MODUL
ALJABAR LINEAR ELEMENTER

KHOERUL UMAM

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayahNya saya dapat menyelesaikan Modul Aljabar Linear Elementer ini. Adapun tujuan dari pembuatan modul ini adalah sebagai bahan ajar dan referensi bagi para pembaca, khususnya mahasiswa calon guru matematika. Mudah-mudahan modul ini dapat membantu para pembaca yang berminat untuk mengembangkan diri, memperkaya wawasan dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

Kami menyadari bahwa penyelesaian modul ini tidak terlepas dari bantuan berbagi pihak,dan masih banyak terdapat kekurangan dalam penulisan buku ini. Oleh karena itu, kami mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca.

Jakarta Desember 2022

Khoerul Umam

DAFTAR ISI

MATRIKS

Capaian Pembelajaran : Setelah mengikuti praktikum, mahasiswa diharapkan mampu memahami dan menjelaskan tentang makna statistika dan penggunaanya dalam kehidupan sehari-hari.

Kemampuan Akhir yang diharapkan : Setelah mengikuti praktikum, Mahasiswa Pendidikan Matematika diharapkan mampu memahami dan menjelaskan tentang makna statistika dan penggunaanya dalam kehidupan sehari-hari.

Pokok Bahasan yang akan dipelajari ;

- sifat-sifat Matriks ?
- Matriks Elementer ?
- Bagaimana metode untuk menemukan adjoint invers matriks (A^{-1}) ?

Tujuan Pembelajaran

- Dapat mengetahui sifat-sifat Matriks
- Paham mengenai Matriks Elementer
- Dapat mengetahui metode menemukan invers matriks (A^{-1})

MATRIKS

2.1 Sifat – Sifat Matriks

Tidak semua matriks memiliki invers. Matriks yang memiliki invers dinamakan **matriks nonsingular** atau **matriks invertible**. Sedangkan matriks yang tidak memiliki invers dinamakan **matriks singular**.

Matriks memiliki sifat-sifat dalam operasi hitungnya, yaitu :

a. Sifat penjumlahan

Diberikan matriks A, B, dan C yang penjumlahannya terdefinisi.

1. A + B = B + A
2. A + (B + C) = (A + B) + C
3. Ada matriks nol, O, sedemikian hingga A + O = A
   Matriks O ini disebut dengan matriks identitas terhadap penjumlahan.
4. Untuk setiap matriks A, ada matriks -A sedemikian hingga A + (-A) = O. Matriks –A ini disebut dengan matriks invers terhadap penjumlahan

Contoh :

• A+B=B+A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

• A + (B + C) = (A + B) + C

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \ dan\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

- Matrik A ditambah dg Matrik –A = 0

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } -A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A+(-A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Matrik invers terhadap penjumlahan

Matrik

b. Sifat perkalian

Contohnya, Diberikan matriks A, B, dan C yang perkaliannya terdefinisi.

1. (AB)C = A(BC)
2. A(B + C) = AB + AC
3. (A + B)C = AC + BC
4. Ada matriks I sedemikian hingga AI = IA = A.

Matriks I disebut matriks identitas terhadap perkalian.

Contoh :

- (AB)C = A(BC)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \ dan\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AxB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 + 1.1 & 2.2 + 1.3 \\ 3.5 + 4.1 & 3.2 + 4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 19 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(AxB)xC = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 19 & 18 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.1 + 7.4 & 11.2 + 7.3 \\ 19.1 + 18.4 & 19.2 + 18.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39 & 43 \\ 91 & 92 \end{bmatrix}$$

$$BxC = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 + 2.4 & 5.2 + 2.3 \\ 1.1 + 3.4 & 1.2 + 3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$$

$$Ax(BxC) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 13 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.13 + 1.13 & 2.16 + 1.11 \\ 3.13 + 4.13 & 3.16 + 4.11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39 & 43 \\ 91 & 92 \end{bmatrix}$$

c. Sifat perkalian scalar dan matriks

Jika r dan s adalah bilangan real, dan A dan B adalah matriks, maka

1. r(sA) = (rs)A
2. (r + s)A = rA + sA
3. r(A + B) = rA + rB
4. A(rB) = r(AB) = (rA)B

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan r=2 serta s=3

$$r(sA) = 2\left(3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$rs(A) = 2.3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

Contoh :

- r(sA) = (rs)A

d. Sifat transpose

Jika r adalah skalar, dan A dan B adalah matriks, maka

1. (At)t = A
2. (A + B)t = At + Bt
3. (AB)t = BtAt
4. (rA)t = rAt

Suatu matriks A = [aij] dikatakan simetris jika At = A

Contoh :

- (At)t = A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} => A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^t)^t = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)^t => \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Perpangkatan pada Matriks

- Misal A adalah matriks b.s. dan p adalah bil.bulat positif, maka :

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{p\ faktor}$$

Jika A adalah matriks berukuran n x n, maka

A0 = In

- Sifat Perpangkatan :

Misal p dan q adalah bilangan bulat non negatif, dan A dan B adalah matriks, maka

1. ApAq = Ap+q
2. (Ap)q = Apq
3. (AB)p = ApBp jika dan hanya jika AB = BA

e. Sifat Trace

Misalkan terdapat matriks A,B,I(Identitas)A, B,dan α sembarang skalar (riil atau kompleks) dan sembarang bilangan bulat n yang sedemikian rupa sehingga berlaku :

- tr(αA)=α(tr(A))
- tr(A+B)=tr(A)+tr(B)
- tr(AB)=tr(BA)
- tr(A^T)=tr(A)
- tr($I_{n\times n}$)= n

2.2 Matriks Elementer

Matriks elementer adalah matriks yang diperoleh dari matriks identitas yang dikenai satu kali OBE (Operasi Baris Elementer).

Contoh :

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b2 ditukar dengan b3, maka E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3xb3+b1, maka E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -3xb2, maka E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

2.3 Invers Matriks

Invers matriks adalah kebalikan (invers) dari sebuah matriks yang apabila matriks tersebut dikalikan dengan inversnya, akan menjadi matriks identitas. Invers matriks dilambangkan dengan A-1. Suatu matriks dikatakan memiliki invers jika determinan dari matriks tersebut tidak sama dengan nol.Untuk menentukan invers dari sebuah matriks, terdapat dua aturan berdasarkan ordonya, yaitu ordo 2x2 dan ordo 3x3.

a. Invers Matriks Berordo 2x2

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Pembahasan

$A^{-1} = \frac{1}{2.2-3.1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4-3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b. **Metode Adjoin** matriks merupakan transpose dari suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor dari elemen-elemen matriks tersebut. Metode adjoin digunakan untuk mencari invers matriks, dalam menggunakan metode ini yang dibutuhkan adalah determinan matriks itu sendiri dan adjoin.

Contoh : saya memiliki sebuah matriks berordo 3x3

A = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ kemudian cari kofaktornya

Kof 1 = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 0 , 2 = $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = 2, 3 = $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = -2

Kof 4 = $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = -2 , 5 = $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = 6 , 6 = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = 0

Kof 7 = $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 , 8 = $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -3 , 9 = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 1

Maka kof A = $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

Selanjutnya mencari Adj. A

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ = matriks Adj. A = $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Lalu cari determinan A

Det A = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Det A = $\frac{1}{(3)^{3-2}}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{3}$ (ad – bc) maka $\frac{1}{3}$ (6 – 0) = $\frac{1}{3}$. 6 = 2

Terakhir kita gunakan rumus metode adjoin

$A^{-1} = \frac{1}{determinan\ A}$ Adj A

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 3 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

c. Invers Matriks Berodo 3x3 dengan Transformasi Baris Elementer

Tentukan invers matriks A dengan transformasi baris elementer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pembahasan:

Pertama-tama, kita bentuk matriks A menjadi matriks $(A_3|I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Lalu, kita transformasikan matriks $(A_3|I_3)$ ke bentuk $(I_3|A_3)$. Kita bisa menggunakan beberapa cara seperti yang dijelaskan poin a-d pada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{1}}{\xrightarrow{B_2-2B_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{2}}{\xrightarrow{B_3-2B_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\boxed{3}}{\xrightarrow{B_3+B_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{4}}{\xrightarrow{\frac{1}{5}B_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \overset{\boxed{5}}{\xrightarrow{B_2-2B_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{\boxed{6}}{\xrightarrow{B_1-B_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

langkah ke-2 rumus di atas.

Keterangan:

1) B_2-$2B_1$ = elemen-elemen baris ke-2 dikurang 2 kali elemen-elemen baris ke-1.

2) B_3-$2B_1$ = elemen-elemen baris ke-3 dikurang 2 kali elemen-elemen baris ke-1.

3) B_3+B_2 = elemen-elemen baris ke-3 ditambah elemen-elemen baris ke-2.

4) $1/5B_3$ = elemen-elemen baris ke-3 dikali degan ⅕.

5) B_2-2B_3 = elemen-elemen baris ke-2 dikurang 2 kali elemen-elemen baris ke-3.

6) B_1-B_2 = elemen-elemen baris ke-1 dikurang elemen-elemen baris ke-2.

Sehingga, diperoleh invers matriks A, yaitu:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

LATIHAN

1. Tentukan jenis dari matriks – matriks dibawah ini (jika memenuhi lebih dari satu, tuliskan semua) !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

2. diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

   a. Hitunglah B + C!

   b. Hitung AB dan AC , kemudian tentukan AB + AC!

   c. Dari perhitungan B + C sebelumya, hitung A (B + C) kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban dari b !

3. Dari soal nomor 2, tentukan

   a. $(AB)^t$ dan $(AC)^t$!

   b. Hitung B^tA^t dan C^tA^t , kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban a !

4. Tunjukkan apakah matriks B merupakan invers A !

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad dan \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad dan \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Tentukan invers matriks A, B, dan C dengan transformasi baris elementer.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Tentukan kofaktor dari matriks A, B, dan C!.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ELIMINASI GAUSS & SISTEM PERSAMAAN LINEAR HOMOGEN

Matematika dapat kita jumpai di dalam kehidupan sehari-hari, di sebagian aspek di kehidupan kita terdapat hal yang pasti saja menggunakan matematika. Dan banyak dari sebagian orang beranggapan bahwa matematika itu sangatlah rumit. Maka dari itu saya membuat makalah ini dengan maksud membantu pemahaman tentang matematika, agar tidak lagi menilai bahwasannya matematika itu adalah sesuatu hal yang rumit.

MATERI YANG DIPELAJARI

- Mengetahui teknik Eliminasi Gauss
- Sistem Persamaan Linear Homogen

TUJUAN

Pembealjaran ini dibuat bertujuan agar mahasiswa dapat memahami tentang Eliminasi Gauss & Sistem Persamaan Linear Homogen.

ELIMINASI GAUSS

Pada bagian ini kita akan memberikan prosedur yang sistematik untuk memecahkan sistem-sistem persamaan linear; prosedur tersebut didasarkan kepada gagasan untuk mereduksi matriks yangdiperbesar menjadi bentuk yang cukup sederhana sehingga sistem persamaan tersebut dapatdipecahkan dengan memeriksa sistem tersebut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas adalah contoh matriks yang dinyatakan dalam bentuk *eselon baris tereduksi(reduced row-echelon form)*. Supaya berbentuk seperti ini, maka matriks tersebut harus mempunyai sifat-sifat berikut.

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan taknol pertama dalam baris tersebutadalah 1. (Kita namakan 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itudikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam barisyang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Matriks yang memiliki sifat-sifar 1,2 dan 3 dapat dikatakan dalambentuk *eselon baris (row- echelon form)*.

Berikut ini adalah beberapa contoh matriks dalam bentuk seselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks berikut adalah matriks dalam bentuk eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 39 \\ 0 & 1 & 56 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 260 \\ 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 001 \end{bmatrix}$$

Tidak sukar untuk memantau apabila matriks dalam bentuk eselon baris harus mempunyai nol di bawah setiap 1 utama. Bertentangan dengan hal ini, matriks dalambentuk eselon baris tereduksi harus mempunyai nol di atas dan di bawah masing-masing 1 utama.

Prosedur untuk meredusi matriks menjadi bentuk eselon baris terreduksi dinamakan ***eliminasi Gauss-Jordan***, sedangkan untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris dinamakan ***eliminasi Gauss.***

Contoh 1:

Pecahkanlah dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Maka matriks yang diperbesar dari sistem tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan menambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan keempat maka akan mendapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan dengan -1 dan kemudian menambahkan -5 kali baris kedua kepada baris ketiga dan -4 kali baris kedua kepada baris keempat maka akan memberikan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 0 & 2 & 0 0 \\ 0 & 0 & 1\ 2 & 0 & 3 1 \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 6 2 \end{bmatrix}$$

Dengan mempertukarkan baris ketiga dengan baris keempat dan kemudian mengalikan baris ketiga dari matriks yang dihasilkan dengan 1/6 maka akan memberikan bentuk eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 0 & 2 & 0^{0} \\ 0 & 0 & 1\ 2 & 0 & 3^{1} \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 1\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0_{0} \end{bmatrix}$$

Dengan menambahkan -3 kali baris ketiga pada baris kedua dan kemudian menambahkan 2 kali baris kedua dari matriks yang dihasilkan pada baris pertama maka akan menghasilkan bentuk eselon baris terreduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 0 & 2 & 0^{0} \\ 0 & 0 & 1\ 2 & 0 & 0^{0} \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 1\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0_{0} \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan-persamaan yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dengan memecahkannya untuk peubah peubah utama, maka kita dapatkan

$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$

$x_3 = -2x_4$

$x_6 = \frac{1}{3}$

Jika kita menetapkan nilai-nilai sebarang *r*, *s*, dan *t* berurutan untuk x_2, x_4, dan x_5, maka himpunan pemecahan tersebut diberikan oleh rumus-rumus

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t,\ x_6 = \frac{1}{3}$$

Terkadang lebih mudah memecahkan sistem persamaan linear dengan menggunakan eliminasi Gauss untuk mengubah matriks yang diperbesar menjadi ke dalam bentuk eselon baris tanpa meneruskannya ke bentuk eselon baris terreduksi. Bila hal ini dilakukan, maka sistem persamaan-persamaan yang bersesuaian dapat dipecahkan dengan sebuah cara yang dinamakan ***substitusi balik (back-substitution)***. Kita akan melukiskan metode ini dengan menggunakan sistem persamaan-persamaan pada contoh 1.

Dari perhitungan dalam contoh 1, bentuk eselon baris dari matriks yang diperbesar tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk memecahkan sistem persamaan-persamaan yang bersesuaian

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Maka kita memprosesnya sebagai berikut :

Langkah 1.
Pecahkanlahpersamaan-persamaantersebutuntukpeubah-peubahutama.

$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$

$x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$

$x_6 = \frac{1}{3}$

Langkah 2.

Mulailah dengan persamaan bawah dan bekerjalah ke arah atas, substitusikan secara keseluruhan masing- masing persamaan ke dalam semua persamaan yang di atasnya.

Dengan mensubstitusikan $x_6 = \frac{1}{3}$ ke dalam persamaan kedua maka akan menghasilkan

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Dengan mensubstitusikan $x_3 = -2x_4$ ke dalam persamaan pertama maka akan menghasilkan

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Langkah3.

Tetapkanlahnilai-nilaisebarangpadasetiappeubahtakutama.

Jika kita menetapkan nilai-nilai sebarang *r*, *s*, dan *t* berurutan untuk x_2, x_4, dan x_5, maka himpunan pemecahan tersebut diberikan oleh rumus-rumus

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t,\ x_6 = \frac{1}{3}$$

Ini sesuai dengan pemecahan yang diperoleh pada contoh 1.

SISTEM PERSAMAAN LINEAR HOMOGEN

Sebuah sistem persamaan-persamaan linier dikatakan **homogen** jika semua suku konstan sama dengan nol; yakni sistem tersebut mempunyai bentuk.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0$$

Tiap-tiap sistem persamaan linier homogen adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots\ldots, x_n = 0$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan terebut, dinamakan ***pemecahan trivial (trivial solution)***; jika ada pemecahan lain, maka pemecahan tersebut dinamakan ***pemecahan taktrivial (nontrivial solution)***.

Karena sistem persamaan linier homogen harus konsisten, maka terdapat satu pemecahan atau tak terhingga banyaknya pemecahan. Karena salah satu di antara pemecahan ini adalah pemecahan trivial, maka kita dapat membuat pernyataan berikut.

Untuk sistem persamaan-persamaan linier homogeny, maka persis salah satu di antara pernyataan berikut benar.

1. *Sistem tersebut hanya mempunyai pemecahan trivial.*
2. *Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyaknya pemecahan tak trivial sebagai tambahan terhadap pemecahan trivial tersebut*.

Terdapat satu kasus yang sistem homogennya dipastikan mempunyai pemecahan tak trivial ; yakni, jika sistem tersebut melibatkan lebih banyak bilangan tak diketahui dari banyaknya persamaan. Untuk melihat mengapa hanya demikian, tinjaulah contoh berikut dari empat persamaan dengan lima bilangan tak diketahui.

Contoh :

Pecahkanlah sistem persamaan-persamaan linier homogeny berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

$$2X + 2X_2 - X_3 \quad + X_5 \quad = 0$$
$$-X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 + X_5 = 0$$
$$X_1 + X_2 - 2X_3 \quad - 5X_5 \quad = 0$$
$$X_3 + X_4 + X_5 \quad = 0$$

Matrix yang diperbesar untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks ii menjadi bentuk eselon baris tereduksi, maka kita dapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$X_1 + X_2 + X_5 = 0$$

$$X_3 + X_5 = 0$$

$$X_4 = 0$$

Dengan memecahkannya untuk peubah-peubah utama maka akan menghasilkan

$$X_1 = -X_2 - X_5$$
$$X_3 = -X_5$$
$$X_4 = 0$$

Maka himpunan pemecahan akan di berikan oleh

$X_1 = -s - t$, $X_2 = s$, $X_3 = -t$, $X_4 = 0$, $X_5 = t$

Perhatikan bahwa pemecahan trivial kita dapatkan bila s = t = 0.

Contoh 2;

Tentukan nilai a, b, c, d yang memenuhi sistem persamaan berikut dengan menggunakan metode eleminasi Gauss.

$$a + 2b + c + 2d = 2$$
$$2a - b + c + d = 0$$
$$3a + 2b - c + d = 1$$
$$a + b + c - d = 9.$$

Penyelesaian :
Matriks perluasan dari SPL di atas adalah

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right].$$

Selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan metode eleminasi Gauss.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{b_2-2b_1, b_3-3b_1, b_4-b_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_2\times(-1), b_3\times(-1), b_4\times(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_2\leftrightarrow b_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_3-4b_2, b_4-5b_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 39 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_3\leftrightarrow b_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 39 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & 33 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_4\leftrightarrow 4b_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & -41 & 123 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_4\times\frac{-1}{41}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Diperoleh sistem persamaan baru

$$\begin{aligned} a + 2b + c + 2d &= 2 \\ b \qquad + 3d &= -7 \\ c - 12d &= 39 \\ d &= -3. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai d = - 3   ke persamaan ke-2 dan ke-3,
diperoleh nilai b = 2 dan c=3 .

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai b = 2, c = 3dan d= - 3 ke persamaan ke-1,
diperoleh nilai a = 1

Jadi penyelesaian dari SPL adalah

$$\begin{aligned} a + 2b + c + 2d &= 2 \\ 2a - b + c + d &= 0 \\ 3a + 2b - c + d &= 1 \\ a + b + c - d &= 9. \end{aligned}$$

adalah a = 1, b=2, c=3, dan d = -3.

VEKTOR-VEKTOR DI RUANG BERDIMENSI 2 DAN 3

Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa dapat mengetahui vecto-vektor pada dimensi 2 dan 3. Mahasiswa juga mendefinisikan dengan baik operasi vector yang berlaku pada dimensi 2 dan tiga.

Materi

1) Bagaimana konsep tentangruang?
2) Bagaimana definisi Titik dan Garis?
3) Apakah penegrtian darivektor?
4) Bagaimana operasi aritmetika pada vektor?
5) Bagaimana perkalian Titik/Perkalian Dalam (Dot Product/Inner Product)?
6) Bagaimana proyeksi dalam vektor?
7) Bagaimana fungsi Perkalian Silang (Cross Product) dalam vektor?

2.1 Konsep Ruang

Setiap objek pembicaraan dalam matematika memiliki ruang himpunan di mana objek itu berasal.Di dalamnya terdapat aturan-aturan yang berlaku yang dipenuhi oleh setiap anggotanya.Misalnya, semua bilangan nyata tergabung dalam sebuah himpunan bilangan yang dinamakan himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$). Semua sifatsifat dan aturan perhitungan bilangan real berlaku bagi semua himpunan anggotanya, seperti pada bilangan rasional, irasional, bulat, pecahan, dan lain- lain.

Sebelum membahas lebih jauh mengenai vektor, akan diperkenalkan tentang konsepruang, mulai dari dimensi terkecil hingga dimensi yang digeneralisasi, sebagai ruang-*n*.

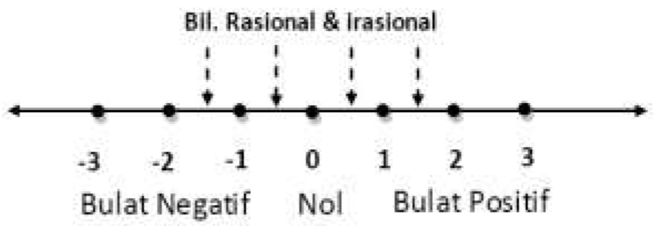
Ruang Dimensi-*n*

Himpunan bilangan nyata (real) biasanya digambarkan ke dalam sebuah gambarsederhana yang disebut garis bilangan.Garis bilangan dapat dianggap sebagai grafiksederhana yang menyatakan letak suatu bilangan, di mana bilangan yang lebih besarberada di sebelah kanan bilangan yang lebih kecil.Karena garis bilangan hanya memiliki satu dimensi yaitu panjang, maka himpunanbilangan real dapat dinyatakan sebagai ruang berdimensi-1.Meskipun kata "ruang"menunjukkan suatu tempat berdimensi-3, namun dalam matematika "ruang"mempunyai makna tersendiri. Berdasarkan definisinya, ruang dalam matematikamerupakan himpunan dari objekobjek yang memiliki sifat yang sama dan memenuhisemua aturan yang berlaku dalam ruang tersebut.

Definisi Ruang-1 atau R^1

Ruang dimensi-1 atau ruang-1 (R^1) adalah himpunan semua bilangan real ($\mathbb{R}$).

Himpunan bilangan real dapat digambarkan oleh garis bilangan real :



Jadi, garis bilangan berfungsi untuk menunjukkan letak suatu titik pada suatu garisberdasarkan besarnya.Gagasan ini memunculkan gagasan berikutnya bahwa suatutitik dapat berada pada suatu bidang ataupun ruang.

Pada pertengahan abad ke-17lahirlah konsep ruang dimensi-2 dan dimensi-3, yang kemudian pada akhir abad ke-19para ahli matematika dan fisika memperluas gagasannya hingga ruang dimensi-*n*.

Definisi Ruang-2 atau R^2

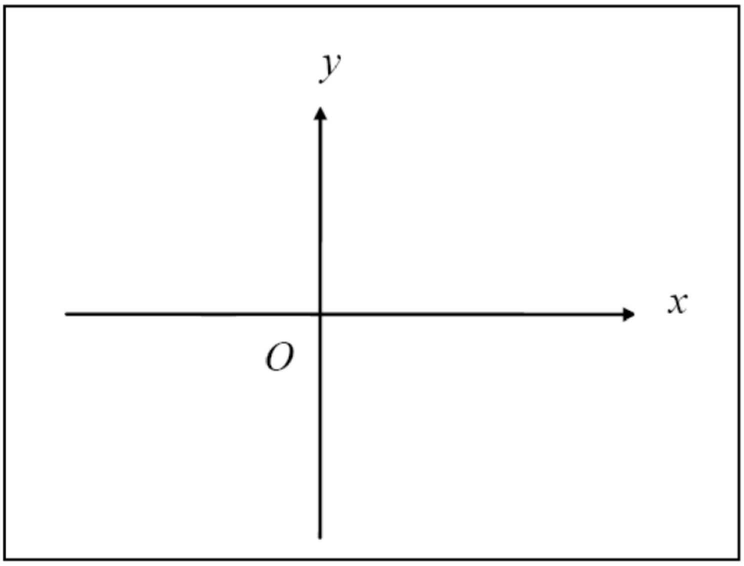
Ruang dimensi-2 atau ruang-2 (R^2) adalah himpunan pasangan bilangan berurutan (x, y), di mana x dan y adalah bilangan-bilangan real.Pasangan bilangan (x, y) dinamakan titik (*point*) dalam R^2, misal suatu titik P dapat ditulis (x, y).Bilangan x dan y disebut koordinat dari titik P.

Untuk menggambarkan titik-titik di R^2secara geometris, koordinat x dan y dianggap berada pada dua garis bilangan yang berbeda yang membentuk suatu sistem koordinat.Garis bilangan tersebut dinamakan sumbu koordinat.Sumbu koordinat tersebut digambarkan saling tegak lurus dan membentuk suatu sistem yang disebut sistem koordinat siku-siku. Pada R^2sistem ini dinamakan sistem koordinat-*xy* atau sistem koordinat kartesius (*Cartesian system*) yang dibangun oleh :

- Sumbu x (*x-axis*) yaitu garis tempat semua titik yang mempunyai koordinat $(x, 0)$.

- Sumbu y (*y-axis*) yaitu garis tempat semua titik yang mempunyai koordinat $(0, y)$.

Suatu titik yang berada tepat di kedua sumbu dinamakan titik asal (*origin point*) ditulis $O(0, 0)$. Titik ini adalah titik di mana sumbu x dan y saling berpotongan.

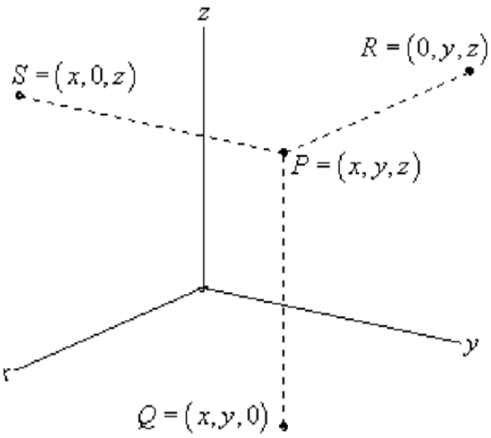


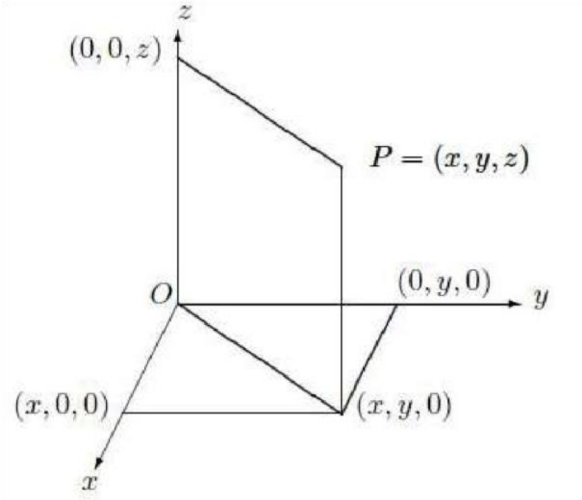
Definisi Ruang-3 atau R^3

Ruang dimensi-3 atau ruang-3 (R^3) adalah himpunan tripel bilangan berurutan (x, y, z), di mana x, y, dan z adalah bilangan-bilangan real. Tripel bilangan (x, y, z) dinamakan titik (*point*) dalam R^3, misal suatu titik P dapat ditulis (x, y, z). Bilangan x, y, dan z, disebut koordinat dari titik P.

Seperti halnya R^2, R^3 memiliki sistem koordinat siku-siku yaitu sistem koordinat-*xyz*, dengan titik asal $O(0,0, 0)$, yang dibangun oleh :

- Sumbu x (*x-axis*) yaitu garis tempat semua titik yang mempunyai koordinat (x,0, 0).
- Sumbu y (*y-axis*) yaitu garis tempat semua titik yang mempunyai koordinat (0, y, 0).
- Sumbu z (*z-axis*) yaitu garis tempat semua titik yang mempunyai koordinat (0,0, z).





Menjelang akhir abad 19, para matematikawan dan fisikawan mulai menemukan gagasan bahwa dimensi tidak hanya terbatas pada dimensi-3 dengan tripel bilangannya, tetapi juga kuadrupel sebagai titik pada ruang dimensi-4, kuintupel pada ruang dimensi-5, dan seterusnya.Hal ini menghasilkan generalisasi untuk ruang dimensi-*n*.

Definisi tupel-n-berurutan

Jika *n* adalah sebuah bilangan positif, maka tupel-*n*-berurutan (*ordered-ntuple*) adalah sebuah urutan *n* buah bilangan real (a_1, a_2, . . . ,a_n).

Definisi Ruang-n atau R^n

Ruang dimensi-*n* atau ruang-*n* () adalah himpunan semua tupel-*n*-berurutan (*a1,a2, . . . , an*), dengan *a1 , a2, . . . ,* dan *an* adalah bilangan-bilangan real. Tupel-*n* bilangan *a1,a2, . . . , an*dinamakan titik (point) dalam *Rn* , missal suatu titik *P* dapat ditulis *P* (*a1,a2, . . . , an).* Bilangan *a1,a2, . . . ,* dan*an*disebut koordinat *P.*

Jelas bahwa ruang dimensi-*n* dengan *n >3* tidak dapat divisualisasikan secara geometris, namun penemuan ini sangat berguna dalam pekerjaan analitik dan numerik, karena tidak sedikit permasalahan nyata tidak dapat divisualisasikan dengan grafis namun memerlukan penalaran dan penyelesaian secara matematis.

Rn yang merupakan generalisasi dari *R1, R2, dan R3,* menyebabkan sifat-sifat dan aturan-aturan di dalamnya adalah sama, perbedaannya hanya terletak pada ukuran atau banyak komponen yang akan dihitung

Walaupun bab ini hanya menyajikan definisi, teorema, atau sifat-sifat dalam *R2* dan *R3*, tetapi semuanya akan berlaku untuk, setelah dimodifikasi sesuai dimensinya. Seperti definisi jarak antar dua titik dalam *R2* dan *R3*

Definisi Jarak Dua Titik

Jarak antara dua titik *(x1, y1) dan (x2, y2)* di *R2* didefinisikan oleh :

$AB = x2 - x1\ 2 + y2 - y1\ 2$

Jarak antara dua titik *(x1, y1, z1) dan (x2, y2 , z2)* di *R3* didefinisikan oleh :

$AB = x2 - x1\ 2 + y2 - y1\ 2 + z2 - z1\ 2$

2.2 Titik dan Garis

Pada bagian sebelumnya telah dibahas pengertian titik pada *R2 dan R3* serta *Rn* secara umum. Definisi titik ini sama untuk semua ruang, yang berbeda hanyalah kedudukannya di dalam masing-masing ruang tersebut.

Dua titik atau lebih jika dihubungkan akan membentuk garis, kumpulan garisgaris akan menjadi bidang, dankumpulan bidang-bidang akan menjadi ruang. Geometri adalah cabang matematika yang khusus mempelajari titik, garis, dan bidang.

Mengenai garis, geometri hanya terbatas pada kuantitas dan kedudukan, seperti panjang garis atau besar sudut antara dua garis, tetapi tidak pada arahnya serta kedudukannya dalam suatu bidang atau ruang.Ilmu vektor merupakan cabang dari matematika yang mempelajari ruas garis berarah yang dinamakan vektor.

2.3 Vektor

Banyak kuantitas fisis, seperti luas, panjang, massa, suhu, dan lainnya, dapat dijelaskan secara lengkap hanya dari besarnya, misalnya 50 kg, 100 m, 30 ℃, dll.Kuantitas fisis ini dinamakan skalar.Dalam matematika, skalar mengacu pada semuabilangan yang bersifat konstan.

Namun, ada kuantitas fisis lain yang tidak hanya memiliki besar/nilai tapi juga arah,seperti kecepatan, gaya, pergeseran, dan lain-lain. Kuantitas fisis ini dalam fisikamaupun matematika dinamakan vektor.Dalam matematika, ilmu vektor menjadi salahsatu cabang ilmu yang semakin luas perkembangannya serta penerapannya, dan tidakterbatas pada mempelajari besaran-besaran yang memiliki nilai dan arah tetapi sebagaisuatu besaran yang memiliki banyak komponen yang membentuk satu kesatuan daribesaran itu sendiri.

Notasi Vektor

Vektor biasanya dinyatakan dengan huruf misalnya (**A**), atau diberi tanda panah di atasnya ($\vec{A}$

Definisi Vektor

Sebuah vektor **a** dengan komponen-*n* (berdimensi-*n*) di dalam adalah suatu aturantupel-*n* dari bilangan-bilangan yang ditulis sebagai baris $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ atau sebagaikolom:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$adalah bilangan-bilangan real dan dinamakankomponen dari vektor **a**.

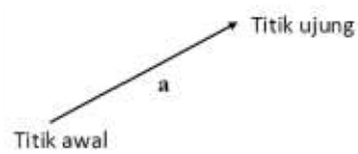
Dengan demikian, di R^2vektor dapat ditulis : **a** = (a_1, a_2) atau **a**$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$an di R^3 vektor dapat ditulis :

a = (a_1, a_2, a_3) atau **a** = $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Pada bagian berikutnya, vektor akan sering disajikan dalam bentuk baris (vektor baris).Berdasarkan definisi titik dan vektor, simbol $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mempunyai dua tafsirangeometrik yang berbeda, yaitu sebagai titik dalam hal $a_1, a_2, \ldots, a_n$adalah koordinat,dan sebagai vektor dalam hal $a_1, a_2, \ldots, a_n$adalah komponen.

Arti Geometrik Vektor

Secara geometris, vektor dinyatakan sebagai segmen garis berarah atau panah.Arahpanah menentukan arah vektor dan panjangnya menyatakan besar vektor.Ekor panahdinamakan titik awal (*initial point*) dan ujung panah dinamakan titik ujung/terminal(*terminal point*).



Komponen-komponen vektor menentukan besar dan arah vektor. Misalnya pada R^2, vektor $\mathbf{v} = (2, 3)$ berarti dari titik awal bergerak 2 satuan ke kanan, kemudian 3 satuan ke atas. Pada R^3, misalkan sebuah vektor $\mathbf{v} = 3, 4, -2$ berarti dari titik awal bergerak 2 satuan ke depan (x-positif), 4 satuan ke kanan (y-positif), dan 2 satuan kebawah (z-negatif).

Definisi berikut dapat memperjelas tafsiran geometrik vektor.

Definisi Vektor Posisi

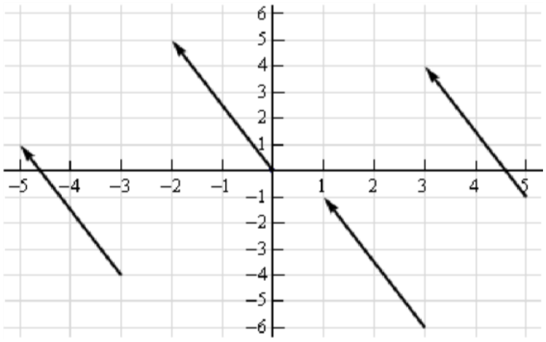
Vektor posisi dari $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ adalah suatu vektor yang titik awalnya adalah titik asal O dan titik ujungnya adalah A, dan ditulis $OA = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Berdasarkan definisi ini dapat dibuktikan bahwa, dari sebuah titik dapat dibuat tepat satu buah vektor posisi. Dengan kata lain setiap titik dalam ruang memiliki vector posisi yang berbeda-beda.Jika vektor **v** dengan titik awal A dan titik ujung B, maka **v** dapat ditulis sebagai :AB. Komponen-komponen dari ABakan dijelaskan setelah mempelajari aritmetika vektor.

Definisi Vektor-Vektor Ekuivalen

Vektor-vektor ekuivalen adalah vektor-vektor yang memiliki panjang dan arah yangsama.Vektor-vektor ekuivalen dianggap sebagai vektor yang sama meskipun kedudukannyaberbeda-beda. Jika **v** dan **w** ekuivalen maka dapat dituliskan **v** = **w**.

Contoh:



Keempat ruas garis berarah di atas berawal di suatu titik tertentu yang kemudian digerakkan 2 satuan ke kiri dan 5 satuan ke atas.

Keempatnya dinamakan vektor dan dapat dinotasikan oleh **v**= −2, 5 = $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

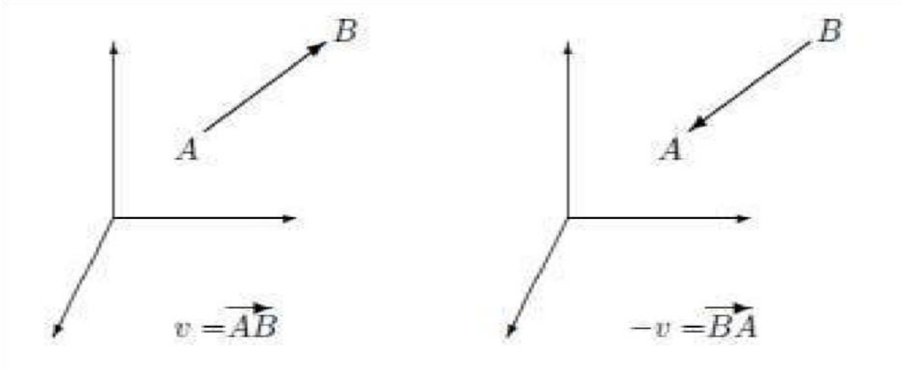
Keempat ruas garis berarah di atas dinamakan representasi dari vektor **v**.

Definisi Vektor Nol

Vektor nol adalah vektor yang semua komponennya adalah nol, dan ditulis 0=(0, 0, 0). Dengan demikian vektor nol adalah vektor yang tidak mempunyai panjang dan arah.

Definisi Negatif Vektor

Negatif dari vektor **v**, atau **–v** didefinisikan sebagai vektor yang mempunyai besar yang sama dengan **v**, namun arahnya berlawanan dengan **v**.



Definisi Vektor satuan/unit (Unit Vectors)

Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya adalah 1.

Definisi Vektor Basis/Satuan Standar (Standard Unit Vectors)

Vektor satuan baku adalah vektor yang mempunyai panjang 1 dan terletak sepanjang sumbu-sumbu koordinat.

Untuk R^2, vektor satuan baku ditulis :i = 1,0 dan j= 0,1 .

Untuk R^3, vektor satuan baku ditulis :i = 1,0, 0, j = 0,1,0 , dan k = 0,0,1 .

Dengan demikian setiap vektor v = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat ditulis: v = v1, v2, v3= v11,0,0 + v20,1, 0 + v30,0, 1 = v1i + v_2j+ v_3k

Contoh:

Nyatakan **v** = 2, −3, 4 dalam vektor basis!

Penyelesaian :**v**= 2, −3, 4 = 2 1,0, 0 + −3 0,1, 0 + 4 0,0, 1 = 2i − 3j + 4k

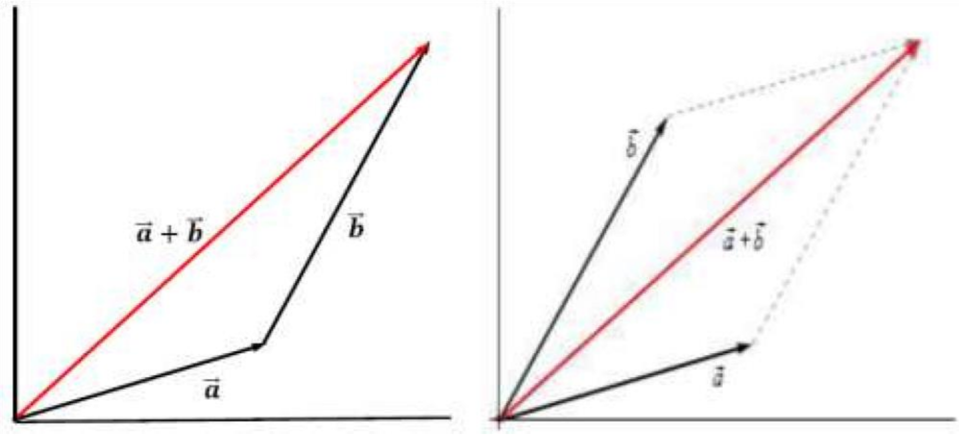
2.4 Aritmetika Vektor

Pada bagian ini, definisi serta teorema yang diberikan hanya untuk vektorvektor di R^3, sedangkan interpretasi geometris sedapatnya diberikan dalam R^3, namun kebanyakan dalam R^2. Hal ini bertujuan hanya untuk mempermudah pemahaman analitik dan geometrik.Secara konsep, teoretis, dan numeris, semua definisi, teorema, dan rumus-rumus dapat dengan mudah dimodifikasi sesuai dimensi yang diinginkan.

Definisi Penjumlahan Vektor

Diberikan vektor **a** = (a_1, a_2, a_3) dan **b** = (b_1, b_2, b_3) vektor-vektor di R^3, maka penjumlahan **a** dan **b** didefinisikan oleh **a** + **b**= ($a_1 + b_1$,$a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$).

Secara geometris, penjumlahan **a** + **b** dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan aturan segitiga (*triangle law*) dan aturan jajar genjang (*parallelogram law*). Aturan segitiga dilakukan dengan menghubungkan titik awal **b** dengan titik ujung **a**, kemudian menghubungkan titik awal **a** dan titik ujung **b** sebagai (**a** + **b**).Sedangkan aturan jajar genjang dilakukan dengan menghubungkan kedua titik asal **a** dan **b**, sehingga **a** dan **b** membentuk jajaran genjang. Diagonal yang dibuat dari titik awal kedua vektor akan menjadi (**a** + **b**). Seperti ilustrasi berikut :



Contoh:

Misalkan $\mathrm{u} = 1, 2, 3,\ \mathrm{v} = 2, -3, 1,$dan $\mathrm{w} = (3,2,-1)$ vektor-vektor di R^3, maka

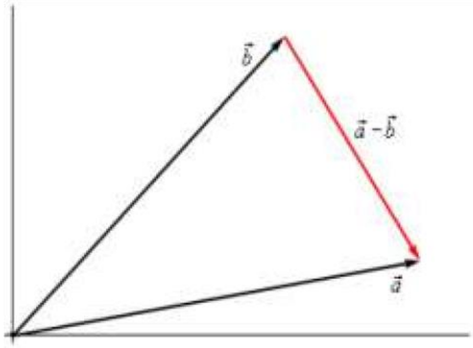
$$\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w} = (1 + 2 + 3, 2 + -3 + 2, 3 + 1 + -1 = 6,1, 3$$

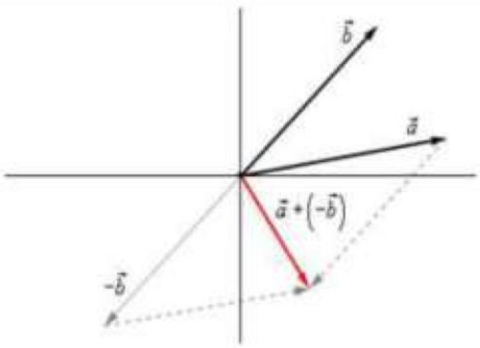
Definisi Pengurangan Vektor

Diberikan vektor **a**= (a_1, a_2, a_3) dan **a** = (b_1, b_2, b_3), maka pengurangan **a** oleh **b** didefinisikan oleh : **a_a** = **a**+ –**a** = [a_1+ ($-b_1$, a_2+ ($-b_2$), a_3+ ($-b_3$)]

= (a1− b1,a2− b2, a3− b3)

Seperti halnya pada penjumlahan vektor, secara geometris pengurangan vektor dapat dilakukan dengan aturan segitiga ataupun jajar genjang seperti ilustrasi berikut:





Contoh:Misalkan $u = 1, 2{,}3$,$v = 2, -3, 1$,dan $w= (3{,}2, -1)$ vektor-vektor di R^3,

maka$u - v - w = (1 - 2 - 3{,}2 -(-3) - 2, 3 - 1 -(-1) = -4{,}3, 3$

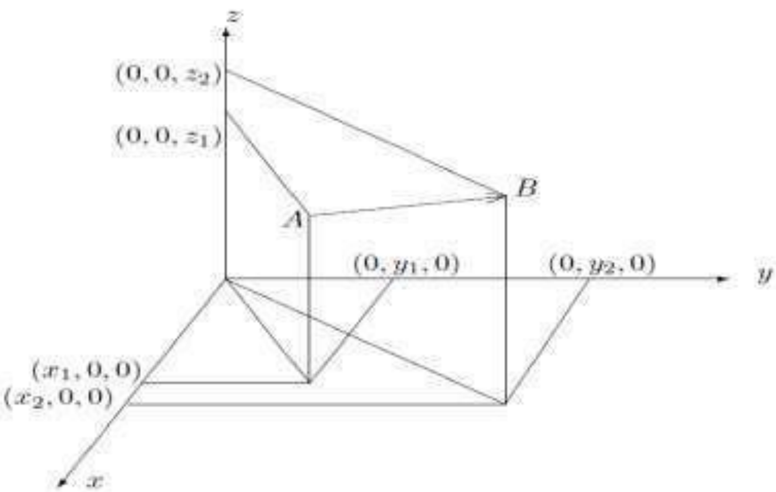
Berdasarkan definisi ini, komponen-komponen dari vektor yang titik awalnya bukantitik asal, misalnya(a_1, a_2, a_3) dan titik ujung (b_1, b_2, b_3).

Sehingga a= $OA = a_1, a_2, a_3$ dan b = $OB = b_1, b_2, b_3$ adalah : $A\,B =$ $OB - OA$= b – a= $b_1, b_2, b_3 - a_1, a_2, a_3 = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Contoh:

Vektor dengan titik awal dan titik ujung berturut-turut $P_1\ 2, -7{,}0$dan $P_2(1, -3,$ $-5)$ adalah $P_1\,P_2 = 1 - 2,\ -3 - (-7), -5 - 0 = -1, 4, -5$.

Dengan memisalkan semua koordinat ada di sumbu-sumbu positif, vektor A Bdi R^3,dengan koordinat $A x_1$, y_1, z_1 dan$B(x_2, y_2, z_2)$, dapat digambarkan sebagai berikut:



Sehingga $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Definisi Perkalian Skalar-Vektor

Jika v = (v_1, v_2, v_3)adalah vektor tak-nol dan $k$adalah bilangan real tak-nol, maka hasil kali $k$vdidefinisikan oleh kv = $k$$v_1$, v_2, v_3 = (kv_1, kv_2, kv_3)

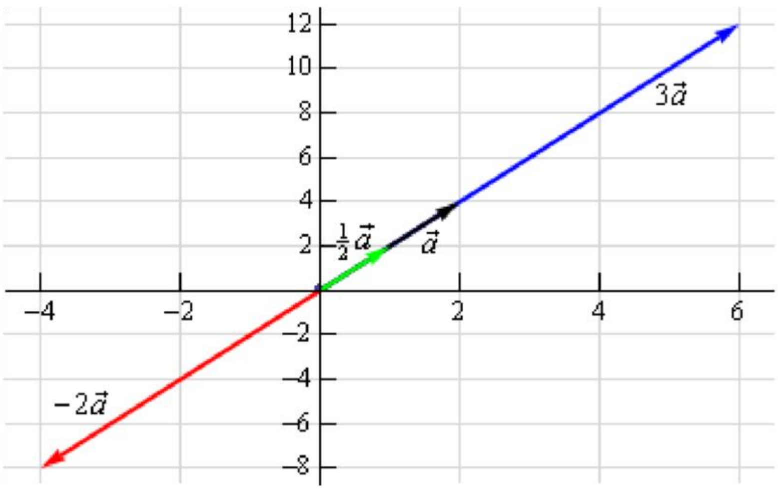
Secara geometris, hasil kali $k$vadalah vektor yang panjangnya k kali panjang v, yang arahnya sama dengan vjika $k>0$, dan berlawanan arah dengan vjika $k<0$.

Contoh:

Misalkan suatu vektor di R^2, a = (2,4). Hitunglah 3 a, 1/2a, dan − 2a, dan gambarkankeempat vektor tersebut ke dalam satu sistem koordinat.

Penyelesaian : Berdasarkan definisi perkalian skalar-vektor, maka,

3a = 6,12 ; 1/2a= 1,2 ; −2a= (−4, −8)



Norma/Panjang Vektor

Panjang suatu garis dapat diperoleh dengan menggunakan aturan *Phytagoras*. Karena vektor adalah ruas garis berarah, maka panjang vektor, baik di R^2maupun R^3 dapat diperoleh dengan rumus yang sama.

Definisi Norma Vektor

Norma atau panjang vektor v= (v_1, v_2, v_3) didefinisikan oleh :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}$$

Berdasarkan definisi di atas, jika IIvII = 0 maka IIvII = 0. Dan, jika vvektor satuan,maka IIvII = 1, begitu pula dengan vektor basis IIi II = 1,IIj II = 1, dan IIkII = 1.

Contoh :

Misalkan IIa II $= (3, -5,10)$ maka IIaII= $\sqrt{9+25+100} = \sqrt{134}$

Teorema : Aturan Dasar Aritmetika Vektor

Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor di R^2atau R^3, dan *k*serta *l*adalah skalar (bilangan real), maka hubungan berikut akan berlaku,

1. u+ v= v+ u
2. (u+ v) + w= u+ (v+ w)
3. u+ 0= 0+ u= u
4. u+ (-u) = 0
5. *k*(*l*u) = (*kl*)u
6. *k*(u+ v) = *k*u+ *k*v
7. (*k* + *l*)u= *k*u+ *l*u
8. 1u= u

2.5 Perkalian Titik / Perkalian Dalam (Dot Product/Inner Product)

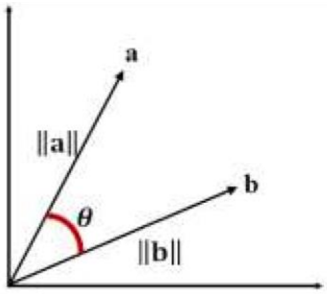
Definisi pertama dari perkalian titik dua vektor adalah menggunakan sifat-sifat geometrisnya, yaitu norma kedua vektor dan besar sudut di antara keduanya, dengan asumsi titik-titik awalnya berhimpit.

Definisi 1

Jika u dan v adalah vektor-vektor di R^2 dan R^3, dan θ adalah sudut di antara u dan v, maka perkalian titik (*dot product*) atau perkalian dalam Euclidis (*Euclidean inner product*) u.v didefinisikan oleh:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\begin{cases}\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta & ;\ \text{jika } \mathbf{u}\neq\mathbf{0} \text{ dan } \mathbf{v}\neq\mathbf{0}\\ 0 & ;\ \text{jika } \mathbf{u}=\mathbf{0} \text{ atau } \mathbf{v}=\mathbf{0}\end{cases}$$

Perkalian ini juga dinamakan perkalian skalar (*scalar product*) karena hasil perkalian titik dua vektor akan menghasilkan skalar (bilangan real). Dari definisi jelas bahwa norma vektor u dan v serta nilai cosinus sebarang sudut di antara keduanya adalah bilangan real, sehingga hasil kali ketiganya adalah bilangan real. Jika salah satu atau kedua vektor merupakan vektor nol, maka hasilnya adalah nol.



Contoh :

Misalkan u = 0, 0,1 dan v = (0,2, 2) sedangkan sudut di antaranya adalah 45°, maka u. v = $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos 45° = \left(\sqrt{0^2+0^2+1^2}\right)\left(\sqrt{0^2+2^2+2^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$

Definisi ke-dua dari perkalian titik dua vektor adalah menggunakan komponenkomponen dari masing-masing vektor.

Definisi 2

Jika u = (u_1, u_2) dan v = (v_1, v_2) adalah vektor di R^2, maka perkalian titik/perkalian dalam u.v didefinisikan oleh :u. v = $u_1v_1 + u_2v_2$

Jika u = (u_1, u_2, u_3) dan v= (v_1, v_2, v_3) adalah vektor di R^3, maka perkalian titik u.v didefinisikan oleh :u. v = $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Contoh : R

Misalkan a= $0, 3, -7$ dan b = (2,3, 1) maka a. b= $0.2 + 3.3 + -7\ .1 = 2$

Kedua definisi ini saling berkaitan karena salah satu definisi diperoleh dari definisi yang lain. Dalam beberapa buku, salah satu definisi dituliskan sebagai "definisi", kemudian definisi yang lainnya dituliskan sebagai "teorema" yang diturunkan dari definisi sebelumnya. Biasanya kedua definisi digabungkan untuk mencari besar sudut di antara udan vjika komponen udan vdiketahui.

Contoh :

Misalkan u= $(2, -1,1)$ dan v = (1, 1, 2), Hitunglah u.vdan tentukan sudut diantara keduanya. Penyelesaian :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}\ ;\ \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

Dan u.v= $2.1 + -1\ .1 + 1.2 = 3$

sehingga,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

<u>Teorema : Sudut Antara Dua Vektor</u>

Jika udan **v** adalah vektor-vektor tak nol, dan θadalah besar sudut di antara kedua vektor tersebut, maka

- θlancip (0° < θ < 90°) jika dan hanya jika u.v> 0
- θtumpul (90° < θ < 180°) jika dan hanya jika u.v< 0
- θsiku-siku (θ = 90°) jika dan hanya jika u.v = 0

Dua vektor yang membentuk sudut siku-siku dinamakan ortogonal (tegak lurus).

<u>Teorema : Sifat-sifat Perkalian Titik</u>

Jika u, v, dan wadalah vektor- vektor di R^2atau R^3dan k adalah skalar, maka

1) u. v = v. u 0.

· = =

· ≠

·

2) uv + wu v + u · w.

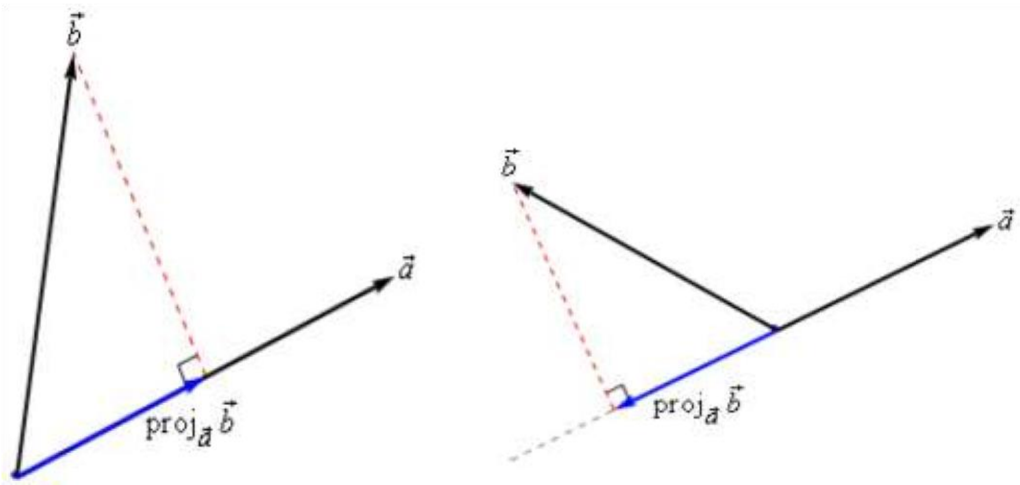
3) *k*u v = *k*u. vu . (*k*v)

0 dan

4) vv> 0 jika vvv = 0 jika v =
0

2.6 Proyeksi

Dua vektor yang titik asalnya berhimpit dapat menghasilkan vektor lain yangdinamakan vektor proyeksi. Perhatikan ilustrasi berikut:



Misalkan a dan b berhimpit di titik asalnya. Jika dari titik ujung bditarik garis menuju asedemikian sehingga tegak lurus a(diproyeksikan terhadap a), maka vektor yang dapat dibuat dengan titik asal yang sama dan berujung di titik di mana b diproyeksikan pada adinamakan vektor proyeksi bterhadap a. Vektor ini disebut juga proyeksi ortogonal bpada a. Dengan cara yang sama dapat diperoleh vektor proyeksi aterhadap b.

Notasi Vektor Proyeksi

Vektor proyeksi **b**terhadap adinotasikan proya **b**

Vektor proyeksi **a**terhadap **b**dinotasikan dengan proya**b**

Teorema : Proyeksi Ortogonal

Jika udan vadalah vektor di R^2atau R^3 dan keduanya bukan vektor nol, maka

$$\mathrm{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a} \qquad \text{dan} \qquad \mathrm{proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\,\mathbf{b}$$

Sedangkan panjang dari vektor-vektor proyeksi tersebut adalah:

$$\|\mathrm{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}\|=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \text{dan} \qquad \|\mathrm{proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}\|=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$$

Contoh :

Jika **a**= (1, 0, −2) dan **b**= $(2,1,-1)$, tentukan vektor proyeksi **a**pada **b**.

Penyelesaian :**a.b** = 4 dan II **b**II^2= 6 maka proyeksi ortogonal **a**pada **b**adalah:

$$\mathrm{proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\,\mathbf{b}=\frac{4}{6}(2,1,-1)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

2.7 Perkalian Silang (Cross Product)

Berikut akan diperkenalkan sebuah operasi antar vektor dalam R^3. Jika perkalian titikakan menghasilkan skalar/bilangan, maka perkalian silang akan menghasilkan vektor.Dan jika proyeksi ortogonal suatu vektor terhadap vektor la in akan menghasilkanvektor baru yang berimpit dengan vektor tersebut, maka perkalian silang dua vektor akan menghasilkan vektor baru yang tegak lurus dengan kedua vektor tersebut.

Definisi Perkalian Silang

Jika u = (u_1, u_2, u_3) dan v = (v_1, v_2 ,v_3) adalah vektor di R^3, maka perkalian silangu × vdidefinisikan olehu × v = ($u_2v_3 - u_3v_2$, $u_3v_1 - u_1v_3$, $u_1v_2 - u_2v_1$) atau dalam notasi determinan

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Rumus di atas dapat dibuat pola yang mudah diingat.

Bentuklah matriks 2 × 3 :

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Komponen pertama dari u × vadalah determinan matriks tersebut setelah kolom pertama dicoret, komponen ke-2 adalah negatif dari determinan matriks setelah kolom ke-2 dicoret, dan komponen ke-3 adalah determinan matriks setelah kolom ke3 dicoret.

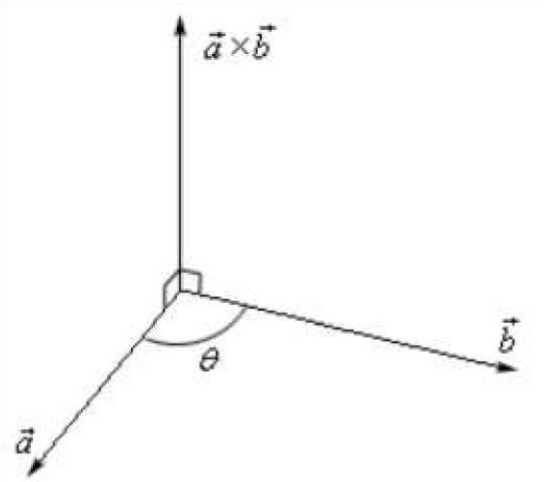
Contoh :

Misalkan u= $(1, 2, -2)$ dan **v** = (3, 0, 1), maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -7, -6)$$

Secara geometris, perkalian silang u × **v**dapat diinterpretasikan oleh gambar berikut,



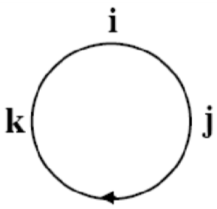
Arah **u** × **v**dapat ditentukan dengan "aturan tangan kanan" (*right hand rule*).

Misalkan θadalah sudut di antara **u**dan **v**, dan anggaplah **u**terotasi sejauh sudut θmenuju **v**(sehingga berimpit dengan **v**). Jika jari-jari tangan kanan menunjukkan arahrotasi **u**maka ibu jari menunjukkan arah **u** × **v**.Dengan menggunakan definisi ataupun dengan mempraktekkan aturan ini, dapat diperoleh hasil-hasil berikut :

i × i = j × j = k × k = 0i × j
= k , j × k = i, k × I = j

j × i = −k , k × j= −i , i × k
= −j

Diagram berikut dapat membantu untuk mengingat hasil perkalian di atas.



Perkalian silang **u** × **v**dapat dinyatakan secara simbolis dalam bentuk determinan3 × 3 :

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Contoh :

Contoh soal sebelumnya dapat dikejakan dengan cara :

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}\mathbf{k}=2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

Teorema : Hubungan Perkalian Silang dan Perkalian titik Jika **u** dan **v** adalah vektor di R^3, maka : a. **u**. **u** × **v** = 0 (× **v**ortogonal ke **u**)

b. **v**. **u** × **v** = 0 (× **v**ortogonal ke **u**)

c.($\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ ntity)

Teorema : Sifat-Sifat Perkalian Silang

Jika **u**, v, dan **w** dalah sembarang vektor di R^3dan k adalah sebarang skalar, maka :

1. **u** × **v**= _ **v** × **u**
2. **u** × **v**+ **w** = **u** × **v** + (**u** × **w**)
3. **u** + **v** × **w** = **u** × **w** + (**v** × **w**)
4. k**u** × **v** = k**u** × **v** = **u** × (k**v**)
5. **u** × 0 = 0 × **u** = 0
6. **u** × **u** = 0
7. **u**.**v** × **w** = **u** × **v**.**w** = $\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$

Berdasarkan teorema-teorema sebelumnya, dapat diturunkan teorema berikut.

Teorema : Aplikasi Geometri Perkalian Silang

Jika **u**, **v**, dan **w** vektor-vektor di R^3 dengan titik asal yang sama, maka,

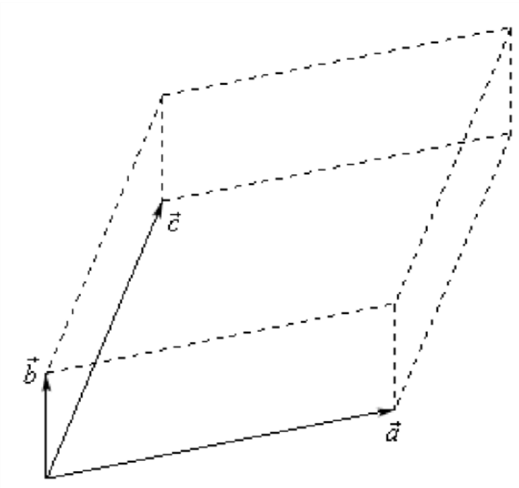
a) Jika θ adalah sudut di antara **u** dan **v**, maka II **u** × **v**II = II **u**II II **v**II sin θ

b) Norma dari **u** × **v** sama dengan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh **u** dan **v**, atau Luas jajar genjang = II **u** × **v**II

c) Volume bangun yang dibentuk oleh ketiganya adalah [**u**·(**v** × **w**)].

Contoh :

a, b, dan c adalah sembarang vektor di R^3 yang berimpit di titik awalnya. Jika ketiganya dihubungkan akan membentuk suatu bangun dimensi-3 (*parallelpiped*).



Luas masing-masing sisinya adalah :

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \;, \qquad \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \;, \qquad \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|$$

Sedangkan volume bangun tersebut adalah :

abs(**a** · **b** × **c**)

Rumus volume di atas biasanya digunakan untuk mengetahui apakah ketiga vektor berada pada bidang yang sama. Jika volume yang dihitung bernilai nol, maka ketiganya berada pada bidang yang sama, dan sebaliknya jika volumenya tidak sama dengan nol. Fungsi abs(*absolute*)/mutlak berguna untuk mempositifkan hasil akhir perhitungan volume.

Contoh:

Tentukan apakah ketiga vektor **a**= $(1,\ 4,\ -7)$, **b**= $(2,\ -1,\ 4)$, dan**c**= (0, −9, 18)terletak pada satu bidang di R^3atau tidak.

Penyelesaian :

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{matrix}$$

$$= (1)(-1)(18) + (4)(4)(0) + (-7)(2)(-9) -$$

$$\{(7)(-1)(0) + (1)(4)(-9) + (4)(2)(18)\}$$

$$= -18 + 126 - 144 + 36$$

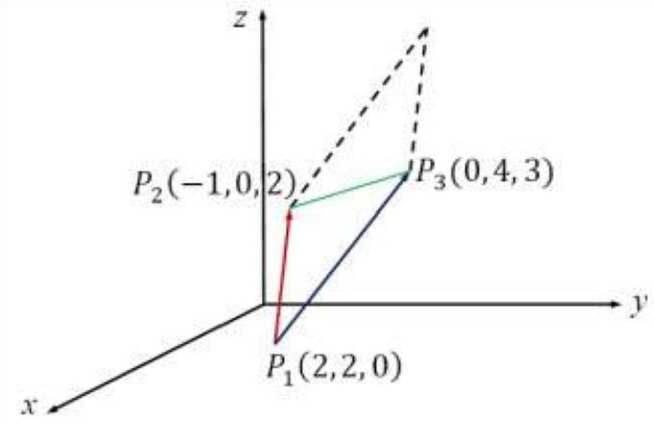
$$= 0$$

Jadi, ketiga vektor tersebut terletak pada satu bidang di R^3 Contoh

:

Carilah luas segitiga yang dibentuk oleh P_1 2, 2, 0, P_2 -1,0, 2 ,danP_3(0,4, 3).

Penyelesaian :



Luas segitiga tersebut adalah ½ luas jajaran genjang yang dibentuk ($\overrightarrow{P_1P_2}$ $\overrightarrow{P_1P_3}$,

di mana, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,0,2) - (2,2,0) = (-3,-2,2)$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (0,4,3) - (2,2,0) = (-2,2,3)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10,5,-10)$$

Sehingga Luas segitiga = $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}(15) = 7\frac{1}{2}$

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Modul kali ini kita akan membahas materi dari mata kuliah Aljabar Linear yaitu Nilai Eigen dan Vektor Eigen.Pada umumnya perumusan model matematika ini berupa fungsi. Dalam banyak kasus, tidak semua model matematika tersebut dapat diselesaikan secara mudah dengan menggunakan metode analitik, sehingga digunakan metode numerik untuk mencari penyelesaiannya. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk menformulasikan persoalan atau aritmetik biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawab yang eksak (tepat), tetapi mengusahakan perumusan metode yang menghasilkan jawab pendekatan yang berbeda dari jawab yang eksak sebesar suatu nilai yang merupakan galat dari metode yang digunakan. Namun demikian, hasil perhitungan dengan metode numerik cukup dapat memberikan solusi pada persoalan yang dihadapi. Cara yang digunakan dalam metode numerik ini termasuk unik karena hanya memerlukan operasi-operasi aljabar biasa. Dalam mencari nilai eigen dan vektor eigen menggunakan metode pangkat, akan memerlukan proses iterasi yang sangat panjang untuk menemukan hasil yang mendekati nilai yang sebenarnya. Semakin banyak iterasi yang digunakan, maka semakin baik hasil yang diperoleh.

TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Manfaat Nilai Eigen dan untuk mengetahui definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen.
2. Memahami dan mahir menghitung Nilai dan Vektor Eigen.
3. Memahami arti geometri dari Nilai dan Vektor Eigen.

Pengertian Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai Eigen (λ) adalah nilai karakteristik dari suatu matriks berukuran n x n, sementara Vektor Eigen adalah vektor kolom bukan nol yang bila dikalikan dengan suatu matriks berukuran n x n akan menghasilkan vektor lain yang memiliki nilai kelipatan dari vektor eigen itu sendiri.

Syarat-syarat

Nilai dan Vektor Eigen sendiri memiliki beberapa syarat yang harus dipenuhi,yang :

- (A - λI) tidak memiliki invers atau *det*(A - λI) = 0
- $x \neq 0$

Bukti
$x = Ix$
Asumsikan bahwa A memiliki invers, maka berlaku $v^{-1}\, v = I$
$x = ((A - \lambda I)^{-1} (A - \lambda I))x$
$x = (A - \lambda I)^{-1} ((A - \lambda I)x)$
$x = (A - \lambda I)^{-1}$
$x = 0$

Dari perhitungan diatas, diperoleh x = 0 yang bertentangan dengan salah satu syarat. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa kedua syarat saling mempengaruhi dan tidak boleh dilanggar.

A. Perhitungan Nilai dan Vektor Eigen

Perhitungan nilai dan vektor eigen tetap menggunakan perhitungan matriks dasar, yaitu penjumlahan matriks dan perkalian matriks. Perhitungan dimulai dengan mencari nilai eigen, kemudian dengan nilai eigen diperoleh (dapat berjumlah lebih dari 1 nilai) akan dihitung vektor eigen untuk masing-masing nilai yang memenuhi persamaan.

Contoh :
Misalkan diketahui suatu matriks A berukuran 3 x 3 dengan nilai seperti di bawah ini

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen akan digunakan polinomial karakteristik dan persamaan karakteristik dari matriks A. Pertama-tama akan dihitung polinomial karakteristik dari matriks A :

$f(\lambda)$ = det (A - λI)

$$f(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix} - \lambda.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = -\lambda.\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -17 & 8-\lambda \end{bmatrix} - 1.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 8-\lambda \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ 4 & -17 \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = -\lambda\,(-\lambda(8-\lambda) - 1\,(-17)) - (0(8-\lambda) - 4(1)) = -\lambda(-8\lambda + \lambda^2 + 17) - (-4) = 8\lambda^2 - \lambda^3 - 17\lambda + 4$$

Kemudian nilai eigen dapat dihitung lewat persamaan karakteristik :

$f(\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = 0$

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$

(Persamaan karakteristik dapat difaktorkan menggunakan teorema sisa atau teknik pemfaktoran polinomial)

$(\lambda - 4)\,(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$

Dengan melakukan subtitusi nilai eigen ke dalam persamaan (A - λI) x = 0, maka akan diperoleh suatu persamaan baru.

(A - $\lambda_1 I$)x = 0

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -17 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor eigen untuk masing-masing nilai eigen kemudian dapat ditentukan dengan melakukan operasi baris elementer atau teknik eliminasi sistem persamaan linear lainnya. Sehingga akan diperoleh vektor eigen untuk λ = 4 adalah

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0,0625 \\ 0,25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B. Contoh Dari Nilai dan Vektor Eigen

Tentukan nilai dan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$?

Penyelesaian :

Nilai Eigen (λ)

(λI - A)v = 0

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) \mathrm{v} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) \mathrm{v} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}\right) v = 0$$

Untuk menentukan nilai λ yang skalar, berlaku :

det (λI - A) = 0

det $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$ = 0

$((\lambda - 1)(\lambda - 4) - (2)(-1)) = 0$

$(\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2) = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

λ = 2 atau λ = 3

Vektor eigen

(λI - A)v = 0

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}\right) v = 0$$

$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$

Untuk nilai λ = 2, maka :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Terbentuk sistem persamaan linear
$v_1 + 2v_2 = 0$
$-v_1 - 2v_2 = 0$
Diperoleh :
v_1 = -2 dan v_2 = 1

Pembuktian :
$Av = \lambda v$
$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ terbukti

Untuk nilai λ = 3, maka :
$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Terbentuk sistem persamaan linear
$2v_1 + 2v_2 = 0$
$-v_1 - v_2 = 0$

Diperoleh
v_1 = 1 dan v_2 = -1

Pembuktian :
$Av = \lambda v$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ terbukti

Creative Design;
Pendidikan Matematika - UHAMKA