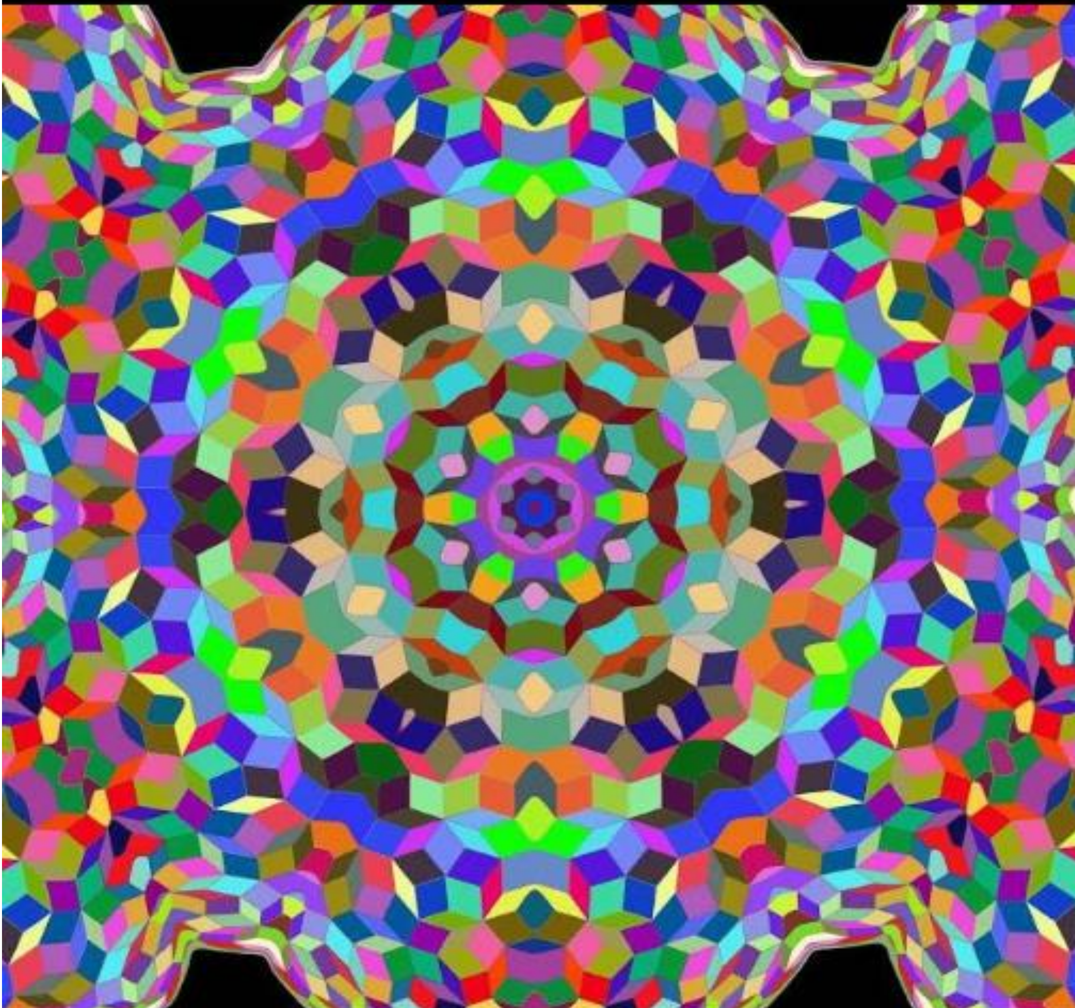
# MODUL
# GOEMETRI TRANSFORMASI



KHOERUL UMAM

# KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena hanya atas anugerahNya laporan penulisan buku Ajar Geometri Transformasi dapat terselesaikan walaupun masih banyak sekali kekurangan yang harus dipenuhi oleh penulis. .

Modul bahan Ajar Geometri Transformasi ini saya tulis disela – sela kesibukan mengajar di Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA, Jakarta. Hal yang menarik pada saat menuliskan buku ini adalah bagaimana menggambarkan masalah – masalah yang berkaitan langsung dengan kehidupan nyata sehingga pada saat membaca buku ini, anda akan merasa betapa matematika diskrit itu begitu dekat dalam kehidupan kita. Kita hanya tidak menyadari bahwa fenomena – fenomena dalam kehidupan dan lingkungan kita ternyata dekat kaitannya dengan berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Pada buku ini, penulis juga mengajak anda untuk mengetahui beberapa permasalah geometri praktis yang mungkin dibahas secara praktis sehingga buku ini tidak hanya cocok untuk kalangan mahasiswa tetapi juga para programmer yang mungkin membutuhkan. Meluangkan waktu untuk menulis merupakan suatu hal baru saya lakukan dalam kehidupan.

Saya sangat menyadari b matematika tentunya belum menarik beberapa kalangan pembaca namun mudah – mudahan ini dapat membantu para pembaca memahami ilmu Geometri Transformasi secara lebih komprehensif di kemudian hari.

Jakarta, Desember 2022

**Khoerul Umam**

# DAFTAR ISI

## Contents

# TRANSFORMASI

Sejak zaman Euclid (300 SM) sampai abad 17 M, geometri dipelajari dari perspektif synthesis sebagai disiplin ilmu. Selama abad 17 M sejumlah ide baru dalam matematika dikembangkan dan diterapkan dalam mempelajari geometri, dengan efek yang bersifat revolusi. Misalnya dengan menerapkan notasi-notasi pada konsep aljabar ke geometri. Fermat (1601-1650) dan Rene Descartes (1596-1650) menciptakan geometri analitik. Diferensial geometri dikembangkan sebagai suatu konsep dan menggunakan notasi dari kalkulus yang dikembangkan oleh Newton dan Leibniz diaplikasikan pada geometri. Di tahun 1782, seorang ahli matematika berusia 23 tahun, Felix Klein (1849-1925) mengusulkan suatu prinsip pemersatu untuk mengklasifikasikan berbagai geometri dan menjelaskan hubungan-hubungan diantara mereka. Inti dari gagasan atau konsep Klein itu adalah geometri transformasi.

Menurut pandangan Felix Klein tentang geometri, yaitu: Transformasi Geometri Euclides termuat dalam group transformasi Geometri Affine. Demikian juga group transformasi Geometri Affine, group transformasi Geometri Hiperbolik dan group transformasi

Geometri Elliptik masing-masing adalah suatu sub group dari group transformasi Geometri Proyektif dan yang terakhir ini adalah suatu sub group dari group transformasi Topologi. Topologi adalah cabang Geometri yang paling umum, tetapi yang termuda, yang sekarang masih terus berkembang. Topologi lahir pada tahun 1895, tokoh-tokohnya antara lain Leonhard Euler (1707–1893), dari Jerman, Henri Poincare (1854–1912) dari Perancis dan George Cantor (1845 – 1918) dari Jerman. Beberapa orang tokoh dari Geometri Proyektif antara lain Arthur Cayley (1821–1895) dari Inggris, Jean Victor Poncelet (1788–1867) dari Perancis dan K.G. Christian Von Christian Staudt (1798–1867) dari Jerman. Dapat dikatakan bahwa Geometri Proyektif mulai diakui sebagai sistem formal yang berdiri pada tahun 1859

Geometri Transformasi menawarkan pandangan yang dalam terhadap hakikat dari banyak topik tradisional, termasuk kongruensi, kesebangunan, dan simetri. Geometri transformasi juga berfungsi sebagai basis bagi banyak aplikasi kontemporer dalam seni, arsitek, engenering, film dan televise, yang lebih berarti lagi adalah bagaimana Felix Klein memberi definisi tentang suatu geometri: “Suatu geometri adalah suatu studi tentang sifat-sifat dari suatu himpunan *S* yang tetap tidak berubah bilamana elemen-elemen *S* ditransformasikan oleh sekelompok transformasi. Definisi ini menetapkan geometri transformasi sebagai suatu cara memahami hubungan-hubungan diantara semua geometri, Euclid dan non Euclid.

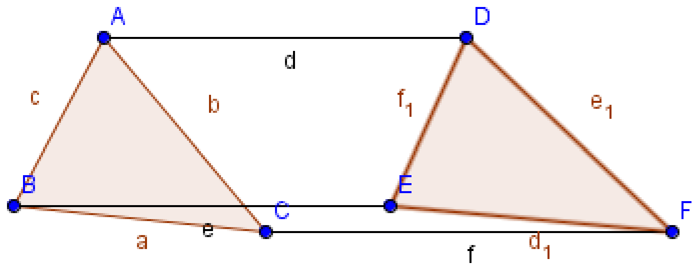
Transformasi pada bangun geometri merupakan suatu aturan yang memindahkan suatu bangun geometri dari suatu posisi ke posisi lain dengan tidak mengubah bentuk bangun tersebut. Dengan kata lain transformasi adalah pemetaan suatu titik A pada suatu bidang ke titik A. titik A' disebut bayangan dari titik A.

Dari semua transformasi dalam geometri, isometri adalah paling mendasar. Isometri artinya berukuran sama. Jika suatu isometri diterapkan ke suatu obyek, maka obyek tersebut berserta bayangannya mempunyai ukuran linear dan ukuran sudut yang sama. Isometri dalam geometri Euclid terdiri dari 4 kategori dan komposisinya: translasi, rotasi, refleksi dan dilatasi.

Dalam modul ini kita akan membahas tentang :

1. Translasi (Pergeseran)
2. Refleksi (Pencerminan)
3. Rotasi (Perputaran)
4. Dilatasi

# TRANSLASI (PERGESERAN)




Translasi atau pergeseran adalah transformasi yang memetakan suatu titik pada titik lain sebagai bayangannya. Salah satu contoh translasi yang bisa kita lihat adalah pergeseran atau perpindahan orang pada  eskalator dan lift. Peralatan yang biasa dipakai mal-mal ini berguna untuk memindahkan orang dari satu lantai ke lantai lain.  Selain itu, penggunaan konsep translasi sering digunakan programmer game dalam membuat games. Penerapan translasi terlihat pada pergerakan obyek saat mengikuti visualisasi dari persamaan garis.

Sifat-sifat translasi:

a. Bangun yang digeser (ditranslasikan) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

b. Bangun yang digeser (ditranslasikan) mengalami perubahan posisi.

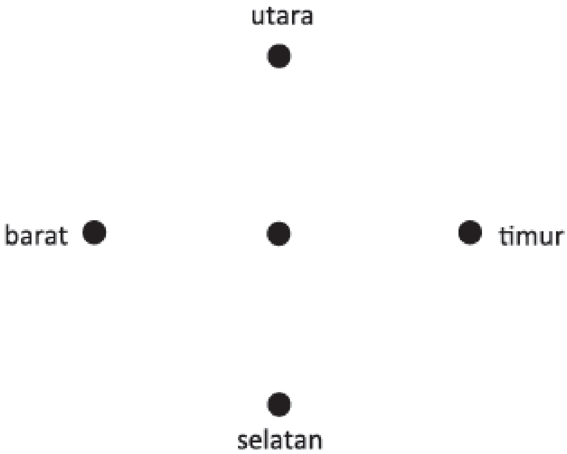
Menganalisis konsep translasi:

Empat orang anak dan seorang guru olahraga sedang berlatih mengover bola basket di lapangan olahraga. Mereka membuat formasi sebagai berikut: Keempat anak berdiri di empat penjuru (utara, selatan, timur dan barat) sedangkan guru mereka berdiri sebagai pusat penjuru. Tiap-tiap anak berjarak 4 meter dari guru olahraga mereka. Aturan latihan sebagai berikut :

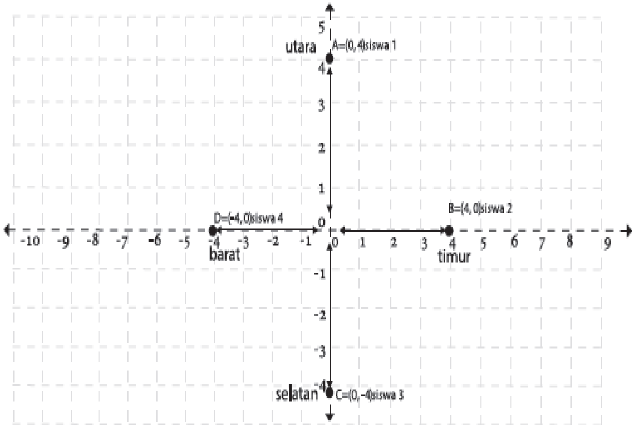
1) Guru mengover bola ke anak yang di utara dan anak tersebut akan mengover kembali ke gurunya, kemudian
2) Guru langsung mengover bola ke anak yang di timur, dan anak tersebut akan mengover kembali bola ke gurunya.
3) Demikian seterusnya, bola selalu diover ke gurunya, dan guru mengover bola secara siklis dari utara ke timur, ke selatan, ke barat dan kembali lagi ke utara.

Penyelesaian:

1) Gambar formasi cara berdiri keempat anak dan guru mereka pada latihan mengover bola basket sesuai permasalahan di atas adalah sebagai berikut:




2) Formasi mereka dalam sistem koordinat kartesius, anggap guru olahraga tersebut adalah titik pusat $O(0,0)$.




3) Coba gambarkan formasi mereka dalam bidang koordinat kartesius dengan guru olahraga tersebut adalah titik pusat $P(1,3)$.

Langkah 1. Letakkanlah titik $P(1,3)$ di koordinat kartesius.

Langkah 2. Buatlah garis di empat penjuru (utara, timur, selatan, dan barat) dengan titik $P$ adalah titik pusatnya.

Langkah 3. Bergeraklah empat satuan ke masing-masing penjuru dan letakkanlah sebuah titik serta berilah nama titik *A*, *B*, *C* dan *D*.

Langkah 4. Tentukanlah koordinat titik *A*, *B*, *C* dan *D* tersebut.

4) Perhatikan tabel berikut.

Tabel 1.1 Posisi keempat siswa dalam bidang koordinat kartesius dan hubungannya.

| Dari/ke | Siswa 1 *A*(0,4) | Siswa 2 *B*(4,0) | Siswa 3 *C*(0,-4) | Siswa 4 *D*(-4,0) |
|---|---|---|---|---|
| Siswa 1 *A*(0,4) | $\binom{0}{4}=\binom{0}{4}+\binom{0}{0}$ | $\binom{4}{0}=\binom{0}{4}+\binom{4}{-4}$ | $\binom{0}{-4}=\binom{0}{4}+\binom{0}{-8}$ | $\binom{-4}{0}=\binom{0}{4}+\binom{-4}{-4}$ |
| Siswa 2 *B*(4,0) | $\binom{0}{4}=\binom{4}{0}+\binom{-4}{4}$ | $\binom{4}{0}=\binom{4}{0}+\binom{0}{0}$ | $\binom{0}{-4}=\binom{4}{0}+\binom{-4}{-4}$ | $\binom{-4}{0}=\binom{4}{0}+\binom{-8}{0}$ |
| Siswa 3 *C*(0,-4) | $\binom{0}{4}=\binom{0}{-4}+\binom{0}{8}$ | $\binom{4}{0}=\binom{0}{-4}+\binom{4}{4}$ | $\binom{0}{-4}=\binom{0}{-4}+\binom{0}{0}$ | $\binom{-4}{0}=\binom{0}{-4}+\binom{4}{-4}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Siswa 4 <br> *D*(-4,0) | $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} =$ <br> $\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} =$ <br> $\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} =$ <br> $\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} =$ <br> $\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ |

Translasi dinyatakan oleh pasangan terurut $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ dengan *a* merupakan komponen translasi pada arah sumbu-*x* dan *b* merupakan komponen translasi pada arah sumbu-*y*. Secara umum dapat kita lihat bahwa jika titik *A*(*x*,*y*) ditranslasi oleh *T*(*a*,*b*), koordinat hasil translasinya adalah *A'*(*x*+*a*, *y*+*b*).

Misalkan *x*, *y*, *a* dan *b* adalah bilangan real, translasi titik *A*(*x*,*y*) dengan *T*(*a*,*b*) menggeser absis *x* sejauh *a* dan menggeser ordinat *y* sejauh *b*, sehingga diperoleh titik *A'*(*x*+*a*, *y*+*b*), secara notasi ditulis:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \xrightarrow{T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$$

**Contoh 1**

Sebuah titik $A(10, -8)$ ditranslasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$ dilanjutkan $T_2(1, -12)$ dan $T_3(-5, -6)$. Tentukan koordinat titik bayangan $A$ tersebut setelah ditranslasikan.

Penyelesaian

Alternatif 1

Permasalahan diatas dapat kita notasikan dengan:

$$A\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}} A''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} \xrightarrow{T_3\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}} A'''\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}$$

Dengan demikian, proses translasi dapat dilakukan secara tiga tahap

Tahap 1

$$A\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+10\\2-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 1 adalah $A'(9, -6)$

Tahap 2

$$A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{T_2\begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}}A''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9\\-12-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-18\end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 2 adalah *A''*(10, -18)

Tahap 3

$$A''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}\xrightarrow{T_3\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}}A'''\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}$$

$$A'''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+10\\-6-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-24\end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 3 adalah *A'''* (5, -24). Dengan demikian bayangan titik *A*(10, -8) setelah ditranslasikan berturut-turut dengan $T_1$(-1, 2) dilanjutkan $T_2$(1, -12) dan $T_3$(-5, -6) adalah *A'''* (5, -24).

Alternatif 2

Permasalahan translasi di atas, dapat juga kita proses secara langsung atau tidak bertahap, sebagai berikut:

$$A\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix}\xrightarrow{T_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{T_2\begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}}A''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}\xrightarrow{T_3\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}}A'''\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 + 1 - 1 + 10 \\ -6 - 12 + 2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian bayangan titik $A(10, -8)$ setelah ditranslasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$ dilanjutkan $T_2(1, -12)$ dan $T_3(-5, -6)$ adalah $A'''$ (5, -24).

**Contoh 2**

Sebuah garis $g$ dengan persamaan $y = mx$, ditranslasikan dengan $T(x_1, y_1)$ sehingga terbentuk garis $g'$. Jika garis $g'$ melalui titik $B(x_2, y_2)$ maka tentukanlah nilai $m$.

Penyelesaian

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x \\ y_1 + y \end{pmatrix}$$

Diperoleh $x' = x_1 + x$ atau $x = x' - x_1$ serta $y = y' - y_1$ atau $y' = y_1 - y$ sehingga dengan mensubstitusikan ke persamaan garis $g$ diperoleh garis $g'$ dengan persamaan:

$y = mx \rightarrow y = y' - y_1$

$\rightarrow y' - y_1 = m(x - x_1)$

Karena garis *g'* melalui titik $A(x_2, y_2)$ maka $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ sehingga $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

**Contoh 3**

Jika bayangan dari titik $A(2,3)$ adalah $A'(3,-1)$ maka tentukanlah aturan translasinya

Jawab :

Diketahui $A(2,3)$ dan $A'(3,-1)$ maka $x = 2$, $y = 3$, $x' = 3$ dan $y' = -1$

Dengan menggunakan persamaan translasi

$x' = x + a$ dan $y' = y + b$

$3 = 2 + a \rightarrow a = 3 - 2 = 1$

$-1 = 3 + a \rightarrow b = -1 - 3 = -4$

Jadi translasi yang memetakan titik $A(2,3)$ ke titik $A'(3,-1)$ adalah $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

**Latihan Soal**

1. Persamaan bayangan garis $4x - 3y + 5 = 0$ oleh translasi sejauh matriks $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ adalah …
2. Diketahui koordinat titik P adalah (4,-1). Oleh karena translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ diperoleh bayangan titik P, yaitu P'(-2*a*, -4), nilai *a* adalah …
3. Titik P'(2, -4) adalah bayangan titik P(3, 5) oleh translasi T. Translasi T = …
4. Jika garis $y = x + 5$ ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka persamaan bayangannya adalah …
5. Garis $y = 2x-3$, ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, maka persamaan bayangan garisnya adalah …

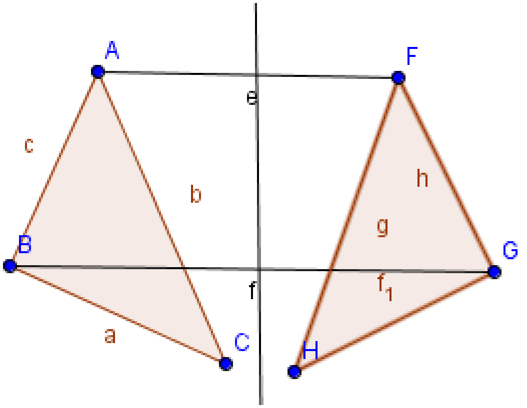
6. Tentukanlah bayangan titik –titik berikut terhadap translasi $T$

   a. $A(3,1)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b. $B(-4,2)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

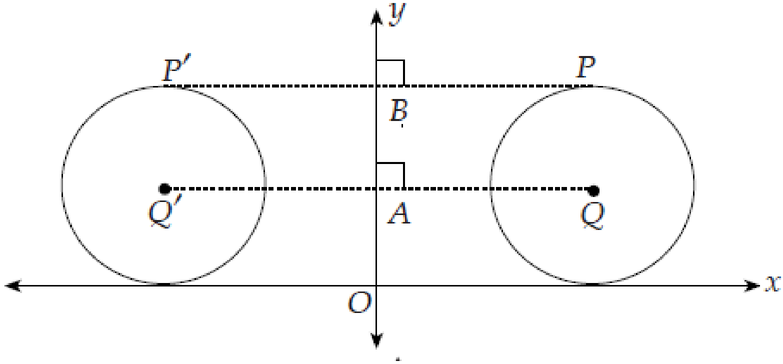
   c. $C(2,3)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

# REFLEKSI (PENCERMINAN)




Refleksi atau pencerminan adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan menggunakan sifat benda dan bayangannya pada cermin datar. Kalian pasti sering bercermin, ketika bercermin amatilah diri dan bayangan kalian. Apakah memiliki bentuk, ukuran dan jarak yang sama? .

Sekarang perhatikan lingkaran *Q* yang dicerminkan terhadap sumbu *y* berikut ini

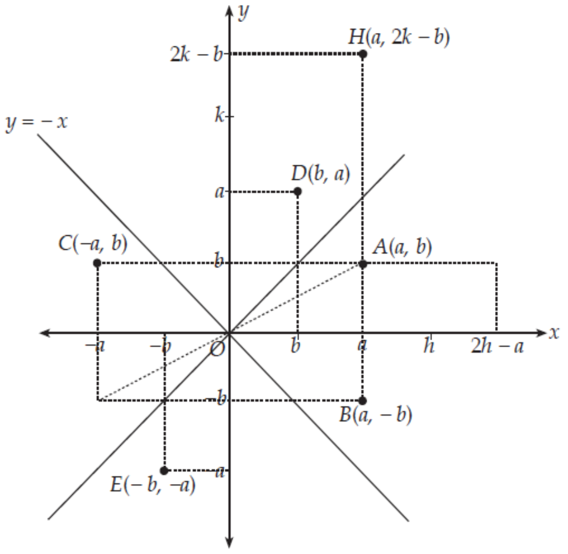



Dari gambar tersebut, kalian dapat mengatakan bahwa:

1. Lingkaran *Q* kongruen dengan bayangannya, yaitu lingkaran *Q'*.
2. Jarak setiap titik pada lingkaran *Q* ke cermin sama dengan jarak setiap titik bayangannya ke cermin, yaitu *QA* = *Q'A* dan *PB* = *P'B*.
3. Sudut yang dibentuk oleh cermin dengan garis yang menghubungkan setiap titik ke bayangannya adalah sudut siku-siku.

Sifat-sifat tersebut merupakan sifat-sifat refleksi

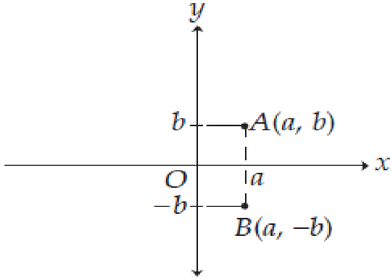
Dengan menggunakan sifat-sifat ini, kalian dapat menentukan bayangan sebuah titik yang dicerminkan terhadap suatu titik lain. Perhatikan gambar berikut:




Dari gambar tampak bahwa:

a. Pencerminan titik *A(a,b)* terhadap sumbu *x* menghasilkan bayangan titik *B(a' , b')* dengan *a' = a* dan *b' = b*.

*A(a , b)* → *B(a , -b)*




*a' = a* → *a' =* 1 . *a* + 0 . *b, b' =* -*b* → 0 . *a* – 1 . *b*

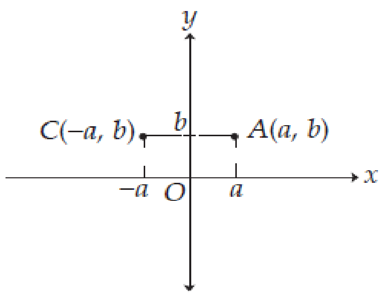
Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$B = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

b. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap sumbu *y* menghasilkan bayangan titik *C(a' , b')* dengan *a'* = − *a* dan *b'* = *b*

*A(a , b)* → *C(a' , b')*



$a' = -a \rightarrow a' = -1 \cdot a + 0 \cdot b$

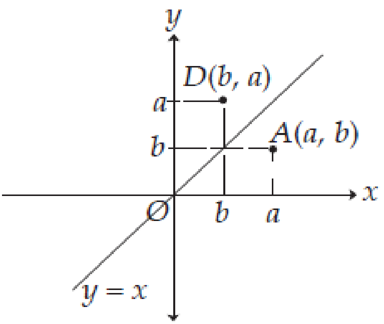
$b' = b \rightarrow b' = 0 \cdot a + 1 \cdot b$

matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$C = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

c. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan titik *D(a' , b')* dengan $a' = b$ dan $b' = a$

*A(a , b)* → *D(a' , b')*




$a' = b \rightarrow a' = 0 \cdot a + 1 \cdot b$

$b' = a \rightarrow b' = 1 \cdot a + 0 \cdot b$

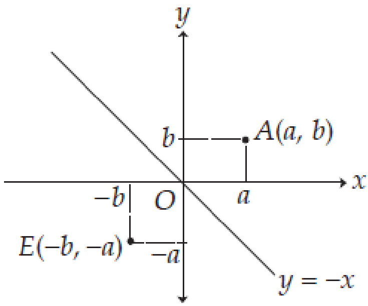
matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$D = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

d. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan titik *E(a' , b')* dengan $a' = -b$ dan $b' = -a$

$A(a , b) \rightarrow D(-b , -a)$




$a' = -b \rightarrow a' = 0 \cdot a - 1 \cdot b$

$b' = -a \rightarrow b' = -1 \cdot a + 0 \cdot b$

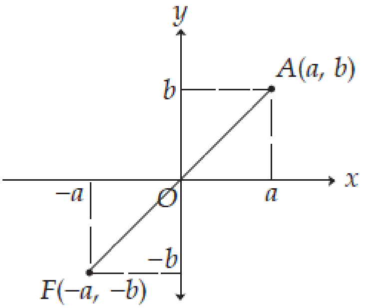
matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$E = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

e. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap titik asal O(0,0) menghasilkan bayangan titik *F(a' , b')* dengan $a' = -a$ dan $b' = -b$

$A(a , b) \to F(-a , -b)$




$a' = -a \to a' = -1 \,.\, a + 0 \,.\, b$

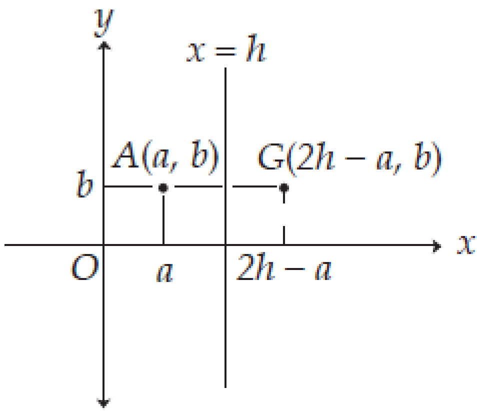
$b' = -b \to b' = 0 \,.\, a - 1 \,.\, a$

matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$F = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

f. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap garis $x = h$ menghasilkan bayangan titik *G(a' , b')* dengan $a' = 2h - a$ dan $b' = -b$

$A(a\ ,\ b) \rightarrow G(2h{-}a\ ,\ {-}b)$




$a' = 2h - a \ \rightarrow a' = (-\ 1\ .\ a + 0\ .\ b) + 2h$

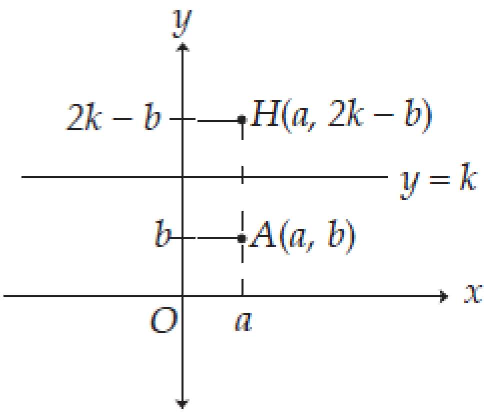
$b' = -b \rightarrow b' = (0\ .\ a - 1\ .\ a) + 0$

jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut:

$$G = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

g. Pencerminan titik $A(a\ ,\ b)$ terhadap garis $y = k$ menghasilkan bayangan titik $H(a'\ ,\ b')$ dengan $a' = a$ dan $b' = 2k - b$

$A(a\ ,\ b) \rightarrow H(a\ ,\ 2k - b)$




$a' = a \rightarrow a' = (-1 . a + 0 . b) + 0$

$b' = 2k - b \rightarrow b' = (0 . a - 1 . a) + 2k$

jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut:

$$G = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

**Contoh 1**

Tentukan bayangan dari titik-titik berikut yang di reflesikan terhadap sumbu *x*, kemudian gambarkan bayangannya pada bidang koordinat cartesius

a. *A(3 , 2)* c. *C(-2 , 4)*

b. *B(5 , -1)* d. *D(-3, -3)*

Jawab

a. Titik $A(3, 2) \rightarrow x = 3$ dan $y = 2$ maka diperoleh

$x' = x = 3$ dan $y' = y = -2$

Jadi bayangan dari titik $A(3, 2)$ yang direflesikan terhadap sumbu $x$ adalah $A'(3, -2)$

b. Titik $B(5, -1) \rightarrow x = 5$ dan $y = -1$ maka diperoleh

$x' = x = 5$ dan $y' = -y = -(-1) = 1$

Jadi bayangan dari titik $B(5, -1)$ yang direflesikan terhadap sumbu $x$ adalah $A'(5, 1)$

c. Titik $C(-2, 4) \rightarrow x = -2$ dan $y = 4$ maka diperoleh

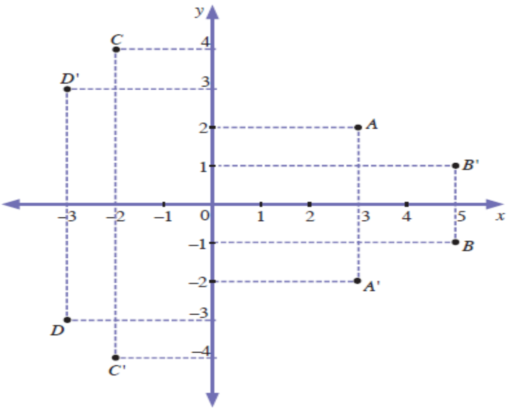
$x' = x = -2$ dan $y' = -y = -4$

Jadi bayangan dari titik $C(-2, 4)$ yang direflesikan terhadap sumbu $x$ adalah $A'(-2, -4)$

d. Titik $D(-3, -3) \rightarrow x = -3$ dan $y = -3$ maka diperoleh

$x' = x = -3$ dan $y' = -y = -(-3) = 3$

Jadi bayangan dari titik $D(-3, -3)$ yang direflesikan terhadap sumbu $x$ adalah $A'(-3, 3)$




**Contoh 2**

Diketahui segitiga *ABC* dengan titik-titik sudutnya yaitu *A*(1 , 4), *B*(3 , 1), dan *C*(4 , 6). Gambarlah bayangan dari segitiga *ABC* yang direflesikan terhadap sumbu *x* pada bidang koordinat cartesius

Jawab

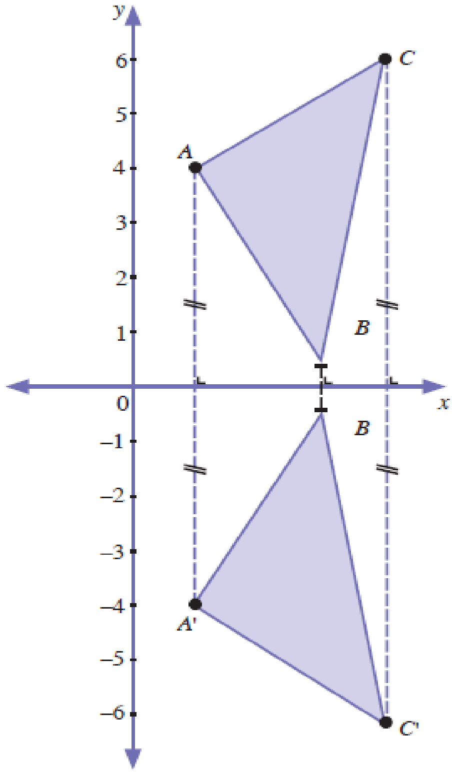
Diketahui titik-titik sudut segitiga *A*(1 , 4), *B*(3 , 1), dan *C*(4 , 6)

Koordinat bayangan titik-titik sudut segitiga adalah

*A*(1 , 4) yang direflesikan terhadap sumbu *x* adalah *A'*(1, -4)

*B*(3 , 1) yang direflesikan terhadap sumbu *x* adalah *B'*(3, -1)

*C*(4 , 6) yang direflesikan terhadap sumbu *x* adalah *C'*(4, -6) bayangan dari segitiga *ABC* diperoleh dengan menghubungkan titik-titik *A'*(1, -4), *B'*(3, -1), dan *C'*(4, -6) seperti pada gambar berikut:




**Contoh 3**

Tentukan bayangan dari *A*(3 , 4) dan *B*(-2 , 3) yang direflesikan terhadap sumbu *y*

Jawab

$A(3\ ,\ 4)$ maka $x = 3$ dan $y = 4$

Dengan menggunakan persamaan transformasi refleksi terhadap sumbu $y$, yaitu $x' = x$ dan $y' = y$

Diperoleh

$x' = -x = -3$

$y' = y = 4$

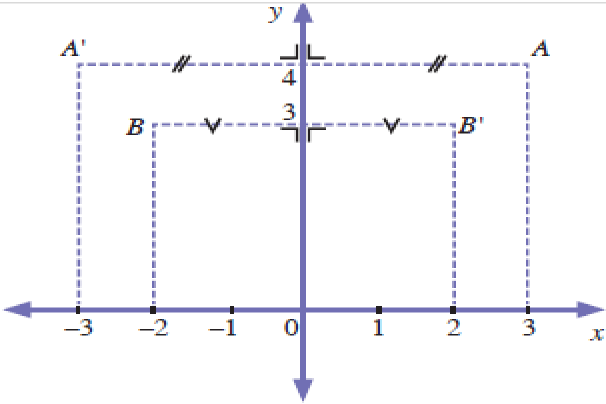
Jadi bayangan dari $A(3\ ,\ 4)$ yang direflesikan terhadap sumbu $y$ adalah $A'(-3\ ,4)$

$B(-2\ ,\ 3)$ maka $x = -2$ dan $y = 3$

$x' = -x = -\ (-2) = 2$

$y' = y = 3$

Jadi bayangan dari $B(-2\ ,\ 3)$ yang direflesikan terhadap sumbu $y$ adalah $B'(2\ ,3)$




**Contoh 4**

Koordinat-koordinat titik sudut suatu segiempat *ABCD* adalah *A*(1 , 0),

*B*(8 , 0), *C*(6 , 3) dan *D*(3 , 3). Tentukan:

a. Bayangan dari titik-titik sudut segiempat *ABCD* jika direflesikan terhadap garis $y = -x$

b. Luas segiempat *ABCD* tersebut.

Jawab

a. $A(1 , 0) \rightarrow A'(0 , -1)$

Jadi, bayangan dari *A*(1 , 0) adalah *A'*(0 , -1)

$B(8 , 0) \rightarrow A'(0 , -8)$

Jadi, bayangan dari *B*(8 , 0) adalah *B'*(0 , -8)

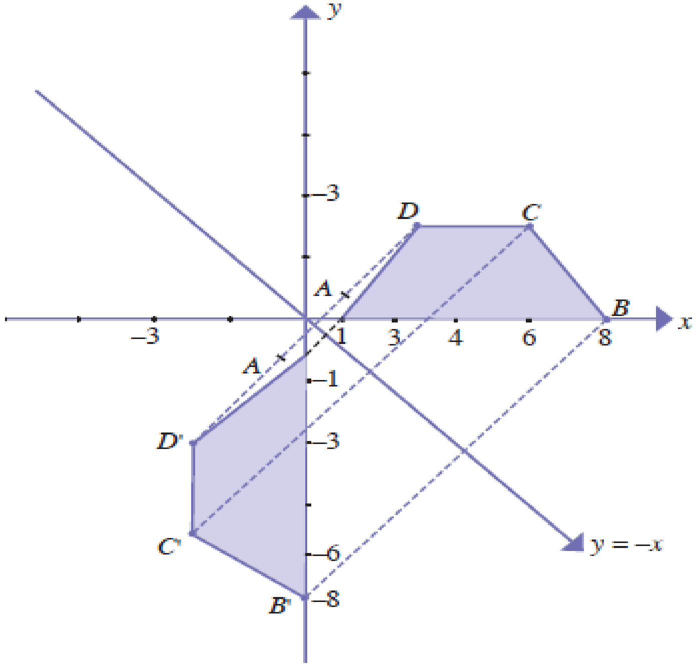
$C(6 , 3) \rightarrow C'(-3 , -6)$

Jadi, bayangan dari $C(6, 3)$ adalah $C'(-3, -6)$

$D(3, 3) \rightarrow D'(-3, -3)$

Jadi, bayangan dari $D(3, 3)$ adalah $D'(-3, -3)$

b. Bidang datar dan bayangan yang terbentuk terlihat seperti gambar berikut:




Segiempat yang terbentuk adalah trapesium *ABCD* dengan panjang $AB = 7$ satuan, tinggi $DP = 3$ satuan dan panjang $DC = 3$ satuan. Oleh karena itu, luas trapesium *ABCD* adalah

$\frac{1}{2}.(AB + DC)DP = \frac{1}{2}(7 + 3).3 = \frac{1}{2} \times 30 = 15$ satuan$^2$

**Contoh 5**

Kooordinat-koordinat titik suatu segitiga *ABC* adalah *A*(4 , 0), *B*(6 , 3), dan *C*(1 , 4). Tentukan bayangan dari titik-titik tersebut jika direflesikan terhadap garis *x* = -2

Jawab

Diketahui garis *x* = *a* = -2

Bayangan ditentukan dengan persamaan refleksi garis *x* = *a* berikut

$x' = 2a - x$

$y' = y$

Pada titik *A*(4 , 0), *x* = 4 dan *y* = 0 diperoleh

$x' = 2a - x = 2(-2) - 4 = -8$

$y' = y = 0$

Jadi bayangan dari titik *A*(4 , 0) adalah *A'*(-8 , 0)

Pada titik $B(6 , 3)$, $x = 6$ dan $y = 3$ diperoleh

$x' = 2a - x = 2 (-2) - 6 = -10$

$y' = y = 3$

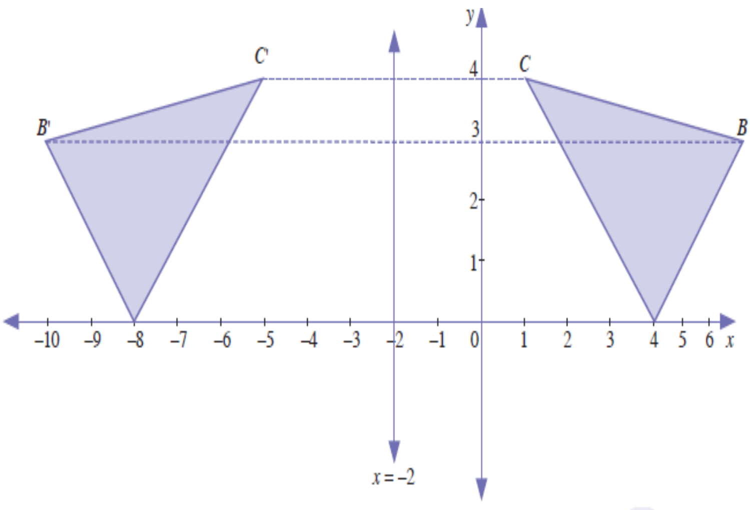
Jadi bayangan dari titik $B(6 , 3)$ adalah $B'(-10 , 3)$

Pada titik $C(1 , 4)$, $x = 1$ dan $y = 4$ diperoleh

$x' = 2a - x = 2 (-2) - 1 = -5$

$y' = y = 4$

Jadi bayangan dari titik $C(1 , 4)$ adalah $C'(-5 , 4)$



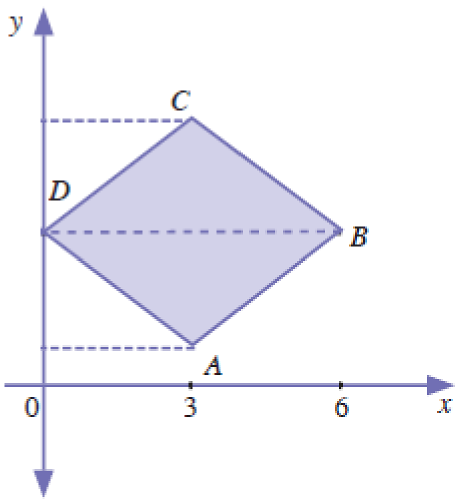
## LATIHAN SOAL

1. Dengan menggunakan matriks refleksi terhadap sumbu $x$, tentukan bayangan titik-titik berikut:

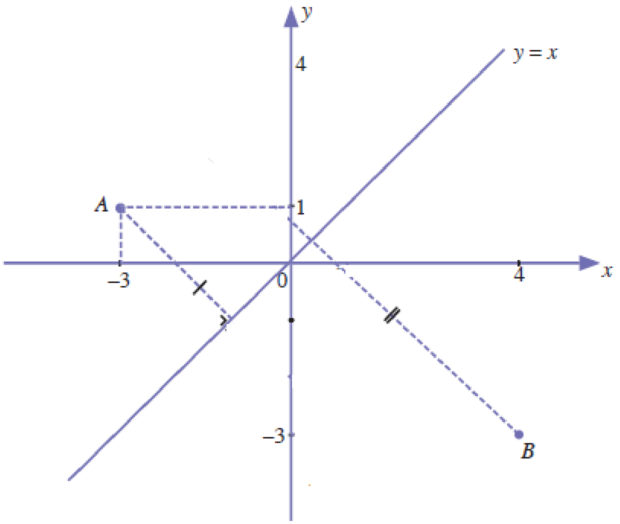
   a. $A(3, 2)$  c. $C(-2, 4)$

   b. $B(5, -1)$  d. $D(-3, -3)$

2. Koordinat-koordinat titik suatu bidang $ABCD$ adalah $A(3, 1)$, $B(6, 3)$, $C(3, 5)$ dan $D(0, 3)$. Gambarkan bayangan dari bangun tersebut jika direflesikan terhadap sumbu $y$ dan tentukan nama bangun dari bayangan yang terbentuk.



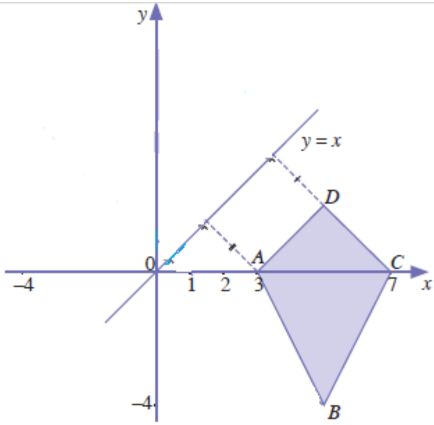
3. Tentukan bayangan dari titik $A(-3\ ,\ 1)$ dan $B(4\ ,\ -3)$ yang direflesikan terhadap garis $y = x$




4. Koordinat-koordinat titik sudut suatu segiempat *ABCD* adalah $A(3\ ,\ 0)$, $B(5\ ,\ -4)$, $C(7\ ,\ 0)$ dan $D(5\ ,\ 2)$. Tentukan:

   a. Bayangan dari titik-titik sudut segiempat *ABCD* jika titik-titik sudut tersebut direflesikan terhadap garis $y = x$

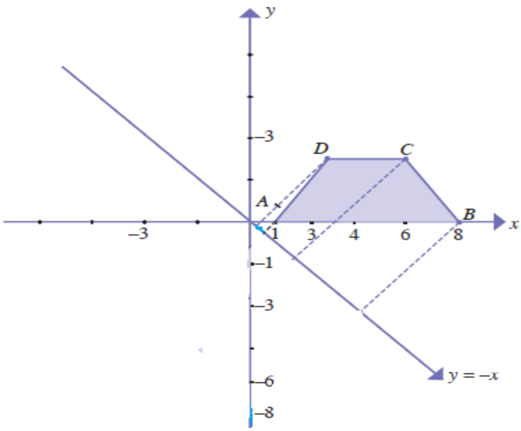
   b. Luas segiempat *ABCD* dan *A'B'C'D'* tersebut.



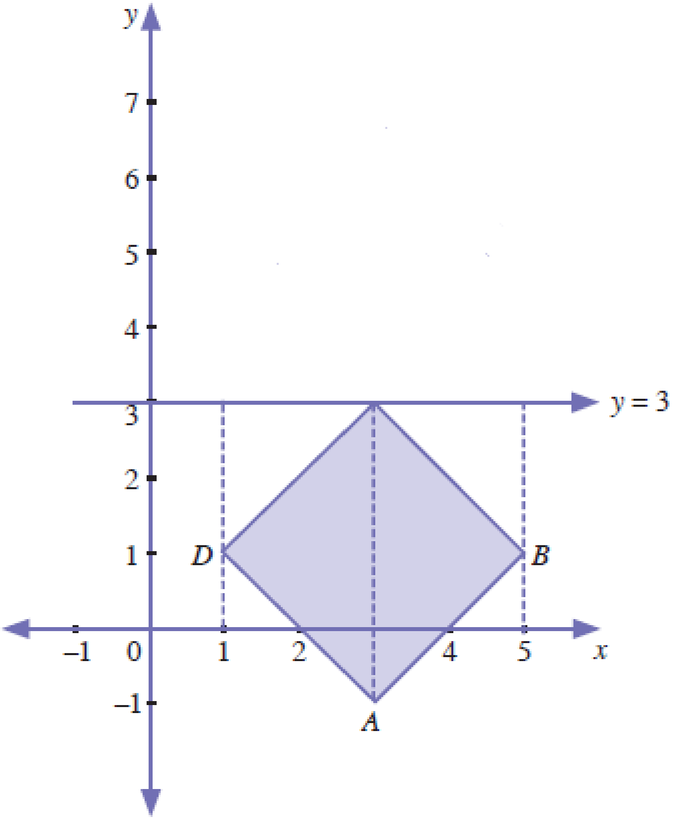

5. Koordinat-koordinat titik sudut suatu segiempat *ABCD* adalah *A*(1 , 0), *B*(8 , 0), *C*(6 , 3) dan *D*(3 , 3). Tentukan:

   a. Bayangan dari titik-titik sudut segiempat *ABCD* jika direflesikan terhadap garis $y = -x$

   b. Luas segiempat *ABCD* tersebut



6. Koordinat-koordinat sudut suatu segiempat adalah $A(3\ ,\ -1)$, $B(5\ ,\ 1)$, $C(3\ ,\ 3)$ dan $D(\ 1\ ,\ 1)$. Tentukan bayangan dari titik-titik tersebut jika direflesikan terhadap garis $y = 3$



# Komposisi Transformasi

Komposisi transformasi yaitu transformasi yang dikerjakan dua kali atau lebih secara berurutan. Transformasi $T_1$ dilanjutkan dengan transformasi $T_2$ terhadap suatu titik A dapat ditulis:

$(T_2 \circ T_1)(A) \rightarrow T_2(T_1(A))$

Sebaliknya, $T_1 \circ T_2$ (dibaca $T_1$ dot $T_2$) berarti transformasi $T_2$ dilanjutkan $T_1$.

$(T_1 \circ T_2)(A) \rightarrow T_1(T_2(A))$

**Contoh:**

Jika $T_1$ adalah translasi terhadap $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T_2$ adalah refleksi terhadap sumbu-*x*, dan $T_3$ adalah rotasi terhadap pusat O(0,0) sejauh $90^0$ searah jarum jam. Tentukan bayangan titik A(-3,4) oleh transformasi berikut:

a. $T_2 \circ T_1$ b. $T_1 \circ T_3$

Jawab

a. $T_2 \circ T_1\ (A)$ artinya titik A ditranslasikan terhadap $T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, kemudian dilanjutkan oleh $T_2$, yaitu refleksi terhadap sumbu-*xi*.

$A(x,y) \xrightarrow{T_1} A'(x+a, y+b)$

$A'(x+a, y+b) \xrightarrow{T_2} A''(x+a, -(y+b))$

A(-3,4) maka $x$ = -3, $y$ = 4, $a$ = 2, dan $b$ = 3

Diperoleh

A(-3,4) maka $x$ = -3, $y$ = 4, $a$ = 2, dan $b$ = 3

Jadi, bayangan titik A(-3,4) oleh $T_2 \circ T_1$ adalah A''(-1,-7)

b. $T_1 \circ T_3\ (A)$ artinya titik A ditransformasi oleh $T_3$, yaitu dirotasikan oleh $R(0,90^0)$, kemudian dilanjutkan oleh transformasi $T_1$, yaitu translasi terhadap $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Cos $(-90^0) = 0$ dan sin $(-90^0) = 1$

$A(x,y) \xrightarrow{T_3} A'(x.0 - y(-1), x(-1) + y.0)$

A’($y$,-$x$) $\xrightarrow{T_1}$ A’($y$+$a$, -$x$+$b$)

A(-3,4) maka $x$ = -3, $y$ = 4, $a$ = 2, dan $b$ = 3

Diperoleh

A(-3,4) $\xrightarrow{T_1 \circ T_3}$ A’’(4+2, -(-3+3)

Jadi, bayangan titik A(-3,4) oleh komposisi $T_1 \circ T_3$ adalah

A’’(6,6)

# KOMPOSISI TRANSLASI

Jika translasi $T_1 = \binom{a}{b}$ dan $T_2 = \binom{c}{d}$, maka komposisi translasi $T_1$ dan $T_2$ dapat diwakili oleh sebuah translasi tunggal yang ditentukan oleh:

$$T = \binom{a+c}{b+d}$$

Sifat-sifat komposisi translasi:

a. Untuk dua translasi berurutan berlaku: $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ (komutatif)

b. Untuk tiga translasi berurutan berlaku: $(T_1 \circ T_2)T_3 = T_1\,(T_2 \circ T_3)$ (asosiatif)

**Contoh:**

Titik A (6,3) ditranslasikan oleh $T_1 = \binom{2}{-3}$ kemudian dilanjutkan dengan $T_2 = \binom{-1}{4}$. Bayangan titik A adalah …

Penyelesaian

$$T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

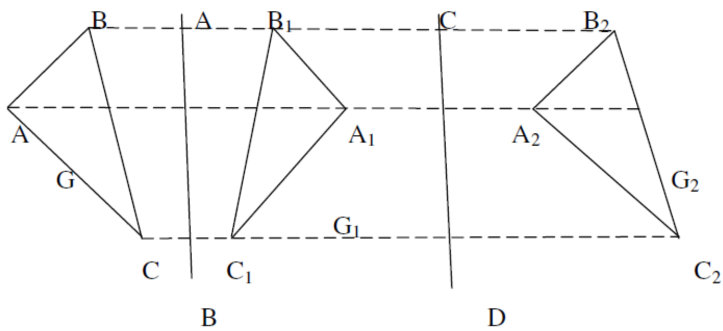
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangannya adalah A' (7,4)

## Komposisi Refleksi

**a) Komposisi dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu sejajar**




1) $G_1$ adalah bayangan $G$ karena refleksi terhadap sumbu $AB$

2) $G_2$ adalah bayangan $G_1$ karena refleksi terhadap sumbu $CD$

3) $G_2$ juga merupakan bayangan dari $G$ karena refleksi terhadap sumbu $AB$ dilanjutkan refleksi terhadap sumbu $CD$

b) **Komposisi dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu yang sejajar sumbu *x***

Dua sumbu sejajar yang sejajar terhadap sumbu $x$ misalkan titik $P(x', y)$ dicerminkan terhadap garis $y = a$, kemudian dicerminkan terhadap garis $y = b$, maka diperoleh bayangan

$P''(x, 2(b - a) + y)$

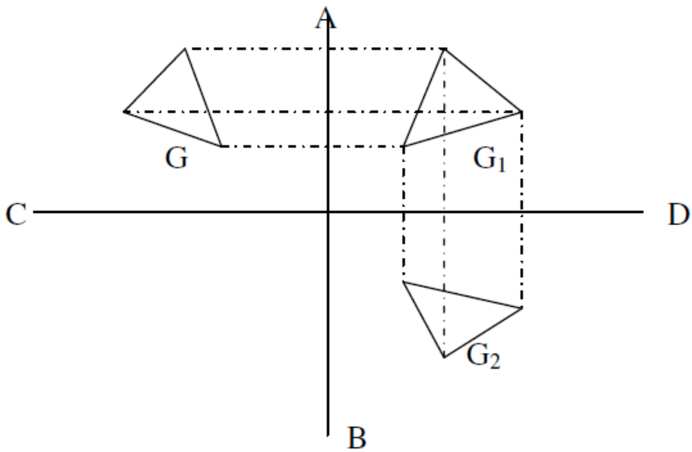
secara pemetaan dapat dituliskan:

$M_{y=0} M_{y=a} : P(x, y) \rightarrow P''(x, 2(b - a) + y)$

Misalkan titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = b$, kemudian dicerminkan terhadap garis $y = a$, maka diperoleh bayangan $P''(x, 2(b - a) + y)$.

c) Komposisi dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu yang saling tegak lurus

$$G \xrightarrow{M_2 \circ M_1} G_2$$




1) Segitiga *G* direflesikan dua kali berurutan terhadap sumbu *AB* lalu *CD.*

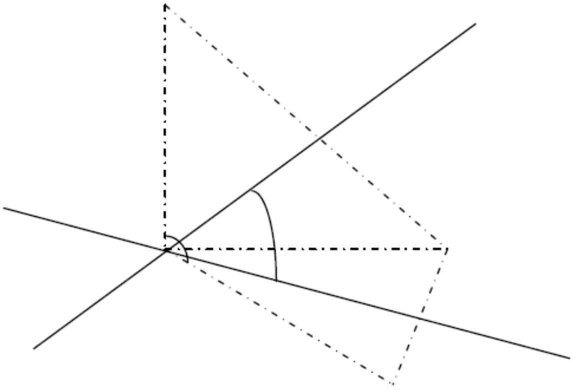
2) $G_1$ adalah bayangan *G* karena refleksi terhadap sumbu *AB*.

3) $G_2$ adalah bayangan $G_1$ karena refleksi terhadap sumbu *CD*.

4) $G_2$ juga merupakan bayangan dari *G* karena refleki berurutan terhadap suatu sumbu *AB* dilantukan refleksi terhadap sumbu *CD.*

5) *Misalkan* $M_1$ adalah refleksi terhadap $AB$ dan $M_2$ adalah refleksi terhadap $CD$.

**d) Komposisi dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu yang saling berpotongan**



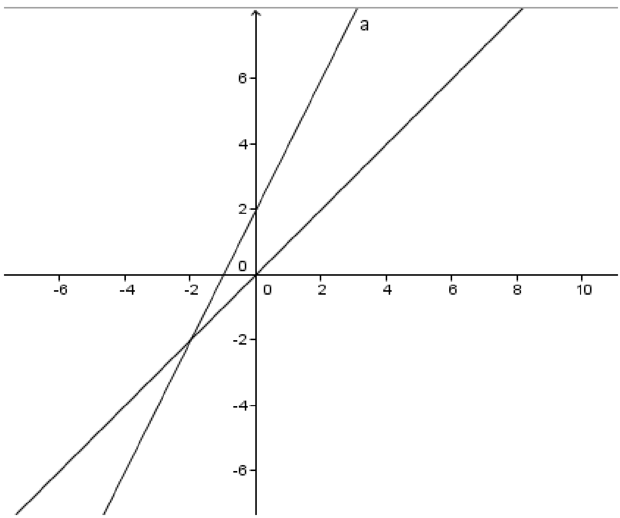
1) Garis $l$ dan $m$ berpotongan di titik $P$.
2) Garis $l$ dan $m$ membentuk sudut $\theta$.
3) Titik $A_1$ adalah bayangan titik $A$ karena refleksi terhadap garis $l$.
4) Titik $A_2$ adalah bayangan titik $A_1$ karena refleksi terhadap garis $m$.

5) Titik $A_2$ merupakan bayangan titik $A$ karena dua refleksi berurutan terhadap garis $l$ dan garis $m$.

6) Misalkan $M_1$ adalah refleksi terhadap sumbu $l$ dan $M_2$ adalah refleksi terhadap sumbu $m$.

## LATIHAN SOAL TRANSLASI DAN REFLEKSI

1. Bayangan garis $y = 2x + 2$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$ adalah …



2. Bayangan titik $A(4 , 1)$ oleh pencerminan terhadap garis $x = 2$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $= 2$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $x = 5$ adalah titik …

3. Pencerminan terhadap garis $y = - x$

   $P(x , y) \rightarrow P'(-y , -x)$ matriksnya $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Bayangan oleh rotasi $[0 , 180^0]$ , kemudian dilanjutkan oleh pencerminan terhadap garis $y = - x$ adalah …

4. Ditentukan matriks transformasi $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hasil transformasi titik (2 , -1) terhadap $T_1$ dilanjutkan $T_2$ adalah …

5. Garis dengan persamaan $2x – y – 6 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ dilanjutkan dengan bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, persamaan bayangannya adalah …

6. Persamaan peta garis $2x – y + 5 = 0$ karena refleksi terhadap garis $x + 3 = 0$ dilanjutkan dengan transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah …

7. Persamaan bayangan garis $4x - 3y + 5 = 0$ oleh translasi sejauh matriks $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah …

8. Diketahui koordinat titik $P$ adalah (4 , -1), oleh karena translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ diperoleh bayangan titik $P$, yaitu $P'(-2a\ ,\ -4)$ , nilai $a$ adalah …

9. Titik $P'(2\ ,\ -4)$ adalah bayangan titik $P(3\ ,\ 5)$ oleh translasi $T$. Translasi $T$ adalah …

10. Jika garis $y = x + 5$ ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, maka persamaan bayangannya adalah ….

## PEMBAHASAN SOAL TRANSLASI DAN REFLEKSI

1. Rumus dasar $P(x\ ,y) \rightarrow P'(x'\ ,y')$ … (1)

   Pencerminan terhadap garis $y = x$

   $P(x\ ,y) \rightarrow P'(y\ ,x)$ ….. (2)

   Dari (1) dan (2) maka

   $x' = y$ dan $y' = x$ ….. (3)

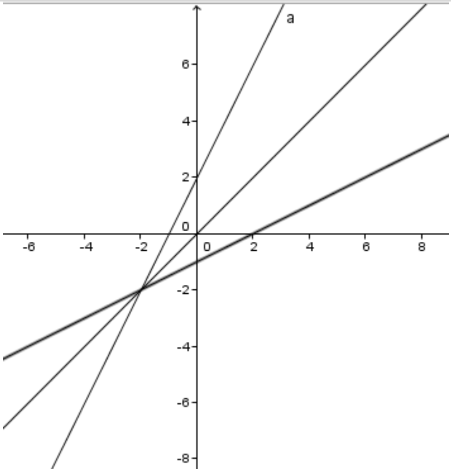
   substitusikan (3) ke garis $y = 2x + 2$

   $x' = 2y' + 2$

   $2y' = x - 2$

   $y' = \frac{x}{2} - 1$

   hasil pencerminannya adalah $y = \frac{x}{2} - 1$




2. Cara 1 dengan rumus

   Pencerminan terhadap garis $x = h$

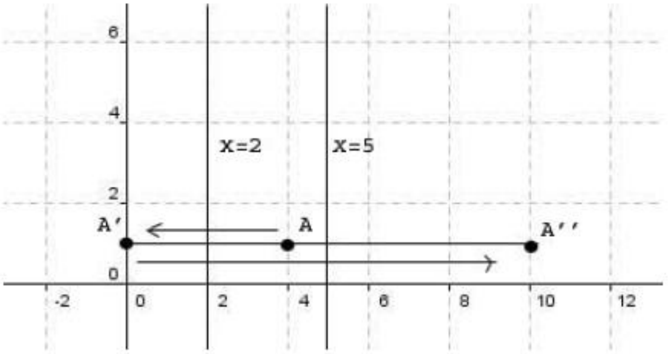
   $P(x , y) \to P'(x' , y') = P'(2h - x , y)$

   $A(4 , 1) \xrightarrow{x = 2} A'(2(2) - 4 , 1)$

   $A'(0 , 1) \xrightarrow{x = 5} A''(2.5 - 0 , 1)$

   $A''(10 ,1)$

   Cara 2 dengan gambar




Titik $A(4\ ,\ 1)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ didapat $A'(0\ ,\ 1)$ kemudian dicerminkan lagi terhadap garis $x = 5$, didapat $A''(10\ ,\ 1)$

3. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (y\ ,x)$

$x' = y$ dan $y' = x$

4. Transformasi $T_1$ dilanjtukan oleh $T_2 = T_2 \circ T_1$

$T_2 \circ T_1 = M_2 \times M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Hasil transformasi titik (2 , -1) terhadap $T_1$ dilanjutkan $T_2$ adalah

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow (-4 , 3)$

5. Matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Garis yang persamaan $2x - y - 6 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ dilanjtukan dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bayangannya ditentukan sebagai berikut:

$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{-1-0} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + 2y' \\ -y' \end{pmatrix}$$

$\rightarrow x = x' + 2y'$ dan $y = y'$

Substitusikan harga $x$ dan $y$ kedalam persamaan garis $2x - y - 6 = 0$, didapat:

$2(x' + 2y') - (- y) - 6 = 0$

$\rightarrow 2x' + 4y' + y' - 6 = 0$

$\rightarrow 2x' + 5y' - 6 = 0$

Jadi bayangan akhirnya adalah $2x + 5y - 6 = 0$

6. Garis $x + 3 = 0 \rightarrow x = - 3$

$P(x , y) \overrightarrow{refleksi\ x = a}\ P'(2a - x , y)$

$2x - y + 5 = 0\ \overrightarrow{refleksi\ x = -3}\ 2(2(-3)-x) - y + 5 = 0$

$\rightarrow 2(-6 - x) - y + 5 = 0 \rightarrow -2x - y - 7 = 0$

Garis $-2x - y - 7 = 0$ ini ditransformasikan oleh matriks

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bayangannya ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \frac{1}{-2+4} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x' & -2x' \\ \frac{1}{2}y' & 1y' \end{pmatrix}$$

Didapat $x = \frac{1}{2}x' - 2y'$ dan $y = \frac{1}{2}x' - y'$

Substitusikan ke dalam persamaan garis $-2x - y - 7 = 0$

$\rightarrow -2\ (\frac{1}{2}x' - 2y') - (\frac{1}{2}x' - y') - 7 = 0$

$\rightarrow -x' + 4y' - \frac{1}{2}x' + y' - 7 = 0$

$\rightarrow -\frac{3}{2}x' + 5y' - 7 = 0$

$\rightarrow 3x' + 10y' - 14 = 0$

$\rightarrow 3x + 10y - 14 = 0$

7. $4x - 3y + 5 = 0 \xrightarrow{T = \binom{2}{-3}} 4(x - 2) - 3(y + 3) + 5 = 0$

$\rightarrow 4x - 8$ - $3 - 8 - 3y - 9 + 5 \rightarrow 4x - 3y - 12 = 0$

$4x - 3y - 12 = 0 \xrightarrow{refleksi\ y = x} 4y - 3x - 12 = 0$

Jadi persamaan bayangannya adalah $4y - 3x - 12 = 0$

8. $T = \binom{2}{a}$ : $P(4\ ,\ 1) \rightarrow P'(-2a\ ,\ -4)$

$P'(-2a\ ,\ -4) = P'(2 + 4\ ,\ a + (-1))$

Jadi: $-2a = 6 \rightarrow a = -3$

$a + (-1) = -4 \rightarrow a = -3$

9. $T = \binom{a}{b}$ : $P(3\ ,\ 5)$

$P'((3 + a\ ,\ 5 + b)) = P'(2\ ,\ -4)$

Sehingga diperoleh:

$3 + a = 2 \rightarrow a = -1$

$5 + b = -4 \rightarrow b = -9$

Jadi translasi $T = \binom{-1}{-9}$

10. $\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{2}{3}$

Dengan demikian $x' = x + 2 \rightarrow x = x' - 2$, dan

$y' = y + 3 \rightarrow y = y' - 3$

dengan mensubstitusikan $x = x' - 2$ dan $y = y' - 3$ pada persamaan garis, maka diperoleh:

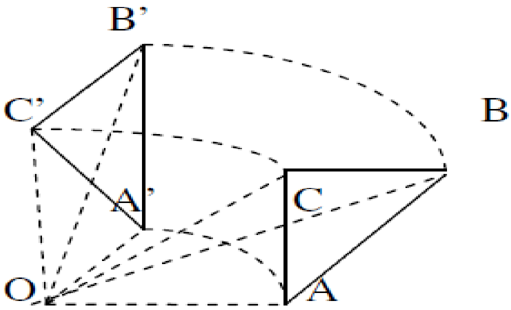
$y' - 3 = (x' - 2) + 5$

$y' = x' - 2 + 5 + 3$

$y = x' + 6$

Jadi, persamaan bayangan garis $y = x + 5$ oleh translasi $\binom{2}{3}$ adalah $y = x' + 6$.

# ROTASI (PERPUTARAN)

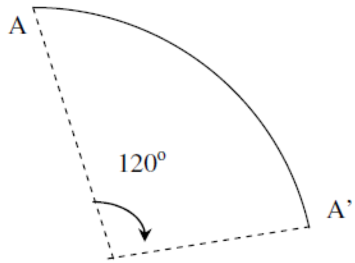



Perputaran atau rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh θ terhadap suatu titik pusat rotasi.

Perputaran atau rotasi pada bidang datar ditentukan oleh:

1. Titik pusat rotasi
2. Besar sudut rotasi
3. Arah sudut rotasi

Sudut rotasi adalah sudut antara garis yang menghubungkan titik asal dan pusat rotasi dengan garis yang menghubungkan titik bayangan dan pusat rotasi. Jika θ (sudut rotasi) positif, arah putaran (rotasi) berlawanan dengan arah putaran jam. Sebaliknya jika θ negatif, arah putaran searah dengan arah putaran jam. Suatu rotasi dengan pusat P dan sudut rotasi θ dinotasikan dengan R (P, θ).

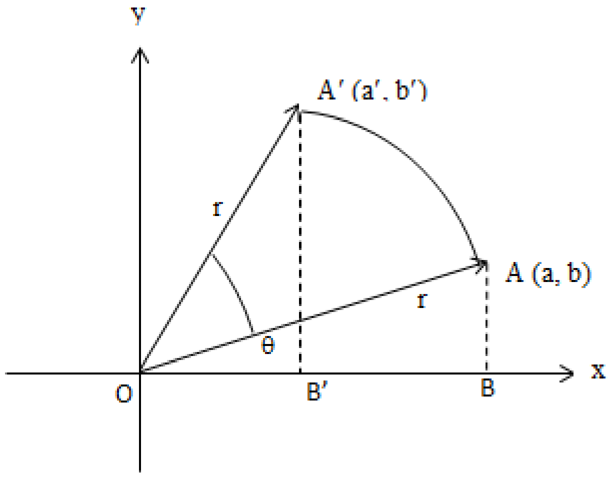



Titik A pada gambar dirotasikan terhadap titik O Sejauh $120^0$ searah dengan perputaran jarum jam. Bayangan A adalah A'. Rotasi yang berlawanan arah dengan perputaran jarum jam disebut rotasi positif, dan begitu pula sebaliknya.

## Rotasi Terhadap Pusat Titik O (0,0)

Dengan menggunakan jangka, Anakota membuat sebuah busur lingkaran. Ia menusukkan jarum jangka pada titik *O*, kemudian memutar jangka dengan sudut putar $\alpha$ berlawanan dengan arah perputaran jarum jam. Melalui peragaan ini, Anakota telah melakukan rotasi sebesar a dengan pusat titik *O*.

Misalkan, posisi awal pensil jangka pada titik A(a,b). Setelah dirotasi sebesar $\alpha$ dengan pusat titik $O$, posisi pensil jangka ini berada pada titik $A(a', b')$ seperti pada gambar berikut :




Pada gambar diatas, titik $A(a, b)$ diputar dengan pusat titik $O(0,0)$ dan arahnya berlawanan dengan arah jarum jam sejauh radian sehingga bayangan titik A adalah $A'(a', b')$. Untuk menentukan hubungan antara titik $A'$ $(a', b')$ dan titik $A(a, b)$, perhatikan segitiga OBA.

Segitiga OBA pada gambar siku-siku di B. jika panjang OA = r dan sudut yang dibentuk oleh ruas garis OA terhadap sumbu x adalah $\theta$ maka $x = r \cos \theta$ dan $y = r\, sin\, \theta$. Misalkan titik $A(a, b)$ diputar sejauh $\alpha$ (dalam derajat atau radian) sehingga bayangannya adalah $A'(a', b')$.

Posisi awal pensil jangka ini dapat ditulis dalam koordinat kutub, $A$ (r cos $\theta$, r sin $\theta$). Adapun posisi pensil jangka setelah diputar sebesar $\alpha$ dengan arah berlawanan dengan arah perputaran jarum dapat ditulis sebagai $A'(r \cos\ (\theta + \alpha))$.

Jadi, dinyatakan dalam bentuk matriks persamaan tersebut menjadi matriks berikut :

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\,(\theta + \alpha) \\ r \sin\,(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \cos \theta\ cos\alpha - r\ sin\theta\ cos\alpha \\ r\ cos\theta\ sin\alpha + r\ sin\theta\ cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\ cos\alpha - b\ sin\alpha \\ a\ sin\alpha + b\ cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\alpha & -\ sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi pensil jangka setelah diputar adalah sebesar $\alpha$ tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matriks $M = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ disebut matriks perputaran dengan pusat titik $O$ (0,0) dan sudut putar $\alpha$. Selanjutnya, rotasi dengan pusat titik $O$ (0,0) dan sudut putar $\alpha$ ditulis $R_{(0,\alpha)^\circ}$. Jika $\alpha$ adalah $90^\circ, -90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, -270^\circ$ maka matriks yang didapat adalah sebagai berikut :

| Rotasi | Bayangan | Matriks |
|---|---|---|
| $R_{(0,90^\circ)}$ | (-b, a) | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,-90^\circ)}$ | (b, -a) | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,180^\circ)}$ | (-a, -b) | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,270^\circ)}$ | (b, -a) | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,-270^\circ)}$ | (-b, a) | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |

Contoh :

Titik B (1,3) dirotasikan terhadap titik (0,0). Tentukan bayangan titik B apabila titik B dirotasikan :

a. Sejauh $90^0$ berlawanan arah dengan jarum jam

b. Sejauh $90^0$ searah jarum jam

**Jawab :**

a. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

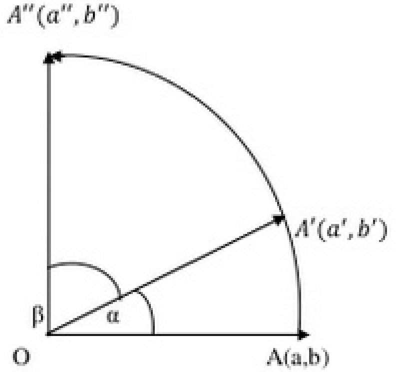
## A. Rotasi dengan Pusat Titik $\boldsymbol{P(a,b)}$

Untuk rotasi sebesar $\alpha$ dengan pusat titik $P(a,b)$ dapat ditentukan sebagai berikut :

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matriks $\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ disebut matriks perputaran dengan pusat titik $P(a,b)$ dan sudut putar $\alpha$. Selanjutnya, rotasi dengan pusat titik $P(a,b)$ dan sudut putar sebesar $\alpha$ ditulis $R_{(A,\alpha)^{\circ}}$. Nilai $\alpha$ bertanda positif jika arah putaran sudut berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dan bertanda negative jika arah putaran sudut searah dengan arah perputaran jarum jam. Bagaimana jika titik $A\ (a,b)$ dirotasikan sebesar $\alpha$ dengan pusat titik $O$ (0,0). Kemudian rotasikan lagi sebesar $\beta$ dengan pusat yng sama.




Tampak bahwa posisi rotasi sebesar $\alpha$ dengan pusat titik $O$ (0,0). Kemudian dilanjutkan rotasi sebesar $\beta$ dengan pusat yang sama diwakili oleh rotasi sebesar $(\alpha + \beta)$ dengan pusat titik $O$ (0,0). Akibatnya bayangan titik A dapat kalian tentukan sebagai berikut :

$$A'' = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh :

Titik (4,−8) dicerminkan terhadap garis $x = 6$, dilanjutkan dengan rotasi (0, $60^0$), hasilnya adalah....

***Penyelesaian* :**

a. Titik P (x,y) dicerminkan terhadap x = a bayangan adalah P' (2a-x,y).

b. Titik P (4,-8) dicerrminkan terhadap x = 6 bayangan adalah p' (2.6-4 ,-8 ) = (8,-8).

Selanjutnya titik P' (2,-8) dirotasikan (0,60$^0$) untuk menghasilkan bayangan hasil P(x'',y'')

P' (8,8) rot (0,60) P (x'',y''). Matriks rotasi (0,60$^0$) adalah :

$$\begin{pmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 + 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}$$

Bayangan akhirnya adalah $\left(4+4\sqrt{3}\ ,\ 4\sqrt{3}-4\right)$

## LATIHAN SOAL ROTASI

1. Titik (2,1) dirotasikan terhadap titik O (0,0) sejauh $90^0$ berlawanan arah putaran jam. Bayangan titik adalah….
2. Jika garis x – 2y = 5 diputar sejauh $90^0$ terhadap titik (2,4) berlawanan arah putaran jam, maka persamaan bayangannya adalah….
3. Persamaan bayangan garis x + y = 6 setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran + $90^0$, adalah….
4. Persamaan bayangan garis 2x - y + 6 = 0 setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran - $90^0$ , adalah ….
5. Persamaan bayangan parabola y = $3x^2$ – 6x + 1 setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran + $180^0$, adalah….

6. Bayangan titik A oleh rotasi R (0, $45^0$) adalah $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Koordinat titik A adalah….

**PEMBAHASAN SOAL ROTASI**

1. ***Penyelesaian :***

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian $x' = -1$ dan $y' = 2$

Jadi bayangan titik A (2,1) oleh rotasi terhadap titik O (0,0) sejauh $90^0$ berlawanan arah putaran jam adalah $A' = (-1,2)$

2. ***Penyelesaian :***

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-y \\ x+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-y \\ x+2 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian $x' = 6 - y \rightarrow y = 6 - x'$ dan $y' = x + 2 \rightarrow$ x = $y' - 2$, dengan mensubtitusi x = $y' - 2$ dan y = 6 $-x'$ pada persamaan, diperoleh :

$(y' - 2) - 2(6 - x') = 5$

$$y' - 2 - 12 + 2x' = 5$$

$$x' + y' = 5 + 2 + 12$$

$$x' + y' = 19$$

Jadi, persamaan bayangan garis x – 2y = 5 oleh rotasi sejauh $90^0$ terhadap titik (2,4) berlawanan arah putaran jam adalah 2x + y = 19

3. ***Penyelesaian :***

R + $90^0$ berarti : x’ = - y → y = - x’

$$y' = x \rightarrow x = y'$$

disubstitusi ke : $x + y = 6$

$$y' + (-x') = 6$$

$y' - x' = 6 \rightarrow x' - y' = -6$

Jadi, bayangannya: $x - y = -6$

4. ***Penyelesaian :***

R - $90^0$ berarti :

$$x' = x\cos(-90) - y\sin(-90)$$

$y' = x\sin(-90) + y\cos(-90)$

$x' = 0 - y(-1) = y$

$y' = x(-1) + 0 = -x'$

atau dengan matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

R - $90^0$ berarti : x' = y $\rightarrow$ y = x'

y' = - x $\rightarrow$ x = -y'

disubstitusi ke : 2x - y + 6 = 0

2(- y') - x' + 6 = 0

\- 2y' – x' + 6 = 0

x' + 2y' – 6 = 0

Jadi, bayangannya : x + 2y – 6 = 0

*Jika sudut putar $\alpha = \pi$* (rotasinya dilambangkan dengan H)

maka x' = - x dan y' = - y

dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. ***Penyelesaian :***

H berarti : x' = -x → x = -x'

y' = - y → y = -y'

disubstitusi ke : $y = 3x^2 - 6x + 1$

$-y' = 3(-x')^2 - 6(-x') + 1$

$-y' = 3(x')^2 + 6x + 1$ (dikali -1)

Jadi bayangannya :

$y = - 3x^2 - 6$

6. ***Penyelesaian :***

Misalkan koordinat titik A adalah (x,y)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Karena $\theta = 45°$, maka :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\ 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos\ 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x & \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y \end{pmatrix}$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y = -\sqrt{2} \text{ ... ... ... ... } (1)$$

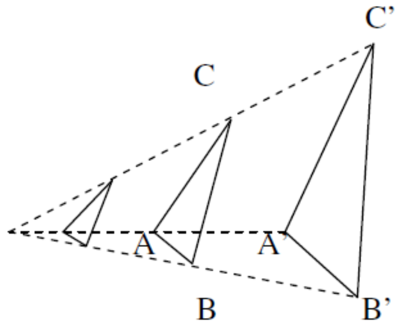
$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y = \sqrt{2} \text{ ... ... ... ... } (2)$$

Dengan menyelesaikan persamaan 1 dan 2 diatas

diperoleh, x = 0 dan

y = 2. Jadi koordinat titik A adalah (0,2).

# DILATASI (PERKALIAN)




Perkalian atau dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor sekala dan titik tertentu itu dinamakan pusat dilatasi. Contoh dilatasi yang digunakan dalam kehidupan sehari-hari adalah untuk membuat miniatur suatu benda, didalam membuat miniatur, benda tersebut diperkecil dengan skala tertentu. Selain untuk membuat minatur, dilatasi juga digunakan dalam pencetakan foto yang diperbesar dari klisenya. Jadi dilatasi bukan hanya digunakan untuk memperkecil saja, tetapi juga bisa digunakan untuk memperbesar sesuatu dengan skala tertentu.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa suatu dilatasi ditentukan oleh :

a. Faktor skala (k)

b. Pusat dilatasi

Jika yang dilatasikan suatu bangun, maka dilatasi akan mengubah ukuran tanpa mengubah bentuk bangun tersebut. Dilatasi yang berpusat di P dengan faktor skala k dinotasikan dengan ($P$,$k$).

**Definisi**. Diketahui sebuah titik A dan sebuah bilangan positif $k$. Suatu dilatasi D dengan faktor skala $k$ dan pusat A adalah padanan yang bersifat :

1. $D(A) = A$
2. Jika $P \neq A, P' = D(P)$ adalah titik pada sinar $\overrightarrow{AP}$ sehingga $AP' = k(AP)$. (ini setara dengan mengatakan bahwa $\overline{AP'} = k\overline{AP}$. Dilatasi dengan pusat $A$ dan faktor skala $k$ ini dilambangkan dengan $D_{A.k}$

**Akibat I**. $D_{A.k}$ adalah kesebangunan. Untuk membuktikan ini, akan dibuktikan dua hal, yaitu :

1. $D_{A.k}$ adalah suatu transformasi
2. Jika $P, Q$ dua titik pada bidang yang berbeda maka $P'Q' = k(PQ)$, dengan $P' = D_{A.k}(P)$ dan $Q' = D_{A.k}(Q)$.

Bukti :

1. Andaikan ada dua titik $X$ dan $Y$ dengan $X' = D_{A.k}(X)$ dan $Y' = D_{A.k}(Y)$ dan andaikan $X' = Y'$. Jadi $X'Y' = 0$. oleh karena $X'Y' = k(XY)$ dan $k > 0$ maka $XY = 0$. Ini berarti $X = Y$. jadi $D_{A.k}$ injektif.

   Andaikan $Y$ sebarang titik. Andaikan pula $X$ sebuah titik pada sinar $\overrightarrow{AY}$ sehingga $AX = k(AY)$. Jadi $D_{A.k}(X) = Y$ sebab $AY = k(AX)$. Jadi setiap titik $Y$ memiliki prapeta.

   Dengan demikian $D_{A.k}$ surjektif sehingga terbukti bahwa $D_{A.k}$ adalah suatu transformasi.

2. a) Jika $P = A$ maka $P' = A' = A$. Sehingga $P'Q' = AQ' = k(PQ)$.

   b) Jika $Q \, \varepsilon \, \overrightarrow{AP}$, andaikan $P$ terletak antara $A$ dan $Q$ sehingga $AP + PQ = AQ$. Jadi $AP < AQ$ dan $k(AP) <$

$k(AQ)$. Maka $AP' < AQ'$. Ini berarti $P'$ terletak antara $A$ dan $Q'$, sehingga :

$$P'Q' = AQ' - AP' = k(AQ) - k(AP)$$
$$= k(AQ - AP)$$
$$= k(AP)$$

c. Andaikan $A, P, Q$ tidak segaris. Karena $AP' = k(AP)$ dan $AQ' = k(AQ)$, maka

$$\frac{AP'}{AP} = \frac{AQ'}{AQ}$$

Sehingga $\Delta AP'Q' \sim \Delta APQ$. Jadi $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{AP'}{AP} = k$.

Maka untuk setiap pasang titik $P, Q$, akan kita peroleh $P'Q' = k(PQ)$.

Jadi dapat dikatakan bahwa setiap dilataso adalah kesebangunan.

**Akibat II**. Jika $g$ sebuah garis dan $g' = D_{A.k}(g)$ maka $g' = g$ apabila $A \ \varepsilon \ g$ dan $g' \parallel g$ apabila $A \notin g$.

1. Andaikan $A \ \varepsilon \ g$; andaikan $B \ \varepsilon \ g$ maka $D_{A.k}(A) = A' = A \ \varepsilon \ g'$.

$D_{A.k}(B) = B'$ dan $B' \varepsilon\ g$. Jadi $A' \varepsilon\ g', B' \varepsilon\ g', A\ \varepsilon\ g, B' \varepsilon\ g$. ini berarti $g = g'$.

2. Andaikan $A \notin g$. Misalkan $B\ \varepsilon\ g$ dan $C\ \varepsilon\ g$, maka $B' = D_{A.k}(B), C = D_{A.k}(C)$, sehingga$B' \varepsilon\ g, C' \varepsilon\ g'$.

   Karena $AB' = k(AB),\ AC' = k(AC),$ maka $B'C' = g' \parallel g$, sebab :

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$$

## Faktor skala dalam dilatasi

Faktor skala $(k)$ adalah perbandingan antara jarak titik bayangan dari titik pusat dilatasi dan jarak titik benda berkaitan dengan titik pusat dilatasi. Faktor skala $(k)$ juga di definisikan sebagai perbandingan antara panjang sisi tiap bayangan dan panjang sisi yang berkaitan pada benda.

Faktor Skala $k = \frac{Jarak\ Bayangan}{Jarak\ Benda} = \frac{Panjang\ Bayangan}{Panjang\ Benda}$

Contoh:

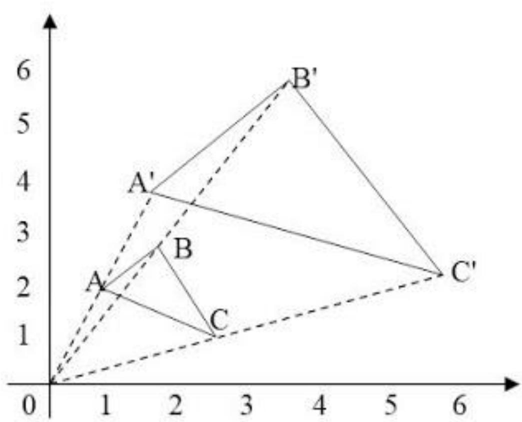
sebuah segitiga $ABC$ dengan titik $A$ (1,2) $B$ (2,3) dan $C$ (3,1) mendapat dilatasi terhadap titik $O$ dengan faktor skala 2. Tentukan koordinat bayangan titik-titik sudut segitiga ABC

**Jawab :**

Koordinat bayangan titik $A, B$ dan $C$ masing-masing adalah $A'(2,4), B'(4,6)$ dan $C'$ (6,2)

Catatan : Misal faktor skala $k,$ maka:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{2}{1} \text{ dan, } OA' : OA = 2 : 1$$




Pada dilatasi suatu bangun faktor $k$ akan menentukan ukuran dan letak bangun bayangan.

1. Jika $k > 1$, maka bangun bayangan diperbesar dan terletak sepihak terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

2. Jika $0 < k < 1$, maka bangun bayangan diperkecil dan terletak sepihak terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.
3. Jika $-1 < k < 0$, maka bangun bayangan diperkecil dan terletak berlainan pihak terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.
4. Jika $k < -1$, maka bangun bayangan diperbesar dan terletak berlainan terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

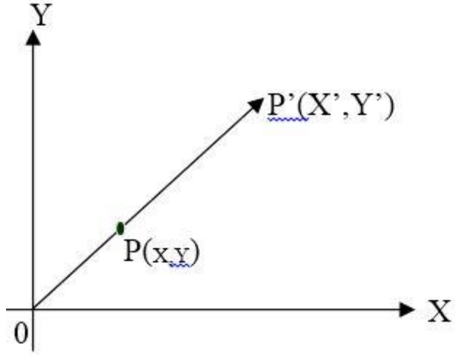
## Menentukan koordinat bayangan oleh dilatasi $[\mathbf{0}, \boldsymbol{k}]$

### 1. Dilatasi terhadap titik pusat $\boldsymbol{O}$ $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

Jika titik P (x,y) didilatasikan terhadap titik pusat O (0,0) dengan faktor skala k, maka bayangannya adalah P' (x',y')

dengan x' = kx dan y' = ky. Secara pemetaan dapat ditulis :

$(O,k) : P\ (x,y) \rightarrow P'\ (kx, ky)$




Dengan persamaan matriks, pemetaan diatas ditulis:

Rumus : $A(x,y) \xrightarrow{[0,k]} A'(kx,ky)$

Matriks : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**Contoh :**

1. Tentukan persamaan peta dari garis $3x - 5y + 15 = 0$ oleh dilatasi terhadap pusat O (0,0) dengan faktor skala 5!

   **Jawab :**

   $3x - 5y + 15 = 0$ didilatasi terhadap pusat O (0,0) dengan faktor skala 5, maka:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x' \\ \frac{1}{5}y' \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $x = \frac{1}{5}x'$ dan $= \frac{1}{5}y'$ . Maka bayangannya adalah :

$3(\frac{1}{5}x') - 5(\frac{1}{5}y') + 15 = 0$

$\frac{3}{5}x' - \frac{5}{5}y' + 15 = 0$

$3x' - 5y' + 75 = 0 \rightarrow 3x - 5y + 75 = 0$

Jadi peta dari dilatasi garis $3x - 5y + 15 = 0$ terhadap pusat O (0,0) dengan faktor skala 5 adalah $3x - 5y + 75 = 0$

2. Bayangan titik $P(-2,3)$ oleh dilatasi $[O, k]$ adalah $P'(4, -6)$ sehingga bayangan titik $Q(3, -2)$ oleh $[O, 4k]$ adalah…

**Jawab :**

Titik $P(-2,3)$ didilatasi $[O, k]$ adalah $P'(4, -6)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ 3k \end{pmatrix}$$

$4 = -2k \rightarrow k = -2$, diperoleh nilai $k = -2$

Sehingga mencari bayangan titik $Q(3,-2)$ oleh $[O,4k]$ sama saja dengan mencari bayangan titik $Q(3,-2)$ oleh $[O,4(-2)] = [O,-8]$, diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan dari titik $Q(3,-2)$ adalah $Q'(-24,16)$

3. Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0.$ Jika ditransformasikan dengan dilatasi [O,4], persamaan bayangannya adalah….

**Jawab :**

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ didilatasi [O,4] , maka:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x' \\ \frac{1}{4}y' \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh : $x = \frac{1}{4}x'$ dan $y = \frac{1}{4}y'$. Maka bayangannya adalah:

$(\frac{1}{4}x')^2 + (\frac{1}{4}y')^2 - 6(\frac{1}{4}x') + 2(\frac{1}{4}y') + 1 = 0 \rightarrow (\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{4})^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$

$\rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 24x + 8y + 16 = 0$

Jadi bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ yang didilatasi [O,4] adalah $x^2 + y^2 - 24x + 8y + 16 = 0$

**2. Dilatasi terhadap titik pusat $A(a, b)$**

Jika titik P ( x,y ) didilatasikan terhadap titik pusat A ( a,b ) dengan faktor skala k, maka bayangannya adalah P’ ( x’,y’ ) dengan

x’ – a = k ( x – a ) dan y’ – b = k ( y – b )

Dengan persamaan matriks, pemetaan diatas ditulis :

Matriks : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

**Contoh :**

1. Jika titik A(15,8) dicerminkan terhadap garis $x = 7$, maka bayangan titik A adalah titik A' dengan koordinat….

   **Jawab :**

   $$A\ (15,8) \xrightarrow{\text{direfleksikan terhadap garis } x = 7} A'(a', b')$$

   $$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(7) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} -15 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   $$A\ (15,8) \xrightarrow{\text{direfleksikan terhadap garis } x = 7} A'(-1,8)$$

   Jadi bayangan titik A(15,8) dicerminkan terhadap garis $x = 7$ adalah A'$(-1,8)$

2. Diketahui titik $P(12, -5)\ dan\ A(-2,1)$. Bayangan titik $P$ oleh dilatasi $\left[A, \frac{1}{2}\right]$ adalah…

   **Jawab :**

Titik $P(12,-5)$ didilatasi $[A,\frac{1}{2}]$. Artinya titik $P(12,-5)$ didilatasi $[(-2,1),\frac{1}{2}]$, maka:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12-(-2) \\ -5-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan Titik $P(12,-5)$ yang didilatasi $[A,\frac{1}{2}]$ adalah $'(5,-2)$ .

3. Tentukan bayangan dari titik $P(2,-1)$ jika didilatasikan dengan pusat titik $A(-2,4)$ dan faktor skalanya adalah $-2$.

**Jawab :**

Faktor skala $k = -2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan dari titik $P(2,-1)$ oleh dilatasi $A\ [-2,4]$ adalah $P'(-10,14)$

## LATIHAN SOAL DILATASI

1. Sebuah persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 8 = 0$ dicerminkan terhadap $y = x + 3$, maka bayangannya adalah….
2. Tentukan bayangan titik $(1, 1)$ oleh dilatasi dengan faktor dilatasi 2 dan pusat $O(0, 0)$. kemudian dilanjutkan dengan dilatasi yang memiliki faktor dilatasi $\frac{1}{2}$ dan pusat $O(0, 0)$ !
3. Jika titik A(15,8) dicerminkan terhadap garis $x = 7$, maka bayangan titik A adalah titik A’ dengan koordinat….
4. Titik A$(a, b)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ menghasilkan bayangan titik A’(0,2), maka nilai $(a, b)$adalah….
5. Titik A’(-16,24) merupakan bayangan dari titik A$(x, y)$ yang didilatasikan dengan pusat O(0,0) dan faktor skala -4. Koordinat titik A adalah….
6. Tentukan bayangan titik P(-4,5) oleh refleksi terhadap garis $y = -x$ dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis $x = 2$ !

7. $ABCD$ adalah sebuah persegi dengan koordinat titik-titik sudut $A(1,1), B(2,1), C(2,2)\ dan\ D(1,2)$. Tentukan peta atau bayangan dari titik-titik sudut persegi itu oleh dilatasi $[O,2]$!

8. Bayangan titik $P(-2,3)$ oleh dilatasi $[O,k]$ adalah $P'(4,-6)$ sehingga bayangan titik $Q(3,-2)$ oleh $[O,4k]$ adalah…

9. Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$. Jika ditransformasikan dengan dilatasi $[O,4]$, persamaan bayangannya adalah….

10. Tentukan persamaan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 20 = 0$ oleh refleksi terhadap sumbu $y$ dilanjutkan dilatasi $[O,2]$ !

11. $ABCD$ adalah sebuah persegi dengan koordinat titik-titik sudut $A(1,1), B(2,1), C(2,2)\ dan\ D(1,2)$. Tentukan peta atau bayangan dari titik-titik sudut persegi itu oleh dilatasi $[O,2]$!

12. Garis $2x - 3y = 6$ memotong sumbu $x$ di A dan memotong sumbu $y$ di B. Karena dilatasi $[O, -2]$, titik A menjadi $A'$ dan titik B menjadi $B'$. Hitunglah luas segitiga $OA'B'$
13. Tentukan bayangan garis $x + 4y - 2 = 0$ yang di dilatasi $[A(2,3), 2]$….
14. Bayangan parabola $x^2 + 2y - 1 = 0$ setelah didilatasikan dengan faktor dilatasi 4 terhadap titik pusat dilatasi (2,0) adalah....
15. Garis 2x – 3y = 6 memotong sumbu X di A dan memotong sumbu y di B. Karena dilatasi [O,-2], titik A menjadi A’ dan titik B menjadi B’. Hitunglah luas segitiga OA’B’….

## PEMBAHASAN SOAL DILATASI

1. ***Penyelesaian* :**

   Matriks pencerminan terhadap garis $y = x + c$ adalah :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Sehingga untuk mencari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 8 = 0$ dicerminkan terhadap $y = x + 3$ maka bayangannya adalah :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - c \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - c \\ x + c \end{pmatrix}$$

Untuk c = 3 didapat :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 3 \\ x + 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + 3 \\ y' - 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $x = y' - 3$ dan $y = x' + 3$. Maka bayangannya adalah

$$(y' - 3)^2 + (x' + 3)^2 - 4(y' - 3) + 6(x' + 3) - 8 = 0$$

$(y')^2 - 6y' + 9 + (x')^2 + 6x' + 9 - 4y' + 12 + 6x' + 18 - 8 = 0$

$(x')^2 + (y')^2 + 12x' - 10y' + 40 = 0$

$(x)^2 + (y)^2 + 12x - 10y + 40 = 0$

Jadi bayangan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 8 = 0$ yang dicerminkan terhadap $y = x + 3$ adalah $x^2 + y^2 + 12x - 10y + 40 = 0$

2. ***Penyelesaian :***

Titik $(1, 1)$ dengan faktor dilatasi 2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dilanjutkan titik $(2,2)$ dengan faktor dilatasi $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Bayangan titik $(1,1)$ dengan faktor dilatasi 2 dan dilanjutkan dengan faktor dilatasi $\frac{1}{2}$ didapat bayangannya adalah $(1,1)$.

3. ***Penyelesaian* :**

A(15,8) $\xrightarrow{\text{direfleksikan terhadap garis}}$ $x = 7$ A'$(a', b')$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(7) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

A(15,8) $\xrightarrow{\text{direfleksikan terhadap garis } x = 7}$ A'$(-1,8)$

Jadi bayangan titik A(15,8) dicerminkan terhadap garis $x = 7$ adalah A'$(-1,8)$

4. ***Penyelesaian* :**

Misal A$(a, b)$ $\xrightarrow{\text{direfleksikan terhadap}}$ $x = 2$ A'$(a', b')$

diket: A$(a, b)$ $\xrightarrow{\text{direfleksikan terhadap}}$ $x = 2$ A'$(0\ , 2)$

maka:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 4 \\ b + 0 \end{pmatrix}$$

$$-a + 4 = 0$$

- $a = 4$
- $b = 2$

❖ Sehingga didapat bahwa nilai $(a, b)$adalah (4,2)

5. ***Penyelesaian* :**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x' \\ -\frac{1}{4}y' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(-16) \\ -\frac{1}{4}(24) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Jadi titik A'(-16,24) merupakan bayangan dari titik A$(4, -6)$ yang didilatasikan dengan pusat O(0,0) dan faktor skala -4.

6. ***Penyelesaian* :**

P(-4,5) $\xrightarrow{\text{refleksi terhadap garis } y = -x}$ P'$(a', b')$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

P(-4,5) $\xrightarrow{\text{refleksi terhadap garis } y = -x}$ P'$(-5,4)$

kemudian refleksi terhadap garis $x = 2$

P’$(-5,4)$ $\xrightarrow{\text{refleksi terhadap garis } x = 2}$ P’’$(a", b")$

$$\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

P’$(-5,4)$ $\xrightarrow{\text{refleksi terhadap garis } x = 2}$ P’’$(9,4)$

Jadi bayangan titik P(-4,5) oleh refleksi terhadap garis $y = -x$ dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis $x = 2$ adalah P’’(9,4)

7. ***Penyelesaian :***

Peta atau bayangan titik-titik sudut persegi oleh dilatasi $[O, 2]$

Matriks yang bersesuaian dengan dilatasi $[O, 2]$ adalah $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Peta atau bayangan dari titik sudut persegi $A(1,1), B(2,1), C(2,2)$ dan $D(1,2)$ adalah :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Jadi peta dari titik-titik sudut ABCD adalah $A'(2,2), B'(4,2), C'(4,4)$ dan $D'(2,4)$

8. ***Penyelesaian :***

Titik $P(-2,3)$ didilatasi $[O, k]$ adalah $P'(4, -6)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ 3k \end{pmatrix}$$

$4 = -2k \rightarrow k = -2$ . diperoleh nilai $k = -2$

Sehingga mencari bayangan titik $Q(3, -2)$ oleh $[O, 4k]$ sama saja dengan mencari bayangan titik $Q(3, -2)$ oleh $[O, 4(-2)] = [O, -8]$, diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -24 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Maka bayangan dari titik $Q(3,-2)$ adalah

$Q'(-24,16)$

9. ***Penyelesaiaan :***

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ didilatasi $[O, 4]$ , maka:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x' \\ \frac{1}{4}y' \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh : $x = \frac{1}{4}x'$ dan $y = \frac{1}{4}y'$. Maka bayangannya adalah:

$$(\frac{1}{4}x')^2 + (\frac{1}{4}y')^2 - 6(\frac{1}{4}x') + 2(\frac{1}{4}y') + 1 = 0$$

$$(\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{4})^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$$

$x^2 + y^2 - 24x + 8y + 16 = 0$

Jadi bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ yang didilatasi $[O, 4]$ adalah $x^2 + y^2 - 24x + 8y + 16 = 0$

10. ***Penyelesaian :***

$x^2 + y^2 - 4x - 20 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu $y$, maka :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh : $x = -x'$ dan $y = y'$. Maka bayangannya adalah: $(-x')^2 + (y')^2 - 4(-x') - 20 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$

Jadi peta dari garis $x^2 + y^2 - 4x - 20 = 0$ yang dicerminkan terhadap sumbu $y$ adalah $x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$

Kemudian $x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ didilatasi [O,2] diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' \\ 2y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x'' \\ \frac{1}{2}y'' \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh : $x' = \frac{1}{2}x''$ dan $y' = \frac{1}{2}y''$. Maka bayangannya adalah:

$$\left(\frac{1}{2}x''\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y''\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}x''\right) - 20 = 0$$

$$(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2 + 2x - 20 = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + 2x - 20 = 0$$

$x^2 + y^2 + 8x - 80 = 0$

Jadi bayangan $x^2 + y^2 - 4x - 20 = 0$ oleh refleksi terhadap sumbu $y$ dilanjutkan dilatasi $[O, 2]$ adalah $x^2 + y^2 + 8x - 80 = 0$

11. ***Penyelesaian :***

Peta atau bayangan titik-titik sudut persegi oleh dilatasi $[O, 2]$

Matriks yang bersesuaian dengan dilatasi $[O, 2]$ adalah $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Peta atau bayangan dari titik sudut persegi $A(1,1), B(2,1), C(2,2)$ dan $D(1,2)$ adalah :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Jadi peta dari titik-titik sudut ABCD adalah $A'(2,2), B'(4,2), C'(4,4)$ dan $D'(2,4)$

12. ***Penyelesaian :***

Garis $2x - 3y = 6$ memotong sumbu x di $A(3\,,0)$ memotong sumbu Y di $B(0\,,2)$ karena dilatasi$[0\,,-2]$ maka :

$A(3\,,0)$ dengan dilatasi $[0\,,-2]$ :

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Maka $A'(-6\,,0)$

$B(0\,,2)$ dengan dilatasi $[0\,,-2]$ :

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

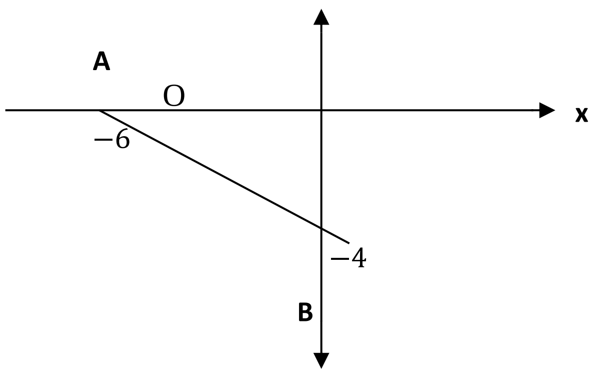
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Maka

$B'(0\,,-4)$

Titik $A'(-6\,,0)$, $B'(0\,,-4)$dan titik O(0,0) membentuk segitiga seperti pada gambar :



Sehingga luas$OA'B' \ = \frac{1}{2} \times OA' \times OB'$

$$= \frac{1}{2} \times (-6) \times (-4) = 12$$

13. ***Penyelesaian :***

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x' = 2(x-2) + 2 = 2x - 2$ atau $x = \frac{x'+2}{2}$ dan

$y' = 2(2y-3) + 3 = 2y - 3$ atau $y = \frac{y'+3}{2}$

Karena $(x, y)$ memenuhi persamaan $x + 4y - 2 = 0$ maka

$$\left(\frac{x'+2}{2}\right) + 4\left(\frac{y'+3}{2}\right) - 2 = 0$$

$$x' + 2 + 4y' + 12 - 4 = 0$$

$$x' + 4y' + 10 = 0$$

Sehingga setiap $(x', y')$ pada bayangan memenuhi persamaan $x' + 4y' + 10 = 0$. Jadi bayangan garis $x + 4y - 2 = 0$ karena dilatasi $[A(2,3), 2]$ adalah $x' + 4y' + 10 = 0$.

14. ***Penyelesaian :***

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 8 \\ 4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 6 \\ 4y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x' - 6 \\ y' \end{pmatrix}$$

Bayangannya adalah

$$P' \rightarrow \left\{ \frac{1}{4}(x' - 6) \right\}^2 + 2\left(\frac{1}{4}y'\right) - 1 = 0$$

$$\frac{1}{16}(x^2 + 12x + 36) + \frac{1}{2}y - 1 = 0$$

*Dikali 16 kedua ruasnya*

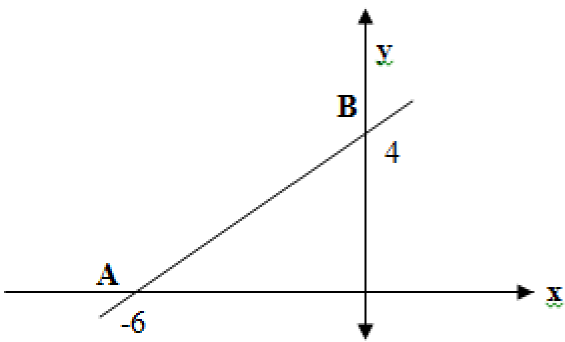
$x^2 + 12x + 8y + 20 = 0$

15. ***Penyelesaian*** :

garis 2x – 3y = 6 memotong sumbu X di A(3,0) memotong sumbu Y di B(0,2) karena dilatasi [O,-2] maka :

A'(*k*x,*k*y)→ A'(-6,0) dan B'(*k*x,*k*y) → B'(0,-4)

Titik A'(-6,0), B'(0,-4) dan titik O(0,0) membentuk segitiga seperti pada gambar:




Sehingga luasnya = ½ x OA' x OB'

= ½ x 6 x 4

= 12

16. ***Penyelesaian***

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

k = 2 ; x = 1 ; y = 3 masukan ke dalam persamaan matriks :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

didapat, $x' = 2$ dan $y' = 6$

Jadi bayangan titik B(1,3) dilatasi terhadap titik pusat O (0,0) dengan faktor skala 2 adalah $B'$ (2,6)

# RANGKUMAN

## A. TRANLASI

Translasi atau pergeseran adalah transformasi yang memetakan suatu titik pada titik lain sebagai bayangannya. Salah satu contoh translasi yang bisa kita lihat adalah pergeseran atau perpindahan orang pada eskalator dan lift. Peralatan yang biasa dipakai mal-mal ini berguna untuk memindahkan orang dari satu lantai ke lantai lain.

Sifat-sifat translasi :

1. Bangun yang digeser (ditranslasikan) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.
2. Bangun yang digeser (ditranslasikan) mengalami perubahan posisi.

Translasi dinyatakan oleh pasangan terurut $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dengan *a* merupakan komponen translasi pada arah sumbu-*x* dan *b* merupakan komponen translasi pada arah sumbu-*y*. Secara umum dapat kita lihat bahwa jika titik $A(x,y)$ ditranslasi oleh $T(a,b)$, koordinat hasil translasinya adalah $A'(x+a, y+b)$.

Misalkan $x$, $y$, $a$ dan $b$ adalah bilangan real, translasi titik $A(x,y)$ dengan $T(a,b)$ menggeser absis $x$ sejauh $a$ dan menggeser ordinat $y$ sejauh $b$, sehingga diperoleh titik $A'(x+a, y+b)$, secara notasi ditulis:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T\binom{a}{b}} A'\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

## B. REFLEKSI

Refleksi atau pencerminan adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan menggunakan sifat benda dan bayangannya pada cermin datar.

$a' = a \rightarrow a' = 1 \,.\, a + 0 \,.\, b$, $b' = -b \rightarrow 0 \,.\, a - 1 \,.\, b$

a. Pencerminan titik $A(a\ ,\ b)$ terhadap sumbu $y$ menghasilkan bayangan titik $C(a'\ ,\ b')$ dengan $a' = -a$ dan $b' = b$

$A(a\ ,\ b) \rightarrow C(a'\ ,\ b')$

$a' = -a \rightarrow a' = -1 \,.\, a + 0 \,.\, b$

$b' = b \rightarrow b' = 0 \,.\, a + 1 \,.\, b$

matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

sehingga

$$C = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

b. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan titik *D(a' , b')* dengan $a' = b$ dan $b' = a$

$A(a , b) \rightarrow D(a' , b')$

$a' = b \rightarrow a' = 0 \,.\, a + 1 \,.\, b$

$b' = a \rightarrow b' = 1 \,.\, a + 0 \,.\, b$

matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

sehingga

$$D = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

c. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan titik *E(a' , b')* dengan $a' = -b$ dan $b' = -a$

$A(a , b) \rightarrow D(-b , -a)$

$a' =- b \rightarrow a' = 0 \,.\, a - 1 \,.\, b$

$b' = -a \rightarrow b' = -1 \,.\, a + 0 \,.\, b$

matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$E = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

d. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap titik asal O(0,0) menghasilkan bayangan titik *F(a' , b')* dengan *a'* = −*a* dan *b'* = −*b*

*A(a , b)* → *F(−a , −b)*

*a'* =− *a* → *a'* = − 1 . *a* + 0 . *b*

*b'* = −*b* → *b'* = 0 . *a* −1 . *a*

matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$F = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

e. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap garis *x* = *h* menghasilkan bayangan titik *G(a' , b')* dengan *a'* = 2*h* −*a* dan *b'* = −*b*

*A(a , b)* → *G(2h−a , −b)*

*a'* = 2*h* − *a* → *a'* = (− 1 . *a* + 0 . *b*) + 2*h*

$b' = -b \rightarrow b' = (0 \,.\, a - 1 \,.\, a) + 0$

jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut:

$$G = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

f. Pencerminan titik *A(a , b)* terhadap garis $y = k$ menghasilkan bayangan titik *H(a' , b')* dengan $a' = a$ dan $b' = 2k - b$

$A(a , b) \rightarrow H(a , 2k - b)$

$a' = a \rightarrow a' = (-1 \,.\, a + 0 \,.\, b) + 0$

$b' = 2k - b \rightarrow b' = (0 \,.\, a - 1 \,.\, a) + 2k$

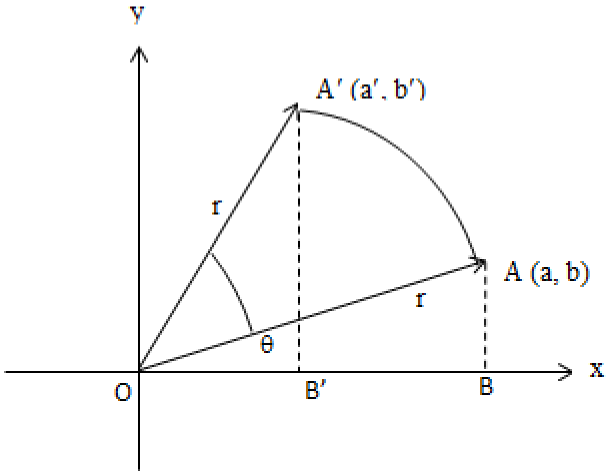
jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut:

$$G = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

## C. ROTASI

Perputaran atau rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh θ terhadap suatu titik pusat rotasi.

### a. Rotasi Terhadap Pusat Titik O (0,0)




Pada gambar diatas, titik $A(a, b)$ diputar dengan pusat titik $O(0,0)$ dan arahnya berlawanan dengan arah jarum jam sejauh radian sehingga bayangan titik A adalah $A'(a', b')$. Untuk menentukan hubungan antara titik $A'$ $(a', b')$ dan titik $A(a, b)$, perhatikan segitiga OBA.

Segitiga OBA pada gambar siku-siku di B. jika panjang OA = r dan sudut yang dibentuk oleh ruas garis OA terhadap sumbu x adalah $\theta$ maka $x = r \cos \theta$ dan $y = r \, sin \, \theta$. Misalkan titik $A(a, b)$ diputar sejauh $\alpha$ (dalam derajat atau radian) sehingga bayangannya adalah $A'(a', b')$.

Posisi awal pensil jangka ini dapat ditulis dalam koordinat kutub, *A* (r cos $\theta$, r sin $\theta$). Adapun posisi pensil jangka setelah diputar sebesar $\alpha$ dengan arah berlawanan dengan arah perputaran jarum dapat ditulis sebagai $A'(r\cos\ (\theta+\alpha))$.

Jadi, dinyatakan dalam bentuk matriks persamaan tersebut menjadi matriks berikut :

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\theta\ cos\alpha - r\ sin\theta\ cos\alpha \\ r\ cos\theta\ sin\alpha + r\ sin\theta\ cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\ cos\alpha - b\ sin\alpha \\ a\ sin\alpha + b\ cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\alpha & -\ sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi pensil jangka setelah diputar adalah sebesar $\alpha$ tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & -\ sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matriks $M = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ disebut matriks perputaran dengan pusat titik $O$ (0,0) dan sudut putar $\alpha$. Selanjutnya, rotasi dengan pusat titik $O$ (0,0) dan sudut putar $\alpha$ ditulis $R_{(0,\alpha)^{\circ}}$. Jika $\alpha$ adalah $90^{\circ}, -90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}, -270^{\circ}$ maka matriks yang didapat adalah sebagai berikut :

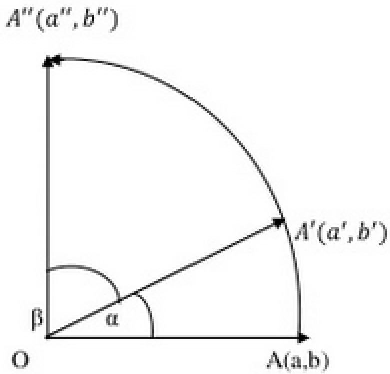
| Rotasi | Bayangan | Matriks |
|---|---|---|
| $R_{(0,90^{\circ})}$ | (-b, a) | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,-90^{\circ})}$ | (b, -a) | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,180^{\circ})}$ | (-a, -b) | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,270^{\circ})}$ | (b, -a) | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $R_{(0,-270^{\circ})}$ | (-b, a) | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |

### b. Rotasi dengan Pusat Titik $P(a, b)$

Untuk rotasi sebesar $\alpha$ dengan pusat titik $P(a, b)$ dapat ditentukan sebagai berikut :

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Matriks $\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ disebut matriks perputaran dengan pusat titik $P(a,b)$ dan sudut putar $\alpha$. Selanjutnya, rotasi dengan pusat titik $P(a,b)$ dan sudut putar sebesar $\alpha$ ditulis $R_{(A,\alpha)^{\circ}}$. Nilai $\alpha$ bertanda positif jika arah putaran sudut berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dan bertanda negative jika arah putaran sudut searah dengan arah perputaran jarum jam. Bagaimana jika titik $A$ $(a,b)$ dirotasikan sebesar $\alpha$ dengan pusat titik $O$ (0,0). Kemudian rotasikan lagi sebesar $\beta$ dengan pusat yng sama.



Tampak bahwa posisi rotasi sebesar $\alpha$ dengan pusat titik $O$ (0,0). Kemudian dilanjutkan rotasi sebesar $\beta$ dengan pusat yang sama diwakili oleh rotasi sebesar $(\alpha + \beta)$ dengan pusat titik $O$ (0,0). Akibatnya bayangan titik A dapat kalian tentukan sebagai berikut :

$$A'' = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

## D. DILATASI

Perkalian atau dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor sekala dan titik tertentu itu dinamakan pusat dilatasi.

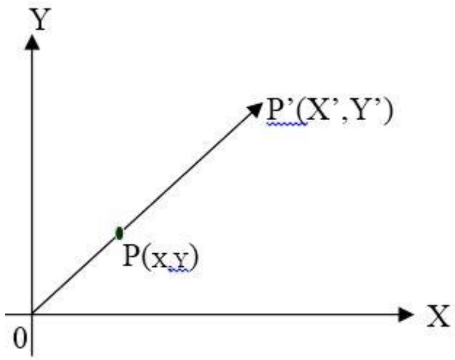
Jika yang dilatasikan suatu bangun, maka dilatasi akan mengubah ukuran tanpa mengubah bentuk bangun tersebut. Dilatasi yang berpusat di P dengan faktor skala k dinotasikan dengan ($P$,$k$).

### 1. Menentukan koordinat bayangan oleh dilatasi $[\mathbf{0}, \boldsymbol{k}]$

a. **Dilatasi terhadap titik pusat $\boldsymbol{O}\ (\mathbf{0},\mathbf{0})$**

Jika titik P (x,y) didilatasikan terhadap titik pusat O (0,0) dengan faktor skala k, maka bayangannya adalah P’ (x’,y’) dengan x’ = kx dan y’ = ky. Secara pemetaan dapat ditulis :

$(O,k)$ : P ( x,y ) → P’ ( kx, ky )




Dengan persamaan matriks, pemetaan diatas ditulis:

Rumus : $A(x,y) \xrightarrow{[0,k]} A'(kx,ky)$

Matriks : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b. **Dilatasi terhadap titik pusat $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$**

Jika titik P ( x,y ) didilatasikan terhadap titik pusat A ( a,b ) dengan faktor skala k, maka bayangannya adalah P' ( x',y' ) dengan

x' – a = k ( x – a ) dan y' – b = k ( y – b )

Dengan persamaan matriks, pemetaan diatas ditulis :

Matriks : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

## E. Komposisi Dua Translasi Berurutan

Diketahui dua translasi $T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Jika translasi $T_1$ dilanjutkan translasi $T_2$ maka dinotasikan "$T_1 \circ T_2$" dan translasi tunggalnya adalah $T=T_1+T_2=T_2+T_1$ (sifat komutatif).

## F. Komposisi Dua Refleksi Berurutan

a. *Refleksi berurutan terhadap dua sumbu sejajar*

Jika titik A(x,y) direfleksikan terhadap garis x=a dilanjutkan terhadap garis x = Maka bayangan akhir A adalah $A'(x', y')$ yaitu :

$x' = 2(b-a)+x$

$y' = y$

Jika titik A(x,y) direfleksikan terhadap garis y=a dilanjutkan terhadap garis y=b. Maka bayangan akhir A adalah $A'(x', y')$ yaitu:

$x'=x$

$y'=2(b-a)+y$

b. *Refleksi terhadap dua sumbu saling tegak lurus*

Jika titik A(x,y) direfleksikan terhadap garis x=a dilanjutkan terhadap garis y=b (dua sumbu yang saling tegak lurus) maka bayangan akhir A adalah $A'(x', y')$ sama dengan rotasi titik A(x,y) dengan pusat titik potong dua sumbu (garis) dan sudut putar $180^\circ$.

c. *Refleksi terhadap dua sumbu yang saling berpotongan*

Jika titik A(x,y) direleksikan terhadap garis g dilanjutkan terhadap garis h, maka bayangan akhirnya adalah $A'(x', y')$

dengan pusat perpotongan garis g dan h dan sudut putar 2α(α sudut antara garis g dan h) serta arah putaran dari garis g ke h.

$$\tan\alpha = \frac{m_k - m_l}{1 + m_k \cdot m_l}$$

Catatan $m_l = gradien\ garis\ l$

$m_k = gradien\ garis\ k$

d. *Sifat komposisi refleksi*

Komposisi refleksi (refleksi berurutan) pada umumnya tidak komutatif kecuali komposisi refleksi terhadap sumbu x dilanjutkan terhadap sumbu y (dua sumbu yang saling tegak lurus).

## G. Rotasi Berurutan yang Sepusat

Diketahui rotasi $R_1(P(a,b),\alpha)$ dan $R_2(P(a,b),\beta)$, maka transformasi tunggal dari komposisi transformasi rotasi $R_1$ dilanjutkan $R_2$ adalah rotasi $R(P(a,b),\alpha+\beta)$

Rotasi $R_1$ dilanjutkan $R_2$ sama dengan rotasi $R_2$ dilanjutkan $R_1$

## H. Komposisi Transformasi

Diketahui transformasi $T_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $dan\ T_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ maka transformasi tunggal dari transformasi :

a. $T_1$ dilanjutkan $T_2$ ($T_2 \circ T_1$) adalah $T=T_2 . T_1$

b. $T_2$ dilanjutkan $T_1$ ($T_1 \circ T_2$) adalah $T=T_1 . T_2$

Catatan $T_1 . T_2 = T_2 . T_1$

**I. Bayangan suatu kurva/bangun oleh dua transformasi atau lebih**

Contoh : Tentukan bayangan garis - 4x + y = 5 oleh pencerminan terhadap garis

y = x dilanjutkan translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$!

Jawab : misal titik P(x,y) pada garis - 4x + y = 5

P(x,y) dicerminkan terhadap garis y=x, bayangannya P'(y,x)

P'(y,x) ditranslasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bayangannya P"(y+3, x+2) = P"(x",y")

Jadi, $x'' = y + 3 \rightarrow y = x'' - 3$

$y'' = x + 2 \rightarrow x = y'' - 2$

persamaan $-4x + y = 5 \rightarrow -4(y'' - 2) + (x'' - 3) = 5$

$-4y'' + 8 + x'' - 3 = 5$

$x'' - 4y'' = 0$

Jadi, bayangan akhirnya adalah $x - 4y = 0$.

## J. Luas Bangun Hasil Tranformasi

Jika suatu bangun (segitiga, lingkaran, dan lain-lain) ditransformasikan maka :

a. Luas bangun bayangan tetap untuk transformasi : translasi, refleksi, dan rotasi.

b. Luas bangun bayangan berubah untuk transformasi dilatasi, yaitu jika luas bangun mula-mula L setelah didilatasi oleh [P(a,b),k], maka luas bangun bayangannya adalah $L' = k^2 + L$

# BIOGRAFI PENULIS

Khoerul Umam dilahirkan di Jakarta pada bulan April tanggal 23 tahun 1989. Memulai bangku sekolah dari **Taman Kanak-kanak Aisiyah Margahayu Bekasi** yang tidak diselesaikannya. Kemudian melanjutkan pendidikan dasarnya di **SDN Cempaka Putih Barat 17 Pagi Jakarta Pusat** dan pindah sekolah ke SDN Margahayu XIII Bekasi Timur. Sejak sekolah dasar, dia menunjukkan ketertarikannya pada bidang matematika yang diinspirasi oleh seorang guru kelas VI. Kemudian melanjutkan studinya ke Pesantren **Daar El – Qolam**. Selama menempuh studinya di pondok pesantren **Daar El – Qolam**. Khoerul Umam pernah menjadi muridnya disukai oleh guru matematikanya di kelas IX. Selanjutnya, pada saat SMA, kembali menunjukkan ketertarikannya pada bidang matematika dengan memperdalam ilmu kalkulus dasar yang setiap pagi diberikan latihan oleh Guru.

Setelah menamatkan Sekolah Tingkat Menengah, Khoerul Umam melanjutkan studi di **Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA, Jakarta Timur**. Pada tingkat III berhasil mendapatkan beasiswa BPPA sampai akhir studinya. Setelah lulus dari **UHAMKA**, Khoerul Umam mendapatkan kesempatan untuk melanjutkan studi magister bidang pendidikan matematika di **UNESA (Universitas Negeri Surabaya)** dengan bantuan Beasiswa BPPS selama 2 tahun dari 2011 – 2013. Pada tahun 2016, Khoerul Umam mendapatkan Beasiswa Doktor di Universitas Negeri Malang. Saat ini saya hidup Bersama Istri tercinta Indri Trisno Wibowo, dan dua putri saya yang cantik; Mischa Mahreen Nusabha dan Zareen Khumaira Setelah menamatkan studinya, dia mengajar di almamater tercintanya UHAMKA sampai saat ini dan memegang mata kuliah, Kalukulus Peubah Banyak, Matematika Realistik, Masalah Bawah dan Nilai Syarat Bawah.

**Moto hidup : Memberi Jauh lebih Indah.**

Creative Design

Pendidikan Matematika UHAMKA