhelm Leibniz pada tahun 1646-1716.

Konsep turunan ini digunakan sebagai alat untuk menyelesaikan berbagai masalah bidang keilmuan, misalnya geometri.

Dalam Islam, menentukan waktu shalat, ramadhan, dan hari raya seperti Idul Fitri dan Idul Adha menggunakan bantuan atau konsep spherical geometri. Beberapa ilmuwan muslim yang mewarisi atau mengembangkan geomteri yaitu Tsabit Ibu Qurra, Ibnu al-Haitham, dan Abu Nasr Mansur.

Diferensial juga diartikan sebagai tingkat perubahan suatu fungsi atas adanya perubahan variabel bebas dari fungsinya tersebut. Misalkan fungsi f(x) = y, yang dimana *y* sebagai variabel terikat dan *x* sebagai variabel bebasnya, artinya nilai *y* dipengaruhi oleh nilai *x*. Jadi, diferensial dapat diartikan sebagai tingkat perubahan dari setiap variabel *y* sebagai tanggapan terhadap suatu perubahan dalam variabel *x*.

B. Persamaan Diferesial Implisit dan Eksplisit

Penentuan order suatu persamaan diferensial tergantung pada kandungan fungsi turunan di dalam persamaan diferensial tersebut. Order atau tingkat suatu persamaan diferensial merupakan pangkat tertinggi turunan dalam persamaan diferensial. Persamaan diferensial dibagi menjadi 2 jenis, yaitu persamaan diferensial implisit dan persamaan diferensial eksplisit.

1. **Persamaan Diferensial Implisit**

   Bentuk Persamaan Diferensial Implisit:

$$f(x,y)\,,\frac{dy}{dx} = 0 \; atau \; f(x,y,y')$$

   Contoh 1.

   Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial (PD) berikut.

$$\mathrm{xyy'} + \mathrm{x}^2 + 1 = 0$$

   Penyelesaian:

   Jenis PD di atas adalah PD implisit orde satu karena terdapat suku xyy' dimana y' = $\frac{dy}{dx}$ yang artinya merupakan turunan pertama sehingga dapat dikatakan sebagai orde satu.

$$yy' = \frac{-x^2-1}{x}$$

$$\underline{y\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-x^2-1}{x}\right)} \;(\times)dx$$

$$y\,dy = \left(\frac{-x^2-1}{x}\right)dx$$

$$\int y\,dy = \int \left(\frac{-x^2-1}{x}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\,y^2 + C = \int -x\,dx \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\underline{\frac{1}{2}\,y^2 = -\frac{1}{2}x^2 - \ln x + C} \;(\times)\,2$$

$$y^2 = -x^2 - 2\ln x + 2C$$

$$y = \sqrt{-x^2 - x^2 + C}$$

$$y = \sqrt{-2x^2 + C}$$

2. Persamaan Diferensial Eksplisit

Bentuk Persamaan Diferensial Implisit:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) atau\, y' = f(x,y)$$

Contoh 2.

Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial (PD) berikut.

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 5$

Penyelesaian:

Jenis PD di atas adalah PD eksplisit orde satu karena terdapat suku $\frac{dy}{dx}$ yang artinya merupakan turunan pertama sehingga dapat dikatakan sebagai orde satu.

$\underline{\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 5}\quad (\times)\, dx$

$dy = (3x^2 + 6x - 5)\, dx$

$\int dy = \int (3x^2 + 6x - 5)\, dx$

y + c = $x^3 + 3x^2 - 5x$

C. Latihan Soal

Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial (PD) di bawah ini.

1. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$
2. $x^2y^2y' - 3x^2 + 2 = 0$
3. $2xy^2dx - (x^2 - 3)dy = 0$
4. $(1 + 2x^2)yy' = 2x(1 + y^2)$
5. $y''' = 5x^2 + 2y - 6$
6. $y'' = A \tan x - B \sin x$

"Jangan takut jatuh, karena yang tidak pernah memanjatnya yang tidak pernah jatuh. Jangan takut gagal, karena yang tidak pernah gagal hanyalah orang-orang yang tidak pernah melangkah. Jangan takut salah, karena dengan kesalahan yang pertama kita dapat menambah pengetahuan untuk mencari jalan yang benar pada langkah yang kedua."

Hamka

BAB 2 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE-1

A. Pendahuluan

PD linear order satu $f(x, y, y') = 0$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk.

$$M(x,y)\frac{dy}{dx} + N(x,y) = 0 \tag{2.1}$$

Variabel y disebut dengan variabel terikat sedangkan variabel x disebut dengan variabel bebas. Fungsi (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk lain dengan mengalikannya dengan dx pada masing-masing ruas persamaan, sehingga

$$M(x,y)dy + N(x,y)dx = 0 \tag{2.2}$$

Contoh 1.

1. $\frac{dy}{dx} = 2xy + \sin x$
2. $y' = \ln 2xy + \tan x$
3. $(x - \cos x + y)dx + (2xy + \sin x)dy = 0$
4. $e^x \cos y\, dx + 2x \sin x\, dy = 0$

Pada penjabaran berikutnya, kita akan mempelajari beberapa jenis PD orde satu.

B. Persamaan Diferensial dengan Peubah Terpisah

Persamaan diferensial (PD) orde satu merupakan bentuk PD yang paling sederhana, karena hanya melibatkan turunan pertama dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Jika dalam persamaan tersebut variabel bebas dan variabel tak bebasnya berada pada sisi yang berbeda dari tanda persamaannya, maka disebut PD yang terpisah dan untuk menentukan penyelesaiannya tinggal diintegralkan. Jika tidak demikian, maka disebut PD tak terpisah. Suatu PD orde satu yang tak terpisah biasanya dapat dengan mudah dijadikan PD terpisah melalui penggantian (substitusi) dari salah satu variabelnya.

PD (2.2) direduksi ke bentuk

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0 \tag{2.3}$$

Maka variabel-variabel dari persamaan (2.2) dinyatakan terpisah dan persamaan diferensialnya disebut persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Penyelesaian persamaan diferensialnya diberikan oleh

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)dy = C \tag{2.4}$$

Dimana C sebagai parameter (konstanta)

Contoh 2.

Selesaikan PD:

$$4yy' + x = 0$$

Penyelesaian:

Dengan pemisahan variabel akan diperoleh

$$4y\,dy = -x\,dx$$

Dengan pengintegralan pada masing-masing sisinya akan diperoleh penyelesaian umum:

$$\int 4y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{4}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c^*$$

$$4y^2 + x^2 = c$$

Jadi solusi persamaan diferensial di atas adalah $4y^2 + x^2 = c$

Contoh 3.

Selesaikan PD:

$$3xyy' + y^2 + 1 = 0$$

Penyelesaian:

$3xyy' + y^2 + 1 = 0$ dapat diubah menjadi

$$\frac{y}{y^2+1}dy = -\frac{dx}{3x}$$

$$\int \frac{y}{y^2+1}\, dy = \int -\frac{dx}{3x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{1}{3}\ln(x) = c^*$$

$$x^2(y^2+1)^3 = c$$

Jadi solusi persamaan diferensial di atas adalah $x^2(y^2+1)^3 = c$

Contoh 4.

Selesaikan PD:

$$y' + 2xy = 0 \;\; ; y(0) = 1$$

Penyelesaian:

Persamaan diferensial di atas dapat diubah menjadi

$$\frac{dy}{y} + 2xdx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + 2\int xdx = c^*$$

$$ln|y| + x^2 = c^*$$

$$y = \exp\,(c - x^2)$$

$$y = \exp\,(c - x^2)$$

Jadi solusi persamaan diferensial di atas adalah

Untuk mendapatkan solusi khususnya, masukkan nilai $y(0) = 1$ ke dalam solusi di atas, sehingga diperoleh $1 = exp(c)$ →$c = 0$. Jadi solusi khususnya $y = exp(-x^2)$

C. Persamaan Diferensial Homogen

Definisi 1.

Sebuah fungsi persamaan diferensial **A(x,y)** disebut persamaan homogen bila terdapat **n** X **R,** sehingga **A(kx,ky) = knA(x,y)** dimana **n** dikatakan sebagai order dari persamaan diferensial homogen **A(x,y)**.

Pada suatu persamaan yang dinyatakan sebagai PD Homogen memiliki ciri yaitu derajat pada setiap sukunya adalah sama.

Contoh 5.

Periksalah persamaan di bawah ini merupakan persamaan diferensial homogen atau tidak

Penyelesaian:

1. f(x,y) = x + 3y

   f(x,y) = f(kx, ky)

   = kx + 3ky

   = k(x + 3y), maka f(x,y) = x + 3y

   merupakan **PD homogen derajat 1**

2. g(x,y) = $3x^2 + xy - 7y^2$

   g(x,y) = g(kx,ky)

   $=3(kx)^2 + 4\ (kx)(ky) - 7(ky)^2$

   $=3k^2x^2 + 4\ k^2(xy) - 7k^2y^2$

   $=k^2 + (3x^2 + xy - 7y^2)$ maka

   fungsi ini merupakan **PD Homogen derajat 2**

3. F(x,y) $= x^2 + y$

   F(kx,ky) $= (kx)^2 + ky$

   $= k^2x^2 + ky$

   $= k(kx^2 + y)$ → Bukan PD Homogen

Bentuk Umum

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0 \tag{2.5}$$

Dimana M(x,y) dan N(x,y) merupakan PD Homogen.

Setelah kedua fungsi telah PD Homogen, selanjutnya substitusikan dengan:

$\frac{y}{x} = z \quad \rightarrow \quad y = zx$

$$dy = x\ dz + z\ dx \tag{2.6}$$

Atau

$\frac{x}{y} = z \quad \rightarrow \quad x = zy$

$$dx = y\ dz + z\ dy \tag{2.7}$$

Sehingga langkah-langkah untuk menyelesaikan PD. Homogen adalah.

a. Periksalah terlebih dahulu apakah M(x,y) dan N (x,y) adalah fungsi homogen dengan menggunakan definisi di atas (f(x,y)=f(kx,ky)).
b. Jika M(x,y) dan N (x,y) homogen, maka substitusikan dengan persamaan (2.6) atau (2.7). Selesaikan seperti langkah pada PD variabel terpisah.
c. Jika tidak homogen maka tidak usah diselesaikan.

Contoh 6.

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD Homogen dan Selesaikanlah.

$$(x + y\ )dx + x\ dy = 0$$

Penyelesaian:

1. Periksa PD Homogen atau tidak

$f(kx, ky) = kx + ky$

$f(kx, ky) = kx = k(x + y)$

Kedua suku pada soal di atas telah memenuhi syarat: F(kx,ky) = knF(x,y), sehingga PD pada soal merupakan PD Homogen.

2. *Substitusikan persamaan (2.6) atau (2.7)*

Misal $\frac{y}{x} = Z \rightarrow y = xz$

$dy = x\,dz + z\,dx$

$dy = (x + y)dx + x\,dy = 0$

$dy = (x + xz)dx + x(x\,dz + z\,dx) = 0$

$dy = x\,(1 + z)dx + \ x^2\,dz + xz\,dx = 0$

$dy = [\ x\,(1 + z) + xz\ ]dx + \ x^2\,dz = 0$

$dy = x\,(\ 1 + z + z)dx\ +\ x^2\,dz = 0$

$dy = x\,(\ 1 + 2z)dx + \ x^2 dz\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\times)\frac{1}{(1+2z)x^2}$

$dy = \ \int \frac{x}{x^2}\,dx + \ \int \frac{1}{1+2z}\,dz = \ \int 0$

$dy = \ \int \frac{1}{x}\,dx + \ \int \frac{1}{1+2z}\,dz = \ \int 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &misal:\ u = 1 + 2z \\ &du = 2dz \\ &dz = \frac{du}{2} \end{aligned}}$$

$= \ln|x| + c + \ \int \frac{1}{u}\frac{du}{2}$

$= \ln|x| + c + \ \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|x| + c + \ \frac{1}{2}\ln|u| + c$

$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|(1 + 2z)| = c$ ……. …(×) 2

$= 2\ln|x| + \ln|1 + 2z| = 2\ln c$

$= \ln|x^2| + \ln|1 + 2z| = c$

$= \ln\ (x^2(1 + 2\ \frac{y}{x}) = c$

Contoh 7.

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD Homogen dan Selesaikanlah.

$$2xy\ dx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

Penyelesaian:

$f(kx, ky) = 2(kx)(ky) = 2k^2xy = k^2(2xy)$

$f(kx, ky) = (kx)^2 - (ky)^2 = k^2x^2 - k^2y^2 = k^2(x^2 - y^2)$

Dari uji coba diatas kita bisa menarik kesimpulan bahwa keduanya PD Homogen. Maka:

Misal : $\frac{x}{y} = z \ \rightarrow x = yz$
$dx = y\ dz + z\ dy$

$2xy\ dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

$= 2\ (yzy)(y\ dz + z\ dy) + ((yz)^2 - y^2)dy = 0$

$misal\ u = 3z^2 - 1$
$du = 6z\ dz$
$dz = \frac{du}{6z}$

$= 2\ (y^2z)(y\ dz + z\ dy) + (y^2z^2 - y^2)dy = 0$

$= 2\ y^3z\ dz + 2y^2z^2dy + y^2z^2 - y^2dy = 0$

$= 2\ y^3z\ dz + (2y^2z^2 + y^2z^2 - y^2)dy = 0$

$= 2\, y^3 z\, dz + 3y^2 z^2 - y^2)dy = 0$

$= 2\, y^3 z\, dz + y^2(3z^2 - 1)dy = 0$ ……………….. $(\times)\frac{1}{y^3(3z^2-1)}$

$= \frac{2z}{3z^2-1}\, dz + \frac{y^2}{y^3}\, dy = 0$

$= \int \frac{2z}{3z^2-1}\, dz + \int \frac{1}{y}\, dy = \int 0$

$= \int \frac{2z}{u}\frac{du}{6z} + \int \frac{1}{y}\, dy = \int 0$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\, du + \int \frac{1}{y}\, dy = \int 0$

$= \frac{1}{3}\ln|3z^2 - 1| + \ln y = c$ … … … … …. . $(\times)3$

$= \ln|3z^2 - 1| + 3\ln|y| = 3c$

$= \ln|3z^2 - 1| + \ln|y^3| = c$

$= \ln(\,(3z^2 - 1)y^3) = c$

$= 3y^3 z^2 - y^3 = c$

$= 3y^3\frac{x^2}{y^2} - y^3 = c$

$= 3\mathrm{x}^2\mathrm{y} - \mathrm{y}^3 = \mathrm{c}$

D. Persamaan Diferensial Koefisien Linier

Bentuk umum

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0 \qquad (2.8)$$

Persamaan diferensial (PD) koefisien linier sering juga disebut dengan *persamaan diferensial tidak homogen.* Suatu PD dikatakan tidak homogen jika.

$$A(kx,ky) \neq k^n \,.\, A(x,y) \qquad (2.9)$$

Pada penyelesaian PD homogen, setelah menguji apakah suatu persamaan dikatakan PD homogen atau tidak, Langkah selanjutnya adalah dengan mensubstitusikan $dy = x\,dz + z\,dx$ atau $dx = y\,dz + z\,dy$. Sedangkan pada PD Koefisien Linier atau Tidak Homogen untuk mencari nilai dx dan dy bisa diperoleh dengan.

Misal.

$u = ax + by + c \rightarrow du = adx + bdy$ *(i)*

$v = px + qy + r \rightarrow dv = pdx + qdy$ *(ii)*

Sehingga dx dan dy bisa diperoleh dengan mengeliminasi dan substitusi pers. *(i)* dan *(ii)*

$du = adx + bdy \,|\times q| \rightarrow qdu = aqdx + bqdy$

$\underline{dv = pdx + qdy \,|\times b| \rightarrow bdv = bpdx + bqdy\ -}$

$$qdu - bdv = (aq - bp)dx$$

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp} \qquad (2.10)$$

Lakukan hal yang sama untuk memperoleh dy.

Cobalah untuk menurunkan dy, sehingga didapatkan

$$dy = \frac{pdu - adv}{bp - aq} \qquad (2.11)$$

Contoh 8.

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD koefisien linier atau tidak dan Selesaikanlah.

$$(2x - y + 3)\ dx + (4x - 2y + 7)\ dy = 0$$

Penyelesaian:

1. *Periksa PD koefisien linier atau tidak*

   Pengujian PD koefisien linier sama seperti pengujian pada PD homogen.

   f(kx,ky) = 2kx – ky + 3
   = k (2x – y) + 3 ≠ homogen
   karena ada +3 yang tidak mengandung variable k.

   f(kx,ky) = 4kx - 2ky +7
   = k (4x - 2y) + 7 ≠ homogen
   karena ada +7 yang tidak mengandung variable k.

   Kedua suku pada soal di atas telah memenuhi syarat: F(kx,ky) ≠ knF(x,y), sehingga PD pada soal merupakan PD koefisien linier.

2. *Substitusikan persamaan (2.10) atau (2.11)*

   $(2x - y + 3)\ dx + (4x - 2y + 7)\ dy = 0$

   Karena 2x – y merupakan setengah dari 4x – 2y maka

   Misal.

   $u = 2x - y$

   $du = adx + bdy$

   $du = 2\ dx - 1\ dy$

   $dy = \ - du + 2\ dx$

   Maka substitusikan pemisalan ke soal, sehingga

   $(2x - y + 3)\ dx + (4x - 2y + 7)\ dy = 0$

   $(2x - y + 3)\ dx + (2(2x - y) + 7)\ dy = 0$

   $(u + 3)dx + [2u + 7]\ dy = 0$

   $(u + 3)\ dx + (2\ u + 7)(-du + 2\ dx) = 0$

$u\,dx + 3\,dx - 2\,u\,du + 4u\,dx\ - 7\,du + 14\,dx = 0$

$5\,u\,dx + 17\,dx - 2\,u\,du\ - 7\,du = 0,$

lalu kumpulkan masing-masing variabel yang sama untuk dapat diintegralkan seperti pada PD variable terpisah.

$(5\,u + 17)\,dx - (2\,u - 7)\,du = 0$ ……….($\times$) $\frac{1}{5z+7}$

$\int dx - \int \left(\frac{2u+7}{5u+17}\right) \mathrm{du} = \int 0$

Sehingga memperoleh penyelesaian akhir:

$x + 2y - 5\,(10\,x - 5y + 17)^{\frac{1}{5}} = C$

Contoh 9.

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD koefisien linier atau tidak dan Selesaikanlah.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{2x + 3y - 6}$$

Penyelesaian:

1. *Periksa PD koefisien linier atau tidak*

   $(6x + 2y - 7)dx - (2x + 3y - 6)dy = 0$

   Sehingga,

   f(kx,ky) = 6kx + 2ky – 7
   = k (6x + 2y) – 7 ≠ homogen
   karena ada – 7 yang tidak mengandung variable k.

   f(kx,ky) = - (2kx + 3ky – 6)
   = -k (2x + 3y) – 6 ≠ homogen
   karena ada – 6 yang tidak mengandung variable k.

   Kedua suku pada soal di atas telah memenuhi syarat: F(kx,ky) ≠ knF(x,y), sehingga PD pada soal merupakan PD koefisien linier.

2. *Substitusikan persamaan (2.10) dan (2.11)*

Misal :

$u = (6x + 2y - 7) \rightarrow du = 6dx - 2dy$;

$v = (2x + 3y - 6) \rightarrow dv = 2dx + 3dy$

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp}$$

$$dx = \frac{3du - (-2)dv}{6.3 - (-2)2}$$

$$dx = \frac{3du + 2dv}{22}$$

dan

$$dy = \frac{pdu - adv}{bp - aq}$$

$$dy = \frac{2du - 6dv}{(-2)2 - 6.3}$$

$$dy = \frac{2du - 6dv}{-22}$$

Maka,

$$(6x + 2y - 7)dx - (2x + 3y - 6)dy = 0$$

$$udx \quad - \quad vdy \quad = 0$$

$$u\left(\frac{3du + 2dv}{22}\right) \quad - \quad v\left(\frac{2du - 6dv}{-22}\right) \quad = 0$$

$$\frac{u}{22}(3du + 2dv) \quad + \quad \frac{v}{22}(2du - 6dv) \quad = 0$$

$$u(3du + 2dv) \quad + \quad 2v(du - 3dv) \quad = 0$$

$$3udu + 2udv \quad + \quad 2vdu - 6vdv \quad = 0$$

$$(3u + 2v)du \quad + \quad (2u - 6v)dv \quad = 0$$

<u>Buktikan apakah persamaan diatas termasuk PD Homogen.</u>

$f(u, v) = 3u + 2v$	$f(u, v) = 2u - 6v$
$f(ku - kv) = 3(ku) + 2(kv)$	$f(ku - kv) = 2(ku) - 6(kv)$
$f(ku - kv) = k(3u + 2v)$	$f(ku - kv) = k(2u - 6v)$

Misal :

$$\frac{u}{v} = z \ \rightarrow u = zv \ \rightarrow du = zdv + vdz$$

$$(3u + 2v)du + (2u - 6v)dv \quad = 0$$

$$(3zv + 2v)(zdv + vdz) + (2zv - 6v)dv \ = 0$$

$$3z^2vdv + 3zv^2dz + 2zvdv + 2v^2dz + (2zv - 6v)dv = 0$$

$$(3z^2v + 4zv - 6v)dv + (3zv^2 + 2v^2)dz = 0$$

$$[v(3z^2 + 4z - 6)]dv + [v^2(3z^2 + 2)]dz = 0$$

$$\int \frac{v}{v^2}dv + \int \frac{3z^2 + 2}{3z^2 + 4z - 6}dz = \int 0$$

Misal :

$$u = 3z^2 + 4z - 6 \rightarrow du = (6z + 4)dz \rightarrow dz = \frac{du}{2(3z + 2)}$$

$$\int \frac{1}{v}dv + \int \frac{3z + 2}{u}.\frac{du}{2(3z + 2)} = \int 0$$

$$\text{In}|v| + \frac{1}{2}\ \text{In}|u| = c$$

$$2\text{In}|v| + \text{In}|u| = c$$

$$2\text{In}|v^2| + \text{In}|3z^2 + 4z - 6| = c$$

$$\text{In}[v^2(3z^2 + 4z - 6)] = \text{In}\ c$$

$$v^2(3z^2 + 4z - 6) = \ c$$

$$3u^2 + 4uv - 6v^2 = c$$

$$3(6x - 2y - 7)^2 + 4(6x - 2y - 7)(2x + 3y - 6) - 6(2x + 3y - 6)^2 = c$$

$$3(36x^2 - 24xy - 84x + 4y^2 + 28y + 49) + (48x^2 + 56xy - 200x - 24y^2$$

$$-36u + 168 - 6(4x^2 + 12xy - 24x + 9y^2 - 36y + 36) = c$$

$$108x^2 - 72xy - 252x + 12y^2 + 84y + 147 - 48x^2 - 56xy + 200x$$

$$+24y^2 + 36y - 168 - 24x^2 - 72xy + 144x - 54y^2 + 216y - 216 = c$$

$$36x^2 - 200xy + 92x - 18y^2 + 336y - 426 = c$$

E. Persamaan Diferensial Eksak

Eksak berasal dari kata sifat yang memiliki arti pasti, tentu, dan tidak dapat diubah-ubah lagi. Salah satu ayat pada Al-Quran yang memiliki pengertian eksak, yaitu.

Katakanlah: "Sesungguhnya kematian yang kamu lari daripadanya, maka sesungguhnya kematian itu akan menemui kamu, kemudian kamu akan dikembalikan kepada (Allah), yang mengetahui yang ghaib dan yang nyata, lalu Dia beritakan kepadamu apa yang telah kamu kerjakan." (Q.S. Al-Jumu'ah : 8)

Dengan mengingat pelajaran kalkulus, jika pada sebuah fungsi persamaan memiliki dua variable berbeda, seperti

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x^3y^2 - 3x^2y^3 + 6xy + 15$$

Diferensial total dari fungsi di atas diberikan oleh

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

$$= (2x - 9x^2y^2 - 6xy^3 + 6y)dx + (2y - 6x^3y - 9x^2y^2 + 6x)dy$$

Sebaliknya jika kita mulai dari ekspresi

$$= (2x - 9x^2y^2 - 6xy^3 + 6y)dx + (2y - 6x^3y - 9x^2y^2 + 6x)dy$$

Definisi 2.

Ekspresi Diferensial

$$M(x,y)dx \ + \ N(x,y)dy = 0 \qquad (2.12)$$

PD disebut eksak bila ruas kiri dapat ditulis sebagai diferensial total dari Suatu PD yang memiliki dua variabel $f(x, y)$ sehingga

$$M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \text{ dan } N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \qquad (2.13)$$

Misalkan belum diketahui apakah persamaan (2.13) eksak atau tidak. Sehingga, kita harus menguji terlebih dahulu PD (2.13) eksak atau tidak. Adapun langkah-langkah pengujikan suatu PD eksak atau tidak yaitu dengan cara mengintegrasikan koefisien dari dx terhadap x dengan y dianggap konstan.

Definisi 3.

Persamaan Diferensial:

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)dy = 0$$

Dikatakan eksak jika ada persamaan (x,y) sehingga derivatif parsialnya terhadap x adalah $P(x,y)$ dan derivatif parsialnya terhadap y adalah $Q(x,y)$. Maka berdasarkan definisi 3, suatu PD dinyatakan eksak jika ada fungsi yang sedemikian sehingga

$$P(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \ \text{ dan Q(x,y)} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Diferensial total dapat ditulis sebagai berikut.

$\partial F(x,y) = 0$. Berarti:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Persamaan (1) dan (2) harus identik, karena keduanya dapat ditulis sebagai diferensial dari $F(dF(x,y))$ sehingga

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ N(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \end{aligned}\right] \text{sama}$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + c(y) \tag{2.14}$$

Karena diintegralkan terhadap x maka y dianggap sebagai konstanta sehingga merupakan fungsi dari y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[F(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[M(x,y)dx + c(y)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + c'(y)$$

Kita tahu bahwa $\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{N(x,y)}$

Maka:

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + c'(y)$$

$$c(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right]dy$$

Sehingga

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + c(y)$$

$$= \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right]dy$$

Syarat eksak ditentukan oleh

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} \rightarrow \text{Syarat PD Eksak}$$

Jika y terlebih dulu dianggap konstan, kita juga bisa membalik kondisi dengan x dulu yang dianggap konstan.

Dengan

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + c(x) \qquad (2.15)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int N(x,y)dy\right] + c'(x) = M(x,y)$$

Teorema Persamaan Diferensial

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Eksak jika hanya jika

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

dimana fungsi $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ dan persamaan terdefinisi dan kontinu dalam daerah terhubung sederhana.

Contoh 10.

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD eksak atau tidak dan Selesaikanlah.

$$y^2 dx + 2xydy = 0$$

Penyelesaian:

1. *Periksa PD Eksak atau tidak*

   $y^2 dx + 2xydy = 0$

   $M\,(x,y) = y^2 \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

   $N\,(x,y) = 2xy \Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

   Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, maka $y^2 dx + 2xydy = 0$ persamaan diferensial eksak.

2. *Substitusikan ke persamaan 2.14 atau 2.15*

   $u(x,y) = \int M dx + k(y)$

   $= \int y^2 dx + k(y)$

   $= xy^2 + k(y)$

   Selanjutnya dicari nilai $k(y)$

   $\frac{\partial u}{\partial y} = N \Longrightarrow 2xy + \frac{dk}{dy} = 2xy$

   $\frac{dk}{dy} = 0 \Rightarrow k(y) = c$

   Sehingga

   $u(x,y) = xy^2 + c$ atau $xy^2 + c = 0$

   Jadi penyelesaiannya adalah $xy^2 + c = 0$

Contoh 11.

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD eksak atau tidak dan Selesaikanlah.

$$xy' + y + 4 = 0$$

Penyelesaian:

1. *Periksa PD Eksak atau tidak*

   $xy' + y + 4 = 0$

   $xy' = -(y+4)$

   $x\frac{dy}{dx} = -(y + 4)$

   $x\,dy + (y + 4)\,dx = 0$

   $(y + 4)\,dx + x\,dy = 0$

   Sehingga,

   $M(x,y) = y + 4$

   $\frac{dM}{dy} = 1$

   $N(x,y) = x$

   $\frac{dN}{dx} = 1$

   Karena $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, maka $xy' + y + 4 = 0$ persamaan differensial eksak

2. *Substitusikan ke persamaan 2.14 atau 2.15*

   Fungsi penyelesaian

   $u(x,y) = \int N dy + l(x)$

   $= \int x dy + l(x)$

   $= xy + l(x)$

   Nilai konstanta l(x)

   $\frac{du}{dx} = M$

   $y + \frac{dl}{dx} = y + 4$

   $\frac{dl}{dx} = 4$

dl = 4 dx

$\int dl$ = $\int 4\, dx$

I(x) = 4x + c

Jadi,

u(x,y) = xy + 4x + c

xy + 4x + c = 0

xy = - c – 4x

y = $-\frac{c}{x} - 4$

jadi, penyelesaiannya adalah fungsi y = $-\frac{c}{x} - 4$

F. Analisis Jenis PD Orde-1

Jenis-jenis PD Orde-1 yang telah dijabarkan dan dipelajari, seperti PD Variabel Terpisah, Homogen, Koefisien Linier, dan Eksak memiliki ciri yang dapat dianalisis. Sehingga, dalam menyelesaikan suatu permasalahan dari PD Orde-1 dapat dianalisis berdasarkan bentuk umumnya.

Contoh 12.

Tentukan jenis PD orde-1 dari persamaan (6xy + 2y) $\frac{dy}{dx}$ = - (2x + 3y^2)

Penyelesaian:

Persamaan di atas dapat dituliskan menjadi (2x + 3y^2) dx + (6xy + 2y) dy = 0

1. Analisis Bentuk Umum PD orde-1.

a. Bentuk umum PD Variabel terpisah yaitu M(x) dx + N(y) dy = 0 **(tidak memenuhi)**

b. Bentuk umum PD Homogen: M (x, y) dx + N (x, y) dy = 0 **(memenuhi)**

c. Bentuk umum PD Koefisien Linier: $(ax + by + c)\ dx + (px + qy + r)\ dy = 0$ **(tidak memenuhi)**

d. Bentuk umum PD eksak: M (x, y) dx + N (x, y) dy = 0 **(memenuhi)**

Jadi, berdasarkan analisis bentuk umumnya, persamaan pada soal kemungkinan merupakan jenis PD Homogen dan Eksak

2. **Pembuktian PD yang memenuhi**

Berdasarkan analisis bentuk PD orde-1, diperoleh bahwa persamaan pada soal mungkin merupakan jenis PD Homogen dan Eksak. Sehingga, pada Langkah selanjutnya yang dapat dilakukan adalah analisis definisi PD orde-1.

a. Definisi PD Homogen: f(kx,ky) = kn f(x,y).

Suku pertama ➔ f(kx,ky) = $2kx + 3(ky)^2$

$= 2kx + 3\ k^2y^2$

$= k\ (2x + 3ky^2)$

bukan homogen (karena fungsi yang dihasilkan bukan $(2x + 3y^2)$ seperti pada soal.

Suku kedua ➔ f(kx,ky) = 6kxky + 2ky

= 6k2xy + 2ky

= k (6kxy + 2y)

bukan homogen (karena fungsi yang dihasilkan bukan (6xy + 2y) seperti soal awal melainkan (6kxy + 2y)

Maka Contoh Soal tersebut **bukan** merupakan **jenis PD Homogen**.

b. Definisi PD eksak: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

M (x,y) = $(2x + 3y^2)$ maka $\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + 6y = 6y$

N(x,y) = (6xy + 2y) maka $\frac{\partial N}{\partial x} = 6y + 0 = 6y$

Sehingga terbukti bahwa $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow 6y = 6y$

Oleh karena itu, Contoh Soal ini merupakan jenis **PD Eksak**.

3. **Penyelesaian**

Berdasarkan hasil analisis bentuk umum dan definisi dari jenis-jenis PD orde-1 di atas, diperoleh bahwa persamaan $(2x + 3y^2)\,dx + (6xy + 2y)\,dy = 0$ merupakan jenis dari PD eksak, Sehingga penyelesaiannya sebagai berikut.

a. Buktikan fungsi kontinu

$$u(x,y) = \int M\,dx + k(y)$$
$$= \int (2x + 3y^2)\,dx + k(y)$$
$$= x^2 + 3xy^2 + k(y)$$

b. Setelah memperoleh u(x,y) diperoleh hasil $x^2 + 3xy^2 + k(y)$, untuk mendapatkan nilai k(y) dilakukan dengan cara mensubstitusikan ke

$$\frac{du}{dy} = N(x,y)$$

Sehingga, $u(x,y) = x^2 + 3xy^2 + k(y)$

$$\frac{du}{dy} = 0 + 6xy + \frac{dk(y)}{dy} = 6xy + \frac{dk(y)}{dy}$$

Dan $N(x,y) = 6xy + 2y$

Ketika disubtitusikan menjadi

$$\frac{du}{dy} = N(x,y)$$

$$6xy + \frac{dk(y)}{dy} = 6xy + 2y$$

$$\frac{dk(y)}{dy} = 2y$$

Karena yang dicari adalah nilai k(y),

maka $\frac{dk(y)}{dy} = 2y$ masing-masing ruas diintegralkan jadi

$\int \frac{dk(y)}{dy} = \int 2y$ dikali silang dy

$$\int dk(y) = \int 2y\,dy$$

$$k(y) = y^2 + c$$

Substitusikan k (y) ke u(x,y)

$$u(x,y) = x^2 + 3xy^2 + k(y)$$
$$= x^2 + 3xy^2 + y^2 + c$$

u(x,y) merupakan fungsi kontinu yang bernilai 0 sehingga

$0 = x^2 + 3xy^2 + y^2 + c$

$y^2\ (x + 1) = -\ x^2 - c$

$Jadi, penyelesaian\ dari\ contoh\ PD\ di\ atas\ adalah\ y = \sqrt{\frac{-x^2-c}{x+1}}$

G. Faktor Integrasi

Definisi 4.

Sebuah faktor pengali yang menjadikan suatu PD yang tidak eksak menjadi PD eksak dinamakan faktor integrasi.

Teorema Faktor Integrasi

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0$$

Seperti yang diketahui bahwa untuk menguji suatu **PD Eksak atau tidak** adalah jika dan hanya jika

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (2.16)$$

Kita asumsikan bahwa PD pada bentuk umum di atas tidak eksak dan memiliki faktor integrasi **a(x,y).** Sehingga berdasarkan definisi

$$a(x,y)\ M(x,y)\ dx + a(x,y)\ N(x,y)\ dy = 0 \qquad (2.17)$$

PD (2.17) merupakan PD Eksak. Jadi, untuk mengujinya menjadi

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y} a(x,y) M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} a(x,y) N(x,y)}$$

Sehingga dapat menggunakan sifat dasar turunan **uv = u'v + v'u** menjadi

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} M(x,y) + \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} a(x,y) = \frac{\partial a(x,y)}{\partial x} N(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} a(x,y) \qquad (2.18)$$

1. Faktor Integrasi a(x,y) = a(x) (Fungsi x saja)

Misalkan $\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = 0$

Substitusikan ke (2.18) sehingga,

$$0\,M(x,y)+\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}a(x,y) = -\left(\frac{\partial a(x,y)}{\partial x}N(x,y)+\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}a(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}a(x,y)-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}a(x,y)=\frac{\partial a(x,y)}{\partial x}N(x,y)$$

$$a(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial a(x,y)}{\partial x}N(x,y)$$

$$a(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x = \partial a(x,y)\,N(x,y)$$

Gunakan prinsip pada **PD dengan variabel yang dapat dipisahkan** untuk menggabungkan a(x,y) dengan $\partial a(x,y)$ dan N(x,y) dengan dx. Sehingga dikalikan dengan $\frac{1}{a(x,y)N(x,y)}$

$$a(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x=\partial a(x,y)\,N(x,y)$$

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x = \frac{1}{a(x,y)}\partial a(x,y)$$

Integralkan kedua ruas menjadi

$$\int\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x=\int\frac{1}{a(x,y)}\partial a(x,y)$$

Sehingga

$$\int\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x=\ln|a|$$

Jadi,

$$e^{\int\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x}=e^{\ln|a|}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}^{\int\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x} \Rightarrow \textbf{Faktor Integrasi Fungsi x saja.}}$$

Contoh 13.

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial di bawah ini.

$$(1-xy)\,dx+(xy-x^2)\,dy=0$$

Penyelesaian:

1. *Periksa PD eksak atau tidak*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -x \quad \neq \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = y - 2x$$

$(1 - xy)dx + (xy - x^2)\, dy = 0$ bukan Persamaan Differensial Eksak.

2. *Substitusikan ke rumus faktor integrasi fungsi x saja*

$$f(x) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

$$f(x) = \frac{-x - (y - 2x)}{xy - x^2}$$

$$f(x) = \frac{-x - y + 2x}{xy - x^2}$$

$$f(x) = \frac{(x - y)}{-x(x - y)}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$a(x) = e^{\int f(x)dy}$$

$$a(x) = e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dy}$$

$$a(x) = e^{-\ln x}$$

$$a(x) = \frac{1}{x}$$

3. *Selesaikan dengan penyelesaian PD eksak*

$$(1 - xy)dx + (xy - x^2)\, dy = 0\ x\ \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) dx + (y - x)dy = 0$$

a. *Periksa PD eksak atau tidak*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -1 \quad = \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -1$$

$\left(\frac{1}{x} - y\right) dx + (y - x)dy = 0$ merupakan PD Eksak

b. *Substitusikan ke persamaan (2.14) atau (2.15)*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \int (y - x)\ dy$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2}{2} - xy + C$$

$$f_x(x,y) = -y + C(x)$$

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) = -y + C(x)$$

$$\int \frac{1}{x} = \int C(x)$$

$$\ln x = C$$

$$\frac{y^2}{2} - xy + C$$

Substitusikan : C = $\ln x$

$$\frac{y^2}{2} - xy + \ln x = 0 \ \times 2$$

$$y^2 - 2xy + 2\ln x = 0$$

2. Faktor Integrasi a(x,y) = a(y) (Fungsi y saja)

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} M(x,y) + \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} a(x,y) = \frac{\partial a(x,y)}{\partial x} N(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} a(x,y) \qquad (2.18)$$

Misalkan $\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = 0$

Coba turunkan rumus faktor integrasi fungsi y saja seperti yang telah dilakukan pada fungsi x saja.

Sehingga diperoleh

$\boldsymbol{a = e^{\int \frac{1}{M(x,y)}\left(-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\partial x}}$ ➔ **Faktor Integrasi Fungsi y**

Contoh 14.

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial di bawah ini.

$$xy\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$$

Penyelesaian:

1. *Periksa PD eksak atau tidak*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \quad \neq \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$xy\ dx + (1 + x^2)\ dy = 0$ bukan PD Eksak

2. *Substitusikan ke rumus faktor integrasi fungsi y*

$$f(y) = \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$$

$$f(y) = \frac{2x - 1}{xy}$$

$$f(y) = \frac{x(2 - 1)}{xy}$$

$$f(y) = \frac{x}{xy}$$

$$f(y) = \frac{1}{y}$$

$$a(y) = e^{\int f(y)dy}$$

$$a(y) = e^{\int \left(\frac{1}{y}\right)dy}$$

$$a(y) = e^{\ln y}$$

$$a(y) = y$$

3. *Selesaikan dengan penyelesaian PD eksak*
   a. *Periksa PD eksak atau tidak*

   $$(\ xy\ dx + (1 + x^2)\ dy = 0\ ) \times y$$

   $$(xy^2)dx + (y + x^2y\ )dy = 0$$

   $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2xy \quad = \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy$$

   $(xy^2)dx + (y + x^2y\ )dy = 0$ merupakan PD Eksak

   b. Substitusikan ke persamaan (2.14) atau (2.15)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \int (y + x^2\ y)\ dy$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2}{2} + \frac{y^2x^2}{2} + C$$

$$f_x(x,y) = xy^2 + C(x)$$

$$xy^2 = xy^2 + C(x)$$

$$\int 0 = \int C(x)$$

$$0 = C$$

Substitusikan : C = 0

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^2x^2}{2} + 0 =$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^2x^2}{2} = 0$$

3. Faktor Integrasi a(x,y) = a(xy) (Fungsi xy saja)

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} M(x,y) + \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} a(x,y) = \frac{\partial a(x,y)}{\partial x} N(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} a(x,y) \qquad (2.18)$$

Misalkan a(x,y) = a(xy) dan b = xy, sehingga

Dengan menggunakan prinsip aturan rantai diperoleh,

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} = \frac{da}{db}\frac{db}{dx}\ dan\ \frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = \frac{da}{db}\frac{db}{dy}$$

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} = \frac{da}{db}\frac{d(xy)}{dx} = \frac{da}{db}y$$

$$dan\ \frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = \frac{da}{db}\frac{d(xy)}{dy} = \frac{da}{db}x$$

Coba turunkan rumus faktor integrasi fungsi xy seperti yang telah dilakukan pada fungsi x saja.

Sehingga diperoleh,

$$\boldsymbol{a = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{yN(x,y) - xM(x,y)} \right) db}}$$ ➔ **Faktor Integrasi Fungsi xy saja.**

Contoh 15.

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial di bawah ini.

$$(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$$

Penyelesaian:

1. *Periksa PD eksak atau tidak*

$M(x, y) = 2x^2y^2 - y = \frac{dP}{dy} = 4x^2y - 1$

$N(x, y) = 2x^3y^3 - x = \frac{dQ}{dx} = 4xy^2 - 1$

$(2x^3y^2 - y)\, dx + (2x^2y^3 - x)\, dy$ = 0 bukan PD eksak

2. *Substitusikan ke rumus faktor integrasi fungsi xy*

$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 4x^2y - 1 - (4xy^2 - 1\ )$

= $4x^2y - 4xy^3$

= $4xy(x^2y^2)$

b= xy → $\frac{db}{dy} = x\ , \frac{db}{dx} = y$

$M\frac{db}{dy} = x(2x^3y^2) = 2x^4y^2 - xy$

$N\frac{db}{dx} = y(2x^2y^3 - x) = 2x^2y^4 - xy$

$M\frac{db}{dy} - N\frac{db}{dx} = 2x^4y^2 - xy - (2x^2y^4 - xy\ )$

$= 2x^4y^2 - 2x^2y^4$

$= 2x^2y^2(x^2 - y^2)$

$$F(b) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{yN(x,y) - xM(x,y)}$$

$$= -(\frac{4xy(x^2y^2)}{2x^2y^2(x^2 - y^2)})$$

$$= -\frac{4xy}{2x^2y^2}$$

$$= -\frac{2}{xy}$$

Faktor Integrasi terhadap xy

a(b) = $e^{\int F(b)\, dv}$

= $e^{\int -(\frac{2}{xy})\, dv}$

$= e^{-2\int -(\frac{1}{xy})\, dv}$

$= e^{-2\ln|xy|}$

$= e^{\ln|xy|^{-2}}$

$= e^{\ln|x^{-2}y^{-2}|}$

a(b) = $x^2y^2 = \frac{1}{x^2y^2}$

Maka persamaan terhadap xy

$\frac{1}{x^2y^2}(2x^3y^2 - y)\, dx + \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x)\, dy$ = 0

3. *Selesaikan dengan penyelesaian PD eksak*

   a. *Periksa PD eksak atau tidak*

$$M = \frac{1}{x^2y^2}(2x^3y^2 - y) = \frac{2x^3y^2 - y}{x^2y^2} = \frac{2x^3y^2}{x^2y^2} - \frac{y}{x^2y^2} = 2x - \frac{1}{x^2y}$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$N = \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x) = \frac{2x^2y^3 - x}{x^2y^2} = \frac{2x^2y^3}{x^2y^2} - \frac{x}{x^2y^2} = 2y - \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$\left(2x - \frac{1}{x^2y}\right) dx + \left(2y - \frac{1}{y^2}\right) dy = 0$ merupakan PD eksak.

   b. *Substitusikan ke persamaan (2.14) atau (2.15)*

$$g(x,y) = \int M(x,y) + a(y)$$

$$= \int (2x - \frac{1}{x^2y})\, dx + a(y)$$

$$= x^2 + \frac{1}{xy} + a(y)$$

$$\frac{d}{dy}\left[x^2 + \frac{1}{xy} + a(y)\right] = 2y - \frac{1}{y^2}$$

$$-\frac{1}{xy^2} + \frac{da(y)}{dy} = 2y - \frac{1}{y^2}$$

$$\int da(y) \quad = \int 2y\, dy$$

$$a(y) \quad = y^2 + c$$

Substitusi,

$$g(x,y) = x^2 + \frac{1}{xy} + y^2 + c$$

$$g(x,y) = \int (x,y)\, dy + i(x)$$

$$= \int \left(2y - \frac{1}{xy^2}\right) dy + i(x)$$

$$= \int 2y\, dy - \int \frac{1}{xy^2} dy\; i(x)$$

$$= y^2 + \frac{1}{xy} + i(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[y^2 + \frac{1}{xy} + i(x)\,\right] = \; 2x - \frac{1}{x^2 y}$$

$$-\frac{1}{x^2 y} + \frac{di(x)}{dx} \qquad = \; 2x - \frac{1}{x^2 y}$$

$$\int di(x) \qquad = \int 2x\, dx$$

i(x) $\qquad = x^2 + c$

Jadi,

$$g(x,y) = y^2 + \frac{1}{xy} + \; x^2 + c$$

Pengayaan

1. Faktor Integrasi a(x,y) = a(x/y) (Fungsi x/y saja)

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} M(x,y) + \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} a(x,y) = \frac{\partial a(x,y)}{\partial x} N(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} a(x,y) \qquad (2.18)$$

Misalkan a(x,y) = a(x/y) dan b = x/y, sehingga

Dengan menggunakan prinsip aturan rantai diperoleh,

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} = \frac{da}{db}\frac{db}{dx} \; dan \; \frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = \frac{da}{db}\frac{db}{dy}$$

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} = \frac{da}{db}\frac{d(x/y)}{dx} = \frac{da}{db}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$dan \; \frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = \frac{da}{db}\frac{d(x/y)}{dy} = \frac{da}{db}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

Coba turunkan rumus faktor integrasi fungsi x/y seperti yang telah dilakukan pada fungsi x saja.

Sehingga diperoleh,

Rumus Faktor Integrasi Fungsi x/y saja.

$$\boldsymbol{a = e^{\int \left(\frac{y^2\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{xM(x,y) + yN(x,y)} \right) \partial b}}$$

2. Faktor Integrasi a(x,y) = a(y/x) (Fungsi y/x saja)

$\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} M(x,y) + \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} a(x,y) = \frac{\partial a(x,y)}{\partial x} N(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} a(x,y)$ (2.18)

Misalkan a(x,y) = a(xy) dan b = y/x, sehingga

Dengan menggunakan prinsip aturan rantai diperoleh,

$\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} = \frac{da}{db}\frac{db}{dx}\ dan \frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = \frac{da}{db}\frac{db}{dy}$

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} = \frac{da}{db}\frac{d(xy)}{dx} = \frac{da}{db}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$dan \frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = \frac{da}{db}\frac{d(xy)}{dy} = \frac{da}{db}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Coba turunkan rumus faktor integrasi fungsi y/x seperti yang telah dilakukan pada fungsi x saja.

Sehingga diperoleh,

Rumus Faktor Integrasi Fungsi y/x saja

$$\boldsymbol{a = e^{\int\left(\frac{x^2\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial x}\right)}{xM(x,y)+yN(x,y)}\right)\partial b}}$$

H. Persamaan Diferensial Linier Orde 1

Definisi 5.

PD linier orde 1 adalah sebuah PD yang dapat ditulis dalam bentuk

y' + M(x) y = N(x) (2.19)

dimana M(x) dan N(x) adalah fungsi kontinu dari x pada interval dimana M dan N terdefinisi.

Persamaan ini mempunyai faktor integrasi:

$e^{\int P(x)dx}$

Sehingga,

y' + M(x) y = N(x)

$\frac{dy}{dx} + M(x)y = N(x)$ [kali dx]

dy + M(x)y dx = N(x) dx

dy + M(x)y dx - N(x) dx = 0

[M(x)y – N(x)] dx + dy = 0

Uji Eksak (1)

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(M(x)y - N(x))}{dy} = M(x)$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(1)}{dx} = 0$$

$$\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}, tidak\ eksak$$

Integrasikan terhadap (x)

$$a = e^{\int \frac{1}{N(x)}\left(\frac{\partial M(x)}{\partial y} - \frac{\partial N(x)}{\partial x}\right)\partial x}$$

$$a = e^{\int \frac{1}{1}(M(x) - 0)\partial x}$$

$$a = e^{\int M(x)\, \partial x}$$

Kalikan faktor integrasi $e^{\int M(x)\, \partial x}$ dengan bentuk umum PD Linier Orde 1 menjadi

$$e^{\int M(x)\, \partial x}\, \frac{dy}{dx} + e^{\int M(x)\, \partial x}\, M(x)y = e^{\int M(x)\, \partial x}\, N(x) \qquad (2.20)$$

$$e^{\int M(x)\,\partial x}\,dy + e^{\int M(x)\,\partial x}(\mathrm{M}\ (\mathrm{x})y - N(x))dx = 0$$

Uji Eksak (2)

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(e^{\int M(x)\,\partial x}(\mathrm{M}\ (\mathrm{x})y - N(x)))}{dy} = e^{\int M(x)\,\partial x}M(x)$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(e^{\int M(x)\,\partial x})}{dx} = e^{\int M(x)\,\partial x}M(x)$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, eksak$$

Dengan menggunakan prinsip derivatif total diperoleh

$$d\left(e^{\int M(x)\,\partial x}y\right) = e^{\int M(x)\,\partial x}dy + M(x)y\, e^{\int M(x)\,\partial x}dx$$

Perhatikan persamaan (2.20), sehingga

$$d\left(e^{\int M(x)\,\partial x}y\right) = e^{\int M(x)\,\partial x}\, N(x)\ \mathrm{dx}$$

Integralkan masing-masing suku

$$\int d\left(e^{\int M(x)\,\partial x}y\right) = \int e^{\int M(x)\,\partial x}\, N(x)\ dx$$

$$e^{\int M(x)\,\partial x}y = \int e^{\int M(x)\,\partial x}\, N(x)\ dx + c$$

Kalikan dengan $e^{-\int M(x)\,\partial x}$

Jadi,

$$\boldsymbol{y = e^{-\int M(x)\,\partial x} \int e^{\int M(x)\,\partial x}\, N(x)\ dx + ce^{-\int M(x)\,\partial x}} \qquad (2.21)$$

Dimana c merupakan konstanta integrasi.

Contoh 16.

Selesaikan persamaan differensial berikut.

$$y' + y = 0$$

Penyelesaian:

F(x) $= e^{\int dx}$

$$F(x)y = ye^{\int dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)y) = e^{\int dx}y' + e^{\int dx}y$$

$$= F(x)y' + F(x)y$$

$y' + y = 0$

$F(x)y' + F(x)y = 0$

$$\int (F(x)y)' = \int 0$$

$$F(x)y = c$$

$$y = e^{-\int dx} c$$

$y = ce^{-x}$

Contoh 17.

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial di bawah ini.

$$\frac{dy}{d\ x} + \frac{2}{x}\ y = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

Penyelesaian:

$$y = \frac{\int N(x) e^{\int M(x)dx} dx + C}{e^{\int M(x)dx}}$$

$$y = \frac{\int \frac{\sin 3x}{x^2}\, e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C}{e^{\int \frac{2}{x}\, dx}}$$

$$y = \frac{\int \frac{\sin 3x}{x^2}\, e^{2\ln x} dx + C}{e^{2\ln x}}$$

$$y = \frac{\int \frac{\sin 3x}{x^2}\, x^2 dx + C}{x^2}$$

$$y = \frac{\int \sin 3x\ dx + C}{x^2}$$

$$y = \frac{\int \sin 3x\ dx + C}{x^2}$$

$$y = \frac{-\frac{1}{3}\cos 3x + C}{x^2}$$

$$y = -\frac{1}{3} x^{-2} \cos 3x + Cx^{-2}$$

I. Latihan Soal

1. Tentukan jenis PD di bawah ini dan berikanlah solusi penyelesaiannya.

a. 9yy' + 4x = 0

b. $yy' = 3\cos x$

c. $\tan x \; dy - \cot y \; dx = 0$

d. $y(x-1)dx + (y+2)x \; dy = 0$

e. $y' = (cos^2 x)(cos^2 2y)$

f. $\left(\sqrt{x^2 - y^2} - y\right)dx + x \; dy = 0$

g. $(x^3 - y^3)dx - (3xy^2)dy = 0$

h. (3x + 3y – 6) dx + (6x + 6y – 12) dy = 0

i. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$

j. $\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{y/x} + y}{x}$

k. $(2x - 9x^2y^2$ -6xy^3 + 6y) dx + (2y – 6x^{3}y -9x^{2}y^2 + 6x) dy = 0

l. $\sin(x+y)dx + (5y^2 + 3y + \sin(x+y))dy = 0$

m. (x + siny) dx + (x cos y – 2y) dy = 0

n. y = $\frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$

o. $(2 + ye^{xy})dx + (xe^{xy} - 2y\,)dy = 0$

2. Tentukan jenis faktor integrasi dan penyelesaian pada persamaan diferensial berikut.

a. $(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0$

b. $y \cos x \; dx + 3 \sin x \; dy = 0$

c. $e^x(x+1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$

d. $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0$

e. $(2xy^4e^y + 2xy^3$ + y) dx + $(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)$ = 0

f. $(3y - e^x)\;dx + x\;dy = 0$

g. $(12x^2y + 3xy^2 + 2y)\,dx + (6x^3 + 3x^2y + 2x)dy = 0$

h. $(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)\,dx + (2y^3 + 2x^2 + 2x)dy = 0$

i. $(5xy+4y^2 + 1)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

j. $3x^3y^2\,dx + (4x^3y - 12)\,dy = 0$

k. $y^3dx - (x^2 + xy)dy = 0$

l. $(y - xy^2)\,dx + \,(x + x^2y^2)\,dy = 0$

m. $y(2xy+1)dx + x(1+2xy-x^3y^3)dy = 0$

n. $(x^3\,y^2 - y)\,dx - (x^2\,y^4 - x)\,dy = 0$

o. $(4x^3y - xy^2)dx + (4xy^3 - x^2y)dy = 0$

3. Selesaikanlah persamaan diferensial linier orde satu ini.

a. $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$

b. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\,y = \frac{\sin 3x}{x^2}$

c. $\frac{dx}{dy} - 2xy = e^{x2}$

d. $\frac{dy}{dx} + 2y = x$

e. $(x - 2)\frac{dy}{dx} = y + 2(x - 2)^3$

"Orang yang berakal pergi ke medan perang membawa senjata. Berbantah dan bertukar pikiran dengan cukup alasan. Berlawan dengan kekuatan. Karena dengan akallah tercapai hidup, dengan budi tenanglah hati, dengan pikiran tercapai maksud, dengan ilmu ditaklukkan dunia"

Hamka

BAB 3

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE DUA

Definisi 1.

Persamaan diferensial linear orde 2 merupakan sebuah fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q(x) \tag{3.1}$$

Dimana f_0, f_1, f_2 dan Q adalah fungsi-fungsi kontinu dalam x yang didefinisikan pada domain I dan $f_2(x) \neq 0$ dalam I

Definisi 2.

Jika $Q(x) \neq 0$ pada Definisi 1 maka persamaan diferensial (3.1) dinamkan persamaan diferensial linier tak homogen orde 2. Jika $Q(x) = 0$ pada I maka persamaan (3.1) dinamakan persamaan diferensial homogen orde 2.

A. PD Linier Homogen Orde Dua dengan Koefisien Konstan

Dari asumsi bahwa $f_2(x) \neq 0$ untuk semua x dalam domain, maka persamaan umum (3.1) dapat diubah ke bentuk persamaan diferensial berikut

$$y'' + a_1y' + a_1y = 0 \tag{3.2}$$

Dengan a_1, a_0 merupakan bilangan riil.

Seperti yang telah dipelajari pada bab sebelumnya, konsep dasar penyelesaian PD orde dua adalah dengan mengintegrasikan turunan pada persamaan (3.2) dua kali. Sehingga, berdasarkan konsep tersebut akan diperoleh dua konstanta.

Jika fungsi y dimisalkan dengan variable lain yaitu D, maka persamaan (3.2) menjadi

$$\left(D^2 + a_1(x)D + a_0(x)\right)y = 0 \tag{3.3}$$

Bagaimana cara kita menyelesaikan persamaan di atas? Kita ingat bahwa solusi persamaan linear homogen orde pertama dengan koefisien konstan $y' + ky = 0$ adalah suatu fungsi eksponen $y = Ce^{-kx}$ jadi kita menduga bahwa fungsi berbentuk eksponen

$$y = e^{rx} \tag{3.4}$$

Fungsi (3.4) harus diubah sesuai dengan bentuk pada persamaan (3.3) dengan mensubstitusikan (3.4) ke dalam persamaan (3.3) menghasilkan

$$\begin{aligned}\left(D^2 + a_1(x)D + a_0(x)\right)e^{rx} &= D^2(e^{rx}) + a_1D(e^{rx}) + a_0(e^{rx})\\ &= r^2(e^{rx}) + a_1r(e^{rx}) + a_0(e^{rx})\\ &= e^{rx}(r^2 + a_1r + a_0)\end{aligned}$$

Persamaan ini bernilai nol. Sehingga dapat dituliskan menjadi

$$e^{rx}(r^2 + a_1r + a_0) = 0 \tag{3.5}$$

Persamaan (3.5) dinamakan persamaan karakteristik dari persamaan (3.2). Pada PD orde dua dengan koefisien konstanta terdapat tiga akar penyelesaian yang berbeda, dimana konsepnya akan dijabarkan di bawah ini.

Teorema 3.1 (Akar riil berbeda):

Diketahui bahwa r_1 dan r_2 merupakan dua akar riil berbeda dari sebuah PD, maka penyelesaian umum PD tersebut adalah

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} \tag{3.6}$$

Dimana A dan B konstanta-konstanta sembarang.

Contoh 1.

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial linear

$$y'' + 9y' + 20\,y = 0$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik pada PD di atas yaitu

$$r^2 + 9r + 20 = 0 \tag{3.7}$$

Akar-akar yang diperoleh adalah -4 dan -5. Karena e^{-4x} dan e^{-5x} bebas linier maka diperoleh penyelesaiannya menurut Teorema 3.1:

$$y(x) = Ae^{-4x} + Be^{-5x} \tag{3.8}$$

Contoh 2.

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y'' - 2y' - y = 0$$

Dimana diketahui $y(0) = 0$ dan $y'(0) = \sqrt{2}$

Penyelesaian:

Dimisalkan persamaaaan y" $-2y' - y = 0$ dapat dituliskan dengan $r^2 - 2r - 1 = 0$ dengan menggunakan rumus ABC atau pemfaktoran untuk mencari akar-akarnya sehingga diperoleh $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ dan $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Terlihat bahwa kedua akar tersebut merupakan jenis akar riil berbeda sehingga penyelesaiannya yaitu

$$y(x) = Ae^{(1+\sqrt{2})x} + Be^{(1-\sqrt{2})x} \tag{3.9}$$

Cobalah untuk mensubstitusikan $y(0) = 0$ dan $y'(0) = \sqrt{2}$ untuk memperoleh nilai A dan B. Jika sudah disubstitukan maka akan diperoleh bahwa nilai $A = \frac{1}{2}$ sedangkan $B = -\frac{1}{2}$

Teorema 3.2: (Akar Berulang)

Jika persamaan karakteristik (3.5) mempunyai akar berulang, maka penyelesaian umum persamaan diferensial (3.2) diberikan oleh

$$y(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx} \tag{3.10}$$

Contoh 3.

Tentukanlah jenis akar pada persamaan diferensial berikut $y'' + 8y' + 16 = 0$ dimana PD tersebut memiliki syarat $y(0) = 2$ dan $y'(0) = -7$

Penyelesaian:

Persamaan pada contoh 3 dapat dituliskan juga dengan $r^2 + 8r - 16 = 0$. Sama halnya seperti contoh sebelumnya, gunakan rumus ABC atau pemfaktoran untuk mencari akar-akarnya. Sehingga diperoleh kedua akarnya yaitu $r_1 = r_2 = -4$. Berdasarkan Teorema 3.2 sehingga diperoleh penyelesaiannya yaitu

$$y(x) = Ae^{-4x} + Bxe^{-4x} \tag{3.11}$$

Substitusikan $y(0) = 2$ dan $y'(0) = -7$ pada persamaan (3.11) sehingga diperoleh $A = 2$ dan $B = 1$. Selain cara substitusi, kita dapat menggunakan strategi lain untuk mencari penyelesaian jika suatu PD memiliki akar berulang yaitu dengan cara reduksi orde. Anggaplah $y_1(x)$ tidak ekuivalen dengan nol adalah penyelesaian PD (3.2). Penyelesaian yang dapat dilakukan adalah

$$y(x) = v(x)y_1(x) \tag{3.12}$$

Substitusikan ke persamaan (3.2) sehingga diperoleh

$$y_1 v'' + (2{y_1}' + a_1 y_1)v' + (y'' + a_1 {y_1}' + a_0 y_1)v = 0 \tag{3.13}$$

Karena y_1 merupakan penyelesaian (3.2), maka berarti

$$y_1 v'' + (2{y_1}' + a_1 y_1)v' = 0 \tag{3.14}$$

Cermati persamaan (3.14), disimpulkan ordenya adalah satu untuk v, sehingga

$$y_1 v' + (2{y_1}' + a_1 y_1)v = C \tag{3.15}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan terakhir ini satu kali diperoleh penyelesaiannya.

Perhatikan kembali contoh 3, akar penyelesaian yang didapatkan yaitu $y = Ce^{-4x}$. Penyelesaian untuk v diberikan oleh $v = C_0 + C_1 x$.

Teorema 3.3 (Akar Kompleks Konjugat):

Jika persamaan karakteristik (3.5) maka penyelesaian umum persamaan diferensial (3.2) diberikan oleh

$$y(x) = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x$$

Contoh 4.

Tentukan penyelesaian dari suatu persamaan diferensial

$$y'' - 4y + 16 = 0$$

Penyelesaian:

Ubahlah ke dalam fungsi r sehingga

$$r^2 - 4r + 16 = 0 \tag{3.18}$$

Akar-akar karakteristik yang diperoleh adalah $2 \pm 2i\sqrt{3}$ berdasarkan teorema 3.3 penyelesaian umum PD diberikan oleh:

$$y = Ae^{(2+2\sqrt{3}i)x} + Be^{(2-2\sqrt{3}i)x} \tag{3.19}$$

$$y = e^{2x}[(A+B)\cos 2\sqrt{3}x + i(A-B)\sin 2\sqrt{3}x] \tag{3.20}$$

Dari hasil ini, solusi untuk kasus ini sering ditulis dengan bentuk

$$y = e^{2x}\left(A\cos 2\sqrt{3}x + B\sin 2\sqrt{3}x\right) \tag{3.21}$$

B. PD Tak Homogen

Misalkan dituliskan suatu persamaan diferensial tak homogen menjadi

$$y'' + a_1y' + a_0y = q(x) \tag{3.22}$$

Diketahui bahwa a_0 dan a_1 adalah fungsi kontinu pada interval terbuka I. Sedangkan y_1 dan y_2 adalah penyelesaian bebas linear PD diferensial (3.22), maka y_1 dan y_2 dikatakan sebagai penyelesaian persamaan diferensial homogen. Selanjutnya, untuk menyelesaikan PD tak homogen, perhatikanlah penjabaran Teorema 3.4.

Teorema 3.4

Penyelesaian umum PD tak homogen (3.22) dapat ditulis menjadi

$$y(x) = Ay_1 + By_2 + Y \tag{3.23}$$

Dimana y_1 dan y_2 adalah penyelesaian PD homogen (y_h) yang sebanding dengan PD tak homogen (3.22), A dan B merupakan konstanta sembarang, dan Y penyelesaian khusus pada PD (3.22).

Teorema 3.2 mengungkapkan bahwa tahapan penyelesaian PD tak homogen dapat dilakukan dengan tiga tahapan, yaitu

1. Menentukan penyelesaian umum PD homogen pada persamaan (3.22). Adapun penyelesaiannya dapat dituliskan dengan

$$y_c = Ay_1 + By_2 \tag{3.24}$$

2. Menentukan penyelesaian tunggal Y dari fungsi (3.23). Penyelesaian ini dikatakan sebagai penyelesaian khusus dari fungsi(3.22)
3. Jumlahkan kedua penyelesaian tersebut sehingga terbentuk penyelesaian umum persamaan diferensial tak homogen (3.22)

Dalam menentukan penyelesaian umum suatu PD tak homogen, maka harus ditentukan penyelesaian khusus dulu. Beberapa Teknik yang bisa dilakukan untuk menemukan penyelesaian khusus dari PD tak homogen yaitu dengan cara.

1. Koefisien Tak Tentu

Teknik koefisien tak tentu mempersyaratkan bahwa dugaan tertentu yang sebanding dengan suku tak homogen harus dibuat. Maksudnya adalah bentuk suku tak homogen dapat dibuat sebagai dugaani dalam menentukan penyelesaian khusus. Terdapat PD tak homogen bernilai $cos\, x$ atau $sin\, x$ sehingga penyelesaian khususnya merupakan kombinasi dari $cos\, x$ dan $sin\, x$.

Teknik koefisien tak tentu dapat digunakan jika suku dalam $q(x)$ terdiri diferensial yang bebas linier. Maka, strategi koefisien tak tentu dapat digunakan jika $q(x)$ memuat suku-suku seperti $A, B, x^n, e^{Cx}, \sin Cx,\quad \cos Cx$ dan gabungan dari beberapa suku, dimana C konstan dan n bilangan bulat positif. Yang dimaksud bebas linier adalah: Pandanglah turunan dari persamaan berikut.

y = $\sin 3x$,

y' = $3\cos 3x$,

y" = $-9\sin 3x$,

y"' = $-27\cos 3x$, dan seterusnya.

Suatu turunan fungsi x^n Ketika diturunkan sampai ke-n maka terbentuk himpunan bebas linier. Pada Teknik ini dapat ditentukan bentuk penyelesaian khusus dari PD tak homogen seperti pada persamaan (3.22).

a. Tidak mempunyai suku yang serupa dengan suku yh

Penyelesaian khusus Y adalah penggabungan suku linier pada $q(x)$ dan turunannya yang bebas linier.

Contoh 5.

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\sin x - 8e^x \cos 2x \qquad (3.25)$$

Penyelesaian:

Penyelesaian PD homogen pada soal yang dituliskan di atas yaitu

$$y_h = Ae^{-e} + Be^{4x}$$

Bandingkan antara himpunan bebas linear penyelesaian homogen $\{e^x, e^{4x}\}$ dengan $\{e^{2x}, \sin x, e^x \cos 2x\}$ himpunan bebas linier dalam $q(x)$ atau dapat dikatakan bahwa pada penyelesaian homogen tidak terdapat yang serupa dengan suku yang terdapat pada sisi kanan PD tersebut. Jadi himpunan bebas linier koefisien tak tentu yaitu

$$\{e^{2x}, \sin x, \cos x, e^x \sin 2x, e^x \cos 2x\} \qquad (3.27)$$

Penyelesaian khusus PD (3.25) di atas dapat menggunakan teknik koefisien tak tentu yaitu persamaan dari gabungan linier himpunan bebas linier koefisien tak tentu, yaitu

$$Y = Ae^{2x} + B\cos x + C\sin x + e^{x}(D\cos 2x + E\sin 2x) \qquad (3.28)$$

Dengan mendiferensiasikan persamaan (3.28) sampai turunan kedua, lalu substitusikan y, y', dan y'' ke persamaan (3.25) kita peroleh hubungan berikut:

$$-6Ae^{2x} - (5B + 3C)\cos x + (3B - 5C)\sin x + e^{x}((-2E - 10D)\cos 2x$$
$$(2D + 10E)\sin 2x = 3e^{2x} + 2\sin x - 8e^{x}\cos 2x \qquad (3.29)$$

Bandingkan ruas kiri dan kanan pada PD (3.29) diperoleh $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{3}{8}, C = -\frac{5}{8}, D = \frac{5}{6}, E = -\frac{1}{6}$ jadi penyelesaian lengkap persamaan diferensial (3.25) adalah

$$y = Ae^{-x} + Be^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{8}\cos x - \frac{5}{8}\sin x + e^{x}\left(\frac{5}{6}\cos 2x - \frac{1}{6}\sin 2x\right) \qquad (3.30)$$

Contoh 6.

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial tak homogen

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^{x} \qquad (3.31)$$

Penyelesaian:

$$y_h = (A + Bx)e^{-2x} \qquad (3.32)$$

Bandingkan suku pada persamaan (3.32) dengan suku di ruas kanan PD (3.31) terlihat bahwa tidak ada suku yang sama pada kedua ruasnya. Oleh karena itu himpunan bebas linier koefisien tak tentu yaitu $\{1, x, x^2, e^{x}\}$. Selanjutnya, penyelesaian khusus PD di atas mempunyai bentuk gabungan linier dari suku pada sisi kanan PD (3.31) adalah

$$Y = Ax^2 + Bx + C + De^{x} \qquad (3.33)$$

Dengan mensubstitusikan fungsi (3.33) ke dalam PD (3.31) diperoleh bahwa

$$4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B + 4C) + 9De^{x} = 4x^2 + 6e^{x} \qquad (3.34)$$

Pada fungsi (3.34) ini dapat digunakan sistem persamaan linier yaitu

$$4A = 4$$
$$8A + 4B = 0$$
$$2A + 4B + 4C = 0$$

$$9D = 6$$

Gunakanlah metode substitusi dan eliminasi sehingga memperoleh $A = 1, B = -2, C = 3/2$, dan $D = 2/3$. Setelah disubstitusikan nilai A, B, C, dan D pada PD (3.31) diperoleh bahwa

$$y = (A + Bx)e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x \tag{3.35}$$

b. Jika pada $q(x)$ terdapat suku x^a kali suku y_h dengan Mengabaikan Koefisien Konstan dan diketahui a bernilai nol atau positif

Jika suku pada $q(x)$, faktor tak homogen terdapat x^a kali suku-suku dalam penyelesaian PD homogen maka penyelesaian khusus PD tak homogen dapat diselesaikan dengan Teknik berikut.

Misalkan $u(x)$ suku dalam y_h jika ada suku pada $q(x)$ yang sama dengan $u(x)$ dengan faktor pengali x^k sehingga penyelesaian khusus yang sebanding dengan suku ini diberikan oleh $x^{k+1}u(x)$.

Contoh 7.

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x} \tag{3.36}$$

Penyelesaian:

Penyelesaian homogen yang berpadanan dengan persamaan (3.19) diberikan oleh

$$y_h = Ae^x + Be^{2x} \tag{3.37}$$

Dengan membandingkan ruas kanan persamaan (3.36) dan (3.37) dan menghiraukan koefisien konstan, terlihat bahwa suku e^{2x} pada ruas kanan PD (3.36) sama dengan $x^0e^{2x} = x^0u(x)$ dalam penyelesaian homogen. Jadi himpunan bebas liner dari koefisien tak tentu adalah $\{x^2, x, 1, xe^{2x}\}$ oleh karenanya bentuk penyelesaian khusus PD (3.36) yaitu

$$Y = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x} \tag{3.38}$$

Dengan mensubtitusikan fungsi (3.38) ke dalam (3.36) kita peroleh hubungan berikut

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + (2A - 3B + 2C) + De^{2x} = 2x^2 + 3e^{2x} \qquad (3.39)$$

Bandingkan persamaan pada sisi kanan dan kiri (3.39) sehingga diperoleh nilai $A = 1, B = 3, C = \frac{7}{2}$ dan $D = 3$. Setelah mendapatkan masing-masing nilai dari koefisien tak tentu maka penyelesaian umum PD (3.36), yaitu

$$y = x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x} + C_1e^x + C_2e^{2x} \qquad (3.40)$$

Contoh 8.

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \sin x \qquad (3.41)$$

Penyelesaian:

Adapun Langkah-langkah penyelesaian PD (3.41) adalah sebagai berikut

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x} \qquad (3.42)$$

Bandingkan sisi kanan PD (3.41) dengan sisi kanan PD (3.42) terlihat bahwa $xe^{2x} = xu(x)$ dimana $u(x) = e^{2x}$ adalah suku pada y_h. Oleh karena itu, himpunan bebas linier koefisien tak tantu diberikan oleh $\{x^2e^{2x}, xe^{2x}, \sin x, \cos x\}$. Jadi, bentuk umum penyelesaian khusus PD (3.41) yakni

$$Y = Ax^2e^{2x} + Bxe^{2x} + C\sin x + D\cos x \qquad (3.43)$$

Degan mensubstitusikan fungsi (3.43) ke dalam (3.42) kita peroleh hubungan berikut

$$2Axe^{2x} + (2A + B)e^{2x} + (C + 3D)\sin x + (D - 3C)\cos x = x^e 2x + \sin x (3.44)$$

Bandingkan sisi kanan dan kiri (3.44) kita dapatkan $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{10}, D = \frac{3}{10}$. Setelah koefisien tak tentu diketahui maka penyelesaian umum persamaan diferensial (3.41) dapat kita tentukan, yaitu

$$Y = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x + C_1e^x + C_2e^{2x} \qquad (3.45)$$

Acuan dalam menentukan himpunan bebas linier dari koefisien tak tentu dari suku tak homogen tertuang pada tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1.

Himpunan bebas linier koefisien tak tentu dari suku tak homogen

No	Suku tak-Homogen	Himpunan Koefisien tak Tentu
1	x^n	$\{x^n, x^{n-1}, \ldots, \}$
2	e^{ax}	$\{e^{ax}\}$
3	$\sin(bx+c)$ $\cos(bx+c)$	$\{\sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
4	$e^{ax}\sin(bx+c)$, $e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$
5	$x^n e^{ax}$	$\{x^n e^{ax}, x^{n-1}e^{ax}, \ldots, xe^{ax}, e^{ax}\}$
6	$x^n\sin(bx+c)$, $x^n\cos(bx+c)$	$\{x^n\sin(bx+c), x^n\cos(bx+c),\ x^{n-1}\sin(bx+c)\}$ $x^{n-1}\cos(bx+c), \ldots, x\sin(bx+c), x\cos(bx+c),$ $\sin(bx+c), \cos(bx+c),.$
7	$x^n\, e^{ax}\sin(bx+c)$, $x^n\, e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{x^n e^{ax}\sin(bx+c), x^n e^{ax}\cos(bx+c),\ x^{n-1}e^{ax}\}$ $\sin(bx+c)\, x^{n-1}e^{ax}\cos(bx+c), \ldots, x\, e^{ax}\sin(bx$ $+c)$ $xe^{ax}\cos(bx+c),\ e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c),$

Dari Tabel 1 kita dapatkan bahwa jika suku tak homogen $q(x) = x^5 + \sin x + x^2e^{3x}$ maka hinpunan bebas linier koefisien tak tentu diberikan oleh

$$\{x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1, \sin x, \cos x, x^2e^{3x}, xe^{3x}, e^{3x}\}$$

Sehingga penyelesaian khususnya akan mempunyai bentuk

$$Y = C_1x^5 + C_2x^4 + C_3x^3 + C_4x^2 + C_5Ex + C_6F + C_7\sin x + C_8\cos x$$
$$+C_9x^2e^{3x} + C_{10}xe^{3x} + C_{11}e^{3x}$$

Dimana $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{11}$ adalah konstanta riil.

C. Penggunaan Variabel Kompleks pada PD Orde-2

Selain menggunakan metode koefisien tak tentu, PD orde-2 tertentu dapat diselesaikan dengan menggunakan variabel kompleks. Lihatlah PD (3.1), dengan mengubah $Q(x)$ sebagai persamaan variabel kompleks, dalam menentukan penyelesaian khusus Y maka terdapat hal-hal yang harus diperhatikan yakni.

1. Bagian riil Y adalah penyelesaian PD (3.1) dengan $Q(x)$ digantikan oleh bagian riilnya.
2. Bagian imajiner Y adalah penyelesain persamaan (3.1) dengan $Q(x)$ digantikan oleh bagian imajinernya.

Contoh 9.

Tentukanlah penyelesaian khusus persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \tag{3.46}$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan persamaan ini, pandanglah persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ix} \tag{3.47}$$

Dimana

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{3.48}$$

Dengan menggunakan bagian kedua dari prosedur, dapat disimpulkan bagian imajiner penyelesaian khusus PD (3.47) merupakan penyelesaian khusus PD (3.46). Selanjutnya, mencari penyelesaian khusus PD (3.47) dengan menggunakan metode koefisien tak-tentu yaitu perhatikanlah suku tak homogen PD (3.47), penyelesaian khusus yang sebanding dengan bentuk tak homogen ini yaitu

$$Y = (A + Bi)e^{ix} \tag{3.49}$$

Substitusikan fungsi ini ke PD (3.47) sehingga diperoleh $A = \frac{1}{10}$ dan $B = \frac{3}{10}$.

Lalu, substitusikan nilai A dan B pada persamaan (3.49)

$$Y = \frac{1}{10} e^{ix} + \frac{3}{10} i e^{ix}$$

$$= \frac{1}{10}(\cos x + i \sin x) + \frac{3}{10} i(\cos x + i \sin x)$$

$$= \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + i\left(\frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x\right) \quad (3.50)$$

bagian imajiner dari Y adalah $\frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$. Karenanya penyelesaian khusus (3.47) diberikan oleh

$$Y = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x \quad (3.51)$$

D. Tambahan Contoh Soal dan Penyelesaian

1. Carilah penyelesaian umum persamaan diferensial non homogen $y" + 2y' - 3y = 1 + x^2$

   Penyelesaian:

   Persamaan homogen pada soal adalah $y" + 2y' - 3y = 0$.

   Tuliskan karakteristik persamaannya menjadi

   $r^2 + 2r - 3 = 0$

   Faktorkan persamaan di atas untuk menentukan jenis-jenis akarnya

   $$r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$$

   Jadi, diperoleh PD homogen pada soal memiliki dua akar berbeda yakni $r = 1\ dan\ r = -3$. Maka solusi homogen adalah

   $$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

   Karena $s(x) = 1 + x^2$ adalah polinom orde-2, maka y_p juga merupakan polinom orde 2, sebab jika $y(x)$ adalah polinom orde 2, maka $y" + 2y' - 3y$ juga polinom orde 2. Misalkan

   $$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

   Dimana $y' = 2Ax + B\ dan\ y" = 2A$. Jadi,

   $$y" + 2y' - 3y = 2A + 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = 1 + x^2$$

   Operasikanlah persamaan tersebut menjadi

   $$(-3A)x^2 + (4A - 3B)x + (2A + 2B - 3C) = 1 + x^2$$

Sehingga,

$$2A + 2B - 3C = 1$$

$$4A - 3B = 0$$

$$-3A = 1$$

Gunakanlah penyelesaian eliminasi dan substitusi untuk memperoleh nilai $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{4}{9}\ , C = -\frac{23}{27}\ , jadi$

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} - \frac{23}{27}$$

Maka diperoleh penyelesaian umum PD di atas adalah

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} - \frac{23}{27} + c_1e^x + c_2e^{-3x}$$

2. Carilan penyelesaian khusus dari $y'' - y' = 3\cos 2\mathrm{x}$

   Penyelesaian:

   Diketahui a(x) = 3 cos 2x, maka kita mencoba $y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$. Jadi

$$y'_p = -2Asin\ 2x + 2Bcos\ 2x$$

$$y''_p = -4\ \mathrm{A}\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$y''_p - y'_p = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$$

$$= (-4A - 2B)\cos 2x + (2A - 4B)\sin 2x$$

   Sebagai solusi $y''_p - y'_p = 3\cos 2x$.

$$(-4A - 2B)\cos 2x + (2A - 4B)\sin 2x = 3\cos 2x$$

   Maka haruslah $-4A - 2B = 3\ \ dan\ 2A - 4B = 0$ yang memberikan

$$A = -\frac{3}{5}\ , B = -\frac{3}{10}$$

   Maka solusi khususnya adalah

$$y_p(x) = -\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{3}{10}\sin 2x$$

3. Tentukan solusi khusus persamaan diferensial $y" + 2y' - 3y = 4e^{-3x}$

Penyelesaian:

Diketahui a(x) = $4e^{-3x}$,

maka kita mungkin mencoba $y_p = Ae^{-3x}$.

Tetapi,

$$y"_p + 2y'_p - 3y_p = 9Ae^{3x} - 6e^{3x} - 3A^{3x} = 0$$

Jadi,

$$0 = 4e^{-3x}$$

Ini tidak mungkin karena fungsi eksponensial tidak pernah nol. Hal ini karena persamaan karakteristik persamaan diferensial ini adalah

$$r^3 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$$

Jadi, $r = -3$ adalah akarnya dan oleh karena itu e^{-3x} adalah solusi homogen. Maka tidak mungkin $y_p Ae^{-3x}$. Maka coba

$$y_p = Axe^{-3x}$$

$$y'_p = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} = (1 - 3x)Ae^{-3x}$$

$$y"_p = -3Ae^{-3x} + (-3)(1 - 3x)Ae^{-3x} = (9x - 6)Ae^{-3x}$$

Subsitusi pada fungsi memberikan

$$y"_p + 2y'_p - 3y_p = (9x - 6)Ae^{-3x} + 2((1 - 3x)Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}$$

$$= -4Ae^{-3x}$$

Maka

$$-4Ae^{-3x} = 4e^{-3x}$$

Jadi, $A = -1$. Diperoleh

$$y_p(x) = -e^{-3x}$$

4. Tentukan solusi khusus persamaan diferensial $y" + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$

Penyelesaian:

PD pada ruas kanan yang diketahui pada soal adalah $y" + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$, tulislah karakteristik persamaan tersebut

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2) = 0$$

Sehingga diperoleh bahwa persamaan tersebut memiliki akar berulang yaitu $r = -2$. Maka solusi homogen adalah

$$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

Maka $y_p = Ae^{-2x}$ maupun $y_p = Axe^{-2x}$ akan memberikan $y"_p + 2y'_p - 3y_p = 0$. Kita harus memodifikasi lebih jauh lagi, yaitu:

$$y_p(x) = Ax^2 e^{-2x}$$

Jadi,

$$y'_p(x) = 2Axe^{-2x} - 2Ax^2 e^{-2x} = 2(Ax - Ax^2)e^{-2x}$$

$$y"_p(x) = 2(A - 2Ax)e^{-2x} - 4(Ax - Ax^2)e^{-2x} = (-4x + 2x^2 + 1)2Ae^{-2x}$$

Maka,

$$8e^{-2x} = y"_p + 4y'_p + 4y_p$$

$$= (-4x + 2x^3 + 1)2Ae^{-2x} + 4(2(Ax - Ax^2)e^{-2x} + 4Ax^2 e^{-2x}$$

Maka $A = 4$, jadi

$$y_p(x) = 4x^2 e^{-2x}$$

5. Tentukan solusi umum persamaan diferensial $y" - 5y' - 6y = e^{-z} - 7\cos x$

   Penyelesaian:

   Karakteristik persamaan ini adalah

   $0 = r^2 - 5r - 6 = (r - 6)(r + 1)$.

   Dengan menggunakan pemfaktoran diperoleh akar-akar persamaan tersebut adalah $r = 6 \;\; dan\, r = -1$.

   Substitusikan

   $y_h(x) = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-x}$

   e^{-x} merupakan solusi homogen, sehingga

$$y_p(x) = Cxe^{-x} + A\, cos\; x + B \sin x$$

   Maka,

$$y'_p(x) = Ce^{-x} - Cxe^{-x} + B\cos x - A\sin x$$

$$= C(1 - x)e^{-x} + B\cos x - A\sin x$$

$$y"_p(x) = -Ce^{-x} - C(1-x)e^{-x} - B\sin x - A\cos x$$
$$= (x-2)Ce^{-x} - B\sin x - A\cos x$$

Substitusikan ke persamaan pada soal, diperoleh

$$e^{-x} - 7\cos x = y"_p - 5y'_p - 6y_p$$
$$= ((x-2)Ce^{-x} - B\sin x - A\cos x) - 5((1-x)Ce^{-x} + B\cos x - A\sin x)$$
$$- 6(Cxe^{-x} + A\cos x + B\sin x)$$
$$= -7Ce^{-x} + (-7A - 5B)\cos x + (5A - 7B)\sin x$$

Bandingkan nilai kedua ruas, sehingga

$$-7C = 1$$
$$-7A - 5B = -2$$
$$5A - 7B = 0$$

Diperoleh bahwa $= -\frac{1}{7}, A = \frac{7}{37}, B = \frac{5}{37}$, maka

$$y_p(x) = -\frac{1}{7}xe^{-x} + \frac{7}{37}\cos x + \frac{5}{37}\sin x$$

Maka solusi umum adalah

$$y(x) == \frac{1}{7}xe^{-x} + \frac{7}{37}\cos x + \frac{5}{37}\sin x + c_1e^{6x} + c_2e^{-x}$$

E. Latihan Soal

Selesaikan Persamaan diferensial orde dua berikut ini.

1. $y" + 6y' + 9y = 0$
2. $y" + y = 0$
3. $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$
4. $\frac{d^2Q}{dt^2} - 5\frac{dQ}{dt} + 7Q = 0$
5. $y" - 2y' + y = 3e^{2x}$
6. $y" - 2y' + y = x^2 - 1$
7. $y" - 2y' + y = 4\cos\ x$
8. $y' - y = e^x$
9. $y' - y = xe^{2x} + 1$
10. $y" - 2y + y = xe^x$
11. $y" - y' - 2y = 4x^2; y(0) = 1, y'(0) = 4$
12. $y" - y' - 2y = e^{3x}; y(0) = 1, y'(0) = 2$
13. $y" - y' - 2y = e^{3x}; y(0) = 2, y'(0) = 1$
14. $y" - y' - 2y = 0; y(0) = 2, y'(0) = 1$
15. $y" - y' - 2y = e^{3x}; y(1) = 2, y'(1) = 1$
16. $y" + y = x; y(1) = 0, y'(1) = 1$
17. $y" + 4y = \sin^2 2x\ ; y(\pi) = 0, y'(\pi) = 0$
18. $y" + y = 0; y(2) = 0, y'(2) = 0$
19. $y''' = 12; y(1) = 0, y'(1) = 0, y''(1) = 0$
20. $\ddot{y} = 2\dot{y} + 2y = \sin 2t + \cos 2t\ ; y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$

“Dalam Kerendahan diri, ada ketinggian budi. Dalam kemiskinan harta ada kekayaan jiwa. Dalam kesempitan hidup ada keluasan ilmu. Hidup ini indah jika segalanya karena Allah SWT.”

Hamka

BAB 4

TRANSFORMASI LAPLACE

Transformasi atau sering juga diistilahkan dengan perubahan banyak diungkapkan pada Al-Quran, Misalnya pada surat Ibrahim ayat 1, yang artinya "Alif Lam Ra. (Ini adalah) kitab yang Kami turunkan kepadamu (Muhammad) agar engkau mengeluarkan manusia dari kegelapan kepada cahaya terang benderang dengan izin Allah, (yaitu) menuju jalan Allah yang Maha Perkasa, Maha Terpuji)" Maha benar Allah dengan segala firmannya.

Definisi 1.

Transformasi Laplace

$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ (4.1)

untuk semua nilai s sedemikian hina integral tak tentu terdefinisi.

Seperti yang telah dipelajari pada kalkulus bahwa integral tak tentu dapat diselesaikan dengan pendekatan limit, yaitu

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Bentuk transformasi Laplace (i) merupakan tranformasi linier jika fungsi f dan g mempunyai transformasi Laplace dan a dan b konstanta sembarang maka

$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\,\mathcal{L}(g)$ (4.2)

Contoh 1.

Tentukan penyelesaian transformasi Laplace dari fungsi a dengan a konstanta.

Penyelesaian:

$$\mathcal{L}(a) = \int_0^\infty ae^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(a) = a \lim_{m\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}(a) = \lim_{m\to\infty} -\frac{a}{s} e^{-sm} + \frac{a}{s}$$

$$\mathcal{L}(a) = \frac{a}{s}, s > 0$$

A. Fungsi Periodik

Diketahui A bilangan tetap dan g(a + A) = g(a) maka transformasi Laplace fungsi g yaitu

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{1-e^{-sa}} \int_0^A g(a) e^{-sa} dt \qquad (4.3)$$

Contoh 2.

Tentukan transformasi Laplace untuk fungsi periodik

$$f(t) = \begin{cases} a, jika\ 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ -a, jika\ \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt = \int_0^{T/2} a e^{-st} dt - \int_{T/2}^{T} a e^{-st} dt$$

$$= -\frac{a}{s} e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=T/2} + \frac{a}{s} e^{-st}\Big|_{t=T/2}^{t=T}$$

$$= \frac{a}{s}\left(e^{-sT} - 2e^{-\frac{sT}{2}} + 1\right)$$

$$= \frac{a}{s}\left(e^{-sT/2} - 1\right)^2$$

B. Derivatif Fungsi

Berdasarkan definisi transformasi Laplace (4.2),

$$\mathcal{L}\big(af(t) + bg(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-st}\big(af(t) + bg(t)\big) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \big(e^{-st} af(t) + e^{-st} bg(t)\big) dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

$$= a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(f(t)) \qquad (4.4)$$

Turunkanlah persamaan di atas sehingga memperoleh rumus derivative fungsi pada transformasi laplace seperti di bawah ini.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)} \qquad (4.5)$$

Contoh 3.

Diketahui $\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(\sin at)$. Tentukanlah penyelesaiannya.

Penyelesaian:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \ s\mathcal{L}\big(f(t)\big) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\big(f'^{(t)}\big) = \int_0^\infty f'^{(t)e^{-st}} dt$$

$$\mathcal{L}(sin\ at) = \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty \sin at\ e^{-st}\ dt$$

Integral Parsial: $\int v\ du = uv - \int udv$

v = sin at , dv = a cos at dt

du = e^{-st} , $u = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$\int \sin at\ e^{-st}\ dt \quad = -\frac{e^{-st}}{s}\sin at - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s}(acosat)dt$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}}{s}\sin at + \lim_{t\to\infty}\frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}(cosat)dt$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-s\infty}}{s}\sin a\infty + \lim_{t\to\infty}\frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}(cosat)dt$$

$$= -0 + \lim_{t\to\infty}\frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}(cosat)dt$$

Integral Parsial: $\int v\ du = uv - \int udv$

v = cos at , dv = -a sin at dt

du = e^{-st} , $u = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$= -0 + \frac{a}{s}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\cos at - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt\right)$$

$$= -0 - \frac{a}{s^2}e^{-st}\cos at - \frac{a^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt$$

Misal $\boldsymbol{\mathcal{L}(sin\ at) = y}$

$y = -\frac{a}{s^2}e^{-st}\cos at - \frac{a^2}{s^2}y$

$y + \frac{a^2}{s^2}y = -\frac{a}{s^2}e^{-st}\cos at$

$\frac{s^2+a^2}{s^2}y = -\frac{a}{s^2}e^{-st}\cos at \Big|_0^\infty$

$\frac{s^2+a^2}{s^2}y = -\frac{a}{s^2}e^{-s\infty}\cos a\infty + \frac{a}{s^2}e^{-s0}\cos a0$

$\frac{s^2+a^2}{s^2}y = \frac{a}{s^2}$

$y = \frac{a\ (s^2)}{s^2(s^2+a^2)}$

$y = \frac{a}{(s^2+a^2)}$

$\mathcal{L}(sin\ at) = \frac{a}{(s^2+a^2)}$

C. Invers Laplace

Definisi 2.

Misal persamaan A merupakan transformasi Laplace dari fungsi kontinu a, sehingga

$$\mathcal{L}(a) = \text{A (s)} \tag{4.6}$$

Maka invers transformasi Laplace fungsi A, ditulis $\mathcal{L}(A)^{-1}$ adalah fungsi a, sehingga

$$\mathcal{L}(A)^{-1} = a(t) \tag{4.7}$$

Contoh 4.

Selesaikanlah masalah nilai awal berikut dengan menggunakan transformasi Laplace.

q’ + kq = e^{-3t}, q(0) = 4

Penyelesaian:

$\mathcal{L}(q' + kq) = \mathcal{L}(e^{-3t})$

$\mathcal{L}(q') + k\mathcal{L}(q) = \mathcal{L}(e^{-3t})$ … (i)

Berdasarkan definisi dari transformasi Laplace dari derivatif fungsi yaitu

$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$

Sehingga,

$\mathcal{L}(q') = s\mathcal{L}(q) - y(0)$

$\mathcal{L}(q') = s\mathcal{L}(q) - 4$

Dan berdasarkan definisi dasar transformasi Laplace yaitu

$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

Sehingga,

$\mathcal{L}(e^{-3t}) = \int_0^\infty e^{-3t}e^{-st}dt = \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty e^{-3t}e^{-st}dt$

$= \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty e^{-3t-st}dt = \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty e^{(-3-s)t}dt$

Misal:

q = e^{x^2}, q’ = $2xe^{x^2}$

$\int e^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2x} + c$

$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{e^{(-3-s)t}}{-3-s}\Big|_0^\infty\right)$

$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{e^{(-3-s)\infty}}{-3-s} - \frac{e^{(-3-s)0}}{-3-s}\right)$

$= 0 - \frac{1}{-(3+s)}$

$= \frac{1}{3+s}$

Substitusikan ke (i)

$\mathcal{L}(q') + k\mathcal{L}(q) = \mathcal{L}(e^{-3t}) \ldots (i)$

$s\mathcal{L}(q) - 4 + k\mathcal{L}(q) = \frac{1}{3+s}$

$(s + k)\mathcal{L}(q) = \frac{1}{3+s} + 4$

$\mathcal{L}(q) = \frac{\frac{1}{3+s} + 4}{(s+k)}$

$\mathcal{L}(q) = \frac{1}{(3+s)(s+k)} + \frac{4}{s+k}$ … (ii)

Untuk menyederhanakan pencarian invers Laplace, kita ubah pecahan $\frac{1}{(3+s)(s+k)}$ menjadi pecahan parsial berbentuk $\frac{A}{s+k}$ dan $\frac{B}{s+3}$ sehingga

$\frac{1}{(3+s)(s+k)} = \frac{A}{s+k} + \frac{B}{s+3}$ … (iii)

Diperoleh bahwa

$$\frac{1}{(3+s)(s+k)} = \frac{A(s+3) + B(s+k)}{(s+k)(s+3)}$$

Menjadi

$1 = A(s+3) + B(s+k)$

Jabarkan ruas kanan, diperoleh

$1 = As + 3A + Bs + Bk$

$0s + 1 = (A+B)s + 3A + Bk$

Samakan nilai ruas kanan dan ruas kiri

A + B = 0 jadi B = - A …(a)

dan 3A + Bk = 1

Substitusikan (a) menjadi $3A - Ak = 1,\ A(3-k) = 1$

Jadi, $A = \frac{1}{(3-k)}$ dan B = -A sehingga $B = -\frac{1}{(3-k)}$

Substitusikan ke (iii) diperoleh

$\frac{1}{(3+s)(s+k)} = \frac{\frac{1}{(3-k)}}{s+k} + \frac{-\frac{1}{(3-k)}}{s+3}$

Karena masing-masing suku pada ruas kanan mempunyai nilai $\frac{1}{(3-k)}$ sehingga

$\frac{1}{(3+s)(s+k)} = \frac{1}{3-k}\left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{s+3}\right)$

Selanjutnya substitusikan ke (ii), didapat

$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{3-k}\left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{s+3}\right) + \frac{4}{s+k}$

Setelah memperoleh nilai $\mathcal{L}(y)$ invers kan transformasi Laplace untuk memperoleh nilai y.

$$y = \frac{1}{3-k}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+k}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s+k}\right)$$

Berdasarkan definisi dasar transformasi Laplace diketahui bahwa

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{at}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right), s > a$$

$$\mathcal{L}(A)^{-1} = a(t)$$

$$\mathcal{L}\left(e^{-kt}\right) = \frac{1}{s-(-k)} = \frac{1}{s+k}$$

$$\mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{1}{s-(-3)} = \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\left(4e^{-kt}\right) = \frac{4}{s-(-k)} = \frac{1}{s+k}$$

$$y = \frac{1}{3-k}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+k}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s+k}\right)$$

Jadi, diperoleh bahwa

$$y = \frac{1}{3-k}\left(e^{-kt} - e^{-3t}\right) + 4e^{-kt}$$

Operasikan dengan menyamakan penyebutnya, menjadi

$$y = \frac{e^{-kt} - e^{-3t}}{3-k} + 4e^{-kt}$$

Misal: $\frac{1}{3} + 4 = \frac{1+4(3)}{3}$

$$y = \frac{e^{-kt} - e^{-3t} + 4e^{-kt}(3-k)}{3-k}$$

$$y = \frac{e^{-kt} - e^{-3t} + 12e^{-kt} - 4ke^{-kt}}{3-k}$$

$$y = \frac{-e^{-3t} + 13e^{-kt} - 4ke^{-kt}}{3-k}$$

Masing-masing suku yang memiliki nilai e^{-kt} difaktorkan menjadi

$$\boldsymbol{y = \frac{e^{-kt}(13-4k) - e^{-3t}}{3-k}}$$

D. Persamaan Diferensial dengan Suku Tak Homogen Diskontinu

Bentuk umum

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = g(t) \qquad (4.8)$$

Dimana a_0, a_1, dan a_2 merupakan fungsi kontinu, tapi suku tak homogen g(t) merupakan fungsi tak kontinu.

Derivatif Fungsi

$\boldsymbol{\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)}$

$\boldsymbol{\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - y'(0)}$

Contoh 5.

Tentukan penyelesaian persamaan y" + y = sin 2t dimana y(0) = 2 dan y' (0) = 1 .

Penyelesaian:

$\mathcal{L}(y'') = s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)$

$\qquad = s^2\mathcal{L}(y) - 2s - 1$

Misal: $\mathcal{L}(y) = Y(s)$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$(s^2+1)Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2+4}$$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + 2s + 1$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} + \frac{2s}{(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)}$$

Gunakan pecahan parsial untuk menyederhanakan suku pertama.

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \ \dots (i)$$

Karena pangkatnya 2 maka pemisalan pembilangnya menjadi pangkat satu atau turunannya yaitu As + B dan Cs + D

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As^3+As+Bs^2+B+\ Cs^3+4Cs+Ds^2+4D}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(A+4C)s+B+4D}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

A + C = 0

A = - C … (ii)

B + D = 0

D = - B … (iii)

A + 4C = 0

Substitusikan persamaan (ii)

- C + 4C = 0

3C = 0

C = 0 dan A = 0

B + 4D = 2 … (iv)

Eliminasi dan Substitusi persamaan (iii) dan (iv)

B + D = 0

<u>B + 4D = 2 –</u>

-3 D = -2

$D = \frac{2}{3}, B = -\frac{2}{3}$

Substitusikan nilai A, B, C, dan D ke persamaan (i)

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{0s + -\frac{2}{3}}{s^2+4} + \frac{0s+\frac{2}{3}}{s^2+1}$$

$$Y(t) = -\frac{1}{3}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin t + 2\cos t + \sin t$$

Jadi,

$$Y(t) = -\frac{1}{3}\sin 2t + \frac{5}{3}\sin t + 2\cos t$$

E. Latihan Soal

Tentukanlah penyelesaian dari persamaan transformasi laplace di bawah ini.

1. $\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(\sin 2t)$.
2. $\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(\cos at)$.
3. $\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(\cos 2t)$.
4. y" + 4y = 0, y(0) = 2 dan y'(0) = -1
5. y" + 4y' + 40 y = 0, y(0) = 3 dan y'(0) = 12
6. y' + 4y = sin (3t), y(0) = 2

“Kecantikan yang abadi terletak pada keelokan adab dan ketinggian ilmu seseorang. Bukan terletak pada wajah dan pakaiannya.”

Hamka

BAB 5 APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL

Pada Al-Quran, Allah menyuruh manusia untuk senantiasa meneliti dengan mengaplikasikan ilmu-ilmu yang telah diperolehnya dan memperhatikan alam sekitarnya. Seperti yang tertulis pada surat Al-Alaq ayat 1-5, yaitu "Bacalah dengan (menyebut nama Tuhanmu yang Menciptakan, Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha Pemurah, yang mengajar (manusia) dengan perantara kalam, Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya."

A. Persamaan Diferensial Orde Satu

1. Pertumbuhan dan Peluruhan

Persamaan Pertumbuhan

$$\frac{dy}{dt} = ky, \;\; k > 0 \rightarrow y(t) = Ce^{kt} \tag{5.1}$$

Masalah nilai awal:

$$\left.\begin{matrix} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{matrix}\right\} \rightarrow y(t) = y_0 e^{kt} \tag{5.2}$$

Persamaan Peluruhan:

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \;\; k > 0 \rightarrow y(t) = Ce^{-kt} \tag{5.3}$$

Masalah nilai awal:

$$\left.\begin{matrix} \frac{dy}{dt} = -ky \\ y(0) = y_0 \end{matrix}\right\} \rightarrow y(t) = y_0 e^{-kt} \tag{5.4}$$

Contoh 1. Pertumbuhan Bakteri

Suatu kultura bakteri diketahui berkembang dengan laju yang proporsional dengan jumlah yang ada. Setelah satu jam, 1000 untai bakteri teramati dalam kultur tersebut dan setelah 4 jam menjadi 3000 untai. Cariah ekspresi matematika perkiraan jumlah untaian bakteri yang ada dalam kultura tersebut pada setiap saat dan perkirakan jumlah awal untai bakteri dalam kultur tersebut!

Penyelesaian:

Ekspresi matematika perkiraan jumlah untaian bakteri yang ada dalam kultura pada setiap saat.

Misalkan:

$N(t)$ = Jumlah untai bakteri dalam kultural waktu t

$\frac{dN}{dt} = \text{Laju perubahan jumlah bakteri setiap waktu}$

Bentuk model matematika dari masalah di atas adalah

$$\frac{dN}{dt} = k\ N(t)$$

Dalam hal ini konstanta perbandingan adalah k. Penyelesaian umum dari persamaan diferensial di atas adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN$$

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int k\ dt$$

$$ln|N(t)| = ln\left|e^{kt}\right| + ln|c|$$

$$N(t) = c\ e^{kt}$$

Syarat yang diberikan adalah $t(1) = 1000 \quad \text{maka}\ \ 1000 = c\ e^{k}$

$t(4) = 3000 \quad \text{maka}\ \ 3000 = c\ e^{4k}$

sehingga didapat,

$c\ e^{4k} = 3000$

$c\ e^{k}\ .\ e^{3k} = 3000$

$1000\ \ e^{3k} = 3000$

$3k = ln|3| \quad \text{sehingga} \quad k = 0.366$

Subsitusikan nilai k, pada syarat $t(1) = 1000$ sehingga diperoleh,

$1000 = c\ e^{0.366}$ didapat $c = 694$

Maka diperoleh solusi,

$N(t) = 694\, e^{0.366t}$

Jadi, model matematika untuk jumlah bakteri yang ada pada waktu t adalah

$$N(t) = 694\, e^{0.366t}$$

Contoh 2. Peluruhan Radioaktif

Unsur radioaktif C-14 diketahui memiliki waktu paruh sekitar 5600 tahun serta memenuhi persamaan peluruhan $\frac{dQ}{dt} = -kQ$

a. Tentukan konstanta peluruhan
b. Tentukan kuantitas unsur radioaktif tersebut pada sembarang waktu t jika diketahui kuantitas awal adalah $Q(0) = Q_0$
c. Bila diketahui bahwa residu unsur yang didapat pada saat ini adalah 15% dari kuantitas awal, berapakah umur bahan yang mengandung unsur radioaktif tersebut?

Penyelesaian:

a. $k = \frac{ln2}{5600}$
b. $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{ln2}{5600}t}$
c. $t \approx 15\,336$ tahun

2. *Compound Interest*

Deposito awal di bank sejumlah $S_{0,}$ tingkat bunga r. Deposito tidak ditambah atau dikurangi selama keseluruhan periode.

a. Bila bunga dibayarkan tahunan

Deposito awal	S_0
Setelah 1 tahun	$S(1) = S_0 + rS_0 = S_0(1+r)$
Setelah 2 tahun	$S(2) = S_0(1+r) + rS_0(1+r) = S_0(1+r)^2$
...	...
Setelah t tahun	$S(t) = S_0(1+r)^t$

b. Bila bunga dibayarkan n kali dalam setahun

Deposito awal	S_0
Setelah 1 tahun	$S(1) = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$
Setelah 2 tahun	$S(2) = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{2n}$
...	...
Setelah t tahun	$S(2) = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

c. Bila bunga dibayarkan secara kontinu:

$$S(t) = \lim_{n\to\infty} S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = S_0 e^{nt}$$

Merupakan solusi masalah nilai awal:

$$\frac{dS}{dt} = rS, \quad S(0) = S_0$$

Anuitas

Pada Masalah *Compound Interest,* bila bunga dibayarkan secara kontinu, serta ada tambahan tabungan sebesar d setiap tahun:

$$\frac{dS}{dt} = rS + d, \quad S(0) = S_0$$

Solusi:

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{d}{r}(e^{rt} - 1)$$

Contoh 4.

Jena memutuskan untuk berhenti merokok dan menabung uang yang biasa ia belanjakan untuk rokok sebesar Rp. 30.000 per minggu. Bila bank memberikan bunga 10% per tahun dan dibayarkan secara kontinu, maka berapa besarkah tabungan Jena dalam 1 tahun? 10 tahun? 50 tahun?

Penyelesaian:

Tabungan setelah t tahun (dalam ribu rupiah)

$$S(t) = 15.600(e^{0,1t} - 1)$$

$S(1) = \text{Rp}.1.641.000,-$

$S(10) = \text{Rp}.26.805.000,-$

$S(50) = \text{Rp}.2.299.645.000,-$

Contoh 5.

Sebuah kendi mampu menampung 100 liter air. Tetapi suatu kesalahan terjadi yakni Bapak menaburkan 300 kg garam ke dalam kendi padahal banyaknya garam yang diperlukan hanya 200 kg. Solusi yang dilakukan adalah dengan membuang air yang sudah tercampur air garam secara teratur 3 liter/menit. Di waktu yang sama kendi juga diisi dengan 3 liter air murni. Jika dijaga agar kondisi garam dalam kendi merata setiap saat dengan dilakukan pengadukan, berapakah waktu yang diperlukan agar banyaknya garam pada kendi sesuai dengan yang diharapkan, yaitu 200 kg.

Penyelesaian:

$G(t) = \text{Jumlah garam yang terdapat dalam bak}$

$\frac{dG}{dt} = \text{Laju perubahan jumlah garam}$

$\frac{dG}{dt} = \text{Laju jumlah garam yang masuk} - \text{laju jumlah garam yang keluar}$

$\text{Laju garam yang masuk} = 0$

$\text{Laju garam yang keluar} = \frac{G}{100\ L} \times 3\ L/mnt = \frac{3}{100} G/mnt$

Sehingga,

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{3\ G}{100}, \quad t(0) = 300$$

Solusi,

$\frac{dG}{dt} = -\frac{3\,G}{100}$, sehingga $\frac{dG}{-\frac{3\,G}{100}t} = dt$

$-\frac{100}{3} ln|G| = t + ln|c|$

$G^{-\frac{100}{3}} = c\,e^{t}$ maka $G(t) = (c\,e^{t})^{-\frac{3}{100}}$atau

$G(t) = C\,e^{-\frac{3t}{100}}$

Pada saat $t = 0$ kita punya $G = 300$ sehingga

$300 = C\,e^{0} \rightarrow C = 300$

Sehingga solusi menjadi $G(t) = 300\,e^{-\frac{3t}{100}}$

Karena kita ingin garam di bak hanya 200 kg, maka,

$200 = 300\,e^{-\frac{3t}{100}}$

$\frac{2}{3} = e^{-\frac{3t}{100}}$sehingga $ln\left|\frac{2}{3}\right| = -\frac{3t}{100}$

Maka,

$-0.4055 = -\frac{3t}{100}$

$t =$ **13.5 menit**

Jadi, air garam dalam kendi akan sesuai dengan yang diharapkan dalam waktu **13.5 menit.**

3. Pendinginan dan Pemanasan

Hukum Pendinginan Newton

Laju perubahan suhu suatu benda, $T(t)$ yang ditempatkan pada medium dengan suhu M (konstan) adalah proporsional terhadap selisih suhu benda dan suhu medium.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - M), \quad \text{nilai awal } \mathrm{T}(0) = \mathrm{T}_0$$

solusi: $\mathrm{T(t)} = \mathrm{T}_0 e^{-kt} + \mathrm{M}(1 - e^{-kt})$

Contoh 6.

Sebuah tembaga berbentuk bola dipanaskan sampai dengan suhu 100° C. Kemudian pada saat $t = 0$ bola tersebut direndam pada air yang memiliki suhu tetap 30° C. Setelah 3 menit ternyata suhu bola menjadi 70° C. Tentukan saat ketika suhu bola menjadi 31° C. Berdasarkann hukum pendinginan Newton diketahui bahwa laju perubahan suhu benda T sebanding dengan perbedaan antara T dengan suhu medium.

Penyelesaian:

Bentuk model matematika dari masalah di atas adalah

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

Dalam hal ini konstanta perbandingan adalah $-k$. Penyelesaian umum dari persamaan diferensial di atas adalah

$$\int \frac{dT}{(T - 30)} = \int -kdt$$

$$ln(T - 30) = -kt$$

$$(T - 30) = Ce^{-kt}$$

$$T(t) = 30 + Ce^{-kt}$$

Kondisi awal yang diberikan $T(0) = 100$, sehingga penyelesaian khususnya menjadi

$$\mathrm{T}(0) = 100$$

$$100 = 30 + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{C} = 70$$

$$T(t) = 30 + 70e^{-kt}$$

Konstanta k dapat diperoleh dengan memasukkan $T(3) = 70$. Selanjutnya akan diperoleh

$T(3) = 30 + 70e^{-k(3)}$

$70 = 30 + 70e^{-3k}$

$40 = 70e^{-3k}$

$$\ln\frac{4}{7} = \ln e^{-3k}$$

$$\ln\frac{4}{7} = -3k$$

$$k = \frac{1}{3}ln\frac{7}{4} = 0{,}1865$$

Dengan informasi ini kita akan dapat menentukan saat suhu benda $T = 31^o\ C$

$$31 = 30 + 70e^{-0{,}1865t}$$

$$1 = 70e^{-0{,}1865t}$$

$$ln\ \frac{1}{70} = lne^{-0{,}1865t}$$

$$ln\ \frac{1}{70} = -0{,}1865t$$

Jadi $t = \frac{\ln 70}{0{,}1865} = 22{,}78$, yaitu setelah mendekati 23 menit.

4. Masalah Benda Jatuh

Asumsikan suatu benda dengan massa m yang jatuh secara vertical dipengaruhi hanya oleh gravitasi dan suatu hambatan uara yang proporsional terhadap kecepatan benda tersebut. Anggaplah bahwa gravitasi dan massa tetap konstan dan untuk memudahkan, tentukan arah kebawah sebagai arah positif.

<u>Hukum Gerak Kedua Newton</u>:

Gaya netto yang bekerja pada benda sebanding dengan laju perubahan momentum benda tersebut atau untuk massa konstan.

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

Untuk soal yang dihadapi ini, ada dua gaya yang beraksi pada benda :

1. Gaya gravitasi karena bobot benda w, yang sama dengan mgh dan
2. Gaya karena hambatan udara $-kv$, dimana k $\geq$ 0 adalah suatu konstanta proporsionalitas.

Tanda minus diperlukan karena gaya ini melawan kecepatan, artinya gaya ini bekerja kearah atas, atau negative. Dengan demikian gaya netto F pada benda adalah $F = mg - kv$. Dengan memasukkan hasil ini ke dalam bentuk terakhir, sehingga

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

Atau $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$

Sebagai persamaan gerak benda.

Jika hambatan udara dapat diabaikan atau tidak ada, maka k=0 sehingga menjadi,

$$\frac{dv}{dt} = g$$

$$\text{Ketika k} > 0, kecepatan\ limit\ v_1 = \frac{mg}{k}$$

Contoh 7.

Suatu benda yang memiliki massa 5 kg dijatuhkan dari ketinggian 100 m dengan kecepatan = 0. Diasumsikan tidak ada hambatan udara. Tentukanlah:

a. Model matematika untuk kecepatan benda pada setiap waktu t
b. Model matematika untuk posisi pada tiap waktu t
c. Lamanya waktu untuk mencapai permukaan tanah

Penyelesaian:

a. Pada kondisi awal $(t = 0 \quad dan \quad v = 0)$ dimana tidak ada hambatan udara, maka $k = 0$

   Sehingga,

   $0 = g(0) + c$

   $c = 0$

   Diperoleh,

   $v = gt \quad \text{dimana} \quad g = 32\ m/s^2$

   Jadi, kecepatan benda pada tiap waktu adalah $\boldsymbol{v(t) = 32t}$

b. Karena kecepatan adalah laju perubahan perpindahan terhadap waktu maka,

$v = \frac{dx}{dt}$

$32t = \frac{dx}{dt}$

sehingga diperoleh,

$x = 16t^2 + c$

Karena pada kondisi awal $(t = 0 \; dan \; x = 0)$ maka,

$0 = 16(0)^2 + c$

$c = 0$

Diperoleh,

$x = 16t^2$

Jadi, posisi benda pada tiap waktu t adalah $\boldsymbol{x(t) = 16t^2}$**.**

c. Akan dicari waktu yang dibutuhkan benda untuk mencapai permukaan tanah

Jarak awal benda terhadap permukaan tanah100 ft.

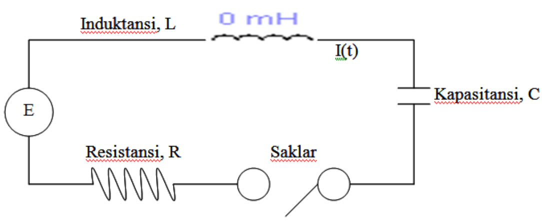
Sehingga,

$$x = 16t^2$$

$100 = 16t^2$diperoleh $t = 2.5 \; s$

Jadi, waktu yang diperlukan untuk mencapai permukaan tanah adalah **2.5 s.**

5. MASALAH RANGKAIAN LISTRIK



Contoh 8.

Sebuah rangkaian memiliki emf 5 volt, reisitensi 50 ohm induktansi 1 henry, dan tanpa arus awal. Carilah arus dalam rangkaian ini pada setiap waktu t.

Penyelesaian:

Diketahui:

$E = 5 \quad R = 50 \quad L = 1$

Subsitusikan, ke persamaan

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

Sehingga menjadi,

$$\frac{dI}{dt} + 50I = 5 \qquad P.D\ Orde - 1$$

Faktor Integrasi : $e^{\int 50\,dt} = e^{50t}$

Kalikan FI terhadap P. D

$$e^{50t}\left(\frac{dI}{dt} + 50I\right) = 5\,e^{50t}$$

$$e^{50t}\,dI + 50I\,e^{50t}\,dt = 5\,e^{50t}\,dt$$

$$d[e^{50t}\,I] = 5\,e^{50t}\,dt$$

Integralkan kedua ruas, sehingga diperoleh,

$$e^{50t}I = \frac{1}{10}e^{50t} + c$$

$$I = c\,e^{-50t} + \frac{1}{10}$$

Pada saat $(t = 0\ \ dan\ \ I = 0)$maka,

$$0 = c\,e^{0} + \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{10}$$

Jadi, arus dalam rangkaian ini pada setiap waktu t adalah

$$I = -\frac{1}{10}\,e^{-50t} + \frac{1}{10}$$

Kuantitas $-\dfrac{1}{10}\,e^{-50t}$

disebut Arus Transien, karena kuantitas ini menuju nol (menghilang) ketika $t \to \infty$

Kuantitas $\frac{1}{10}$ dalam *(I) disebut Arus Tunak (steady – state),* ketika $t \to \infty$

B. Persamaan Diferensial Orde Dua

1. Sistem Gerak

Penggunaan sistem gerak dapat dilihat dengan benda bermassa m yang tergantung pada suatu pegas. Pemodelan sistem gerak, didasari oleh Hukum Newton II, sehingga:

F = m.α

Dengan:

F = gaya benda

m = massa benda

α= percepatan benda

Gaya pada benda yang tergantung pada pegas:

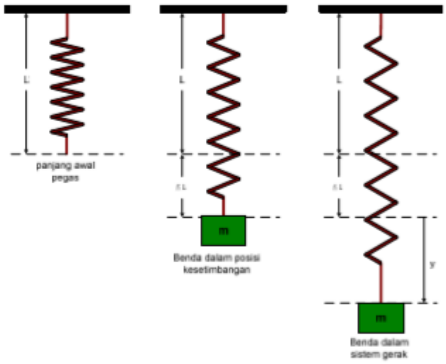
a. F_g = m.g dimana F_g merupakan gaya tarik gravitasi benda, m = massa benda dan g = gravitasi.

b. F_s = −k (y + ΔL), F_s = adalah gaya pegas, k = konstanta pegas, y = posisi benda, ΔL = perubahan panjang pegas. Arah gaya pegas ke atas dan ke bawah. Jika pegas ditarik F_s negatif, arah gaya ke atas dan jika pegas ditekan F_S positif, arah gaya kebawah.

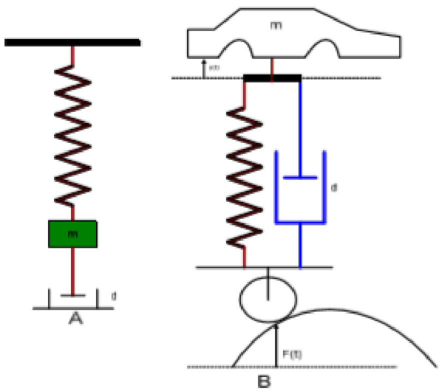
c. F_d = −d. $\frac{dy}{dt}$, F_d = gaya redam, arah gaya berlawanan dengan gerak benda. d = konstanta redaman, $\frac{dy}{dt}$= kecepatan benda. Jika d > 0 sistem disebut Sistem Teredam (Damped Systems), jika d = 0 sistem disebut Sistem Tak-teredam (Undamped Systems).

d. F_e= F(t), F_e= gaya eksternal, arah gaya dapat ke atas atau ke bawah.

Penerapan gaya ini langsung pada benda atau pegas.



Gambar 1. Sistem Gerak Benda pada Pegas



Gambar 2. Sistem Gerak dengan Peredam

2. Sistem Gerak dengan Peredam dan Gaya Luar F(t)

Diketahui dari Hukum Newton II yaitu

F = m.α

F adalah gaya benda, $\alpha = \frac{d^2y}{dt^2}$ adalah percepatan benda sehingga:

$F_g + F_s + F_d + F_e = m.\frac{d^2y}{dt^2}$

atau

$m.g + -k(y + \Delta L) - d\,.\frac{dy}{dt} + F(t) = m.\frac{d^2y}{dt^2}$

untuk system dalam kesetimbangan m.g = kΔL , sehingga persamaan menjadi:

$-ky - d.\frac{dy}{dt} + F(t) = m.\frac{d^2y}{dt^2}$

atau

$m.\frac{d^2y}{dt^2} + d.\frac{dy}{dt} + ky = F(t)$

PD orde-2 tersebut mengilustrasikan sistem gerak benda pada pegas. Jika F(t) = 0 (tanpa gaya eksternal) sistem disebut gerak bebas (unforced), jika F(t) ≠ 0 disebut gerak paksa (forced). Jika d = 0 maka system disebut tak teredam (undamped) dan jika d > 0 maka system disebut teredam (damped).

3. Sistem Gerak Bebas Tak Teredam (F(t) = 0 , d = 0

Model system gerak harmonic bebas tak teredam: $m.\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$

Gerak benda didapatkan dengan menyelesaikan PD di atas. Jika persamaan dibagi dengan m, maka PD menjadi:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega o^2 y = 0, \quad \omega o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Persamaan karakteristik PD di atas: $r^2 + \omega o^2 = 0$

akar-akarpersamaankarakteristik: $r_{1,2} = \pm\, i\omega o$

Sehingga penyelesaian umum PD gerak benda:

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

Maka persamaan menjadi:

$$y(t) = R[\cos\theta \cos \omega_0 t + \sin \theta \sin \omega_0 t]$$

$$atau$$

$$y(t) = R \cos (\omega_0 t - \theta)$$

Dengan $R = \sqrt{c_1{}^2 + c_1{}^2}$

Keterangan:

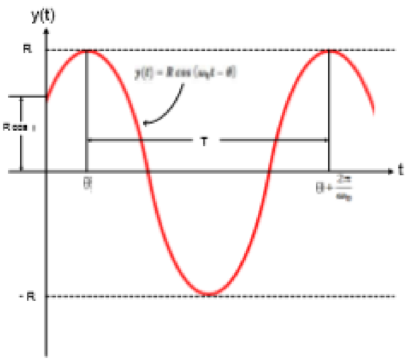
R = amplitude system gerak harmonic

θ =sudut fasa

ω_0 =frekuensi= $\sqrt{\frac{k}{m}}$

Jika satu siklus gerak harmonik yang terjadi digambarkan dalam unit waktu 2π, maka frekuensi didefinisikan menjadi:

$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$, , maka periode gerak harmonik   T = 1/ f= $\frac{\omega_0}{2\pi}$ = 2π$\sqrt{\frac{k}{m}}$



Gambar 3 Ilustrasi Gerak Harmonik $y(t) = R\cos(\omega_0 t - \theta)$

Contoh 9.

Sistem gerak harmonik benda yang tergantung pada pegas. Diketahui bahwa massa benda m = $\frac{1}{4}$ kg, konstanta pegas k = 16 N/m, dan redaman=0. Ketika suatu pegas ditarik benda maka akan bertambah panjang 1 m dan mulai bergerak ke atas dengan kecepatan 8meter per detik. Sistem tidak diberi gaya luar.

a. Carilah ekspresi persamaan yang mengilustrasikan sistem gerak harmonik pada permasalah di atas.
b. Hitunglah fungsi gerak benda tersebut.
c. Hitunglah amplitudo, sudut fasa, frekuensi dan periode gerak benda.

Penyelesaian:

a. Ekspresi persamaan pada pegas dapat dituliskan dengan

m.$\frac{d^2y}{dt^2}$ + d.$\frac{dy}{dt}$ + ky = F(t)

pada contoh permasalahan di awat diketahui redaman d = 0, gaya luar = 0 , massa m = ¼ kg , konstanta pegas k = 16 N/m, sehingga diperoleh ekspresi persamaan sistem gerak harmonik yaitu

$$\frac{1}{4}.\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$$

Dengan kondisi awal:

Posisi awal benda y(0) = 1 dan

Kecepatan awal benda$\frac{dy}{dt}$ (0) = −8.

b. Persamaan gerak benda.

Persamaan gerak benda dapat diselesaikan dengan menggunakan model PD (a), yaitu:

$$\frac{1}{4}.\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 64y = 0$$

$$y\,(0) = 0{,}1;\ \frac{dy}{dt}(0) = \ -8$$

Langkah-langkah penyelesaiaa persamaan gerak tersebut adalah.

- Persamaan karakteristik dari PD di atasr^2+ 64 = 0
- Akar-akar persamaan karakteristik $r = \ \pm i8$
- Solusi umum PD: $y(t) = c_1$ cos 8t + c_2 sin 8t
  - $y(0) = \ c_1$ = 1
  - $y'(0)$= 8c_2 = -8

    c_2 = -1

sehingga gerak benda: $y(t)$ = cos 8t - sin 8t

c. Dalam mencari nilai dari amplitudo, sudut fasa, frekuensi dan periode dapat diselesaikan dengan membentuk fungsi sinus/cosinus. Bentuk umum persamaan satu sin/cos sistem gerak harmonic yaitu.

$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \theta)$

$= R\, cos(8t - \theta)$

Dengan:

$R = \sqrt{c_1{}^2 + c_1{}^2}$

$\tan\theta = \frac{c_2}{c_1}$

$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$T = 1/f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sehingga:

Amplitudo $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Frekuensi $f = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$

Periode $T = \frac{4}{\pi}$

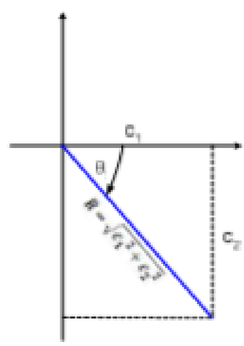
$\tan\theta$ = -1 (kuadran IV)

sudut fasa $\theta = \frac{7\pi}{4}$

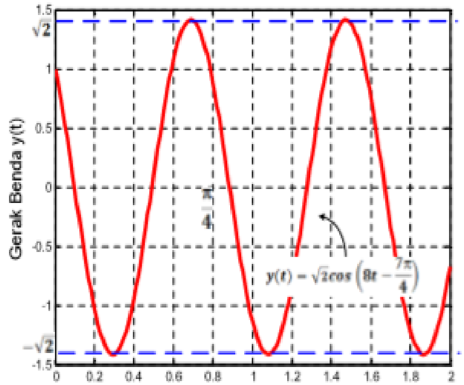
$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \theta)$

$= R\, cos(8t - \theta)$

$= \sqrt{2}\, cos(8t - \frac{7\pi}{4})$



Gambar 4 Ilustrasi Sudut Fasa pada Contoh Kasu



Gambar 5 Harmonik Benda pada Pegas, R =$\sqrt{2}$, $f = \frac{4}{\pi}, \theta = \frac{7\pi}{4}$

4. Sistem Teredam Kurang (under damped), ($\boldsymbol{d^2 - 4mk < 0}$)

Solusi persamaan gerak benda pada system teredam kurang (under damped) didapatkan jika $d^2 - 4mk < 0$ dimana akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$r_{1,2} = \frac{-d \pm i\sqrt{4mk + d^2}}{2m}$$

Persamaan solusinya adalah:

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t} \; dengan \; \alpha = -\frac{d}{2m}, \beta = \frac{\sqrt{(4mk + d^2}}{2m}$$

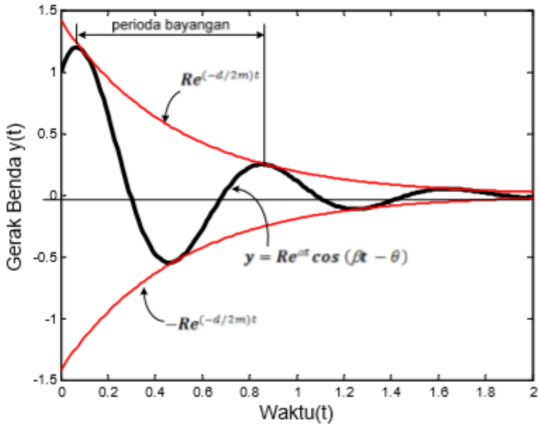
$$= e^{(-d+2m)t}(A cos\beta t + B sin\beta t)$$

Bentuk satu sinus/cosinus:

$$y = Re^{(-d/\,2m)} \cos(\beta t - \theta)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$tan\theta = \frac{B}{A}$$



Gambar 6 Osilasi pada Gerak Benda BebasTeredam Kurang

Faktor kosinus$\cos(\beta t - \theta)$ menyebabkan osilasi bernilai antara +1 dan -1. Perioda osilasi jika bukan perioda asli atau sering disebut sebagai perioda bayangan (quasi-period) atau perioda teredam (damped-period), didefinisikan sebagai

$$T_d = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{(4mk-d^2)}}{2m}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{(4mk-d^2)}}$$

Frekuensi dinyatakan sebagai frekuensi bayangan (quasi frequency) atau teredam (damped-frequency), yaitu $f_d = \frac{\beta}{2\pi}$. Sedangkan $Re^{(-d/2m)t}$ disebut amplitude teredam (damped-amplitude).

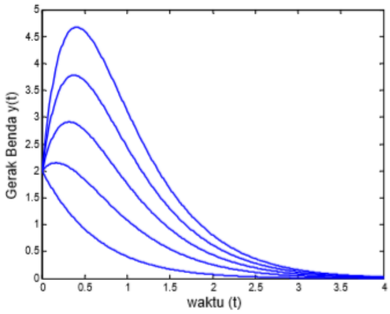
5. Sistem Teredam Kritis (critically damped) ($\boldsymbol{d^2 = 4mk}$)

Pada system teredam kritis$d^2 = 4mk$ sehingga akar-akar persamaan karakteristik sama yaitu

$$r_{1,2} = -\frac{d}{2m}$$

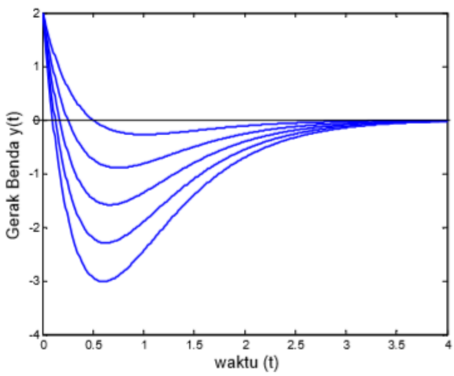
Persamaan solusinya:

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{\left(-\frac{d}{2m}\right)t}$$



Gambar 7 Gerak Benda pada Sistem Gerak Bebas Terendam Kritis

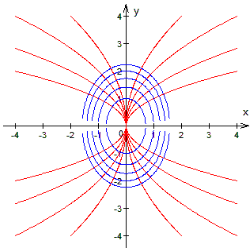
$(c_1, c_2\, positif)$



Gambar 8 Gerak Benda pada Sistem Gerak Bebas Terendam $(c_2\, negatif)$

C. Latihan Soal

1. Tentukan lintasan orthogonal dari setiap keluarga kurva yang diberikan. Dalam setiap kasus, sket salah beberapa anggota keluarga dan beberapa lintasan orthogonal pada sumbu yang sama. $\boldsymbol{y^2 = 4cx}$



2. Sebuah tangki berisi 20 kg garam yang dilarutkan dalam 5000 L air. Larutan garam yang mengandung 0.03 kg garam per liter air memasuki tangki dengan laju 25 L/menit. Larutan tetap teraduk rata dan dialirkan keluar dari tangki dengan laju yang sama. Berapa banyak garam yang terdapat dalam tangki setelah setengah jam?
3. Populasi penduduk di Amerika diketahui meningkat dengan laju yang porposional dengan jumlah penduduk yang sekarang hidup. Dalam tahun 1790 jumlah penduduk Amerika 3.93 juta penduduk kemudian pada tahun 1890 jumlah penduduknya menjadi 62.95 juta jiwa. Perkirakan pertumbuhan penduduk Amerika sebagai fungsi dari waktu!
4. Sebuah rangkaian listrik dihubungkan seri terdiri dari sumber tegangan V volt, tahanan R ohm, dan inductor L henry. L, V, dan R konstanta. Berapa besar arus i(t) jika diketahui pada t=0, i=0.
5. Diketahui suhu udara 450K, zat tertentu mendingin dari 370K ke 230K dalam 10 menit! Cariah suhu zat tersebut setelah 40 menit!
6. Bila sebuah benda 5 kg diikat pada sebuah pegas yang tergantung vertical dititik yang paling rendah P dan pegas itu bertambah panjang 6 cm. Benda 5 kg itu diganti dengan benda 20 kg. Selanjutnya, sistem ini dibiarkan hingga titik seimbang. Jika benda 20 kg itu ditarik ke bawah

sejauh 1 kaki dan kemudian dilepaskan, Ilustrasikan titik paling rendah P pada pegas itu (andaikan tidak ada hambatan dan gesekan lain).

7. Perhatikan suatu system pegas-massa tanpa gaya redam yang mana gerakannya diberikan oleh:

   $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = F_0 cos\omega t,$

   $x(0) = 0$, $\omega = \omega_0$

   $\frac{dx}{dt}(0) = 0$

8. Suatu system pegas-massa yang mana gerakannya diberikan oleh $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 10\sin t$. Ekspresikan jawaban anda dalam bentuk $X_p = A_0 \sin(t - \emptyset)$ untuk suatu konstanta A_0 dan $\emptyset$

"Cinta itu adalah perasaan yang mesti ada pada tiap-tiap diri manusia, ia laksana setitis embun yang turun dari langit, bersih, dan suci. Jika ia jatuh pada tanah yang subur, di sana akan tumbuh kesucian hati, keikhlasan, setia, budi pekerti yang tinggi dan lain-lain perangai terpuji."

Hamka

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, P., Baltaeva, U., & Alikulov, Y. (2020). Solvability of the boundary-value problem for a linear loaded integro-differential equation in an infinite three-dimensional domain. *Chaos, Solitons and Fractals*, *140*, 110108. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110108

Akça, H., Benbourenane, J., & Eleuch, H. (2019). The q-derivative and differential equation. *Journal of Physics: Conference Series*, *1411*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1411/1/012002

Bronson, Richard. Gabriel B Costa. (2007). Schaum's Outlines: Persamaan Diferensial. Jakarta:PT Gelora Aksara Pratama.

Cortés, J. C., Villafuerte, L., & Burgos, C. (2017). A Mean Square Chain Rule and its Application in Solving the Random Chebyshev Differential Equation. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *14*(1), 1–14. https://doi.org/10.1007/s00009-017-0853-6

Darmawijoyo. (2019). Persamaan Diferensial Biasa Suatu Pengantar. Jakarta: Erlangga.

Faradillah, A. (2016). *Profil Berpikir Matematis Mahasiswa Calon Guru dalam Menyelesaikan Masalah Persamaan Diferensial*. 249–252.

Goode, S. W. (2000). Differential Equations and Linear Algebra. New Jersey: Prentice Hall.

Hadi, A. N., Djauhari, E., Supriatna, A. K., & Johansyah, M. D. (2019). Teknik Penentuan Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear Non-Homogen Orde Satu. *Matematika*, *18*(1), 29–40. https://doi.org/10.29313/jmtm.v18i1.5079

Khan, H., Jarad, F., Abdeljawad, T., & Khan, A. (2019). A singular ABC-fractional differential equation with p-Laplacian operator. *Chaos, Solitons and Fractals*, *129*, 56–61. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.08.017

Nababan. (1987). Pendahuluan Persamaan Differensial Biasa. Jakarta. Karunika Jakarta Universitas terbuka.

Rahmat, B. (2015). Persamaan Diferensial Eksak, Universitas Muhammadiyah Malang.

Ross, S. L. (1998). Introduction to Differential Equations. New York: John

Wiley & Sons. Inc.

Waluya, S. B. (2006). Persamaan Diferensial. Yogyakarta. Graha Ilmu.

Wartono, W., & Suryani, I. (2020). The solution of nonlinear parabolic equation using variational iteration method. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *16*(3), 287. https://doi.org/10.20956/jmsk.v16i3.8468

Xu, Q., & Xu, Y. (2018). Extremely low order time-fractional differential equation and application in combustion process. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *64*, 135–148. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.021

Pengantar Persamaan Diferensial. Penulisan buku ini bertujuan untuk membantu mahasiswa memahami materi-materi persamaan diferensial melalui pembahasan di buku maupun di video pembelajaran yang tersedia pada barcode. Buku ini juga akan memberikan informasi mengenai Persamaan Diferensial Implisit dan Eksplisit, Persamaan Diferensial Orde Satu, Persamaan Diferesial Orde Dua, Transformasi Laplace, dan Aplikasi Persamaan Diferensial pada Kehidupan Sehari-hari.

CARA MENGAKSES VIDEO PEMBELAJARAN

PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

ISBN 978-623-7724-19-3
9 786237 724193