
**PROFIL PEMBELAJARAN DALAM MENGAKOMODASI MATHEMATICAL
PROFICIENCY**

Joko Soebagyo

Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung; STT Wastukencana, Purwakarta;
jokosoebagyo@student.upi.edu; jokosoebagyo@gmail.com

Abstrak

Artikel ini membahas pembelajaran matematika untuk membangun kemampuan mathematical proficiency di sekolah disertai dengan soal, beberapa pendekatan pembelajaran dan contoh model pembelajaran yang relevan. Artikel ini dibagi menjadi tiga bagian yaitu: (1) Perkembangan mathematical proficiency dan kegunaannya dalam bidang lain; (2) Profil pembelajaran matematika yang mengakomodir mathematical proficiency; (3) Contoh pembelajaran matematika yang mengakomodir mathematical proficiency.

Kata Kunci : *Perkembangan, Profil dan Contoh Model Pembelajaran Mathematical proficiency*

A. Pendahuluan

Carl Friedrich Gauss (Boyer & Merzbach, 1991) menyatakan bahwa matematika adalah ratu dari ilmu pengetahuan dan teori bilangan adalah ratu matematika. Pernyataan Gauss kurang lebih mirip dengan pernyataan (Milgram, 2007) yang menyatakan bahwa masyarakat tidak akan berfungsi tanpa penerapan pengetahuan matematika tingkat tinggi. Ia mengatakan hal tersebut pada abad 17 – 18 dan sekarang terbukti bahwa semua disiplin ilmu menggunakan matematika.

Salah satu disiplin ilmu yang paling kental menggunakan dan menerapkan matematika adalah bidang teknik. Sebagai contoh, dalam bidang teknik industri dan teknik mesin, persamaan diferensial digunakan untuk menghitung besar gaya peredam, integral untuk menghitung luas dan volume benda yang tidak beraturan. Bidang teknik informatika menggunakan matematika diskrit untuk mengolah data digital dalam sistem operasi komputer dan masih banyak disiplin ilmu lain yang menggunakan matematika dalam pekerjaannya.

Fakta tentang penggunaan dan penerapan matematika dalam berbagai bidang tersebut tentunya tidak terlepas dari kemampuan matematis seseorang sehingga ia mampu mengadopsi matematika untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi

dalam pekerjaannya. Merujuk kepada fakta-fakta bahwa matematika sangat berperan dalam berbagai bidang disiplin ilmu, timbul beberapa pertanyaan:

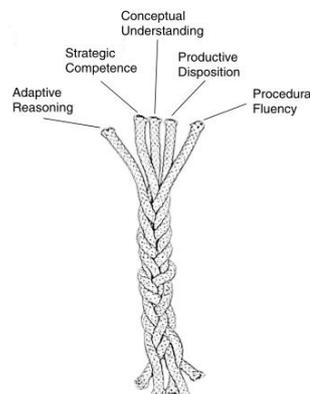
1. Kemampuan matematika seperti apa yang dapat diharapkan untuk memenuhi kondisi tersebut?
2. Profil pembelajaran matematika seperti apa yang dapat mempromosikan kemampuan matematika yang di maksud?
3. Bagaimana mengukur kemampuan matematika tersebut?

Pertanyaan-pertanyaan di atas membawa kita kepada suatu istilah yang disebut sebagai *mathematical proficiency*.

B. Perkembangan *Mathematical proficiency* dan Kegunaannya dalam Bidang Lain

Istilah *mathematical proficiency* mulai di perkenalkan oleh (McCann, 1975) sebagai dasar penentu kemampuan dasar elektronik seseorang. Kemudian (Nelson, 1977) memunculkan istilah *mathematical proficiency* dan memiliki hubungan yang signifikan dengan kemampuan penalaran. Selanjutnya (Spady, 1978) menyatakan bahwa *mathematical proficiency* mempengaruhi pengembangan diri seseorang dan (Bindler & Bayne, 1984) menggunakan *mathematical proficiency* sebagai salah satu kriteria kenaikan pangkat terhadap perawat di sebuah institusi. Namun Nelson, Spady, Bindler dan Bayne, belum secara tegas menyatakan pengertian dari *mathematical proficiency*.

(Lauglo, 1984) dalam hipotesis penelitiannya mempertanyakan “Apakah *Mathematics proficiency* merupakan prediktor yang bagus untuk mencapai prestasi dalam bidang teknik?” dan ia menemukan bahwa matematika memberikan kontribusi 0,87 terhadap sains dan 0,69 terhadap *tech drawing*. Kemudian (Singer & Stake, 1986) menyatakan bahwa *mathematical proficiency* secara intensif mempengaruhi karir matematika seseorang. Namun demikian baik Lauglo, Singer dan Stake, belum ada yang menjelaskan secara spesifik tentang *mathematical proficiency*.



Gambar 1. Intertwined strands of mathematical proficiency.

(Source: Kilpatrick et al., 2001, p.117)

(Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) menggunakan istilah *mathematical proficiency* untuk menggambarkan secara lengkap semua aspek keahlian, kompetensi, pengetahuan, dan fasilitas dalam matematika, dan dipercaya sebagai sesuatu yang diperlukan bagi siapa saja untuk belajar matematika dengan sukses. Menurut (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) *mathematical proficiency* memiliki 5 komponen yang saling terikat dan terkait, yaitu: 1) *Conceptual Understanding*; 2) *Procedural Fluency*; 3) *Strategic Competence*; 4) *Adaptive Reasoning*; 5) *Productive Disposition*. Kilpatrick et al. mendefinisikan *mathematical proficiency* secara jelas dan memberikan komponen-komponen yang menyokongnya. Dari uraian tersebut maka dapat dikatakan bahwa *mathematical proficiency* adalah semua aspek keahlian, kompetensi, pengetahuan, dan kecakapan dalam matematika yang diperlukan bagi diri seseorang sebagai penentu keberhasilan dalam bidang matematika dan bidang lain.

C. Profil pembelajaran yang mengakomodir *mathematical proficiency*

Tabel 1. Jenis-Jenis Pemahaman

No.	Tokoh	Tahun	Jenis-Jenis Pemahaman	Definisi	Tingkat Kemampuan
1	Kilpatrick	2001	Pemahaman Konseptual	Pemahaman tentang konsep-konsep, operasi-operasi dan relasi matematis.	Tinggi
2	George Polya	1945	Pemahaman Mekanikal	Mengingat dan menerapkan rumus secara rutin dan menghitung secara sederhana	Rendah
3			Pemahaman Induktif	Menerapkan rumus atau konsep dalam kasus sederhana atau dalam kasus serupa	Rendah
4			Pemahaman Rasional	Membuktikan kebenaran suatu rumus dan teorema	Tinggi
5			Pemahaman Intuitif	Memperkirakan kebenaran dengan pasti (tanpa ragu-ragu) sebelum menganalisis lebih lanjut	Tinggi
6	R.R. Skemp	1976	Pemahaman Instrumental	hafal konsep/prinsip tanpa kaitan dengan yang lainnya, dapat menerapkan rumus dalam perhitungan sederhana, dan mengerjakan perhitungan secara algoritmik	Rendah
7			Pemahaman Relasional	Mengkaitkan satu konsep/prinsip dengan konsep/prinsip lainnya	Tinggi
8		1989	Pemahaman Simbolik	Asimilasi timbal balik antara sistem simbol dan struktur konseptual, didominasi oleh struktur konseptual.	Tinggi
9	Bloom	1956	Pemahaman Translasi	Memahami suatu ide yang dinyatakan dengan cara lain dari pada pernyataan asli yang dikenal sebelumnya.	Rendah
10			Pemahaman Interpretasi	Mengartikan suatu ide yang diubah atau disusun dalam bentuk lain seperti kesamaan grafik, tabel, diagram dan sebagainya.	Rendah
11			Pemahaman Ekstrapolasi	Keterampilan untuk meramalkan kelanjutan dan kecenderungan yang ada menurut data tertentu.	Tinggi
12	Pollatsek	1981	Pemahaman Komputasional	Menerapkan rumus dalam perhitungan sederhana, dan mengerjakan perhitungan secara algoritmik	Rendah
13			Pemahaman Fungsional	Mengkaitkan satu konsep/prinsip dengan konsep/prinsip lainnya dan menyadari proses yang dikerjakanya	Tinggi
14	Copeland		Knowing how to	Mengerjakan suatu perhitungan secara rutin/algoritmik	Rendah
15			Knowing	Mengerjakan suatu perhitungan secara sadar	Tinggi

Sumber: Sintesis dari berbagai literatur

Pemahaman tentang *mathematical proficiency* yang dinyatakan oleh (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) tidak terlepas dari kemampuan-kemampuan matematis yang sudah ada sebelumnya, mulai dari taksonomi Bloom sampai dengan kemampuan-kemampuan matematis yang dinyatakan oleh NCTM seperti yang terlihat pada Tabel 1.

C.1. Profil Pembelajaran *Conceptual Understanding*

Conceptual understanding adalah kemampuan pemahaman tentang konsep-konsep, operasi-operasi dan relasi matematis. Indikator signifikan dari pemahaman konseptual adalah: (1) kemampuan untuk menggambarkan situasi matematika dengan cara yang berbeda (*verbal, pictorial, simbol dan konkrit*); dan (2) kemampuan untuk mengetahui bagaimana gambaran-gambaran yang berbeda tersebut dapat digunakan untuk maksud yang berbeda-beda.

Berdasarkan Tabel 1, siswa dikatakan memiliki kemampuan pemahaman konseptual jika mampu (1) mengkoneksikan permasalahan dengan ide matematika lain; (2) merepresentasikan permasalahan baik secara *verbal, pictorial, simbol dan konkrit* dan (3) menyelesaikan masalah dengan representasi yang tepat. Indikator kemampuan *conceptual understanding* memperlihatkan bahwa kemampuan ini dapat muncul jika dalam proses pembelajaran siswa diberi permasalahan dalam bentuk cerita yang memerlukan pemahaman akan masalah terlebih dahulu, kemudian mampu membuat koneksi dengan masalah serupa dan dapat menggunakan representasi dan model yang beragam. Contoh soal peluang yang dapat mengukur *conceptual understanding* pada tingkat Sekolah Menengah Atas (SMA) dapat dilihat pada contoh 1.

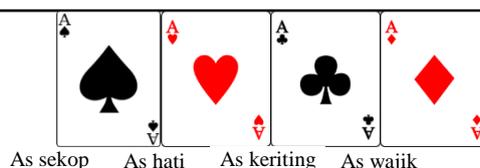
Contoh 1:

Tom memegang 4 kartu bridge dalam tangannya, yaitu As sekop, As hati, As keriting dan As wajik. Jerry mengambil 2 kartu dari tangan Tom tanpa melihat. Berapa peluang Jerry mengambil paling sedikit satu kartu As hitam?

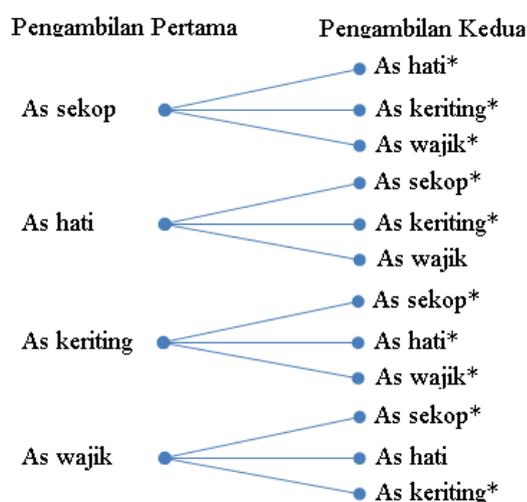
Untuk menjawab soal tersebut siswa perlu memahami permasalahan yaitu:

1. Tom memegang 4 kartu As.
2. Jerry mengambil 2 kartu As.
3. Peluang Jerry mendapat paling sedikit satu kartu As hitam.

Kemudian siswa mungkin memerlukan gambar untuk mengkoneksikan permasalahan. Dan gambar yang mungkin adalah sebagai berikut:



Untuk mempresentasikan atau memodelkan permasalahan, siswa dapat membuat gambar seperti pada Gambar 2. Dari Gambar 2 dapat dilihat ada 12 kemungkinan yang dapat terjadi dan hanya ada 10 kemungkinan paling sedikit satu kartu As warna hitam. Maka jawaban yang benar adalah $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.



Gambar 2. Diagram Pengambilan Kartu

Dengan demikian profil pembelajaran yang dapat mengakomodir *conceptual understanding* adalah pembelajaran berbasis masalah yang memunculkan kemampuan koneksi dan representasi siswa. Tetapi perlu juga dipahami bahwa, ketika siswa mempelajari suatu konsep matematika yang dianggap baru, ia perlu bimbingan (*scaffolding*) agar mampu memahami konsep baru tersebut. Menurut (Ludvigsen & Mørch, 2010) *scaffolding* adalah sebuah teknik instruksi dimana guru bertugas sebagai model belajar, kemudian secara bertahap berkurang dan menggeser tanggung jawab kepada siswa. Pembelajaran dengan pemberian masalah tentu tidak dapat dilakukan apabila siswa belum memiliki kemampuan *conceptual understanding* yang cukup. Sehingga model pembelajaran matematika yang dapat mengakomodasi kemampuan *conceptual understanding* salah satunya adalah model pembelajaran *direct learning* dengan strategi *scaffolding*.

C.2. Profil Pembelajaran *Procedural Fluency*

Procedural fluency adalah keterampilan dalam menggunakan prosedur dan melakukan prosedur secara fleksibel, akurat, dan efisien. Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa kemampuan *procedural fluency* merupakan gabungan dari kemampuan pemahaman mekanikal, induktif, instrumental, komputasional, *knowing how to*, *knowing*, dan *strategic competence*. Kemampuan *procedural fluency* tanpa kemampuan *conceptual understanding* mengakibatkan seorang siswa menjadi penghapal tanpa memahami apa yang dikerjakan dan menyebabkan penggunaan prosedural yang tidak tepat. Namun demikian, pengetahuan prosedural juga dapat menyebabkan pemahaman konseptual baru. Seorang siswa dikatakan memiliki kemampuan *procedural fluency* jika (1) mampu mengingat, memilih dan menerapkan rumus yang tepat; (2) akurat dalam perhitungan dan (3) tepat dalam menggunakan algoritma. Contoh soal rutin pada tingkat SMA dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 2:

Bentuk sederhana dari $\frac{2^{1/2}}{4}$ adalah ...

Dari soal, jelas ide matematikanya adalah eksponen. Untuk menjawab soal tersebut, siswa perlu mengkoneksikan soal dengan ide matematika lain dalam hal ini kemampuan *conceptual understanding* tentang eksponen atau perpangkatan. Siswa dengan kemampuan *strategic competence* yang bagus akan memilih sifat-sifat eksponen yang tepat untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Selanjutnya siswa perlu memikirkan prosedural yang tepat untuk menyelesaikan soal tersebut sampai dengan selesai.

Dalam hal ini, guru tidak disarankan menggunakan model *direct learning* dalam pembelajaran matematika. Model pembelajaran matematika untuk mengakomodir kemampuan *procedural fluency* bisa saja model pembelajaran berbasis masalah dengan masalah yang rutin berbantuan teknologi baik berupa *software* maupun berbasis *web* seperti *web* Khan Academy. Terkait dengan *web* Khan Academy, (Soebagyo, 2016a) dan (Soebagyo, 2016b) menyatakan bahwa aktivitas siswa yang memperoleh pembelajaran matematika dengan pemanfaatan *web* Khan Academy secara keseluruhan semakin baik setelah beberapa kali pertemuan. Hal ini terlihat selama proses pembelajaran matematika, siswa terlihat lebih semangat dalam belajar matematika, lebih menyenangkan, dan adanya interaksi antar teman, eksplorasi, mengamati, serta menikmati dalam mengerjakan soal-soal di *web* Khan Academy.

Dengan kemajuan teknologi, soal dapat diselesaikan dengan menggunakan aplikasi seperti *microsoft mathematics* yang dapat memudahkan siswa melakukan *self assessment* sehingga siswa lebih cepat mengevaluasi dirinya sendiri. Menurut (Goos & Bennison, 2008), teknologi memainkan peranan penting dalam pembelajaran matematika di dalam kelas yang meliputi: (a) keterampilan dan pengalaman menggunakan teknologi; (b) waktu dan kesempatan untuk belajar; (c) pengetahuan tentang bagaimana teknologi terintegrasi ke dalam pembelajaran matematika; (d) *belief* tentang teknologi dalam pembelajaran; (e) *belief* tentang matematika dan bagaimana mempelajarinya.

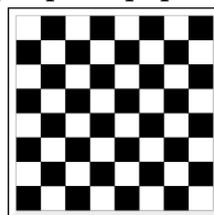
C.3. Profil Pembelajaran *Strategic Competence*

Strategic competence adalah kemampuan untuk merumuskan, merepresentasikan dan pemecahan masalah matematika. Secara hirarki dari *mathematical proficiency*, kemampuan *strategic competence* merupakan gabungan dari *conceptual understanding*, *procedural fluency*, koneksi, komunikasi, representasi dan metakognisi. *Strategic competence* dikatakan sebagai kemampuan matematika yang mirip dengan pemecahan masalah dan kemampuan merumuskan masalah.

Kemampuan *strategic competence* tanpa *conceptual understanding* dan *procedural fluency* mengakibatkan siswa memiliki keterbatasan tentang strategi-strategi yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah. Ketika seorang siswa memiliki kemampuan *conceptual understanding* yang baik, maka siswa memiliki banyak wawasan tentang strategi-strategi dan dapat menggunakan strategi yang tepat untuk memecahkan masalah. Sehingga siswa dikatakan memiliki kemampuan *strategic competence* jika mampu: (1) Merumuskan permasalahan; (2) Merencanakan strategi yang tepat; (3) Merepresentasikan masalah baik secara *verbal*, *pictorial*, simbol dan konkrit; (4) Melaksanakan strategi yang sudah direncanakan; (5) Menyelesaikan masalah dengan strategi yang tepat. Contoh berikut adalah soal pola barisan di tingkat SMA yang terkait dengan *strategic competence*.

Contoh 3:

Berapa banyak persegi yang terdapat pada papan catur?



Gambar 3. Papan Catur

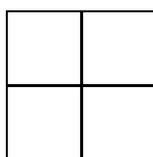
Sumber: <http://i561.photobucket.com/albums/ss60/jotluvislam/chessboard-1.gif>

Siswa yang memiliki *strategic competence* yang bagus, akan mencoba strategi mencari pola, dimana ia akan memulai dari persegi yang paling kecil, yaitu 1×1 , 2×2 , dan 3×3 .



Gambar 4. Persegi 1×1

Dari Gambar 4 jelas, banyak persegi dari persegi 1×1 adalah 1.

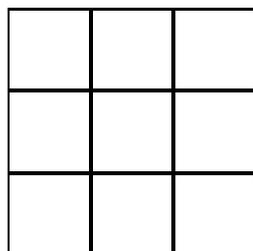


Gambar 5. Persegi 2×2

Tabel 2. Susunan Persegi 2×2

Ukuran persegi	Banyak persegi
1×1	4
2×2	1
Total	5

Dari Tabel 2, jelas banyak persegi dari persegi 2×2 adalah 5.



Gambar 6. Persegi 3×3

Tabel 3. Susunan Persegi 3×3

Ukuran persegi	Banyak persegi
1×1	9
2×2	4
3×3	1
Total	14

Dari Tabel 3, jelas banyak persegi dari persegi 3×3 adalah 14.

Kemudian dari Tabel 1, 2 dan 3 dapat dilihat pola bahwa banyak persegi adalah kuadrat berkebalikan. Sehingga untuk persegi 8×8 dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4. Persegi 8×8

Ukuran persegi	Banyak persegi
1x1	64
2x2	49
3x3	36
4x4	25
5x5	16
6x6	9
7x7	4
8x8	1
Total	204

Dari Tabel 4, jelas banyak persegi dari persegi 8×8 adalah 204. Bahkan bisa dibuat generalisasi untuk persegi ukuran $n \times n$ akan terdapat persegi sebanyak $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Model pembelajaran matematika yang dapat mengakomodir kemampuan *strategic competence* adalah model pembelajaran berbasis masalah unik yang membutuhkan kompetensi strategis. Dengan demikian, profil pembelajaran yang dapat mengakomodir kemampuan *strategic competence* siswa adalah pembelajaran dengan memberikan permasalahan non rutin dimana siswa harus menggunakan seluruh strategi yang ia ketahui dan kemudian memilih strategi yang tepat, melaksanakan strategi tersebut dan menyelesaikan masalah. Untuk mengembangkan kemampuan *strategic competence*, disarankan untuk membaca buku (Posamentier & Krulik, 1998).

C.4. Profil Pembelajaran Adaptive Reasoning

Adaptive reasoning adalah kemampuan untuk berpikir logis tentang hubungan antar situasi dan konsep matematika, kemampuan berpikir reflektif, menjelaskan, dan membenaran. *Adaptive reasoning* yang dimaksud merupakan gabungan dari *conceptual understanding*, *procedural fluency*, *strategic competence*, intuisi, penalaran deduktif dan metakognisi. Kemampuan *adaptive reasoning* tanpa kemampuan *conceptual understanding*, *procedural fluency* dan *strategic competence* akan mengakibatkan seorang siswa tidak dapat memecahkan masalah karena tidak memiliki pemahaman konsep dan *strategic competence* yang cukup untuk digunakan dalam memecahkan masalah. Oleh karenanya, seorang dikatakan memiliki

kemampuan *adaptive reasoning* jika mampu (1) berpikir logis dalam memilih konsep dan situasi matematika yang tepat; (2) menggunakan prosedur yang tepat dan (3) mengecek kembali jawaban. Sebagai contoh soal yang terkait dengan *adaptive reasoning* pada tingkat SMA adalah materi polinom sebagai berikut.

Contoh 4:

Tentukan nilai x dan y dari $(x-y^2)^2 + (x-y-2)^2 = 0$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$

Bagi siswa yang belum memiliki *adaptive reasoning*, akan menjawab soal secara prosedural yaitu:

$$x^2 - 2xy^2 + y^4 + x^2 - 2xy - 4x + y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$2x^2 - 2xy^2 - 2xy - 4x + y^4 + y^2 + 4y + 4 = 0$$

Dan biasanya, sampai di sini, siswa menyerah untuk melanjutkan jawabannya.

Tetapi bagi siswa yang memiliki *adaptive reasoning* yang cukup, akan mulai menjawab dengan penalaran logis yang berhubungan dengan sistem bilangan. Bentuk $a^2 + b^2 = 0$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$ akan bernilai benar jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$. Sehingga

$$x - y^2 = 0 \text{ dan } x - y - 2 = 0$$

$$x = y^2 \text{ dan } x = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

$$y = 2 \text{ atau } y = -1$$

$$x = 4 \text{ atau } x = 1$$

Untuk meyakinkan jawaban, cek jawaban dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan awal.

Kemampuan *adaptive reasoning* adalah kemampuan yang mensyaratkan siswa untuk memiliki terlebih dahulu kemampuan *conceptual understanding*, *procedural fluency* dan *strategic competence*. Soal pada contoh 4 tidak akan dapat dijawab oleh siswa yang belum memiliki kemampuan *conceptual understanding* tentang sistem bilangan yang akibatnya siswa tidak memiliki kemampuan *strategic competence* dan kemampuan *procedural fluency* untuk digunakan dalam pemecahan masalah. Dengan demikian, model pembelajaran matematika yang dapat mengakomodir kemampuan *adaptive reasoning* adalah model pembelajaran berbasis soal pembuktian.

C.5. Profil Pembelajaran *Productive Disposition*

Productive disposition adalah kecenderungan untuk melihat matematika sebagai sesuatu yang berguna dan berharga, meyakini bahwa upaya secara terus-menerus dalam pembelajaran matematika memiliki ganjaran, dan untuk melihat diri sendiri sebagai pembelajar yang efektif dan pelaku matematika. Ketika siswa membangun pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, dan kemampuan penalaran adaptif, mereka harus meyakini bahwa matematika dapat dipahami dan tidak sembarang sehingga dengan upaya yang tekun, ia bisa dipelajari dan digunakan serta mereka mampu memahaminya.

Tabel 5. Indikator *Potential Productive Dispositions*

Kategori Potensial	Bukti
1. Matematika sebagai upaya yang masuk akal	a. Mencoba memahami tugas b. Mempertimbangkan berbagai pendekatan alternatif c. Menanyakan apakah jawaban tampak logis d. Bermasalah dengan inkonsistensi
2. Matematika sebagai keindahan, berguna dan berharga	a. Menunjukkan minat dalam tugas melalui keterlibatan b. Menunjukkan minat dalam tugas c. Menunjukkan rasa takjub
3. Keyakinan bahwa seseorang dapat belajar matematika dengan usaha yang tepat	a. Meyakini bisa mengalami kemajuan pada tugas b. Bertahan c. Tidak menghindari rasa frustrasi
4. Kebiasaan berpikir matematis	a. Menanyakan pertanyaan tentang matematika b. Menunjukkan apresiasi atas solusi seseorang c. Mencari dan memberikan klarifikasi
5. Integritas matematis dan pengambilan risiko akademik	a. Memiliki rasa ketika orang telah menyelesaikan tugas b. Bersedia untuk mempertanyakan diri sendiri c. Bersedia untuk menawarkan ide-ide tentang d. Menyadari kerancuan yang layak dan tidak layak
6. Tujuan positif dan motivasi	a. Mendefinisikan kemajuan pembelajaran melalui usaha yang keras, tidak hanya mendapatkan jawaban b. Menunjukkan kesenangan atau kegembiraan tentang suatu cara tertentu dari penalaran c. Rela dilibatkan kembali dengan tugas-tugas sulit d. Menafsirkan frustrasi sebagai pernyataan tentang kompetensi matematika seseorang
7. <i>Self-Efficacy</i>	a. Tampak percaya diri dalam kemampuan sendiri dan keterampilan untuk memecahkan tugas b. Tampak percaya diri dalam suatu pengetahuan

Sumber: Siegfried

Kemampuan *productive disposition* berbeda dengan 4 komponen lainnya, dimana 4 komponen tersebut dapat diukur menggunakan pensil dan kertas sementara *productive disposition* diukur menggunakan instrumen pengamatan. Dalam buku *Adding it Up*, Kilpatrick et al. tidak menjelaskan secara rinci apa saja indikator dari *productive disposition* walaupun secara tersirat terdiri dari (1) *beliefs*, (2) *attitudes*, dan (3) *confidence*. Namun (Siegfried, 2012) mengulas tentang *productive disposition* secara detail dalam disertasinya dengan melakukan koneksi antara *productive disposition* dengan kemampuan-kemampuan afektif yang lain. Menurut (Siegfried, 2012) indikator kuat kemampuan *productive disposition* dapat dilihat pada Tabel 5.

Dari Tabel 5 dapat dikatakan bahwa siswa memiliki kemampuan *productive disposition* jika memenuhi 7 kategori. (Siegfried, 2012) dalam penelitiannya menggunakan pembelajaran berbasis tugas yang dilakukan secara berkelompok untuk melihat kemampuan *productive disposition* calon guru dan guru aktif menganalisis hasil pekerjaan siswa meliputi apakah ada kesalahan dalam *halconceptual understanding* dan *procedural fluency*, *strategic competence*, *adaptive reasoning* yang digunakan Savanah, apakah ia berpikir logis dan memilih konsep yang sesuai dalam jawabannya serta melihat *productive disposition* yang ada pada Savanah. Dengan demikian, profil pembelajaran yang dapat mengakomodir kemampuan *productive disposition* adalah pembelajaran berbasis tugas dimana melibatkan keempat komponen *mathematical proficiency* yang lain.

D. Contoh Model Pembelajaran *Mathematical Proficiency*

Tabel 6. Indikator *Mathematical proficiency*

<i>Conceptual Understanding</i>
1. Mengkoneksikan permasalahan dengan ide matematika lain
2. Merepresentasikan permasalahan baik secara verbal, pictorial, simbol dan konkrit
3. Menyelesaikan masalah dengan representasi yang tepat
<i>Procedural Fluency</i>
1. Mampu mengingat, memilih dan menerapkan rumus yang tepat
2. Akurat dalam perhitungan
3. Tepat dalam menggunakan algoritma
<i>Strategic Competence</i>
1. Merumuskan permasalahan
2. Merencanakan strategi yang tepat
3. Merepresentasikan masalah baik secara verbal, pictorial, simbol dan konkrit
4. Menyelesaikan masalah dengan strategi yang tepat
<i>Adaptive Reasoning</i>
1. Berpikir logis dalam memilih konsep dan situasi matematika yang tepat
2. Menggunakan prosedur yang tepat
3. Mengecek jawaban
<i>Productive Disposition</i>
1. Matematika sebagai upaya yang masuk akal
2. Matematika sebagai keindahan, berguna dan berharga
3. Keyakinan bahwa seseorang dapat belajar matematika dengan usaha yang tepat
4. Kebiasaan berpikir matematis
5. Integritas matematis dan pengambilan risiko akademik
6. Tujuan positif dan motivasi
7. <i>Self-Efficacy</i>

Secara umum profil pembelajaran yang dapat mengakomodirnya *mathematical proficiency* adalah pembelajaran yang memberikan kesempatan siswa untuk memunculkan kemampuan *conceptual understanding*, *procedural fluency*, *strategic competence*, *adaptive reasoning* dan *productive disposition*. Kemampuan-kemampuan

tersebut dapat dimungkinkan terjadi jika indikator-indikatornya diketahui. Indikator-indikator *mathematical proficiency* dapat dilihat pada Tabel 6.

Dari penjelasan-penjelasan sebelumnya, diperoleh informasi bahwa komponen-komponen dalam *mathematical proficiency* saling terkait, sehingga profil pembelajaran yang dapat mengakomodir kelima komponen *mathematical proficiency* adalah kombinasi dari pembelajaran *direct learning*, pembelajaran berbasis masalah rutin berbantuan teknologi dengan strategi *scaffolding*, pembelajaran berbasis masalah non rutin, pembelajaran berbasis soal pembuktian dan pembelajaran berbasis tugas. Berdasarkan kondisi tersebut, model pembelajaran matematika yang mungkin digunakan untuk mengakomodir *mathematical proficiency* adalah model pembelajaran dengan desain bahan ajar yang relevan.

Terkait dengan bahan ajar, menurut (Knisley, 2001) model pembelajaran matematika hendaklah memenuhi syarat 4 tahap, yaitu:

- 1) ***Allegorization***: pada tahap ini, peserta didik belum mampu membedakan antara konsep baru dan konsep yang telah dikenal.
- 2) ***Integrasi***: pada tahap ini, peserta didik menyadari sebuah konsep baru, tetapi tidak tahu bagaimana kaitannya dengan apa yang sudah diketahui.
- 3) ***Analisis***: pada tahap ini, peserta didik dapat mengaitkan konsep baru dengan konsep yang dikenal, tetapi mereka tidak memiliki informasi yang diperlukan untuk membangun karakter yang unik dalam konsep ini.
- 4) ***Sintesis***: pada tahap ini, peserta didik telah menguasai konsep baru dan dapat menggunakannya untuk memecahkan masalah, mengembangkan strategi (yaitu, teori baru), dan menciptakan alegori.

Dari tahapan yang dinyatakan oleh Knisley, bisa dibayangkan pada saat pembelajaran matematika menggunakan pembelajaran berbasis masalah, siswa mesti melewati tahap 1 sampai dengan tahap 3 untuk bisa berproses dalam pembelajaran tersebut. Tetapi tidak menutup kemungkinan, model pembelajaran matematika berbasis masalah dapat dilakukan pada materi tertentu jika desain bahan ajar yang akan digunakan telah disesuaikan, katakanlah materi tertentu tersebut adalah materi peluang, dan aritmatika sosial.

Oleh karena itu, model pembelajaran matematika yang dapat mengakomodir *mathematical proficiency* adalah pembelajaran yang sepatutnya memenuhi 4 tahapan tersebut. Salah satu contoh model yang mungkin digunakan dalam pembelajaran

berbasis masalah adalah Model Eliciting Activities (MEA). Menurut (Chamberlin & Moon, 2005) MEA adalah model pembelajaran berbasis masalah nyata atau masalah dalam kehidupan sehari-hari dimana pembelajarannya terdiri dari 4 bagian utama yaitu adanya: (1) Bahan bacaan tentang kehidupan sehari-hari, (2) Bahan pertanyaan, (3) Data, dan (4) Tugas pemecahan masalah.

Contoh lain dari model pembelajaran matematika yang mengakomodir *mathematical proficiency* adalah model *Structured Problem Solving Mathematics Lesson*. Model tersebut menurut (Groves, 2012) dan (Groves, 2013) yaitu suatu kegiatan dimana kegiatan tersebut dibagi menjadi dua sesi, kemudian pada sesi pertama guru diminta untuk mengidentifikasi tujuan pembelajaran menyeluruh, unit dan materi matematika dari permasalahan *Matchstick Problem*. Pada sesi kedua, guru diminta untuk membahas pernyataan dari masalah, berbagai solusi yang mungkin siswa ungkapkan dan mengatur bagaimana berbagi solusi tersebut. Inti dari model tersebut adalah adanya kegiatan diskusi mengenai representasi dan strategi siswa dalam memecahkan masalah tersebut.

Model pembelajaran matematika menggunakan MEA mungkin dapat digunakan dalam pembelajaran ketika membahas materi atau konsep matematika lanjutan bukan materi atau konsep matematika yang baru bagi siswa, katakanlah materi integral di tingkat SMA yang sebelumnya tidak diperoleh di SMP. Dengan kondisi tersebut, dapat dikatakan bahwa model pembelajaran matematika menggunakan MEA memerlukan kemampuan *conceptual understanding*, *procedural fluency* dan *strategic competence* atau semua komponen *mathematical proficiency* setiap siswa dalam prosesnya sehingga hal tersebut harus diantisipasi dengan memodifikasi MEA.

Modifikasi yang dimaksud adalah adanya desain bahan ajar dan bahan bacaan yang disesuaikan dengan kondisi siswa dan komponen dalam *mathematical proficiency* tanpa meniadakan komponen yang lain dalam proses pembelajaran matematika. Kemudian, terkait dengan pembelajaran berbantuan teknologi dengan strategi *scaffolding* maka modifikasi bahan ajar dapat dikombinasikan dalam proses pembelajaran matematika tanpa mengganggu desain bahan ajar yang telah disusun. (Misfeldt, Jankvist, & Aguilar, 2016) menyatakan bahwa *beliefs* seorang guru tentang penggunaan teknologi dalam pembelajaran bergantung kepada kompetensi yang akan dicapai dalam proses belajar matematika. Misfeldt et.al, dalam penelitiannya melihat keragaman *beliefs* dari tiga orang guru tentang penggunaan teknologi dan matematika dalam proses pembelajaran.

Penelitian (Sollervall & Gil de La Iglesia, 2015) menyatakan bahwa teknologi *mobile* dan *web* yang disesuaikan dapat menginspirasi siswa untuk terlibat dalam kegiatan dan mendukung pembelajaran matematika antara konteks dalam dan luar ruangan. Teknologi-teknologi yang mendukung memungkinkan guru untuk berfokus pada mengupayakan kegiatan pembelajaran matematis bermakna, sehingga berhasil menuntaskan situasi didaktikal yang lengkap dan kompleks.

Kemudian *scaffolding* dalam pembelajaran matematika, baik menggunakan teknologi ataupun tidak, masih relevan dalam proses belajar matematika. Senada dengan (Jancarik & Novotna, 2015) yang menyatakan bahwa penggunaan *scaffolding* dalam proses pembelajaran dapat diterapkan tidak hanya di *e-learning*, namun juga di program reguler pembelajaran matematika di mana ada komunikasi antara guru dan siswa, karena mereka membantu di setiap saat ketika siswa menghadapi kesulitan dan mencoba untuk mengatasi hambatan dalam proses kognitif. Dengan demikian, salah satu model pembelajaran matematika yang dapat mengakomodir *mathematical proficiency* adalah model pembelajaran MEA modifikasi berbantuan *web* dengan strategi *scaffolding* (MMBS).

E. Kesimpulan

Model pembelajaran matematika yang direkomendasikan untuk diimplementasikan dalam proses pembelajaran secara teoritis dan fakta, diyakini akan dapat mengembangkan *mathematical proficiency* siswa, baik *conceptual understanding*, *procedural fluency*, *strategic competence*, *adaptive reasoning*, maupun *productive disposition*. Pengembangan kelima komponen *mathematical proficiency* tersebut dapat dilakukan secara terpadu pada model pembelajaran MEA modifikasi berbantuan *web* dengan strategi *scaffolding* (MMBS), karena dalam setiap tahap pada model tersebut memberi peluang untuk berkembangnya kelima komponen *mathematical proficiency* tersebut.

Daftar Pustaka

- Bindler, R., & Bayne, T. (1984). Do Baccalaureate Students Possess Basic Mathematics Proficiency? *Journal of Nursing Education*, 192-197.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991). *A History of Mathematics*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Prufrock Journal*, 37-47.

- Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the Technology Landscape: Teachers' Use of Technology in Secondary Mathematics Classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 103.
- Groves, S. (2012). Developing mathematical proficiency. *Journal of science and mathematics education in Southeast Asia*, 119-145.
- Groves, S. (2013). Implementing the Japanese problem-solving lesson structure. In *MERGA36 2013: Mathematics Education: Yesterday, Today and Tomorrow: Proceedings of the 36th Mathematics Education Research Group of Australasia 2013 conference* (hal. 711-714). MERGA.
- Jancarik, A., & Novotna, J. (2015). Scaffolding in e-learning course for gifted children. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (hal. 2354-2360). Prague.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Knisley, J. (2001). A four-stage model of mathematical learning. *The Mathematics Educator* 12 (1).
- Lauglo, J. (1984). *Technical Secondary Schools in Kenya: an Assessment*. Swedish International Development Authority (SIDA).
- Ludvigsen, S. R., & Mørch, A. I. (2010). Computer-Supported Collaborative Learning: Basic Concepts, Multiple Perspectives, and Emerging Trends. Dalam P. Peterson, E. Baker, & B. McGraw, *The International Encyclopedia of Education, 3rd Edition* (hal. 290-296). Amsterdam: Elsevier.
- McCann, P. H. (1975). Training Mathematics Skills with Games. *ERIC*, 1-26.
- Milgram, R. J. (2007). What is Mathematical Proficiency? *Mathematical Sciences Research Institute*, 31-58.
- Misfeldt, M., Jankvist, U. T., & Aguilar, M. S. (2016). Teachers' Beliefs about the Discipline of Mathematics and the Use of Technology in the Classroom. *Mathematics Education*, 395-419.
- Nelson, M. H. (1977). *Mathematical ability, inability and disability (Doctoral dissertation)*. Massachusetts Institute of Technology.
- Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. California: Corwin Press, 2455 Teller Road.
- Siegfried, J. M. (2012). *The hidden strand of mathematical proficiency: defining and assessing for productive disposition in elementary school teachers' mathematical content knowledge*. San Diego: Tidak dipublikasikan.
- Singer, J. M., & Stake, J. E. (1986). Mathematics And Self-Esteem: Implications For Women's Career Choice. *Psychology Of Women Quarterly*, 339-352.
- Soebagyo, J. (2016a). Perbandingan Kemampuan Pemahaman Matematis Antara Siswayang Belajar Dengan Pemanfaatan WKA Menggunakan Strategi Scaffoldingdengan Siswa Yang Belajar Menggunakanpembelajaran Konvensionaldi SMA Negeri Jakarta Utara. *Prosiding Seminar Nasional*

Matematika Pendidikan Matematika 2016 (hal. 711-725). Cirebon: FKIP Unswagati.

Soebagyo, J. (2016b). Pemanfaatan Web Khan Academy Dalam Pembelajaran Matematika. *Infinity*, 50 - 55.

Sollervall, H., & Gil de La Iglesia, D. (2015). Designing a didactical situation with mobile and web technologies. *In 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 9)*, (hal. 2410-2417). Prague.

Spady, W. G. (1978). The Concept and Implications of Competency-Based Education. *Educational Leadership*, 16-22.