

OLAH DATA REGRESI LINIER METODE ORDINARY LEAST SQUARE

Modul A Statistika oleh Dr. H. Yadi Nurhayadi, M. Si.



L I G H T C O M M 2 0 1 7

KATA PENGANTAR

Bismillah.

Segala puji bagi Allah SWT. Salawat dan salam bagi Rasulullah saw.

Modul ini dibuat agar kita paham mengolah data persamaan regresi linier yang menggunakan metode Ordinary Least Square (OLS) mulai dari teori dan perhitungan manualnya hingga aplikasinya. Dengan demikian kita tidak sekedar menjadi operator pemakai software SPSS, Eviews, Stata, dan software-statistika lainnya, tanpa memahami asal-usul angka hasil yang didapat.

Demikian. Semoga bermanfaat.

Yadi Nurhayadi

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	2
DAFTAR ISI	3
REGRESI LINIER SEDERHANA	4
REGERASI LINIER BERGANDA 2 VARIABEL BEBAS	6
REGERASI LINIER BERGANDA 3 VARIABEL BEBAS	10
REGERASI LINIER BERGANDA M VARIABEL BEBAS	13
PENUTUP	17
REFERENSI	18

REGRESI LINIER SEDERHANA

Dalam meneliti harus dipahami apa variabel penelitiannya. Misalnya meneliti “Pengaruh Dana Pihak Ketiga terhadap Profitabilitas Bank Syariah.” Maka variabel yang harus diteliti adalah Dana Pihak Ketiga dan Profitabilitas. Variabel yang mempengaruhi (variabel bebas) nya Dana Pihak Ketiga (x). Variabel yang dipengaruhi (variabel terikat) nya Profitabilitas (y).

Lalu cari datanya. Perhatikan ilustrasi pada Microsoft Excell dalam link video youtube berikut ini:

<https://www.youtube.com/watch?v=iZBqcCtV91I&t=173s>.

Jika x dan y dipetakan dalam Diagram Cartesius akan membentuk sebaran titik koordinat. Analisis akan memperhatikan Garis Trend nya.

Garis trend dari sebaran titik ini dicari persamaannya sehingga didapat persamaan prediksi yang disebut Persamaan Regresi. Karena yang dicari persamaan garis dan variabel bebasnya hanya satu, maka disebut Persamaan Regresi Linier Sederhana.

Bentuk umum persamaan garis dengan variabel bebas x , variabel terikat y , konstanta a , dan koefisien b dinyatakan dalam bentuk $\hat{y} = a + bx$ (1)

$$\text{dengan } b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \text{ dan } a = \bar{y} - b\bar{x} .$$

Rumusan b dan a di atas, diperoleh berdasarkan metode Ordinary Least Square (OLS) yang diselesaikan memakai cara substitusi.

Untuk menyatakan kuat atau lemahnya hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y gunakan koefisien korelasi:

$$R = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}J_{yy}}} \dots\dots\dots (2)$$

di mana $J_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}$, $J_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}$, dan

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n}.$$

Nilai R antara -1 dan $+1$ atau $-1 \leq R \leq +1$. Jika R bernilai -1 atau dekat -1 berarti x berkorelasi kuat terhadap y secara negatif. Sebaliknya, jika R bernilai 1 atau dekat 1 berarti x berkorelasi kuat terhadap y secara positif. Serta, jika R bernilai 0 atau dekat 0 berarti x tidak berkorelasi atau berkorelasi lemah terhadap y . Persamaan (2) di atas juga digunakan untuk mencari nilai koefisien korelasi parsial.

Koefisien determinasi, menyatakan persentase pengaruh variabel x terhadap y dinyatakan dengan mengkuadratkan R , yaitu:

$$R^2 \dots\dots\dots (3).$$

Misalnya jika koefisien korelasinya ($R =$) $0,8$, maka koefisien determinasinya ($R^2 =$) $0,64$. Ini menunjukkan 64% variabel x mempengaruhi variabel y .

REGRESI LINIER BERGANDA 2 VARIABEL BEBAS

Persamaan regresi linier berganda 2 variabel bebas yaitu

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \dots\dots\dots (4).$$

Di mana berdasarkan metode Ordinary Least Square (OLS), b_0 , b_1 , dan b_2 didapat dari menyelesaikan 3 persamaan normal berikut,

$$\begin{aligned} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} &= \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \end{aligned} \quad (5).$$

Penyelesaian persamaan normal di atas dapat menggunakan cara substitusi, eliminasi, atau invers matriks. Ilustrasi penyelesaian cara substitusi dan invers matriks dapat disaksikan pada link video youtube yang tertulis di akhir bab ini.

Dalam hal menggunakan Invers Matriks, persamaan (5) ditulis dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \end{pmatrix} \quad (6).$$

Maka b_0 , b_1 , dan b_2 didapat dengan mengalikan invers matriks utama di ruas kiri (6) terhadap matriks jawaban di ruas kanan (6) seperti berikut ini.

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \end{pmatrix} \quad (7).$$

Dengan demikian b_0 , b_1 , dan b_2 telah diketahui, sehingga persamaan (4) dapat dirumuskan.

Selanjutnya dengan telah diketahuinya nilai b_0 , b_1 , dan b_2 maka nilai-nilai koefisien determinasi, adjusted R^2 , koefisien korelasi berganda, serta nilai thitung dan fhitung dapat diketahui pula. Yaitu koefisien determinasi sebagai berikut.

$$R^2 = \frac{JKR}{J_{yy}} = \frac{\left[b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \right]}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n}} \quad (8)$$

dan

$$\text{Adjusted } R^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - 2} \dots\dots\dots (9)$$

serta koefisien korelasi berganda

$$R = \sqrt{R^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\left[b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \right]}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n}}} \quad (10).$$

Jika ingin diketahui pula koefisien korelasi parsial masing-masing x_1 terhadap y atau x_2 terhadap y , maka gunakan kembali persamaan (2) dengan menganggap x_1 atau x_2 sebagai x .

Uji Hipotesis Parsial (Uji t)

Kriteria Uji t berdasarkan komparasi nilai thitung dan ttabel serta nilai sig-t dan 0,05. Nilai thitung berdasarkan rumus:

$$t_j = \frac{b_j}{s \sqrt{c_{jj}}} \dots\dots\dots (11),$$

di mana t_j dan b_j masing-masing adalah thitung dan koefisien untuk variabel bebas ke- j , s adalah simpangan baku sampel ($s = \sqrt{s^2}$, dengan s^2 dihitung pada persamaan (14)) dan c_{jj} adalah komponen matriks invers pada diagonal jj . Untuk regresi 2 variabel bebas ini matriks inversnya di persamaan (7).

Nilai ttabel pada Ms Excell didapat dengan perintah
 ttabel =tinv(0.05; $n-k-1$) (12),

di mana n banyaknya data sampel dan k banyaknya variabel bebas.

Kriteria Uji t:

- o H_0 diterima jika $-ttabel \leq thitung \leq ttabel$ dan $sig \geq 0,05$, dan
- o H_0 ditolak jika $thitung < -ttabel$ atau $thitung > ttabel$ dan $sig < 0,05$.

Uji Hipotesis Simultan (Uji f)

Kriteria Uji f berdasarkan komparasi nilai fhitung dan ftabel serta nilai sig-f dan 0,05. Nilai fhitung berdasarkan rumus:

$$f = \frac{JKR/k}{s^2} \dots\dots\dots (13),$$

di mana $s^2 = \frac{J_{yy} - JKR}{n - k - 1} \dots\dots\dots (14).$

Nilai ftabel di antaranya didapat menggunakan Ms Excell dengan perintah

$$ftabel = \text{finv}(0.05; k; n-k-1) \dots\dots\dots (15).$$

Kriteria Uji f:

- o H_0 diterima bila f hitung \leq f tabel dan sig \geq 0,05, dan
- o H_0 ditolak bila f hitung $>$ f tabel dan sig $<$ 0,05.

Link Youtube

Ilustrasi Perhitungan Regresi Linier Berganda 2 Variabel Bebas dilengkapi Uji Hipotesis Parsial (Uji T) dan Simultan (Uji f) dapat dilihat pada link video youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=msD2Y6yKvmU&t=310s>,

<https://www.youtube.com/watch?v=Yvk0RdBeWpU>,

<https://www.youtube.com/watch?v=TY5VWgj8x18>, dan

<https://www.youtube.com/watch?v=qVnWLauMsJc>.

Link youtube ke-1 dan ke-2 di atas menggunakan cara substitusi, sedangkan link youtube ke-3 menggunakan cara invers matriks. Link youtube ke-4 contoh kasus CAR dan NPF terhadap ROA.

REGRESI LINIER BERGANDA 3 VARIABEL BEBAS

Persamaan regresi linier berganda 3 variabel bebas:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \dots\dots\dots (16),$$

di mana berdasarkan metode OLS, b_0 , b_1 , b_2 , dan b_3 didapat dari menyelesaikan 4 persamaan normal berikut,

$$\begin{aligned} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_3 \sum_{i=1}^n x_{3i} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + b_3 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{3i} &= \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 + b_3 \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i} &= \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{3i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{3i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i} + b_3 \sum_{i=1}^n x_{3i}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{3i}y_i \end{aligned} \quad (17).$$

Penyelesaian persamaan (17) jika memakai cara substitusi atau eliminasi akan membutuhkan banyak sekali persamaan. Apalagi untuk regresi linier berganda 4, 5, 6, dan seterusnya variabel bebas. Maka persamaan (17) ini akan lebih mudah dan efektif diselesaikan memakai cara invers matriks. Perhitungan invers dari matriks utama didapat menggunakan Ms. Excell dengan perintah =minverse().

Bersesuaian dengan persamaan (6) dan (7), maka dengan cara invers matriks b_0 , b_1 , b_2 , dan b_3 pada persamaan (17) didapat dengan mengalikan invers matriks utama terhadap matriks jawaban seperti pada persamaan (18) berikut ini.

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{3i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{3i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i} \\ \sum_{i=1}^n x_{3i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{3i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{3i} & \sum_{i=1}^n x_{3i}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{3i}y_i \end{pmatrix} \tag{18}.$$

Koefisien determinasi didapat berdasarkan persamaan:

$$R^2 = \frac{JKR}{J_{yy}} = \frac{\left[b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i + b_3 \sum_{i=1}^n x_{3i}y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \right]}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n}} \tag{19}, \text{ dan}$$

$$\text{Adjusted } R^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - 3 - 1} \tag{20},$$

serta koefisien korelasi berganda

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{\left[b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i + b_3 \sum_{i=1}^n x_{3i}y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \right]}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n}}} \tag{21}.$$

12

Koefisien korelasi parsial masing-masing x_1 terhadap y , x_2 terhadap y , atau x_3 terhadap y , didapat dengan menggunakan kembali persamaan (2) dengan menganggap x_1 , x_2 , atau x_3 sebagai x .

Sedangkan analisis hasil Uji Parsial (Uji t) dan Uji Simultan (Uji f) didapat dengan kembali mengerjakan mulai dari persamaan (11) hingga (15) yang disesuaikan untuk 3 variabel bebas. Dalam perhitungannya, perhatikan pula angka dari invers matriks utama yang bersesuaian dengan persamaan (18).

REGRESI LINIER BERGANDA M VARIABEL BEBAS

Persamaan regresi linier berganda m variabel bebas:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m \dots\dots\dots (22)$$

di mana b_0, b_1, b_2, \dots , serta b_m berdasarkan metode OLS didapat dari menyelesaikan $m + 1$ persamaan normal berikut,

$$\begin{aligned} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} + \dots + b_m \sum_{i=1}^n x_{mi} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + \dots + b_m \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{mi} &= \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 + \dots + b_m \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{mi} &= \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i \\ \dots & \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{mi} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{mi} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{mi} + \dots + b_m \sum_{i=1}^n x_{mi}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{mi}y_i \end{aligned} \dots\dots\dots (23).$$

Perhatikan! Persamaan (22) dan (23) adalah persamaan regresi dan persamaan normal untuk berapapun variabel bebas.

- Jika hanya 1 variabel bebas, maka ruas kanan persamaan (22) cukup sampai di suku ke-2, yaitu

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 \dots\dots\dots (24)$$

Serta persamaan (23) cukup hingga baris ke-2 (atau 2 persamaan normal) dengan ruas kiri cukup hingga suku ke-2, yaitu

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \dots\dots\dots (25).$$

Persamaan (24) identik dengan persamaan (1) di mana $x_1 = x$, $b_0 = a$, dan $b_1 = b$. Rumusan b dan a pada persamaan (1) adalah hasil secara substitusi persamaan (25) dalam mendapatkan b_0 dan b_1 . Nilai b_0 dan b_1 juga bisa didapat secara invers matriks dengan membentuk persamaan (25) dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \end{pmatrix} \dots\dots\dots (26),$$

lalu b_0 dan b_1 dihitung dengan mengalikan invers matriks utama di ruas kiri (26) terhadap matriks jawaban di ruas kanan (26), yaitu

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \end{pmatrix} \dots\dots\dots (27).$$

- Jika 2 variabel bebas, maka ruas kanan persamaan (22) sampai di suku ke-3, seperti pada persamaan (4). Selanjutnya mengikuti penyelesaian regresi linier berganda 2 variabel bebas.
- Jika 3 variabel bebas, maka ruas kanan persamaan (22) sampai di suku ke-4, seperti pada persamaan (16). Dan seterusnya sesuai penyelesaian regresi linier berganda 3 variabel bebas.

Melanjutkan persamaan (22) dan (23), rumusan koefisien determinasinya adalah:

$$R^2 = \frac{JKR}{J_{yy}} = \frac{\left[b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i + \dots + b_m \sum_{i=1}^n x_{mi} y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \right]}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n}}$$

..... (28), dan

$$\text{Adjusted } R^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - m - 1} \dots\dots\dots (29).$$

Serta koefisien korelasi berganda

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{\left[b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i + \dots + b_m \sum_{i=1}^n x_{mi} y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \right]}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n}}}$$

..... (30).

Seperti pada penyelesaian regresi linier berganda 3 variabel bebas, persamaan (23) akan lebih mudah dan efektif diselesaikan memakai cara invers matriks. Penyelesaian secara invers matriks ini dapat memanfaatkan software Ms. Excell.

Koefisien korelasi parsial masing-masing x_1 terhadap y , x_2 terhadap y , dst hingga x_m terhadap y , didapat dengan menggunakan kembali persamaan (2). Dalam hal ini, dengan menganggap x_1, x_2 , dst hingga x_m sebagai x .

Analisis hasil Uji Parsial (Uji t) dan Uji Simultan (Uji f) didapat dengan kembali mengerjakan mulai dari persamaan (11) hingga (15) yang disesuaikan untuk m variabel bebas. Dalam perhitungannya, perhatikan angka dari invers matriks utama yang bersesuaian.

PENUTUP

Demikian modul ringkas “Olah Data Regresi Linier Metode Ordinary Least Square” ini. Berbagai perhitungan manual menggunakan Ms. Excell yang didokumentasikan caranya melalui video-video youtube di atas, dapat dibandingkan hasilnya dengan hasil software aplikasi statistika seperti SPSS, Eviews, Stata, dsb.

Modul ini tidak memuat lengkap seluruh perhitungan dan berbagai teori lengkap statistika. Tapi semoga cukup membantu.

Alhamdulillah.

REFERENSI

<https://www.youtube.com/watch?v=iZBqcCtV91I&t=173s>.

<https://www.youtube.com/watch?v=msD2Y6yKvmU&t=310s>.

<https://www.youtube.com/watch?v=Yvk0RdBeWpU>.

<https://www.youtube.com/watch?v=TY5Vwgi8x18>.

<https://www.youtube.com/watch?v=qVnWLaUmsJc>.

Walpole, Ronald E., Myers, Raymond H., Myers, Sharon L., Ye, Keying. (2013). *Essentials of Probability & Statistics for Engineers & Scientist*. Boston. Pierson Education.