ALJABAR ABSTRAK

(TEORI GROUP)

Terintegrasi AIKA

SIGID EDY PURWANTO

Daftar Isi

Pendahuluan

A. Deskripsi Mata Kuliah

Pada mata kuliah ini mahasiswa belajar tentang *Group*, *Subgroup*, *Cyclic Group*, *Permutation Groups*, *Isomorphisms*, *Cosets* dan *Lagrange's Theorem*, serta *Homomorphism Group*

B. Prasyarat Mata Kuliah

Sebelum mengambil/mempelajari mata kuliah Aljabar Abstrak, mahasiswa diharuskan terlebih dahulu lulus mata kuliah Teori Bilangan.

C. Rencana Pembelajaran

Rencana Pembelajaran menyesuaikan RPS berikut.

	UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PROF. DR. HAMKA JAKARTA FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA				
RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER					
MATA KULIAH	KODE	Rumpun MK	BOBOT (sks)	SEMESTER	Tgl. Penyusunan
Aljabar Abstrak (Grup)		Aljabar	3	4	4 September 2017
OTORISASI	Dosen Pengembang RPS		Koordinator RMK		Ka. PRODI

Capaian Pembelajaran (CP)	CPL-PRODI	
	S9	Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
	PP7	Menguasai materi, struktur, konsep, pola pikir dalam mengampu mata pelajaran dengan menggunakan konsep Aljabar Abstrak (Grup)
	KU1	Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya
	KU2	Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur
	KK16	Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu
	CP-MK	
	M1	Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung konsep Grup dan Subgrup (PP7, KU1, KU2, KK16)
	M2	Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung konsep Grup Siklik, Grup Permutasi (PP7, KU2, KK16)
	M3	Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung Isomorfisme, Coset dan Teorema Lagrange (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)
	M4	Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung Grup Homomorfisme (S9, PP7, KU2, KK16)
Deskripsi singkat MK	Pada mata kuliah ini mahasiswa belajar tentang Groups, Subgroups, Cyclic Groups, Permutation Groups, Isomorphisms, Cosets and Lagrange's Theorem, serta Homomorphism Group	
Materi Pembelajaran/Pokok Bahasan	1. Grup 2. Subgrup 3. Grup siklik 4. Grup Permutasi 5. Isomorfisme 6. Coset dan Teorema Lagrange 7. Grup Homomorfisme	
Pustaka	Utama	
	Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra* (7th ed.). Belmont, California, USA: Brooks/Cole Cengage Learning	

	Pendukung Dummit, David S. and Foote, Richard M., 1991. Abstract Algebra. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Sukirman, 2000. Pengantar Aljabar Abstrak. Yogyakarta: FMIPA-UNY Heirstein, I N, 1986. Absract Algebra. New York: Mac Millan Publishing Company. Gilbert, William J., 1976. Modern Algebra with Application. New York: Jhon Wiley & Sons.
Media Pembelajaran	Perangkat lunak: *Ms Power Point, Ms Word* Perangkat keras: Laptop dan LCD proyektor
Dosen	Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd
Matakuliah syarat	Teori Bilangan

Mg ke-	Sub-CP-MK (sbg. kemampuan akhir yg diharapkan)	Indikator	Kriteria & Bentuk Penilaian	Metode Pembelajaran (Estimasi Waktu)	Materi Pembelajaran (Pustaka)	Bobot Penilaian (%)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	L1 Understanding the properties of the integers and the integers modulo *n* C5: membandingkan A4: mengubah P4: mensketsa	▪ Understanding the properties of the integers and the integers modulo *n*	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan, CTL (TM 2x3x50') ▪ Tugas 1: Menentukan contoh bilangan bulat modulo n ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Bilangan bulat modulo n ▪ Contoh bilangan bulat modulo n	10
2	Understanding the symmetries of a square and the dihedral groups	▪ Understanding the symmetries of a square and the dihedral groups	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan, CTL (TM 2x3x50') ▪ Tugas 2: Menentukan contoh grup dihedral ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Grup dihedral ▪ Contoh grup dihedral	10
3	Understanding groups and elementary properties of groups	▪ Understanding groups and elementary properties of groups	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan, CTL (TM 2x3x50') ▪ Tugas 3: Menentukan contoh grup ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Grup ▪ Contoh Grup	10

4,5	L2 Understanding finite groups and subgroups C6: menemukan A5: membuktikan P4: mensketsa	▪ Understanding finite groups and subgroups	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan (TM 2x3x50') ▪ Tugas 4: Menentukan contoh grup ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Grup ▪ Sub Grup	15
6	Understanding cyclic groups	▪ Understanding cyclic groups	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan (TM 2x3x50') ▪ Tugas 5: Menentukan contoh grup siklik ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Grup siklik	10
7	Understanding Permutation Groups	▪ Understanding Permutation Groups	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan (TM 2x3x50') ▪ Tugas 6: Menentukan contoh grup permutasi ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Grup permutasi	10
8	Evaluasi Tengah Semester: Melakukan validasi hasil penilaian, evaluasi dan perbaikan proses pembelajaran berikutnya					
9	L4 Understanding Permutation Groups C6: menemukan A5: membuktikan	▪ Understanding Permutation Groups	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan (TM 2x3x50') ▪ Tugas 1: Menentukan contoh grup permutasi ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Grup permutasi	10
10,11,12	Understanding Isomorphisms	▪ Understanding Isomorphisms	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan (TM 2x3x50') ▪ Tugas 2: Menentukan contoh isomorfisme ((BT+BM:(1+1)x(2x3x60'))	▪ Isomorfisme	30
13, 14	L5 Understanding Cosets and Lagrange's Theorem	▪ Understanding Cosets and	Kriteria: PAP	▪ Kuliah, diskusi, praktik, tutor sebaya, penemuan	▪ coset dan teorema lagrange	25

	C6: menemukan A5: membuktikan	Lagrange's Theorem	Bentuk tes: Tertulis	(TM 3x3x50') ▪ Tugas 3: Menghitung, menentukan, membuktikan konsep coset dan teorema lagrange ((BT+BM:(1+1)x(3x3x60')))		
15	L6 Understanding Homomorphism Group A4: merembuk	▪ Understanding Homomorphism Group	Kriteria: PAP Bentuk tes: Tertulis	▪ Presentasi dan diskusi (TM 3x50') ▪ Tugas 4: Menghitung, menentukan, membuktikan konsep Homomorphism Group ((BT+BM:(1+1)x(3x60'))	▪ Homomorphism Group	10
16	Evaluasi Akhir Semester: Melakukan validasi penilaian akhir dan menentukan kelulusan mahasiswa					

Catatan:

(1) TM: Tatap muka, BT: Belajar Terstruktur, BM: Belajar Mandiri
(2) (TM 2x3x50') dibaca: kuliah tatap muka 2 kali (minggu) x 3 sks x 50 menit = 300 menit (5 jam)
(3) ((BT+BM:(2+2)x(3x60')) dibaca: belajar terstruktur 2 kali (minggu) dan belajar mandiri 2 kali (minggu) x 3 sks x 60 menit = 720 menit (12 jam)
(4) Mahasiswa mampu menyajikan, menggambar, membuktikan, dan menghitung konsep geometri pada bidang vektor (C6, A5, P4): menunjukkan bahwa Sub-CPMK ini mengandung kemampuan dalam ranah taksonomi kognitif level 6 (kemampuan menemukan), afeksi level 5 (kemampuan membuktikan), dan psikomotorik level 4 (kemampuan mensketsa)
(5) RPS: Rencana Pembelajaran Semester, RMK: Rumpun Mata Kuliah

D. Petunjuk Penggunaan Bahan Ajar

1. Penjelasan bagi mahasiswa

   Tiap bab bahan ajar ini terdiri dari tiga subbab, yakni pendahuluan, penyajian, dan penutup.

   Pada subbab pendahuluan, berisi tentang deskripsi materi pembelajaran, relevansi, dan capaian pembelajaran yang harus dicapai oleh mahasiswa.

   Adapun subbab penyajian, berisi uraian materi secara lengkap, pembuktian teorema-teorema disertai dengan contoh.

   Sedangkan bagian penutup berisi tentang rangkuman materi pembelajaran dan tes formatif.

   Sebelum pembelajaran di kelas, mahasiswa diharapkan mampu mengeksplorasi secara individual bahan ajar ini kemudian didiskusikan saat tatap muka di kelas sehingga terjadi pembelajaran yang aktif di dalam kelas.

2. Peran Dosen dalam Pembelajaran

   Adapun peran dosen dalam proses pembelajaran adalah sebagai fasilitator, yakni membantu, membimbing, mengarahkan mahasiswa dalam mengeksplorasi, mengelaborasi materi *group*.

E. Capaian Pembelajaran Lulusan

Capaian pembelajaran lulusan setelah mempelajari Aljabar Abstrak (*Group*) ini adalah :

S9: Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri

PP7: Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menggunakan konsep aljabar abstrak (*group*)

KU1: Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

KU2: Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

KK16: Memanfaatkan teknologi informasi dan komunikasi dalam pembelajaran yang diampu

Adapun capaian mata kuliah yang diharapkan dalam pembelajaran aljabar abstrak (*group*) adalah :

1. Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung konsep *Group* dan *Subgroup* (PP7, KU1, KU2, KK16)
2. Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung konsep *Cyclic Group, Permutation Groups, Isomorphisms, Cosets and Lagrange's Theorem* (PP7, KU2, KK16)
3. Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung *Isomorphisms, Cosets and Lagrange's Theorem* (S9, PP7, KU1, KU2, KK16)
4. Mahasiswa mampu menjelaskan, membuktikan, dan menghitung *Homomorphism Group* (S9, PP7, KU2, KK16)

F. Umpan Balik Aktivitas Belajar

Setelah mempelajari setiap bab dalam bahan ajar ini, diberikan umpan balik berupa pemberian latihan soal berbentuk Essay.

BAB 2. *Group*

A. Deskripsi Materi

Pada Bab ini akan dibahas materi tentang *group* dan macam-macam *group*.

B. Relevansi

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa diharapkan dapat memahami dan menjelaskan *group* dan macam-macam *group*.

C. Capaian Pembelajaran

1. S9→Menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri
2. PP7→Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu menggunakan konsep *group*.
3. KU1→Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan

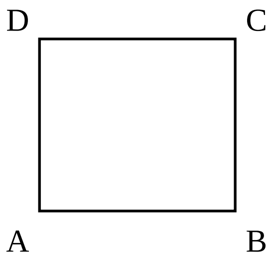
dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya

4. KU2→Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur

D. Materi Pelajaran

1. Pendahuluan

Ambil sebuah persegi ABCD berikut:



Persegi tersebut dapat dirotasi dalam 4 posisi untuk menempati bingkainya kembali (R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}) dan dilipat dalam 4 posisi sehingga menempati bingkainya kembali (Horisontal, Vertikal, Diagonal 1, Diagonal 2).

Jika kesemua aksi tersebut di atas dioperasikan satu sama lain di mana aksi yang satu diteruskan dengan aksi berikutnya maka akan didapat aksi tunggal yang juga merupakan bagian dari aksi yang terdapat di atas.

Sebagai contoh R_{270} dilanjutkan dengan H akan menghasilkan D. Selengkapnya ditampilkan dalam tabel Cayley berikut.

Gambar 1. Tabel Cayley D_4 (Dihedral 4)

	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D_1	D_2
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D_1	D_2
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	D_2	D_1	H	V
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	V	H	D_2	D_1
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	D_1	D_2	V	H
H	H	D_1	V	D_2	R_0	R_{180}	R_{90}	R_{270}
V	V	D_2	H	D_1	R_{180}	R_0	R_{270}	R_{90}
D_1	D_1	V	D_2	H	R_{270}	R_{90}	R_0	R_{180}
D_2	D_2	H	D_1	V	R_{90}	R_{270}	R_{180}	R_0

2. Pengertian

Misalkan terdapat suatu himpunan bilangan bulat Z.

Untuk sebarang dua bilangan bulat anggota himpunan bilangan bulat Z yang memenuhi operasi penjumlahan dapat dikatakan bahwa Z tertutup terhadap penjumlahan (+).

Fakta menunjukkan bahwa untuk semua $x, y, z \in Z$ berlaku sifat–sifat sebagai berikut:

a. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

b. Terdapat $0 \in Z$ sehingga $x + 0 = x = 0 + x$.

c. Terdapat $-x \in Z$ sehingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

Sebelum membahas *group*, dapat Kita ambil ilustrasi Rukun Iman. Rukun Iman ada enam dan semuanya wajib diimani oleh seorang muslim sehingga dirinya kemudian dapat dikatakan sebagai seorang Mukmin. Dalam Al-Kitab dan Sunnah telah disebutkan bahwasanya iman ini dibangun di atas enam perkara. Dan kita telah mengetahui bahwasanya rukun itu adalah bagian dari sesuatu yang paling kuat, yang tidak akan tegak sesuatu tersebut kecuali dengan rukun tersebut.

Maka rukun-rukun Iman adalah tiang-tiang keimanan, pokok-pokoknya yang dengannya keimanan itu dibangun. Maka tidak akan tegak suatu keimanan kecuali dengan pokok-pokok yang enam. Dan pokok-pokok yang enam ini telah datang penjelasannya dalam Al-Qur'an dan Sunnah Rasulullah Shallallahu 'Alaihi wa Sallam, yaitu Iman kepada Allah, Iman kepada malaikat-malaikatNya, kepada kitab-kitabNya, kepada Rasul-RasulNya, kepada hari akhir, juga beriman terhadap takdir baik dan takdir buruk.

Dan seluruh para Nabi sepakat. Dari Nabi yang pertama sampai Nabi yang terakhir, semua mengajak untuk mengimani rukun Iman yang enam.

Pokok-pokok keimanan ini saling berkaitan satu dengan yang lainnya, tidak bisa dipisahkan sebagian dari sebagian yang lain. Ketika seorang beriman kepada sebagian pokok-pokok keimanan, maka ia pun harus beriman kepada sebagian yang lain. Dan mengingkari sebagian dari pokok-pokok keimanan ini sama dengan mengingkari semuanya.

Konsep keimanan di atas akan memudahkan Kita untuk memahami konsep *group* berikut ini. Misalkan ada himpunan tidak kosong G. Operasi Biner pada G adalah suatu pemetaan $\circ : G \times G \to G$.

Himpunan G disebut *group* terhadap operasi ○, dinotasikan (G, ○), jika untuk semua $a, b, c \in G$ berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1) Sifat tertutup: $a \circ b \in G$.
2) Sifat Asosiatif: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
3) Terdapat Unsur Identitas: $e \in G$ sehingga $a \circ e = e \circ a = a$.

   e disebut elemen *identitas* di G.
4) Terdapat Invers: $a^{-1} \in G$ sehingga

   $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

   Dalam hal ini a^{-1} disebut invers dari a.

Selanjutnya, jika untuk setiap $b \in G$ berlaku $a \circ b = b \circ a$ maka (G, ○) disebut *group* komutatif atau *group abelian*.

Group hingga adalah suatu *group* dengan banyaknya unsur yang berhingga.

Contoh, misalkan suatu *group* $J = \{a, b, c\}$ dengan operasi ○ terlihat seperti di bawah ini:

a ○ a = a; a ○b = b; a ○ c = c

b ○ a = b; b ○ b = c; b ○ c = a

c ○ a = c; c ○ b = a; c ○ c = b

3. Contoh-contoh *Group*

a. Himpunan-himpunan bilangan bulat Z, bilangan rasional Q, bilangan real R dan bilangan kompleks C dengan operasi biner penjumlahan merupakan *group* komutatif (*abel*).

   Secara umum himpunan-himpunan tersebut mempunyai unsur identitas yaitu 0 dan invers dari *a* adalah –*a*.

b. Himpunan bilangan rasional positif Q^+ adalah *group* dengan operasi perkalian. Invers dari a adalah $1/a = a^{-1}$.

c. Himpunan bilangan Q – {0} dengan operasi biner perkalian merupakan *group Abelian*.

d. Diketahui himpunan semua matriks 2 x 2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan operasi penjumlahan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Himpunan matriks tersebut memiliki unsur identitas $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan invers matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$. Sehingga memenuhi syarat suatu *group*.

e. Himpunan $GL_{(n,R)}$ (general linear matriks non singular n x n dengan n ϵ $\mathbb{R}$) dengan unsur $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ operasi perkalian matriks merupakan *group* (*non abel*). Determinan matriks adalah ad - bc.

GL (2, R) = $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R, ad - bc \neq 0\right\}$

Matriks 2x2 dengan unsur bilangan real dan determinan bukan nol adalah *group* non-Abelian dengan operasi perkalian

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

f. Himpunan matriks nxn dengan determinan sama dengan 1 ($SL_{(n,R)}$) dengan operasi biner perkalian matriks adalah *group*.

g. S = {1,2,…..n} di mana S_n adalah himpunan dari semua fungsi satu-satu pada f : S → S. Maka S_n dengan operasi komposisi fungsi merupakan *group*, disebut juga *group* permutasi.

h. Himpunan Z_n bilangan bulat modulo n dengan operasi biner penjumlahan merupakan *group* komutatif.

Untuk n = 4, maka Z_4 = {0, 1, 2, 3}. Tabel Cayley untuk Z_4 adalah

mod 4	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Melalui tabel Cayley di atas dapat diidentifikasi bahwa Z_4 memenuhi semua syarat suatu *group* dan komutatif.

i. Untuk setiap n > 1, didefinisikan U(n) himpunan semua bilangan bulat positif kurang dari n dan relatif prima dengan n. U(n) merupakan *group* dengan operasi perkalian modulo n.

Untuk n = 10, maka U(10) = {1, 3, 7, 9}. Tabel Cayley untuk U(10) adalah

mod 10	1	3	7	9
1	1	3	7	9

3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Perlu diingat bahwa ab mod n adalah bilangan bulat r tunggal dengan persamaan ab = nq + r, di mana $0 \leq r < n$ dan ab merupakan operasi perkalian biasa. U(n) = {1, 2, …., n-1}, di mana n adalah bilangan prima.

j. Himpunan Z_p – {[0]} bilangan bulat modulo p dengan p bilangan prima dengan operasi biner perkalian merupakan *group abel*.

4. Contoh-contoh himpunan bukan *Group*

a. Himpunan bilangan bulat dengan operasi perkalian bukanlah *group*. Walaupun himpunan tersebut mempunyai unsur 1 sebagai identitas, namun tidak semua unsur mempunyai invers. Misalnya, tidak ada bilangan a yang memenuhi sehingga 5a = 1.

b. Misalkan terdapat himpunan B yang didefinisikan sebagai himpunan bilangan irasional positif dengan penambahan unsur bilangan 1 dengan operasi perkalian. Himpunan B ini memenuhi tiga sifat *group*, namun himpunan ini bukanlah *group*. Ambil misalkan unsur yang dioperasikan berikut $\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$, maka himpunan B tidak tertutup, sehingga bukanlah *group*.

c. Misalkan terdapat himpunan D={0,1,2,3} didefinisikan sebagai himpunan bilangan dengan operasi perkalian modulo 4. Ambil angka-angka anggota himpunan tersebut, maka walaupun angka-angka 1 dan 3 memiliki invers, namun angka-angka yang lain yaitu 0 dan 2 tidak. Sehingga D bukanlah *group*.

d. Himpunan bilangan bulat dengan operasi pengurangan bukanlah *group*, karena operasi pengurangan unsur-unsur dalam himpunan ini tidak memenuhi sifat asosiatif.

5. Sifat-sifat Dasar *Group*

Beberapa sifat yang akan diuraikan berikut ini adalah tentang ketunggalan. Untuk dapat lebih memahami konsep tentang ketunggalan berikut akan dikuatkan pondasi pemahaman Kita tentang Allah Yang Maha Tunggal.

Terkait tafsir Al Qur'an Surat Al Ikhlas ayat pertama, Imam Ibnu Katsir rahimahullah berkata, Dia Yang pertama dan Esa, tidak ada tandingan dan pembantu, tidak ada yang setara dan tidak ada yang menyerupai-Nya, dan tidak ada yang sebanding (dengan-Nya). Kata ini tidak digunakan untuk menetapkan pada siapapun selain pada Allah Subhanahu wa Ta'ala, karena Dia Maha Sempurna dalam seluruh sifat-sifat-Nya dan perbuatan-perbuatanNya.

Tidak ada tandingan, tidak ada yang setara, dan tidak ada yang menyerupai jelas meniadakan Zat lain yang dilekatkan pada diri-Nya. Tidak ada duanya, Allah Maha Tunggal.

a. Teorema Ketunggalan Identitas

Dalam suatu *group*, hanya terdapat satu unsur identitas.

Sebagai bukti, andaikan e dan e' keduanya merupakan unsur identitas dari G, maka:

1) $ae = a$ untuk setiap a anggota G, dan
2) $e'a = a$ untuk setiap a anggota G.

Ambil $a = e'$ untuk persamaan (1) dan $a = e$ untuk persamaan (2), maka hasilnya adalah

$e'e = e'$ dan

$e'e = e$.

Dengan demikian maka e dan e' adalah sama. Simbol identitas dalam *group* adalah e (dari bahasa Jerman, *einheit*, yang berarti identitas).

b. Teorema *Cancellation*

Pada *group* G berlaku hukum *cancellation* dari arah kanan maupun kiri, di mana ba = ca menyebabkan b = c, dan ab = ac menyebabkan b = c.

Sebagai bukti dapat ditunjukkan bahwa untuk $ba = ca$, dapat diambil a' sebagai invers dari a. Mengoperasikan perkalian dari kanan untuk

a' menghasilkan *(ba)a' =(ca)a'*. Sesuai sifat asosiatif dihasilkan *b(aa')* = *c(aa')*. Akibatnya, *be* = *ce* dan hasilnya *b* = *c*. Demikian pula sebaliknya dapat dibuktikan untuk perkalian dari kiri.

c. **Teorema Ketunggalan Invers**

Untuk setiap unsur a dalam *group* G, ada sebuah unsur tunggal b dalam G yang memenuhi ab = ba = e.

Sebagai buktinya dapat dibayangkan jika b dan c keduanya invers dari a, maka ab = e dan ac = e, sehingga ab = ac. Dengan teorema sebelumnya dapat ditunjukkan bahwa kemudian b = c.

6. Rangkuman

a. Himpunan G disebut *group* terhadap operasi ○, dinotasikan (G, ○), jika untuk semua $a, b, c \in G$ berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1) Sifat tertutup: $a \circ b \in G$.

2) Sifat Asosiatif: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

3) Terdapat Unsur Identitas: $e \in G$ sehingga $a \circ e = e \circ a = a$.

   e disebut elemen *identitas* di G.

4) Terdapat Invers: $a^{-1} \in G$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

   Dalam hal ini a^{-1} disebut invers dari a.

Selanjutnya, jika untuk setiap $b \in G$ berlaku $a \circ b = b \circ a$ maka $(G, \circ)$ disebut *group* komutatif atau *group abelian*.

b. $GL_{(n,R)}$ adalah *group* matriks linear umum nxn bilangan *real*.

c. $SL_{(n,R)}$ adalah *group* matriks linear khusus nxn bilangan *real* dengan determinan sama dengan 1.

d. Z_n adalah *group* himpunan bilangan bulat modulo n dengan operasi biner penjumlahan.

e. U(n) adalah *group* himpunan semua bilangan bulat positif kurang dari n dan relatif prima dengan n dengan operasi perkalian modulo n, untuk setiap n > 1.

Latihan

1. Buktikan bahwa himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan adalah bukan *group*!
2. Buktikan, apakah himpunan B = {1, -1, *i*, -*i*} merupakan *group*?
3. Buktikan, yang manakah yang merupakan *group*? Apakah himpunan A = {1, 2, 3} dengan operasi perkalian modulo 4? Ataukah himpunan B = {1, 2, 3, 4} dengan operasi perkalian modulo 5?
4. Carilah invers dari matriks $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ di $GL\ (2, Z_{11})$!
5. Carilah invers matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ di $SL(2, Z_5)$!
6. Buktikan bahwa himpunan C = {5, 15, 25, 35} adalah *group* dengan operasi perkalian modulo 40!
7. Diketahui himpunan D = {1, 9, 16, 22, 53, 74, 79, 81, d} merupakan sebuah *group* dengan operasi perkalian modulo 91. Tentukan bilangan d tersebut!
8. Buktikan bahwa *group* G adalah abelian jika dan hanya jika $(cd)^{-1} = c^{-1} d^{-1}$ untuk semua c dan d di G!
9. Di dalam suatu *group*, buktikan bahwa $(j^{-1})^{-1} = j$ untuk semua j!

10. Jika $b_1, b_2, \ldots, b_n$ adalah anggota suatu *group*, tentukan invers-nya!
11. Diketahui himpunan $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{12}\}$ adalah *group* bilangan bulat dengan operasi perkalian modulo 56. Jika 5 dan 15 merupakan dua buah bilangan anggota *group* tersebut, carilah anggota *group* C lainnya!
12. Buatlah tabel Cayley untuk U(12)!
13. Andaikan tabel berikut merupakan sebuah *group*, lengkapilah bagian yang masih kosong!

	e	a_1	a_2	a_3	a_4
e	e				
a_1		a_2			e
a_2		a_3	a_4	e	
a_3		a_4		a_1	a_2
a_4					

14. Dalam suatu *group* berlaku $(c.d)^2 = c^2d^2$ dengan $c, d \in G$. Buktikan bahwa *group* tersebut abelian!
15. Buktikan bahwa $(p^m)^n = p^{mn}$!

Daftar Pustaka

Dummit, D. S., & Foote, M. R. (1991). *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra* (7th ed.). Belmont, California, USA: Brooks/Cole Cengage Learning.

Gilbert, W. J. (1976). *Modern Algebra with Application.* New York: Jhon Wiley & Sons.

Heirstein, I. N. (1986). *Abstract Algebra*. New York: Mac Millan Publishing Company.

Sukirman. (2000). *Pengantar Aljabar Abstrak.* Yogyakarta: FMIPA-UNY.