MODUL
ANALISIS REAL BAGI CALON GURU MATEMATIKA

Dr. Khoerul Umam, M.Pd

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PROF DR. HAMKA

2021

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT, yang atas rahmat dan karunia-Nya kami dapat menyelesaikan makalah ini tepat pada waktunya. Adapun tema dari makalah ini adalah “Sistem Bilangan Real”.

Pada kesempatan ini kami mengucapkan terima kasih keada dosen mata kuliah Analisis Riil yang telah memberikan tugas terhadap kami. Kami juga ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang turut membantu dalam pembuatan makalah ini.

Kami menyadari bahwa makalah ini masih belum sempurna. Dikarenakan keterbatasan waktu dan kemampuan kami, maka kritik dan saran yang membangun senantiasa kami harapkan agar makalah ini dapat berguna bagi kami dan pihak-pihak lain yang berkepentingan pada umumnya.

Jakarta, November 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I INDUKSI MATEMATIKA

Definisi dan pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan dari benda-benda yang dapat dibedakan atau didefinisikan dengan jelas. Suatu himpunan umumnya dilambangkan dengan huruf kapital seperti $A, B, C, \ldots, Z$.

Anggota suatu himpunan dinotasikan sebagai berikut, misalkan x anggota dari himpunan A maka dapat dinotasikan $x \in A$. Sedangkan, jika y bukan anggota dari A maka dinotasikan dengan y $\notin$ sementara itu untuk banyaknya anggota himpunan dapat dinotasikan dengan
$n(nama\ himpunan)$.

Misalkan, himpunan B adalah himpunan lima bilangan asli yang pertama yaitu 1, 2, 3, 4, dan 5, maka $1 \in B, 2 \in B, 3 \in B, 4 \in B, 5 \in B, 6 \notin B, 10 \notin B, 75 \notin B$. Banyaknya anggota himpunan B adalah 5 yang kemudian dapat dinotasikan dengan (B) = 5.

Terdapat 3 cara untuk menyatakan himpunan, yaitu menyatakan dengan kata-kata, mendaftar (tabulasi), dan notasi.

1. Cara menyatakan himpunan dengan kata-kata

   Untuk menuliskan a, b, c, d, dan e sebagai himpunandengan kata-kata adalah sebagai berikut.

   A adalah himpunan lima abjad pertama huruf latin Untuk menuliskan 1, 2, 3, 4, dan 5 sebagai himpunan dengan kata-kata sebagai berikut.

   B adalah himpunan lima bilangan asli yang pertama, atau dapat ditulis B adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 6.

2. Cara menyatakan himpunan dengan mendaftar (tabulasi)

   Cara menyatakan himpunan dengan mendaftar dilakukan dengan menuliskan anggota dari himpunan tersebut. Semua anggotahimpunan ditulis dalam tanda kurung kurawal dan penyebutananggota yang satu dengan yang lain dipisahkan dengan tanda koma.Perhatikan contoh berikut ini.

   a) *A* = {2, 3, 5, 7, 9}
   b) *M* = {Bandung, Jakarta, Semarang, Surabaya}
   c) *S* = {Senin, Selasa, Sabtu}
   d) *C* = {1, 2, 3, 4, ...}

   Menyatakan himpunan dengan cara seperti ini sangat cocokuntuk himpunan yang jumlah anggotanya sedikit. Ada tiga hal yang perlu diperhatikan dalam menyatakan himpunan dengan cara mendaftar, yaitu sebagai berikut.

a) Anggota suatu himpunan yang muncul lebih dari satu kali, cukup ditulis sekali saja.
b) Penulisan anggota himpunan boleh mengabaikan urutannya.
c) Untuk himpunan yang jumlah anggotanya tak terhingga dan anggotanya mempunyai urutan tertentu dapat menggunakan tanda tiga titik (...).

3. Cara menyatakan himpunan dengan notasi pembentuk himpunan

Himpunan yang dinyatakan dengan cara ini tidak disebutkan anggota-anggotanya, yang disebutkan hanyalah syarat atau aturan yang harus dipenuhi oleh suatu objek agar dapat menjadi anggota himpunan yang bersangkutan. Penyajian himpunan dengan cara ini dinamakan penyajian himpunan dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan. Penulisan dengan notasi pembentuk himpunan dinyatakan sebagai berikut.

$$A = \{x| \ldots, x \; bilangan \ldots \}$$

Misalkan diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Himpunan A dapat dinamakan sebagai himpunan lima bilangan asli pertama. Dengan cara notasi pembentuk himpunan, himpunan A dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \{x|x < 6, x \; bilangan \; asli\}$$

Penotasian tersebut dibaca sebagai himpunan A adalah himpunan semua x sedemikian sehingga x kurang dari 6 dan x bilangan asli.

Selain menyatakan himpunan dengan cara notasi seperti di atas, ada pula cara penotasian yang berbentuk sebagai berikut.

$$A = \{(x, y)| \ldots, x, y \; bilangan \ldots \}$$

Contoh:

A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), ... } dapat dinyatakan dalam bentuk notasi sebagai berikut.

$$A = \{(x, y)|x = y; x, y \; bilangan \; asli\}$$

Atau secara lebih sederhana dapat dinyatakan dengan

$$A = \{(x, x)| \; x \; bilangan \; asli\}$$

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota. Himpunan kosong dinotasikan dengan { } atau ∅. Banyaknya anggota himpunan kosong adalah 0 atau dengan kata lain himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota.

Operasi Himpunan

1. Operasi Irisan

   Irisan dari dua himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A dan anggota himpunan B. Dengan kata lain, irisan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota dari kedua himpunan tersebut. Himpunan ini dilambangkan dengan $A \cap B$ dan dibaca himpunan A irisan himpunan B. Jika ditulis dengan notasi pembentuk himpunan sebagai berikut.

   $$A \cap B = \{x | x \in A \; dan \; x \in B\}$$

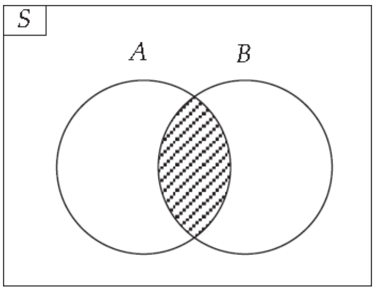
   Contoh: A = {a, b, c, d, e} dan B = {b, c, f, g, h}

   Pada kedua himpunan tersebut terdapat dua anggota yang sama yaitu b dan c. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa irisan himpunan A dan B adalah b dan c atau ditulis dengan:

   $$A \cap B = \{\text{b, c}\}$$

   Dengan diagram Venn, $A \cap B$ dapat dinyatakan seperti pada gambar berikut. Perhatikan bahwa daerah yang diarsir merupakan $A \cap B$.

   Gambar 1. Contoh Diagram Venn untuk Irisan Himpunan A dan B

2. Operasi Gabungan

   Gabungan dari dua himpunan A dan B merupakan suatu himpunan yang anggota-anggotanya ialah anggota himpunan A atau anggota himpunan B atau anggota kedua-duanya. Himpunan ini dilambangkan dengan $A \cup B$ dan dibaca himpunan *A* gabungan himpunan *B*. Jika ditulis dengan notasi pembentuk himpunan sebagai berikut.

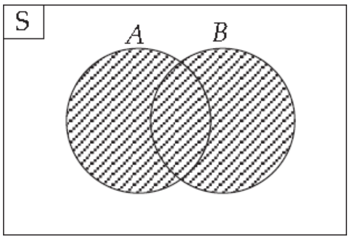
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ } atau \text{ } x \in B\}$$

Contoh: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7\}$

Gabungan dari kedua himpunan A dan B adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} atau dapat ditulis:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Dengan diagram Venn, $A \cup B$ ditunjukkan oleh gambar berikut. Perhatikan bahwa daerah yang diarsir adalah $A \cup B$.



Gambar 2. Contoh Diagram Venn untuk Gabungan Himpunan Adan B

3. Operasi Komplemen

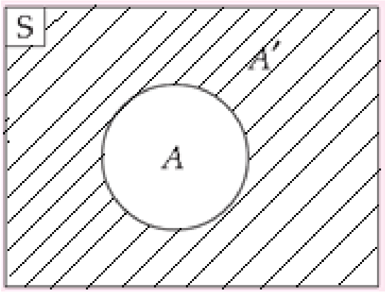
Komplemen dari himpunan A adalah himpunan yang anggota-anggotanya bukan merupakan anggota himpunan A. Himpunan ini dilambangkan dengan A’ dan dibaca A komplemen atau komplemen dari A. Jika ditulis dengan notasi pembentuk himpunan sebagai berikut.

$$A' = \{x | x \in S \text{ } dan \text{ } x \notin A\}$$

Contoh: $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

Komplemen dari himpunan A adalah {0, 1, 6, 7}. Komplemen *A* juga dapat dinyatakan dengan diagram Venn. Diagram Venn dari *A*’ dinyatakan seperti gambar berikut. Perhatikan bahwa daerah yang diarsir adalah *A*’.



Gambar 3. Contoh Diagram Venn untuk Komplemen Himpunan A

4. Operasi Selisih

Selisih dari himpunan *A* dan himpunan *B* adalah anggota himpunan *A* yang bukan anggota himpunan *B*, dinotasikan dengan *A*-*B*. Sedangkan selisih himpunan *B* dan himpunan *A* adalah anggota himpunan *B* yang bukan anggota himpunan *A*, dinotasikandengan $B - A$.

Jika diketahui himpunan *A* dan *B*, maka selisihnya dapat ditulis dengan notasi pembentuk himpunan sebagai berikut:

$$A - B = \{x|x \in A \ dan \ x \notin B\}$$

$$B - A = \{x|x \in B \ dan \ x \notin A\}$$

Contoh:

A = {1, 2, 3, 4, 5}

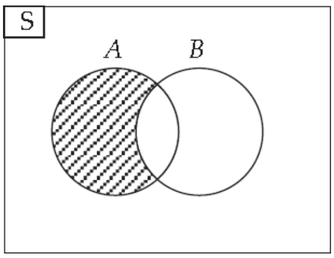
B = {2, 3, 5, 7, 11}

Maka,

$A - B = \{1, 4\}$

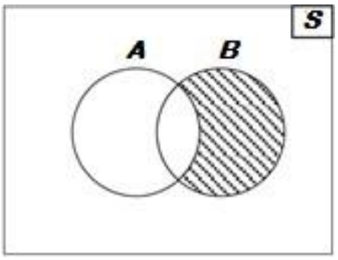
$B - A = \{7,11\}$

Selisih himpunan *A* dan *B* dapat dinyatakan dengan diagramVenn seperti gambar berikut. Perhatikan bahwa daerah yang diarsir adalah *A*-*B*.



Gambar 4. Contoh Diagram Venn untuk Selisih Himpunan A dan B

Selisih himpunan B dan A dapat dinyatakan dengan diagram Venn seperti gambar berikut. Perhatikan bahwa daerah yang diarsir adalah *B-A*.



Gambar 5. Contoh Diagram Venn untuk Selisih Himpunan Bdan A

Contoh Soal

1. Jika ∅∅ merupakan himpunan kosong, maka...

   (1) $\emptyset \subset \emptyset$

   (2) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

   (3) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

   (4) $\emptyset \in \emptyset$

   Jawaban :

   Untuk ∅ merupakan himpunan kosong,

   - Pernyataan (1) $\emptyset \subset \emptyset$ adalah pernyataan benar karena himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan kosong.
   - Pernyataan (2) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ adalah pernyataan benar karena himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan yang salah satuanggotanya himpunan kosong.
   - Pernyataan (3) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ adalah pernyataan benar karena himpunan kosong merupakan anggota dari himpunan kosong.
   - Pernyataan (4) $\emptyset \in \emptyset$ adalah pernyataan salah karena himpunan kosong tidak mempunyai anggota.

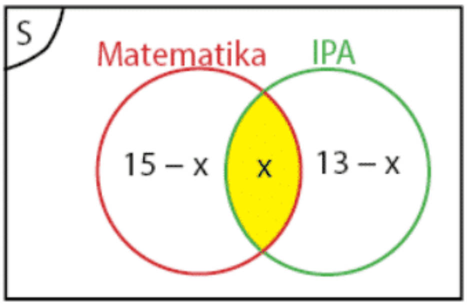
   Pilihan yang sesuai adalah (A) Pernyataan (1), (2) dan (3) Benar

2. Kelas 9C terdiri dari 31 orang siswa. Lalu ada 15 orang siswa yang mengikuti kompetisi matematika, kemudian ada juga 13 orang siswa yang mengikuti kompetisi IPA, dan sisa nya ada 7 orang siswa yang tidak mengikuti kompetisi apapun. Maka

hitunglah berapa banyak siswa yang mengikuti kedua kompetisi tersebut?

Jawaban nya:

Misalkan (x) ialah banyak siswa yang mengikuti kedua kompetisi tersebut. Maka himpunan tersebut dapat digambarkan dengan bentuk diagram venn seperti gambar yang di bawah ini:



Jumlah dari semua siswa ialah = 31 orang siswa, maka :

x + 15 – x + 13 – x + 7 = 31.

35 – x = 31.

x = 4.

Jadi, banyak siswa yang mengikuti kedua kompetisi tersebut ialah sebanyak = 4 orang siswa.

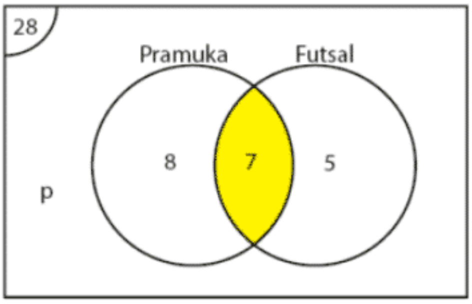
3. Dari 28 orang siswa yang mengikuti kegiatan ekstrakurikuler di sekolah dan masing – masing anak itu ada 15 orang siswa yang mengikuti pramuka, lalu kemudian 12 orang siswa yang mengikuti futsal dan yang terakhir 7 orang siswa yang mengikuti keduanya. Maka hitunglah berapa banyak siswa yang tidak mengikuti ekstrakurikuler pramuka maupun ekstrakurikuler futsal ialah ?

   Jawaban nya :

   Misalkan (x) ialah banyak siswa yang tidak mengikuti ekstrakurikuler.

   Banyak anak yang hanya mengikuti ekstrakurikuler pramuka ialah sebanyak 15 – 7 = 8 orang siswa. Banyak anak yang hanya mengikuti ekstrakurikuler futsal ialah sebanyak 12 – 7 = 5 orang siswa.

   Maka himpunan tersebut dapat digambarkan dengan bentuk diagram venn seperti gambar yang di bawah ini:



Banyak anak yang tidak mengikuti ekstrakurikuler ialah :

8 + 7 + 5 + x = 28

20 + x = 28

x = 28 – 20

x = 8 siswa

jadi, banyaknya siswa yang tidak mengikuti ekstrakurikuler pramuka maupun ekstrakurikuler futsal ialah = 8 orang siswa.

4. Di ketahui :

   A = {x | 1 < x 5, maka x ialah bilangan bulat}.

   B = {x | x 5, maka x ialah bilangan prima}.

   Maka tentukanlah hasil dari A ∪ B?

   Jawaban nya:

   A = { 2, 3, 4 ,5 }.

   B = { 2, 3, 5, 7, 11, 13 }.

   Simbol dari (union atau gabungan) yang artinya ialah salah satu cara untuk menggabungkan anggota himpunan yang saling terkait.

   A ∪ B = {2, 3, 4, 5, 7, 11, 13}.

   Jadi, hasil dari A ∪ B ialah = {2, 3, 4, 5, 7, 11, 13}.

5. Di ketahui :

   K = {x | 5 x 9, maka x ialah bilangan asli }.

   L = {x | 7 x 13, maka x ialah bilangan cacah }.

   Maka tentukanlah hasil dari K ∪ L?

   Jawaban nya:

   K = {5, 6, 7, 8, 9}

L = {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}

Simbol (union atau gabungan) yang artinya ialah salah satu cara untuk menggabungkan anggota himpunan yang saling terkait.

K ∪ L = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}

Jadi, hasil dari K ∪ L ialah = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

Latihan Soal

1. Di dalam sebuah kelas tercatat ada 21 orang siswa yang gemar bermain basket, lalu ada juga 19 orang siswa yang gemar bermain sepak bola, kemudian ada juga 8 orang siswa yang gemar bermain basket dan sepak bola, serta ada juga 14 orang siswa yang tidak gemar olahraga. Maka hitunglah berapa banyak siswa di dalam kelas tersebut?
2. Di ketahui :

   A = {x | 1 < x < 20, maka x ialah bilangan prima }.

   B = {y | 1 y 10, maka y ialah bilangan ganjil}.

   Maka tentukanlah hasil dari A ∩ B?

3. Di perusahaan apple terdapat 69 orang pelamar yang harus mengikuti tes tertulis dan tes wawancara agar dapat diterima sebagai karyawan. Dan ternyata ada 32 orang pelamar lulus untuk tes wawancara, lalu kemudian ada 48 orang pelamar lulus untuk tes tertulis, dan akhirnya ada juga 6 orang pelamar yang tidak mengikuti kedua tes tersebut. Maka hitunglah berapa banyak pelamar yang akan diterima sebagai karyawan ?

BAB II TEOREMA HIMPUNAN

- Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

Cara Penyajian Himpunan

1. *Enumerasi*

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{…, -2, -1, 0, 1, 2, …\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh 2.

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$

$K = \{\{\}\}$, maka

$3 \in A$

$5 \notin B$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$, $P_2 = \{ \{a, b\} \}$, $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

2. *Simbol-simbol Baku*

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.
  Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: $\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$

Contoh 4.

(i) *A* adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

$A = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau

$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

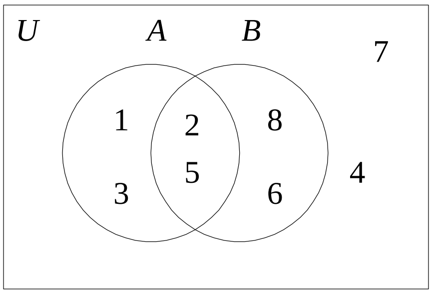
(ii) $M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah IF2151}

4. *Diagram Venn*

Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

- Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.
- Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 $\}$,

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan Kosong

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\varnothing$ atau $\{\}$

Contoh 7.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

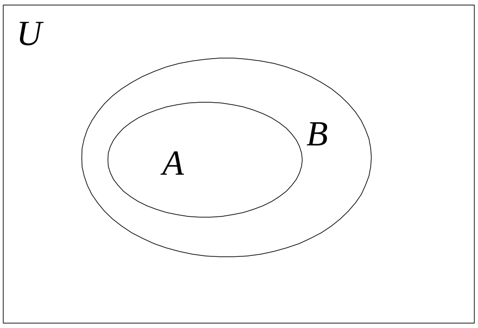
(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- Himpunan $\{\{ \}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$
- Himpunan $\{\{ \}, \{\{ \}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.
- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn:



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

  (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

  A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

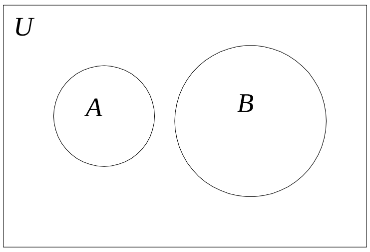
- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 10.

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A \,//\, B$
- Diagram Venn:



Contoh 11.

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, \ldots \}$, maka $A \,//\, B$.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi : $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12.

Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

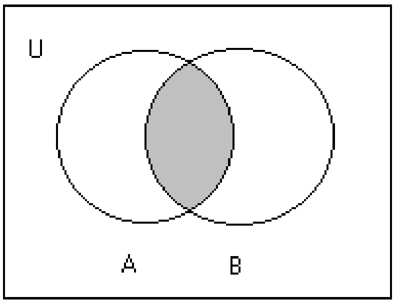
Contoh 13.

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

a. Irisan (intersection)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Contoh 14.

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,

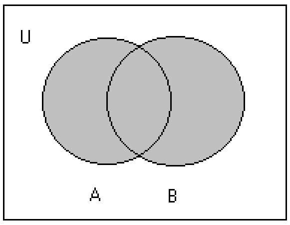
maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$.

Artinya: $A \,//\, B$

b. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



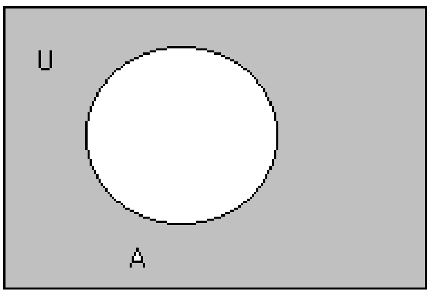
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

c. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

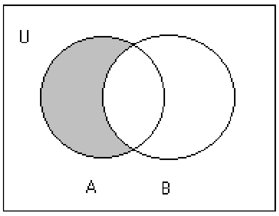
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

d. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh 18.

(i) Jika $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B - A = \varnothing$
(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh 19.

Jika $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 5\}$, maka $A \oplus B = \{3, 4, 5, 6\}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

(iii) "Ssemua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – $(P \cup Q)$

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.
4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = {s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus}

B = himpunan minuman = {c = coca-cola, t = teh, d = es dawet}

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Penyelesaian:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$
(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)
(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing,\varnothing)\}$
(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\}\}$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$

Hukum-hukum Himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	**2. Hukum *null*/dominasi:** – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	**4. Hukum idempoten:** – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$
5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	**6. Hukum penyerapan (absorpsi):** – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	**8. Hukum asosiatif:** – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	**10. Hukum De Morgan:** – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	

Prinsip Dualitas

- Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan

Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip dualitas:

Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

- **(Prinsip Dualitas pada Himpunan).** Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti $\cup \to \cap$, $\cap \to \cup$, $\varnothing \to \mathrm{U}$, $\mathrm{U} \to \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	**Dualnya:** $A \cap \mathrm{U} = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	**Dualnya:** $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$

3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	**Dualnya:** $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	**Dualnya:** $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	**Dualnya:** $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	**Dualnya:** $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	**Dualnya:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	**Dualnya:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	**Dualnya:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	**Dualnya:** $\overline{U} = \varnothing$

Contoh 23. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$,

$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$,

$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_r$, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

Partisi

- Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A_1, A_2, \ldots$ dari A sedemikian sehingga:
  (a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan
  (b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$

Contoh 25. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A.

Himpunan Ganda

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*). Contohnya, $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{\}$.
- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: $M = \{ 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 \}$, multiplisitas 0 adalah 4.
- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.
- Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

Operasi Antara Dua Buah Multiset:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q =\{ a, a, b, c, c \}$,
   $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$
   $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

3. P – Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:
   - multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif
   - 0, jika selisihnya nol atau negatif.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.

   Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,

   $P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

- Pernyataan himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
- Pernyataan dapat berupa:
  1. Kesamaan (*identity*)

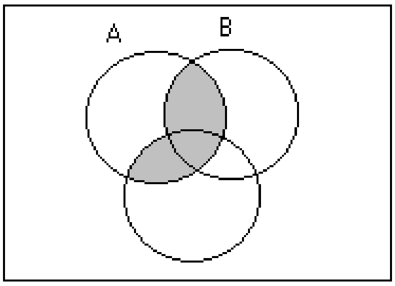
     Contoh: Buktikan "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$"
  2. Implikasi

     Contoh: Buktikan bahwa "Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$".

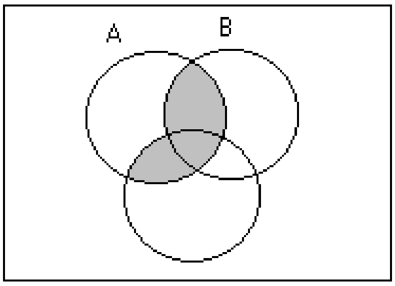
1. Pembuktian dengan Menggunakan Diagram Venn

Contoh 26. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua Diagram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.
- Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

2. Pembuktikan dengan Menggunakan Tabel Keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan Menggunakan Aljabar Himpunan.

Contoh 28. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Bukti:

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$	$= A \cap (B \cup \overline{B})$	**(Hukum Distributif)**
	$= A \cap U$	**(Hukum Komplemen)**
	$= A$	**(Hukum Identitas)**

Contoh 29. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$A \cup (B - A)$	$= A \cup (B \cap \overline{A})$	**(Definisi Operasi Selisih)**
	$= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$	**(Hukum Distributif)**
	$= (A \cup B) \cap U$	**(Hukum Komplemen)**
	$= A \cup B$	**(Hukum Identitas)**

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan (ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i)	$A \cup (\overline{A} \cap B)$	$= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cap B)$	**(Hukum Distributif)**
		$= U \cap (A \cap B)$	**(Hukum Komplemen)**
		$= A \cup B$	**(Hukum Identitas)**

(ii) adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B)$	$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$	**(Hukum Distributif)**

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ **(Hukum Komplemen)**

$= A \cap B$ **(Hukum Identitas)**

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh 31. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$.
Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.
Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

BAB III DEFINISI FUNGSI

Suatu fungsi f atau pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B, yang biasa ditulis dengan notasi ; **f : A → B**

Himpunan A disebut **daerah asal** atau ***domain*** fungsi f.

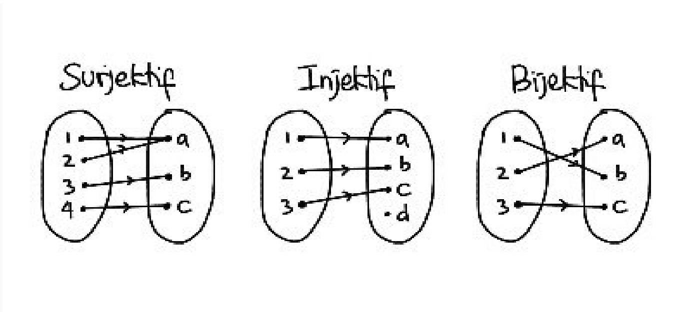
Himpunan B disebut **daerah kawan** atau ***kodomain*** dari f.

Himpunan peta-peta dari B disebut ***range*** atau **daerah hasil** dari f.

Contoh:

Misalkan f: R → R dengan f(x) = x^2 dan R bilangan real.
Maka;
Daerah asal f adalah bilangan real R.
Daerah kawan f adalah bilangan real R.
Daerah hasil f adalah $\{y : y \geq 0\}$.
Bayangan dari -3 adalah 9, maka dapat ditulis f(-3) = 9 atau f : -3 → 9

Sifat – sifat fungsi matematika antara lain :



1. **Fungsi Injektif**
   Sifat fungsi yang pertama adalah injektif atau juga disebut fungsi satu-satu. Pemetaan (fungsi) f : A → B dikatakan satu-satu atau injektif, jika untuk setiap unsur x_1 dan x_2 yang dipetakan sama oleh f, yaitu f(x_1) = f(x_2) berlaku x_1 = x_2.

2. **Fungsi Surjektif**

   Sifat fungsi matematika selanjutnya adalah surjektif. Fungsi f: A → B disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk sembarang b dalam *kodomain* B terdapat paling tidak satu a dalam domain A sehingga berlaku f(a) = b. Dengan kata lain, suatu *kodomain* fungsi surjektif sama dengan kisarannya *(range)*.

3. **Fungsi Bijektif**

   Sifat fungsi matematika yang terakhir adalah bijektif. Suatu pemetaan f: A→B sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau "A dan B berada dalam korespondensi satu – satu.

MACAM – MACAM FUNGSI :

a. Fungsi Linear

   Fungsi linear adalah fungsi yang disusun oleh persamaan aljabar yaitu berupa konstanta maupun suku berderajat satu, sehingga menghasilkan garis linear dalam koordinat kartesius. Garis linear merupakan istilah matematika untuk garis lurus.

b. Fungsi Kuadrat

   Fungsi kuadrat merupakan suatu fungsi di mana pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua. Fungsi Kuadrat adalah pemetaan dari daerah asal (domain) $\in R$ ke tepat satu daerah hasil (range) yang dinyatakan dengan rumus: dimana a, b, dan c adalah konstanta bilangan riil, $a \neq 0$.

c. Fungsi Polinom

   Fungsi Polinom atau yang sering di sebut suku banyak disebut dengan polinom merupakan bentuk suku suku dengan nilai banyak yang disusun dari perubah variabel dan konstanta. Operasi yang digunkana hanya penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pangkat bilangan bulat tak negative.

d. Fungsi Trigonometri

Fungsi Trigonometri adalah bagian dari ilmu matematika yang mempelajari tentang hubungan antara sisi dan sudut suatu segitiga serta fungsi dasar yang muncul dari relasi tersebut. Trigonometri merupakan nilai perbandingan yang didefinisikan pada koordinat kartesius atau segitiga siku-siku.

e. Fungsi Identitas

Fungsi identitas disebut juga relasi identitas, pemetaan identitas, atau transformasi identitas, adalah fungsi yang selalu menghasilkan nilai yang sama dengan yang diberikan atau dimasukkan. Agar f menjadi fungsi identitas, persamaan $f(x) = x$ harus terpenuhi untuk semua x.

f. Fungsi Konstan

Fungsi konstan (fungsi tetap) Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus f (x) disebut fungsi konstan apabila untuk setiap anggota domain fungsi selalu berlaku $f(x) = C$, di mana C bilangan konstan.

g. Fungsi Ganjil

Fungsi Ganjil adalah suatu fungsi dimana misalkan f (x) suatu fungsi maka f (x) disebut sebagai fungsi ganjil jika nilai dari $f(-x) = -f(x)$, untuk setiap bilangan x. -)

h. Fungsi Genap

Fungsi genap dalam matematika adalah fungsi yang memenuhi hubungan simetris tertentu, terhadap invers aditifnya. Penting dalam banyak bidang analisis matematika, terutama teori deret pangkat dan deret Fourier.

i. Fungsi Mutlak

Fungsi nilai mutlak adalah suatu fungsi yang aturannya memuat nilai mutlak. Nilai mutlak suatu bilanganrealx, dinyatakan dengan|x|, didefinisikan sebagai (x jika x ≥ 0 |x| = −x jika x <0

TEOREMA – TEOREMA

Teorema Nilai Ekstrim menyatakan bahwa suatu fungsi kontinu pada selang tutup [a, b] harus memiliki nilai minimum dan maksimum pada selang tersebut. Kedua nilai tersebut dapat terjadi pada ujung selang. Teorema Rolle memberikan kondisi yang menjamin keberadaan nilai ekstrim dalam interior suatu selang tertutup.

Pembuktian Misalkan $f(a) = d = f(b)$.

Kasus 1: Jika $f(x) = d$ untuk semua x dalam $[a, b]$, maka f konstan pada selang tersebut dan $f'(x) = 0$ untuk semua x dalam (a, b).

Kasus 2: Misalkan $f(x) > d$ untuk beberapa x dalam (a, b). Berdasarkan Teorema Nilai Ekstrim, kita tahu bahwa f memiliki nilai maksimum pada c dalam selang tersebut. Selanjutnya, karena $f(c) > d$, nilai maksimum ini tidak terjadi pada kedua ujung selang. Sehingga, f memiliki nilai maksimum dalam selang buka (a, b). Hal ini mengakibatkan $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal dan c merupakan nilai kritis f. Oleh karena itu, karena f terdiferensialkan pada c, kita dapat menarik kesimpulan bahwa $f'(c) = 0$.

Kasus 3: Misalkan $f(x) < d$ untuk beberapa x dalam (a, b). Berdasarkan Teorema Nilai Ekstrim, kita tahu bahwa f memiliki nilai minimum pada c dalam selang tersebut. Lebih jauh, karena $f(c) < d$, nilai minimum tidak terjadi pada kedua ujung selang. Sehingga, f memiliki nilai minimum dalam selang buka (a, b). Hal ini mengakibatkan $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal dan c merupakan nilai kritis f. Sehingga, karena f terdiferensialkan pada c, kita dapat menyimpulkan bahwa $f'(c) = 0$.

Berdasarkan Teorema Rolle, kita dapat melihat bahwa jika suatu fungsi *f* kontinu pada [*a*, *b*] dan terdiferensialkan pada (*a*, *b*), dan jika *f*(*a*) = *f*(*b*), maka terdapat minimal satu nilai *x* antara *a* dan *b* sedemikian sehingga grafik *f* memiliki garis singgung horizontal (perhatikan gambar (a) di bawah). Ketika syarat keterdiferensialan tidak dipenuhi dalam Teorema Rolle, *f* masih memiliki nilai kritis dalam (*a*, *b*), tetapi tidak menghasilkan suatu garis singgung horizontal.

Contoh Soal dan Jawaban

1. $f(x) = 4x^2 + 3x + 8$. Hitunglah nilai $a + 2b + 3c$!
   Jawaban:
   Diketahui nilai $a = 4$, $b = 3$, $c = 8$
   $= a + 2b + 3c$
   $= 4 + 2(3) + 3(8)$
   $= 4 + 6 + 24$

2. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ memiliki bentuk sesuai dengan bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$. Hitunglah nilai $2a + 3b + 4c$!
   Jawaban:
   = Diketahui nilai $a = 3$, $b = -2$, $c = 5$
   $= 2a + 3b + 4c$
   $= 2(3) + 3(-2) + (4 \text{ x } 5)$
   $= 6 - 6 + 20$
   $= 20$

3. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Hitunglah bayangangan untuk nilai $x = 3$
   Jawaban:
   $= f(x) = x^2 + 4x + 5$
   $= f(3) = 3^2 + 4(3) + 5$
   $= f(3) = 9 + 12 + 5$

$= f(3) = 26$

4. Diberikan fungsi f sebagai berikut:

   $f(x)=\{x22x+3;x\leq a;x>a$

   Tentukan nilai a sedemikian sehingga f kontinu di x = a

   Jawab:

   Diperoleh:

   $f(a)=a2$

   $limx\to a+f(x)=limx\to a+(2x+3)=2a+3$

   $limx\to a-f(x)=limx\to a-x2=a2$

   Agar f kontinu di x = a maka haruslah

   $a2=2a+3\Leftrightarrow a2-2a-3=0\Leftrightarrow(a-3)(a+1)\Leftrightarrow a=3;a=-1$

5. Diketahui fungsi f dan g kontinu di R dengan $g(x)>5$, untuk setiap x anggota R dan $|f(x) - \cos x| =< g(x) -5$. Jika $limx\to 0g(x)=5$ maka dengan menggunakan Teorema Apit atau yang sering disebut Teorema Jepit, tentukan $limx\to 0f(x)$.

   Jawab:

   Perhatikan bahwa:

   $|f(x) - \cos x| =< g(x) -5$

   $<==> - (g(x) - 5) =< f(x) - \cos x =< g(x) -5$

   $<==> 5 - g(x) + \cos x =< f(x) =< g(x) - 5 + \cos x$

   Karena $limx\to 0g(x)=5$ maka:

   $limx\to 0(5-g(x)+cosx)=limx\to 0(-g(x))+limx\to 05+limx\to 0cosx=1$

   $limx\to 0(g(x)-5+cosx)=limx\to 0g(x)+limx\to 05+limx\to 0cosx=1$

   sehingga menurut Teorema Apit $limx\to 0f(x)=1$

Soal Latihan

1. **Diketahui, jika:**

   $A = \{2, 3, 6\}$

B = {2, 4, 6, 8, 10, 11}

Tuliskan domain, kodomain, range dari relasi diatas?

2. Diketahui himpunan A = {2, 3, 4} dan himpunan B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Suatu fungsi f : A→B ditentukan oleh f(x) = 2x – 2.

Tentukan range fungsif.

Gambarlah fungsifdengan diagram panah.

Gambarlah ke dalam diagram cartesius fungsi *f*.

3. Tentukan daerah asal dan range fungsi $f(x) = x^2 + 3$ bila $x \in B$ dan $B = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$
4. Diketahui fungsi f(x) = x + 5 dan $g(x) = x^2 - 16$. Daerah asal yang memenuhi fungsi f(x) + g(x) adalah
5. Diketahui fungsi f(x) = 3x + 4 dan $g(x) = x^2 + 6$. Nilai x yang memenuhi (f o g)(x) = 49 adalah

INDUKSI MATEMATIKA

Induksi matematika adalah suatu metode yang digunakan untuk memeriksa validasi suatu pernyataan yang diberikan dalam suku – suku bilangan asli. Dalam pembahasan ini, kita akan menyatakan Prinsip Induksi Matematika dan memberikan contoh-contoh untuk mengilustrasikan bagaimana proses pembuktian dengan menggunakan induksi matematika.

Kita akan menotasikan himpunan bilangan asli dengan

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

dengan operasi tambah dan perkalian seperti biasa. Bilangan Asli **N** ini memenuhi sifat terurut sempurna (*Well-Ordering Property*) yaitu,

1.1 Sifat Terurut Sempurna

Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari **N** *mempunyai bilangan terkecil.*

Sifat ini mengatakan bahwa jika S adalah himpunan bagian dari **N** dan $S \neq \phi$, maka ada bilangan $m \in S$ sehingga $m \leq k$ untuk setiap $k \in S$.

Catatan: Untuk dapat menerapkan sifat terurut sempurna (WOP) ini, kita harus memiliki suatu himpunan yang tidak kosong.

1.2 Prinsip Induksi Matematika

Misalkan S suatu himpunan bagian dari **N** *yang mempunyai sifat:*

(1) $1 \;\; S$

(2) *Jika* $k \in S$ *maka* $k + 1 \in S$

Maka $S = N$

Prinsip Induksi Matematika ini mengatakan bahwa suatu himpunan bagian S dari bilangan asli **N** di mana sifat (1) dan (2) dimiliki oleh himpunan itu, maka himpunan bagian itu akan merupakan himpunan bilangan asli **N** atau S = **N.**

Contoh 1 Buktikan $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ untuk setiap n bilangan asli

Jawab

Pernyataan yang akan dibuktikan adalah

$$P_n : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)$$

Dengan demikian, P_1 adalah $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$, $P_2 = 1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1)$ dan seterusnya.
Untuk membuktikan pernyataan itu, perhatikan bahwa P_1 adalah benar. Kemudian, misalkan bahwa

$$P_n : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n\,(n+1)$$

adalah benar, dan kita harus membuktikan bahwa P_{n+1} adalah benar. Untuk ini, kita tambahkan kedua ruas pernyataan P_n dengan $n + 1$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1) + (n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}\,[(n\,(n+1) + 2(n+1)] \\ &= \tfrac{1}{2}\,(n^2 + 3n + 2) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(n+1)(n+2) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(n+1)[(n+1) + 1] \end{aligned}$$

Dari sini kita peroleh bahwa P_{n+1} adalah benar. Hal ini menunjukkan bahwa pernyataan

$$P_n : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$$

adalah benar untuk setiap n bilangan asli

Contoh 2 Buktikan bahwa $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

Jawab

$U_n = n(n+1) = S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$U_1 = 1(1+1) = 2 = S_n = \frac{1}{3}1(1+1)(1+2) = 2$

Rumus atau teorema benar untuk $n = 1$

Contoh 3 Buktikan bahwa semua bilangan berbentuk $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap n bilangan asli.

Jawab

Pernyataan yang akan dibuktikan adalah

P_n : $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5

P_1 adalah benar sebab $7^1 - 2^1 = 5$. Selanjutnya, kita asumsikan bahwa P_n adalah benar. Dengan asumsi ini kita akan menyelidiki kebenaran pernyataan P_{n+1} . Untuk itu, kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7.7^n - 7.2^n + 7.2^n - 2.2^n \\ &= 7[7^n - 2^n] + 5.2^n \\ &= 7(5m) + 5.2^n \qquad m \in \mathbf{N} \text{ (asumsi } P_n \text{ benar)} \\ &= 5(7m + 2^n)\end{aligned}$$

Karena $7m + 2^n$ bilangan asli, maka dari kesamaan terakhir kita dapat menyim-pulkan bahwa $7^{n+1} - 2^{n+1}$ dapat dibagi dengan 5. Dengan kata lain, pernyataan P_{n+1} adalah benar.

Dengan demikian, bilangan berbentuk $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap n bilangan asli.

Latihan

1. Buktikan bahwa $n^3 + 5n$ dapat dibagi dengan 6 untuk semua $n \in N$
2. Buktikan bahwa $5^2n - 1$ dapat dibagi dengan 8 untuk semua $n \in N$
3. Buktikan bahwa $5n - 4n - 1$ dapat dibagi dengan 16 untuk semua $n \in N$

4. Buktikan bahwa jumlah pangkat tiga dari sembarang tiga bilangan asli yang berurutan, n, n + 1, n + 2 dapat dibagi dengan 9.
5. Tunjukkan ketidaksamaan Bernoulli: Jika $1 + a > 0$, maka $(1 + a)^n \geq 1 + na$ untuk semua $n \in N$

BAB IV SISTEM BILANGAN REAL

Sifat Lapangan Bilangan Real
Aksioma Lapangan Bilangan Real

Aksioma Lapangan adalah aksioma yang mengatur tentang ketertutupan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, sifat komutatif, asosiatif, distributif, dan terdapatnya unsur kesatuan $0\ dan\ 1$, serta terdapatnya unsur invers terhadap penjumlahan dan perkalian. Dari aksioma ini dapat dibuktikan berbagai sifat yang mendasari operasi aljabar atas berbagai objek kalkulus, yaitu konstanta, peubah dan parameter. Pandang ( ) adalah sistem bilangan real, dan misalkan , maka berlaku sifat-sifat berikut :

- (Sifat ketertutupan terhadap operasi penjumlahan) dan (Sifat ketertutupan terhadap operasi perkalian)
- (Sifat komutatif terhadap penjumlahan) dan (Sifat komutatif terhadap perkalian)
- (Sifat assosiatif terhadap penjumlahan) dan (Sifat assosiatif terhadap perkalian).

Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan dua operasi biner, dinotasikan dengan $(+\ dan\ \cdot\ )$ dan berturut-turut disebut operasi tambah dan kali atau penjumlahan dan perkalian. Operasi-operasi ini memenuhi sifat-sifat berikut:

$(A1)\ a + b = b + a, untuk\ setiap\ a, b \in \mathbb{R}$ (Sifat Komutatif Operasi Tambah)

$(A2) (a + b) + c = a + (b + c)$,untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Sifat Asosiatif Operasi Tambah)

(A3) Terdapat unsur $0 \in \mathbb{R}$ sehingga $0 + a = a + 0 = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ (Eksistensi Unsur Nol).

(A4) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, terdapat$-a \in \mathbb{R}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (Eksistensi Unsur Lawan/Invers Tambah).

(M1) $a \cdot b = b \cdot a$,untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ (Sifat Komutatif Operasi Kali).

(M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Sifat Asosiatif Operasi Kali).

(M3) Terdapat $unsur$ $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ $sehingga$ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ (Eksistensi Unsur Satuan)

(M4) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sehingga $a. \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$ (Eksistensi Unsur Kebalikan/Invers Kali).

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan

$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Sifat Distributif Operasi Kali terhadap Operasi Tambah)

Bilangan real dinamakan "lawan" atau "negatif" dari, dan Bilangan real dinamakan "kebalikkan "dari .Adapun operasi pengurangan dan pembagian pada himpunan bilangan real didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan:

> Pengurangan dari dan disebut "selisih" dari dan , ditulis , didefenisikan sebagai bilangan real

> Pembagian dari dan disebut "hasil bagi" dari dan , ditulis dan didefenisikan sebagai bilangan real .

Berdasarkan aksioma lapangan diatas, kita dapat membuktikan berbagai sifat-sifat aljabar bilangan real berikut, yang sering digunakan sebagai operasi aljabar dalam menyelesaikan soal matematika,

Beberapa Sifat Lapangan Bilangan Real

Bilangan real, sama seperti bilangan yang lain, memiliki beberapa sifat tersendiri. Sebagian sifat itu akan kita bicarakan pada bab ini. Sifat-sifat yang akan kita pelajari di sini meliputi: sifat aljabar, urutan, dan kelengkapan.

(R,+,) adalah Lapangan

Jika kita memandang $\mathbb{R}$ sebagai suatu aljabar, yaitu himpunan dengan dua operasi yang *well-defined*, yaitu penjumlahan (+) dan perkalian (·), maka struktur dari $\mathbb{R}$ adalah sebagai suatu lapangan (*field*) karena memenuhi hal-hal berikut:

1. $(R, +,)$ adalah suatu grup komutatif (grup Abel) karena memenuhi

- (A1) Komutatif

  $a+\ b\ =\ b+a\ untuk\ setiap\ a,b\ \in \mathbb{R}$

- (A2) Asosiatif

  $(a+b)+c=a+(b+c) utuk\ setip\ a,b,c\ \in \mathbb{R}$

- (A3) Identitas

  $$Terdapat\ elemen\ 0\ \in \mathbb{R}\ yang\ memenuhi\ a+0\ =\ a\ dan\ 0+\ a\ =\ a,$$

  $$\forall\ a\ \in \mathbb{R}$$

- (A4) Invers

$$Untuk\ setiap\ a\ \in \mathbb{R}, \exists\ (-a)\ \in \mathbb{R}\ sehingga\ a\ +\ (-a)\ =\ 0\ dan\ (-a)\ +\ a\ =0$$

2. $(R^*,\cdot)$ adalah suatu grup komutatif (grup Abel) karena memenuhi

- (M1) Komutatif

  $$a\cdot b\ =\ b\cdot\ a\ untuk\ setiap\ a,b\ \in \mathbb{R}$$

- (M2) Asosiatif

  $$(a\cdot\ b)\cdot\ c=a\cdot\ (b\cdot\ c)\ untuk\ setiap\ a,b,c\ \in \mathbb{R}$$

- (M3) Identitas

$$Terdapat\ elemen\ 1\ \in \mathbb{R}\ yang\ memenuhi\ a\cdot\ 1\ =\ a\ dan\ 1\cdot\ a\ =\ a, \forall\ a\in \mathbb{R}$$

- (M4) Invers

  $$Untuk\ setiap\ a\in \mathbb{R}\backslash 0, \exists \frac{1}{a}\ \in \mathbb{R}\ sehingga\ a\cdot \frac{1}{a} =\ 1\ dan \frac{1}{a}\ \cdot\ a\ =\ 1$$

3. (D) Distributif

$$Untuk\ setiap\ a,b,c\ \in \mathbb{R}\,.\,berlaku:$$

$$(a+b)\cdot\ c=(a\cdot\ c)+(b\cdot\ c)$$

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot\ b)+(a\cdot\ c)$$

Sifat-sifat di atas telah umum diketahui. Sifat (A1)-(A4) menjelaskan sifat penjumlahan, sifat (M1)-(M4) menjelaskan sifat perkalian, dan sifat terakhir menggabungkan kedua operasi. Selanjutnya, diberikan beberapa teorema tentang elemen 0 dan 1 yang telah diberikan pada sifat (A3) dan (M3) di atas. Juga akan ditunjukkan bahwa perkalian dengan 0 akan selalu menghasilkan 0.

Kesembilan sifat di atas disebut aksioma sifat aljabar bilangan real. Dari sembilan aksioma ini kita dapat menurunkan banyak sifat aljabar lain dari bilangan real. Lebih jauh dapat dilihat pada soal yang diselesaikan. Yang perlu diingat mungkin tiga teorema berikut yang menyangkut ketunggalan elemen identitas, yaitu $0\ dan\ 1$, ketunggalan invers, dan perkalian terkait dengan 0.

Teorema 1.1.1.

(a) $Jika\ z\ , a \in \mathbb{R}\ dengan\ z + a = a, maka\ z\ =\ 0$.

(b) $Jika\ u\ dan\ b\ \neq\ 0\ elemen\ \mathbb{R}\ dengan\ u \cdot\ b = b\ , maka\ u\ = 1.$

(c) $Jika\ a \in \mathbb{R}\ , maka\ a\ \cdot\ 0 =\ 0$.

Teorema 1.1.2. $Jika\ a \in \mathbb{R}\ , maka\ ($

a. $(-1) \cdot a = -a$
b. $-(-a) = a$
c. $(-1) \cdot (-1) = 1$

Selanjutnya, diberikan dua sifat penting dari operasi perkalian, yaitu sifat ketunggalan elemen inversnya dan bahwa perkalian dua bilangan itu hasilnya nol apabila salah satu faktornya adalah nol.

Teorema 1.1.3.

(a) $Jika\ a +\ b = 0\ , maka\ b = -a$

(b) $Jika\ a\ \neq\ 0\ dan\ b \in \mathbb{R}\ sedemikian\ hingga\ a \cdot b = 1, maka\ b = \frac{1}{a}$

(c) $Jika\ a \cdot b = 0\ , maka\ a\ =\ 0\ atau\ b\ =\ 0$

Teorema tersebut di atas menjelaskan beberapa sifat aljabar sederhana dari sistem bilangan real. Beberapa akibat dari teorema tersebut diberikan sebagai bahan latihan soal di bagian akhir subbab ini.

Contoh Soal:

1. Selesaikan persamaan dan ketidaksamaan dibawah ini

$$1 - 3x = 1 - 3x$$
$$(1 - 3x) + 3x = (1 - 3x) + 3x$$
$$+(-3x + 3x) = 1 + (-3x + 3x)$$
$$1 + 0 = 1 + 0$$
$$1 = 1$$

   Diperoleh suatu kesamaan $1 = 1$ yang jelas bernilai benar. Ini berarti semua $x \in \mathbb{R}$ memenuhi persamaan itu

2. Selesaikan persamaan dan ketidaksamaan dibawah ini

$$3x + 5 \leq 3x + 5$$
$$-3x + (3x + 5) \leq -3x + (3x + 5)$$
$$(-3x + 3x) + 5 \leq (-3x + 3x) + 5$$
$$0 + 5 \leq 0 + 5$$
$$5 \leq 5$$

   Ketaksamaan $5 \leq 5$ jelas bernilai benar, sehingga pertidaksamaan diatas akan selalu benar untuk $x \in \mathbb{R}$

3. Tunjukkan bahwa jika $ax = ay$ maka $x = y$ untuk $a \neq 0$

   Asumsikan $a \neq 0$

$$ax = ay$$
$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(ay)$$
$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot x = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot y$$
$$1 \cdot x = 1 \cdot y$$
$$x = y$$

Latihan Soal

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, buktikan hal berikut
   a. Jika $a + b = 0$, kemudian $b = -a$
   b. $(-1)a = -a$
   c. $-(-a) = a$
   d. $(-1)(-1) = 1$
2. Buktikan jika $a, b \in \mathbb{R}$ kemudian:
   a. $-(a + b) = (-a) + (-b)$
   b. $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$
   c. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
   d. $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$ jika $b \neq 0$
3. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ Buktikan bahwa $(\frac{1}{ab}) = (\frac{1}{a})(\frac{1}{b})$
4. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, Buktikan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0\ dan\ b = 0$
5. Tentukan semua bilangan real x menyatakan pertidaksamaan berikut ini:
   a. $x^2 > 3x + 4$
   b. $\frac{1}{x} < x$
   c. $1 < x^2 < 4$
   d. $\frac{1}{x} < x^2$

Sifat Urutan Bilangan Real

Sifat keterurutan R menimbulkan gagasan tentang kepositifan (*positivity*) dan ketaksamaan (*inequality*).

Aksioma Urutan Bilangan Real

Aksioma ini mengatur tentang pemunculan bilangan positif dan negatif. Berdasarkan hal tersebut, setiap bilangan real dapat diurutkan dari kecil hingga besar. Dari aksioma ini diturunkan berbagai sifat yang mendasari penyelesaian suatu pertidaksamaan. Kemudia dirancang konsep nilai mutlak sebagai ukuran jarak dua bilangan real dan merupakan suatu alat untuk menyelesaikank pertidaksamaan yang berkaitan dengan limit.

$P \subseteq R$, $P \neq \phi$, P disebut himpunan bilangan real positif yang memenhi sifat berikut:

U.1 Jika $a, b \in P$, maka $a + b \in P$

U.2 Jika $a, b \in P$, maka $ab \in P$

U.3 Jika $a \in R$ maka tepat satu dari berikut berlaku:

$a \in P$ atau $a = 0$ atau $-a \in P$

Dua sifat pertama menjamin sifat ketertutupan dari operasi penjumlahan dan perkalian pada P. Aksioma U3 diatas disebut sifat trikotomi, karena di membagi R dalam tiga tipe elemen yang berbeda. Hal ini menyatakan bahwa bilangan real negatif $\{-a: a \in P\}$ tidak mempunyai elemen persekutuan dengan P. R adalah gabungan dari tiga himpunan yang saling asing yaitu $P \cup \{0\} \cup \{-a: a \in P\}$.

Definisi 2.1.1: Jika $a \in P$ maka a adalah bilangan real positif (positif kuat) dan ditulis $a > 0$. Jika $a \in P \cup \{0\}$ maka a adalah bilangan real tidak negative dan ditulis $a \geq 0$.
Jika $-a \in P$ maka a adalah bilangan negative, dan ditulis $a < 0$.
Jika $-a \in P \cup \{0\}$ maka a adalah bilangan real tidak positif, dan ditulis $a \leq 0$

Definisi 2.1.2: Misalkan $a, b \in R$

(1) Jika $a - b \in P$ maka ditulis $a > b$ atau $b < a$
(2) Jika $a - b \in p \cup \{0\}$ maka ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a$

Kita sepakat bahwa notasi:

$a < b < c$ berarti $a < b$ dan $b < c$ dengan cara yang sama,
$a \leq b \leq c$ berarti $a \leq b$ dan $b \leq c$ begitu juga,
$a \leq b < d$ berarti $a \leq b$ dan $b < d$

Teorema-teorema

Teorema 2.1.3: Misalkan $a, b, c \in R$
(i) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$
(ii) Tepat satu berikut ini berlaku: $a > b$, $a = b$, atau $a < b$
(iii) Jika $a \geq b$ dan $b \geq a$ maka $a = b$

Bukti:

(i) Misalkan $a, b, c \in R$

Akan ditunjukkan $(\forall a, b, c \in R) a > b$ dan $b > c \Rightarrow a > c$

$a > b$ berarti $(a - b) \in P$

$b > c$ berarti $(b - c) \in P$

Sehingga $(a - b) + (b - c) \in P$

$a + \big((-b) + b\big) + (-c) \in P$

$a + 0 + (-c) \in P$

$a - c \in P$

$a > c$

Terbukti bahwa: $a > b$ dan $b > c \Rightarrow a > c$

(ii) $a, b \in R$ maka $a - b \in R$

Menurut sifat trikotomi (U3) berlaku tepat satu: $(a - b) \in R$ atau $(a - b) = 0$ atau $-(a - b) \in P$

Sehingga diperoleh

$(a - b) \in P \Rightarrow a > b$

$(a - b) = 0 \Rightarrow a = b$

$-(a - b) = (b - a) \in P \Rightarrow a = b$

Jadi berlaku tepat satu berikut: $a > b$ atau $a = b$ atau $a < b$

(iii) Misalkan $a, b \in R$

Akan ditunjukkan $a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$

Andaikan $a \neq b$

Berarti $a > b\ atau\ b > a$

Hal ini kontradiksi dengan hipotesis $b \geq a\ dan\ a \geq b$

Jadi haruslah $a = b$

Teorema 2.1.4:

(i) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$

(ii) $1 > 0$

(iii) Jika $n \in N$ maka $n > 0$

bukti

(i) Akan dibuktikan bahwa

$a \in R$ dan $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$

Dari sifat trikotomi diperoleh bahwa,

Jika $a \neq 0$, maka $a \in P$ atau $-a \in P$

a) $a \in P \Longrightarrow a.a = a^2 \in P$

$\Longrightarrow a^2 > 0$

b) $-a \in P \Longrightarrow (-a)(-a) = a.a = a^2 \in p$

$\Longrightarrow a^2 > 0$

Jadi jika $a \in R \wedge a \neq 0$ maka $a^2 = 0$

(ii) Akan dibuktikan bahwa $1 > 0$

$1 = 1.1 = (1)^2$

$1 \in R \wedge 1 \neq 0$ maka $(1)^2 > 0$

Jadi $1 > 0$

(iii) Akan dibuktikan $n \in N \Longrightarrow n > 0$

Untuk membuktikan hal ini digunakan induksi matematika

(a) Untuk $n = 1$, benar $1 > 0$

(b) Misalkan benar untuk $n = k$ yaitu $k = 0$

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$ yaitu $k + 1 > 0$

Bukti:

$k > 0 \Longrightarrow k \in P$

$1 > 0 \Longrightarrow 1 \in P$

$k + 1 \in P$

$k + 1 > 0$

Dari (a) dan (b) dapat disimpulkan:

Jika $n \in N$ maka $n > 0$ merupakan pernyataan yang benar untuk setiap n bilangan asli.

Teorema 2.1.5: misalkan $a, b, c, d \in R$

(i) Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$.

(ii) Jika $a > b$ dan $c > d$ maka $a + c > b + d$

(iii) Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$.

Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$.

(iv) Jika $a > 0$ maka ${}^{1}/_{a} > 0$.

Jika $a < 0$ maka ${}^{1}/_{a} < 0$.

Bukti:

(i) Misalka,$a, b, c \in R$

Akan ditunjukkan: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$a > b$ berarti $a - b \in P$

$a + (-b) \in P$

$a + 0 + (-b) \in P$

$a + (c + (-c)) + (-b) \in P$

$(a + c) + ((-c) + (-b)) \in P$

$(a + c) + ((-b) + (-c)) \in P$

$(a + c) + (-1)(b + c) \in P$

$(a + c) + (-(b + c)) \in P$

$(a + c) - (b + c) \in P$

$a + c > b + c$

(ii) Akan dibuktikan $a > b$ dan $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

$a > b \Rightarrow a - b \in P$

$c > d \Rightarrow c - d \in P$

$a - b + c - d \in P$

$a + (-b) + c + (-d) \in P$

$a + c + (-b) + (-d) \in P$

$(a + c) + (-1)(b + d) \in P$

$(a + c) - (b + d) \in P$

$a + c > b + d$

(iii) Misalkan $a, b, c \in R$.

Akan ditunjukkan: $a > b$ dan $c > 0 \Rightarrow ca > cb$.

$a > b \Rightarrow a - b \in P$

$c > 0 \Rightarrow c \in P$

$c\,(a - b) \in P$

$c\,(a + (-b)) \in P$

$ca + c\,(-b) \in P$

$ca - cb \in P$

$ca > cb$

Bukti bagian kedua sebagai latihan

(iv) Misalkan $a \in R$ Akan ditunjukkan : $a > 0 \Rightarrow {}^{1}/_{a} > 0$.

Jika $a > 0$ maka $a \neq 0$ (sifat trikotomi)

Sehingga ${}^{1}/_{a} \neq 0$,

Andaikan ${}^{1}/_{a} < 0$ berarti $a \cdot {}^{1}/_{a} = 1 < 0$ kontradiksi dengan T. 2.1.5 (iii) Jadi haruslah ${}^{1}/_{a} > 0$

Bukti bagian kedua sebagai latihan

Teorema 2.1.6: Jika $a, b \in R$ dan $a < b$ maka $a < ½(a + b) < b$

Bukti;

Misalkan $a, b \in R$.

Akan ditunjukkan $a < b \Rightarrow a < ½\,(a + b) < b$.

$a < b \Rightarrow 2a = a + a < a + b$

$a < b \Rightarrow a + b < b + b = 2b$

Sehingga diperoleh $2a < a + b < 2b$

Karena $2 \in N$ maka $2 > 0$

Akibatnya $½ > 0$

Dengan mengalikan ½ pada setiap ruas diperoleh :

$a = ½\,(2a) < ½\,(a + b) < ½\,(2b) = b$

Sehingga terbukti : $a < b \Rightarrow a < ½ (a + b) < b$.

Corollary 2.1.7: (Akibat dari $teorema$ 2.1.6).

Jika $b \in R$ dan $b > 0$ maka $0 < ½ b < b$

Bukti: Menurut $teorema$ 2.1. 6: $a, b \in R$ $a < b \Rightarrow a < ½ (a + b) < b$.

Ambil $a = 0$.

$b, 0 \in R$ dan $b > 0 \Rightarrow 0 < ½ (0 + b) < b$

sehingga diperoleh $0 < ½ b < b$

Teorema 2.1.8: Jika $a \in R$ sehingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Bukti : Andaikan $a > 0$

Menurut 2.1.7 $a > 0 \Rightarrow 0 < ½ a < a$

Ambil $\varepsilon = ½ a > 0$.

Diperoleh $0 < \varepsilon < a$

Bertentangan dengan hipotesis yaitu $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$

Jadi haruslah $a = 0$.

Teorema 2.1.9: Jika $a, b \in R$ dan $a - \varepsilon < b$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a \leq b$.

Bukti:

Andaikan: $a > b$

Berarti $(a - b) > 0$, ambil $\varepsilon_0 = (a - b)$

Sehingga $a - (a - b) < b$ atau $a - a + b < b$ atau $b < b$.

Hal ini tidak mungkin, dengan demikian pengandaian salah.

Jadi haruslah $a \leq b$.

Teorema 2.1.10: Jika $ab > 0$ maka

(i) $a > 0$ dan $b > 0$

(ii) $a < 0$ dan $b < 0$

Bukti:

$ab > 0 \Rightarrow a \neq 0$ dan $b \neq 0$. (karena jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $ab = 0$)

Jika $a \neq 0$ maka (i) $a > 0$ atau (ii) $a < 0$ (sifat trikotomi).

Kasus (i):

$a > 0 \Rightarrow 1/a > 0$

sehingga $\left(\frac{1}{a}\right) ab = \left(\left(\frac{1}{a}\right) a\right) b = 1b = b > 0$

Kasus (ii):

$a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

Sehingga $(\frac{1}{a})\, ab = ((\frac{1}{a})a)b = 1\, b = b < 0$

Corollary 2.1.11: (Akibat teorema 2.1.10)

Jika $ab < 0$ maka : (i) $a < 0$ dan $b > 0$ atau (ii) $a > 0$ dan $b < 0$

Bukti :

$ab < 0 \Rightarrow a \neq 0$ dan $b \neq 0$. (karena jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $ab = 0$)

Jika $a \neq 0$ maka (i) $a < 0$ atau (ii) $a > 0$ (sifat trikotomi).

Kasus (i):

$a < 0 \Rightarrow 1/a < 0$

sehingga $(\frac{1}{a})\, ab = ((\frac{1}{a})a)b = 1\, b = b > 0$

Kasus (ii): $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

Sehingga $(\frac{1}{a})\ ab = ((\frac{1}{a})a)b = 1\,b = b < 0$

Contoh-contoh:

Contoh 2.1.1: Tentukan himpunan A semua bilangan real x sedemikian sehingga $2x + 3 \leq 6$

Jawab:

$$x \in A \Leftrightarrow 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

Jadi $A = \{ x \in R \mid x \leq \frac{3}{2}\}$

Contoh 2.1.2: Tentukan himpunan B semua bilangan real x sedemikian hingga x $2 + x > 2$.

Jawab:

$$x \in B \Leftrightarrow x\,2 + x > 2 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) > 0$$

kasus (i)

$x - 1 > 0$ dan $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ dan $x > -2$

kasus (ii)

$x - 1 < 0$ dan $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ dan $x < -2$

dari kedua kasus diperoleh $B = \{x \in R \mid x > 1\} \cup \{x \in R \mid x < -2\}$

Contoh 2.1.3: Tentukan himpunan $C = \{x \in R \mid \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$

Jawab:

$$x \in C \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} < 0$$

Kasus (i)

$x - 1 < 0$ dan $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ dan $x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 1$

Kasus (ii)

$x - 1 > 0$ dan $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 1$ dan $x < -2$ (tidak mungkin ada)

Jadi $C = \{x \in R \mid -2 < x < 1\}$

Latihan-latihan

1) Jika $a \leq b$ dan $c < d$ maka buktikan bahwa $a + c < b + d$
2) Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$ maka buktikan bahwa $a + c \leq b + d$
3) Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$ buktikan bahwa $0 < ac < bd$
4) Jika $0 < a < b$ dan $0 \leq c \leq d$ buktikan bahwa $0 \leq ac \leq bd$
5) Jika $a < b$ dan $c < d$ buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$

Beberapa Sifat Urutan Bilangan

bagian selanjutnya, merupakan sifat-sifat dasar dari urutan yang terkadang disebut "aturan-aturan/hukum ketidaksamaan".

Lemma 2.1 (*kekekalan urutan terhadap penjumlahan dan perkalian dengan bilangan positif)*

Misalkan a, b bilangan real dengan a < b. Maka

1) $a + c < b + c$ untuk setiap $c \in R$.
2) $a \cdot c < b \cdot c$ untuk setiap $c > 0$.

Bukti. Misalkan $a < b$. Ini berarti $b - a > 0$ atau $b - a \in P$.

1) Perhatikan bahwa $(b + c) - (a + c) = b - a$. Akibatnya, $(b + c) - (a + c)$ juga anggota $\boldsymbol{P}$ sehingga $(b + c) - (a + c) > 0$. Jadi, $a + c < b + c$.
2) $c > 0$ berarti $c \in P$. Sifat ketertutupan $\boldsymbol{P}$ menyebabkan $(b - a) \cdot c \in P$. Sedangkan $(b - a) \cdot c = (b \cdot c) - (a \cdot c)$. Jadi, $(b \cdot c) - (a \cdot c) \in P$ atau $a \cdot c < b \cdot c$.

Lemma 2.2 *(urutan dari identitas dan invers)*

1) $0 < 1$
2) Jika $a > 0$, maka $(-a) < 0$.
3) Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$

Bukti:

1) Andaikan tidak berlaku $0 < 1$. Maka, menurut sifat trikotomi, $0 = 1$ atau $0 > 1$.
   - Jika $0 = 1$, maka untuk $a \neq 0, a \cdot 0 = a \cdot 1$ sehingga diperoleh $0 = a$. Kontradiksi dengan $a \neq 0$.
   - Jika $0 > 1$, maka untuk $a > 0$, menurut sifat kekekalan urutan, $a \cdot 0 > a \cdot 1$ sehingga diperoleh $0 > a$. Kontradiksi dengan $a > 0$. Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $0 < 1$
2) Misalkan $a > 0$. Ini berarti $a \in P$. Kita tahu bahwa $a = -(-a)$. Jadi, $(-(-a)) \in P$ yang dalam notasi urutan berarti $(-a) < 0$.
3) Misalkan $a > 0$. Andaikan tidak berlaku $1/a < 0$. Maka, menurut sifat trikotomi, $\frac{1}{a} = 0$ atau $1/a < 0$.
   - Jika $\frac{1}{a} = 0$, maka $\frac{1}{a} \cdot a = 0 \cdot a$ sehingga diperoleh $1 = 0$. Kontradiksi dengan $0 < 1$.
   - Jika $\frac{1}{a} < 0$, maka $\frac{1}{a} \cdot a < 0 \cdot a$ sehingga diperoleh $1 < 0$. Kontradiksi dengan $0 < 1$. Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $\frac{1}{a} > 0$.

Lemma 2.3 *(kuadrat bilangan real)*

Untuk setiap $x \in R, x\ 2 > 0$.

Bukti.

Misalkan $x \in R$.

Maka menurut sifat trikotomi: $x \in P$ atau $x = 0$ atau $(-x) \in P$

- Jika $x \in P$, maka $x \cdot x = x^2 \in P$ sehingga diperoleh $x^2 > 0$.
- Jika $x = 0$, maka $x^2 = x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$.
- Jika $(-x) \in P$, maka $(-x) \cdot (-x) = x^2 \in P$ sehingga diperoleh $x^2 > 0$. Jadi, untuk setiap $x \in R, x^2 > 0$.

Pada system bilangan real dikenal relasi urutan. Relasi urutan ini berkaitan dengan aspek positifitas dan ketaksamaan antara dua buah bilangan real. Sifat-sifat urutan ini akan banyak digunakan ketika mencari solusi pertidaksamaan di bilangan real.

Lemma 2.4 *(faktor perkalian dari bilangan positif/negative)*

1) Jika $a \cdot b > 0$, maka $a, b > 0$ atau $a, b < 0$.
2) Jika $a \cdot b < 0$, maka $a > 0, b < 0$ atau $a < 0, b > 0$.

Bukti:

1) Misalkan $a \cdot b > 0$. Maka $a, b \neq 0$ (karena jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ atau $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$. Kontradiksi dengan $a \cdot b > 0$) . $a \neq 0$ berarti $a > 0$ atau $a < 0$.

   Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) > \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = (\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$ sehingga diperoleh $b > 0$.

   Jika $a < 0$, maka $(-a) > 0$ sehingga $\frac{1}{-a} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{-a} \cdot (a \cdot b) > \frac{1}{-a} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{-a} \cdot (a \cdot b) = (-\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = -1 \cdot b = -b$ sehingga diperoleh $(-b) > 0$ atau $b < 0$.

Jadi, a, b > 0 atau a, b < 0.

2) Misalkan $a \cdot b < 0$. Maka $a, b \neq 0$ (karena jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ atau $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$. Kontradiksi dengan $a \cdot b < 0$). $a \neq 0$ berarti $a > 0$ atau $a < 0$.

Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) < \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = (\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$ sehingga diperoleh $b < 0$. Jika $a < 0$, maka $(-a) > 0$ sehingga $\frac{1}{-a} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{-a} \cdot (a \cdot b) < \frac{1}{-a} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{-a} \cdot (a \cdot b) = (-\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = -1 \cdot b = -b$ sehingga diperoleh $(-b) < 0$ atau $b > 0$. Jadi, $a > 0, b < 0$ atau $a < 0, b > 0$.

Lemma 2.5 *(bilangan tak negative yang lebih kecil dari semua bilangan positif)*

Jika 0 6 $\leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Bukti.

Misalkan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$

Andaikan

$a > 0$.

Jika kedua ruas dikali dengan $\frac{1}{2}$, maka diperoleh $a \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$ sehingga $\frac{a}{2} > 0$.

Selanjutnya, jika kedua ruas ditambah $\frac{a}{2}$, maka diperoleh $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} > 0 + \frac{a}{2}$ atau $a > \frac{a}{2}$.

Kontradiksi dengan $a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $a = 0$.

Contoh-contoh

Contoh 2.1: Buktikan jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$

Jawab.

Misalkan $a \leq b$ dan $c < d$.

Hal ini berarti $b - a \in P\, S\, \{0\}$ dan $d - c \in P$.

Kita lihat dua kasus ketika $b - a \in P$ atau $b - a = 0$.

(a) Jika $b - a, d - c \in P$, maka $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c) \in P$.

(b) Jika $b - a = 0$, maka $d - c = (d - c) + 0 = (d - c) + (b - a) = (b + d) - (a + c) \in P$

Dengan demikian, $(b + d) - (a + c) \in P$ sehingga $a + c < b + d$

Contoh 2.2: Tunjukkan bahwa jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $0 < ac < bd$.

Jawab.

Misalkan $0 < a < b$ dan $0 < c < d$.

Ini berarti, $a, b, b - a, c, d, d - c \in P$.

Ketertutupan P menyebabkan

$ac, (b - a)c = bc - ac,$ dan $b(d - c) = bd - bc$ juga di $\boldsymbol{P}$.

Selanjutnya, $(bc - ac) + (bd - bc) = bd - ac$ juga di $\boldsymbol{P}$.

Jadi, ac dan $bd - ac \in \boldsymbol{P}$.

Ini berarti $0 < ac$ dan $ac < bd$ atau $0 < ac < bd$.

Contoh 2.3: Tunjukkan bahwa jika $a < b$ dan $c < d$, maka $ad + bc < ac + bd$.

Jawab.

Misalkan $a < b$ dan $c < d$.

Ini berarti, $b - a, d - c \in P$.

Ketertutupan $\boldsymbol{P}$, menyebabkan

$$(b-a)(d-c) = bd - bc - ad + ac = (ac + bd) - (ad + bc) \in P.$$

Dengan kata lain, $ad + bc < ac + bd$.

<u>Latihan</u>:

1) Tunjukkan bahwa jika $0 < a < b$ dan $0 \leq c \leq d$, maka $0 \leq ac \leq bd$.
2) Tunjukkan bahwa jika $a < b$ maka $a < \frac{a+b}{2} < b$.
3) Jika $a, b \in R$, buktikan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$.
4) Jika $0 \leq a < b$, tunjukkan bahwa $a < \sqrt{ab} < b\ dan \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
5) Buktikan bahwa jika $a > b$, maka $a^2b < ab^2 + \frac{a^3-b^3}{3}$.

Ketidaksamaan Bernoulli

Dalam analisis riil Jacob Bernoulli menyatakan bahwa:

Jika $x > -1$, maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in N$.

Bukti.

Akan dibuktikan menggunakan induksi

Untuk $n = 1$, maka

$(1 + x)^1 \geq 1 + 1. x \leftrightarrow 1 + x \geq 1 + x$ (pernyataan benar)

Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. Akan dibuktikan benar untuk

$n = k + 1$, yaitu :

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x)$$

$$= 1 + kx + x + kx^2$$

$$= 1 + (k + 1)x + kx^2$$

Karena $kx^2 \geq 0$, maka $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$, yang berarti benar untuk $n = k + 1$.

Jadi, terbukti bahwa $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in N$

<u>Contoh soal:</u>

Misalkan $c \in R$ dan $c > 1$. Tunjukkan $n^2 \geq n$ untuk setiap $\in N$.

Jawab.

Misalkan $c > 1$. Maka bisa dituliskan $c = 1 + a$ untuk suatu $a > 0$. Dengan ketaksamaan Bernoulli diperoleh

$$C^n = (1+a)^n \geq 1 + na \geq 1 + a = c$$

Jadi, $C^n \geq c$ untuk setiap $n \in N$

TERBUKTI

Ketidaksamaan Cauchy

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz (Cauchy-Schwarz Inequality) merupakan salah satu ketaksamaan yang *paling* terkenal. Teorema ini sangat berguna untuk memecahkan berbagai masalah dalam soal olimpiade. Inequality ini lebih ampuh dibandingkan jika kita menggunakan teorema AM-GM-HM.

Berikut adalah teorema Cauchy-Schwarz:

Terdapat dua buah vektor $|\mathcal{U}.\mathcal{V}| \leq \left||\mathcal{U}||\mathcal{V}|\right|$

Untuk setiap $a1, a2, a3, \ldots, an, b1, b2, b, \ldots, bn \in R$ benar bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Bukti.

Karena untuk setiap $a, b \in R$ berlaku bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$$

Tinggal membuktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} . \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Untuk sebarang

$t \in R$ diperoleh

$$(|a_1| - |b_1|t)^2 + (|a_2| - |b_2|t)^2 + \cdots + (|a_n| - |b_n|t)^2 \geq 0$$

Yaitu :

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2(|a_1b_1| + |a_2b_2| + \cdots + |a_nb_n|)t + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq 0$

Dengan mengingat bahwa $|a^kb^k| = |a^k||b^k|$dan $a^k = |a^k|^2$ untuk setiap k. Karena persamaan kuadrat dalam t tersebut selalu bernilai nonnegative, maka nilai $D = deskriminan \leq 0$ yaitu :

$4\{|a_1b_1| + |a_2b_2 + \cdots + |a_nb_n||\}^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

yang berarti

$$\sum_{k=1}^{n} |a_kb_k| \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} . \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Contoh soal:

Jika a_k, b_k dan c_k merupakan suku-suku real positif yang berjumlah n dengan $\sum a_k = \sum b_k = \sum c_k = 8$, buktikan bahwa:

$$\sum \frac{(a_k)^4}{(b_k - c_k)^2} \geq 8$$

Penyelesaian

Dengan Cauchy-Schwarz Engel, maka

$$\sum \frac{(a_k)^4}{(b_k - c_k)^2} = \sum \frac{\frac{(a_k)^4}{(c_k)^2}}{b_k} \geq \frac{\sum\left(\frac{(a_k)^2}{c_k}\right)^2}{\sum b_k} \geq \frac{\left(\frac{(\sum a_k)^2}{\sum c_k}\right)^2}{\sum b_k} = \frac{\sum a_k^4}{\sum b_k . \sum (c_k)^2} = 8$$

TERBUKTI

Ketidaksamaan Segitiga

Jika $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, maka $\mathbb{R}$

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Bukti

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2$$

Dengan :

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 , \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k , \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$= A + 2B + C$$

Berdasarkan Ketidaksamaan Cauchy

$$|B| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$= \left(\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Atau

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2\right\}^2 \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

<u>Contoh soal:</u>

Diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$ untuk $x \in [2,3]$. Tentukan konstanta M sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2,3]$

Diketahui $|f(x)| = \left|\frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\right| = \frac{|2x^2-3x+1|}{|2x-1|}$

$$|2x^2 - 3x + 1| \leq |2x^2| + |3x| + |1|$$

$$= 2|x^2| + 3|x| + 1$$

$$\leq 2|(3)^2| + 3|3| + 1$$

$$= 28$$

Dan

$$|2x - 1| \geq \big||2x| - |1|\big|$$

$$\geq \big||2(2)| - |1|\big|$$

$$= 3$$

Sehingga $|f(x)| = \frac{|2x^2-3x+1|}{|2x-1|} \leq \frac{28}{3}$. Jadi, dengan mengambil $m = \frac{28}{3}$, didapat $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2,3]$

Soal Latihan:

1. Tunjukkan menurut Keidaksamaan Bernouli $\lim \left(2^{\frac{1}{n}}\right) = 1$
2. Buktikan jika $0 < a < b$ dan $0 \leq c \leq d$ maka $0 \leq ac \leq bd$
3. Misalkan $x\ dan\ y$ bilangan real positif, buktikan bahwa:
$$8(x^4 + y^4) \geq (x + y)^4$$
4. Misalkan x, y, z adalah bilangan real positif dengan $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$

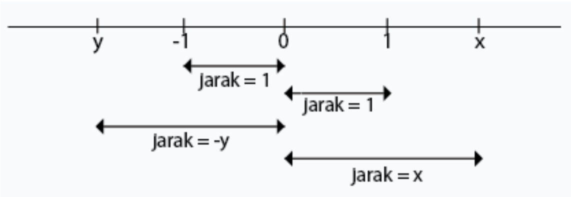
   Buktikan bahwa $\sqrt{xy + yz + zx + 3xyz} \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$
5. Jika $x, y, z \in \mathbb{R}$ dan $x \leq z$, tunjukkan bahwa $x \leq y \leq z$ jika dan hanya jika $|x - y| + |y - z| = |x - z|$

Nilai Mutlak Bilangan Real

Definisi Nilai Mutlak Bilangan Real

Konsep dasar nilai mutlak bilangan real memiliki arti geometri sebagai jarak dari *x* ke 0 pada suatu garis bilangan.

Perhatikan gambar dibawah ini:



Kesimpulan dari gambar tersebut adalah:

1. Jarak dari 1 ke 0 adalah $1 - 0 = 0$, sedangkan jarak dari -1 ke 0 adalah $0 - (-1) = 1$
2. Apabila $x > 0$, jarak dari *x* menuju 0 adalah $x - 0 = x$, sedangkan apabila $y < 0$ maka jarak dari y ke 0 adalah $0 - y = -y$.

Dari dua pernyataan di atas, maka jarak dari *x* menuju 0 dapat ditulis dalam bentuk:

$$jarak\ x\ ke\ 0 = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Nilai Mutlak dari suatu bilangan real x, dianalogikan seperti pembahasan di atas. **Nilai mutlak** dinotasikan dengan $|a|$. Maka nilai mutlak dari bilangan real *x*, didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Definisi tersebut dapat pula dinyatakan sebagai:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Beberapa Sifat Nilai Mutlak Bilangan Real

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|$, asalkan $y \neq 0$

Salah satu sifat penting pada nilai mutlak yang banyak digunakan dalam konsep matematika maupun penerapannya adalah sifat ketidaksamaan segitiga berikut.

Untuk setiap bilangan real x, y berlaku

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

Lebih lanjut, dalam kaitannya dengan sebarang bilangan real diperoleh sifat berikut ini.

Jika $a \geq 0$, maka

$|x| = a$ jika dan hanya jika $x = a$ atau $x = -a$

$|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$

$|x| < a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$

$|x| \geq 0$ jika dan hanya jika $x \leq -a$ atau $x \geq a$

$|x| > 0$ jika dan hanya jika $x > -a$ atau $x > a$

Lebih baik, untuk setiap bilangan real x dan y

$|x| \leq |y|$ jika dan hanya jika $x^2 \leq y^2$.

- **Contoh soal**:

1. Selesaikan persamaan berikut:

$$|x-1| = 6$$

Penyelesaian:

$|x-1| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = 6$ atau $x-1 = -6$

$x = 6+1$ atau $x = -6+1$

$\Rightarrow\ x = 7$ atau $x = -5$

Jadi, jawaban dari persamaan ini 7 atau (-5)

2. Selesaikan pertidaksamaan berikut:

$$|2x-1| \leq 5$$

Penyelesiaan:

$|2x-1| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq 2x-1 \leq 5$

$= -5+1 \leq 2x-1+1 \leq 5+1$

$\Leftrightarrow \quad -4 \leq 2x \leq 6$

$= -\frac{4}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{6}{2}$

$\Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 3$

Jadi, himpunan penyelesaian dari $|2x-1| \leq 5$ adalah $\{x| -2 \leq x \leq 3\}$

3. Selesaikan persamaan berikut:

$$|-2x| + 5 = 13$$

Penyelesaian:

$|-2x| + 5 = 13$

$|-2x| = 13 - 5$

$\rightarrow\ |-2x| = 8$

$|x| = 8$

$\rightarrow\ 2\,|x| = 8$

$\rightarrow\ |x| = \frac{8}{2}$

$\rightarrow \quad |x| = 4$

Jadi, $x = -4$ atau $x = 4$

Latihan:

1. Jika $|\mathbf{2x+5}| = \mathbf{7}$, nilai $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi adalah…
2. Penyelesiaan persamaan $|\mathbf{6-x}| = |\mathbf{2x+3}|$ adalah…
3. Nilai $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi $|\mathbf{3x+2}| + \mathbf{4x} = \mathbf{6}$ adalah…
4. Himpunan penyelesaian $|\boldsymbol{x}-\mathbf{7}| = \mathbf{3} + |\boldsymbol{x}-\mathbf{2}|$ adalah…
5. Selesiakanlah persamaan nilai mutlak $\mathbf{5}\,|\mathbf{2x-3}| = \mathbf{2}\,|\mathbf{3-5x}|$

BAB V BARISAN MONOTON

Pengertian Barisan Monoton

Berikut ini diberikan pengertian mengenai barisan naik dan turun monoton.

1. Diberikan barisan bilangan real X $= (x_n)$
   a. Barisan X dikatakan naik *(increasing)* jika $x_n \leq x_{n+1}$, untuk semua $n \in N$
   b. Barisan X dikatakan naik tegas *(strictly increasing)* jika $x_n < x_{n+1}$, untuk semua $n \in N$
   c. Barisan X dikatakanturun *(decreasing)* jika $x_n \geq x_{n+1}$, untuk semua $n \in N$
   d. Barisan X dikatakanturun tegas *(strictly decreasing)* jika $x_n > x_{n+1}$, untuk semua $n \in N$
2. Barisan dikatakan monoton jika berlaku salah satu X naik atau X turun.

   Contoh :

   a. Barisan berikut ini naik (monoton).
      (i) $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$
      (ii) $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$
      (iii) $(a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n, \dots)$ jika $a > 1$

   b. Barisan berikut ini turun (monoton)
      (i) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$
      (ii) $\left(1, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$
      (iii) $(b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^n, \dots)$ jika $0 < b < 1$

   c. Barisan berikut ini tidak monoton.
      (i) $(+1, -1, +1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$
      (ii) $(-1, +2, -3, +4, \dots)$

Teorema Konvergensi Monoton

a. Jika $X = (x_n)$ naik (monoton) dan terbatas ke atas, maka $X = (x_n)$ konvergen dengan

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}$$

b. Jika $X = (x_n)$ Turun (monoton) dan terbatas kebawah, maka $X = (x_n)$ konvergen dengan

$$\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in N\}$$

Pembuktian:

a. Karena $X = (x_n)$ terbatas ke atas, maka terdapat $M \in N$ sedemikian hingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in N$. Namakan $A = x_n : n \in N$, maka $A \subset R$, terbatas keatas dan tidak kosong. Menurut Sifat Lengkap R maka supremum A ada, namakan $x = \sup A$ atau $x = \sup\{x_n : n \in N\}$. $\mathcal{E} > 0$, maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga. Karena X naik monoton,maka untuk $n \geq K$ berlaku

$$x - \mathcal{E} < x_k \leq x_n \leq x < x + \mathcal{E}$$

Atau $|x_n - x| < \mathcal{E}$

Karena $\mathcal{E} > 0$ adalah sembarang, kita simpulkan bahwa (x_n) konvergen ke x. Jadi, terbukti bahwa $X = (x_n)$ konvergen ke $x = lim\ (x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}$

b. Jika $Y = (y_n)$ adalah barisan menurun berbatas, maka jelas bahwa $X := -Y = (-y_n)$ adalah barisan naik berbatas. Diperlihatkan pada bagian (a) bahwa $\lim X = \sup\{-y_n : n \in \mathbb{N}\}$, Sekarang $\lim \mathrm{X} = -\lim \mathrm{Y}$ dan juga, maka didapat

$$\mathrm{Sup}\{-y_n : n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{-y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Maka $Y = -\lim \mathrm{X} = \inf\{-y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Contoh

1. Tunjukkan bahwa $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right) = 0$

   Jawab :

   kita akan menggunakan Teorema Konvergensi Monoton. Diketahui bahwa 0 adalah batas bawah untuk himpunan $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tunjukkan bahwa 0 adalah infimum dari himpunan $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$; maka $0 = \lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Sebaliknya, setelah kita mengetahui bahwa $X \coloneqq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ terbatas dan menurun, kita tahu bahwa itu konvergen ke beberapa bilangan real x. Karena $X \coloneqq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ konvergen dengan x, pada Teorema 3.2.3 dikatakan bahwa $X . X = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke x^2. Oleh karena itu $x^2 = 0$, di mana $x = 0$.

2. Tunjukkan bahwa barisan h_n dengan $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, untuk $n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan yang divergen.

   Jawab :

   Perhatikan suku-suku barisan $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, untuk $n \in \mathbb{N}$

   $x_1 = 1,$

   $x_2 = 1 + \frac{1}{2} = x_1 + \frac{1}{2}$,

   $x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = x_2 + \frac{1}{3},$

   $x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = x_3 + \frac{1}{4},$

   …

   $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = x_n + \frac{1}{n+1} > \mathrm{x_n}.$

   Dapat dilihat bahwa barisan (x_n) merupakan barisan yang naik. Perhatikan bahwa

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

   Karena (x_n) tidak terbatas, maka (x_n) merupakan barisan yang divergen.

3. Jika $Z = (z_n)$ adalah barisan bilangan real yang didefinisikan oleh $z_1 \coloneqq 1, z_n + 1 \coloneqq \sqrt{2z_n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Apakah barisan $Z = (z_n)$ merupakan barisan yang konvergen? Jika ya, tunjukkan bahwa $\lim(z_n) = 2$.

   Jawab :

Dengan induksi matematika akan ditunjukkan bahwa (z_n) monoton naik. Untuk $n = 1$, diperoleh $z_2 = \sqrt{2}$, sehingga $1 \leq z_1 < z_2 < 2$.

Diketahui bahwa $z_1 = 1$ dan dapat dihitung bahwa $z_2 = \sqrt{2}$, sehingga $1 \leq z_1 < z_2 < 2$. Akan ditunjukkan kebenarannya untuk $n = k + 1$.

Andaikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, yaitu $z_{k+1} = \sqrt{2z_k}$, sehingga

$$z_k < z_{k+1} \text{ (hipotesis induksi).}$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$.

$$z_k + 1 = \sqrt{2z_k} < \sqrt{2z_k} + 1 = z_k + 2 \text{ (menurut hipotesis induksi).}$$

Jadi pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Artinya bahwa barisan (z_n) merupakan barisan monoton naik. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (z_n) adalah barisan yang terbatas ke atas oleh 2, yaitu $z_n < 2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Untuk $n = 1$, pernyataan benar, karena $z_1 = 1 < 2$.

Andaikan pernyataan benar untuk $n = k$, maka $z_k < 2$, sehingga

$$z_k + 1 = \sqrt{2z_k} < \sqrt{2.2} = 2.$$

Berarti untuk $n = k + 1$, berlaku $z_{k+1} < 2$. Jadi dapat dibuktikan bahwa barisan z_n merupakan barisan yang terbatas di atas oleh 2, yaitu $z_n < 2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Latihan Soal

1. Tunjukkan bahwa x_n adalah terbatas dan monoton jika $x_1 = 8$ dan $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tentukan limitnya.
2. Jika barisan $Y = (y_n)$ didefinisikan secara induktif oleh $y_1 = 1, y_n + 1 = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ untuk $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa $\lim Y = \frac{3}{2}$.
3. Tunjukkan bahwa x_n adalah terbatas dan monoton jika $x_1 > 2$ dan $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tentukan limitnya.
4. Tunjukkan bahwa x_n adalah konvergen jika $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Dan tentukan limitnya.
5. Tentukan bahwa x_n konvergen atau divergen jika $x_1 = a > 0$ dan $x_{n+1} = x_{n+1}/x_n$ untuk $n \in \mathbb{N}$

BAB VI BARISAN BAGIAN & TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS

Definisi barisan bagian

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan misalkan $n_1 < n_2 <\ldots< n_k <\ldots$ adalah barisan bilangan asli yang semakin meningkat. Maka urutan $X' = (x_{n_k})$ diberikan oleh

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots., x_{n_k}, \ldots.)$$

Disebut barisan dari X

Contoh soal:

1. Misalnya $X = 2k$

   Jawab:

   Maka, $(2k) = (2, 4, 6, \ldots)$

2. Sebagai contoh dipunyai $X = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$

   Jawab:

   Berikut adalah contoh barisan bagian dari X:

   - $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in N} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$,
   - $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n\in N} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$,
   - $\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n\in N} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$.

3. Berikan contoh yang *bukan* termasuk barisan bagian dari X.

   - $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right)$,
   - $\left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \frac{1}{9}, \ldots\right)$.

   Pada kedua contoh tersebut bukan bagian dari X karena berbeda dengan urutan barisan aslinya. Jadi keduanya bukan barisan bagian dari X.

Hubungan antara barisan yang konvergen dengan barisan bagiannya

a. Teorema 3.4.2

   Jika suatu barisan $X = (x_n)$ bilangan real konvergen ke bilangan real x, maka setiap barisan $X' = (x_{n_k})$ juga konvergen ke x.

   Pembuktian:

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan dan dimisalkan $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ adalah barisan bilangan asli naik, maka mudah dibuktikan (dengan induksi) bahwa $n_k \geq k$. Oleh karena itu, jika $k \geq K(\varepsilon)$, kita juga memiliki $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$ sehingga $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Oleh karena itu, barisan (x_{n_k}) juga konvergen ke x.

Q.E.D

b. Teorema 3.4.4

Misalnya $X = (x_2)$ merupakan barisan bilangan real, maka berikut ini adalah ekuivalen:

i. Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in \mathbb{R}$.

ii. Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk sembarang $k \in \mathbb{N}$, terdapat $n_k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_k \geq k$ dan $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

iii. Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan barisan $X' = (x_{n_k})$ dari X sedemikian rupa sehingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

Pembuktian:

- i ke ii

  jika x_n tidak konvergen ke x, maka untuk beberapa ε_0 tidak mungkin menentukan bilangan asli k sehingga untuk semua $n \geq k$ suku x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Artinya, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ tidak benar bahwa untuk semua $n \geq k$ pertidaksamaan $|x_n - x| < \varepsilon_0$ berlaku. Di lain kata-kata, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ terdapat bilangan asli $n_k \geq k$ sedemikian rupa sehingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

- ii ke iii

  Misalkan ε_0 seperti pada (ii) dan misalkan $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_1 \geq 1$ dan $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon_0$. Sekarang misalkan $n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_2 > n_1$ dan $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon_0$; misalkan $n_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian rupa sehingga $n_3 > n_2$ dan $|x_{n_3} - x| \geq \varepsilon_0$. Lanjutkan dengan car aini untuk mendapatkan turunan $X' = (x_{n_k})$ dari X sedemikian rupa sehingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

- iii ke i

Misalkan $X = (x_n)$ memiliki turunan $X' = (x_{n_k})$ yang memenuhi kondisi di (iii). Maka X tidak dapat konvergen ke x; karena jika demikian, maka, dengan Teorema 3.4.2, barisan X' juga akan konvergen ke x. Tapi ini tidak mungkin, karena tidak ada suku X' yang memiliki ε_0 −lingkungan dari x.

Karena semua turunan dari barisan konvergen harus konvergen ke limit yang sama, kita mendapatkan bagian (i) pada hasil berikut. Bagian (ii) mengikuti fakta bahwa barisan konvergen terbatas.

Contoh soal:

1. $\lim\,(b^n) = 0$ jika $0 < b < 1$.

   Jawab:

   Jika $0 < b < 1$ dan jika $x_n := b^n$, maka berikut dari persamaan Bernoulli bahwa $lim\,(x_n) = 0$. Atau, kita melihat bahwa karena $0 < b < 1$, maka $x_{n+1} = b^{n+1} < b^n = x_n$ sehingga barisan (x_n) berkurang. Jelas juga bahwa $0 \le x_n \le 1$, jadi mengikuti Teorema Konvergensi Monoton 3.3.2 bahwa barisan tersebut konvergen. Misalkan $x := lim\, x_n$. karena (x_{2n}) adalah turunan dari (x_n) maka dari Teorema 3.4.2 $x = lim\,(x_{2n})$. Selain itu, ia mengikuti dari relasi $x_{2n} = b^{2n} = (b^n)^2 = x_n^2$, bahwa

   $$x = lim\,(x_{2n}) = (lim(x_n))^2 = x^2.$$

   oleh karena itu kita harus memiliki $x = 0$ atau $x = 1$. Karena barisan (x_n) menurun dan dibatasi di atas oleh $b < 1$, kita simpulkan bahwa $x = 0$

2. $lim(c^{1/n}) = 1\; untuk\; c > 1$.

   Jawab:

   Untuk $c > 0$, menggunakan argument yang agak cerdik. Di sini kita berikan pendekatan alternatif untuk kasus $c > 1$. Perhatikan bahwa jika $z_n := c^{1/n}$, maka $z_n > 1$ dan $z_{n+1} < z_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. (mengapa?) jadi dengan Teorema Konvergensi Monoton, $z := lim(z_n)$ ada. Dengan Teorema 3.4.2 maka $z = lim(z_{2n})$. selain itu, mengikuti relasi

   $$z_{2n} = c^{1/2n} = (c^{1/n})^{1/2} = z_n^{1/2}$$

   Dan Teorema 3.2.10 (terdapat di buku INTRODUCTION TO REAL ANALYSIS karya Robert G. Bartle dan Donald R. sherbert) bahwa

$$z = lim(z_{2n}) = (lim(z_n))^{1/2} = z^{1/2}$$

oleh karena itu kami memiliki $z^2 = z$ dari mana dapat disimpulkan bahwa $z = 0$ atau $z = 1$. Karena $z_n > 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, kami menyimpulkan bahwa $z = 1$.

3. Apakah barisan $X = (x_n)$ termasuk konvergen jika $x_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$?

   Jawab:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = lim \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

$$= lim \frac{(2n^2+3).\frac{1}{n^2}}{n^2+1.\frac{1}{n^2}}$$

$$= lim \frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{lim\ 2 + lim\frac{3}{n^2}}{lim\ 1 + lim\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{lim\ 2 + lim\ 0}{lim\ 1 + lim\ 0}$$

$$= \frac{lim\ 2 + 0}{lim\ 1 + 0}$$

$$= lim\ 2$$

maka terbukti bahwa konvergen.

Latihan soal

1. Berikan contoh barisan tak terbatas yang memiliki barisan konvergen 2.
2. Menggunakan contoh soal nomer 2 dari “Hubungan antara barisan yang konvergen dengan barisan bagiannya” untuk menunjukkan bahwa jika $0 < c < 1$, maka $lim(c^{1/n}) = 1$.
3. Tentukan konvergensi dan tentukan limit dari barisan $(1 + 1/n^2)^{n^2}$.
4. Tentukan limit dari $((3n)^{1/2n})$.
5. Misalkan setiap barisan dari $X = (x_n)$ memiliki barisan yang konvergen ke 0. Tunjukkan bahwa lim X=0.

Kriteria Divergensi 3.4.5

Jika barisan $X = (X_n)$ angka-angka yang nyata memiliki salah satu property, maka X berbeda.

(i) Jika X memiliki dua turunan konvergen $X' = (X_{nk})$ dan $X'' = (X_{nk})$ yang batasnya tidak setara.

(ii) X tidak terbatas

3.4.6 **Contoh**

a. Barisan $X \coloneqq ((-1)^{2n})$ berbeda

Barisan $X \coloneqq ((-1)^{2n}) = (1,1,\ldots)$ konvergen ke 1, dan turunannya $X \coloneqq ((-1)^{2n}) = (-1,-1,\ldots)$ oleh karena itu, maka dapat disimpulkan bahwa X divergen.

b. Urutan dari $\left(1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},\ldots\right)$ adalah divergen.

Ini merupakan urutan $Y = (Y_n)$, dimana $y_n = n$ jika n adalah ganjil, dan $y_n = {}^1/_n$ jika n adalah genap. Dapat dengan mudah dilihat bahwa Y tidak dibatasi. Oleh karena itu, dengan Teorema 3.4.5 (ii), barisannya adalah berbeda.

c. Barisan S := $(\sin n)$ divergen

Urutan ini tidak mudah untuk ditangani. Karena dalam pembahasannya harus memanfaatkan sifat dasr fungsi sinus. Jika $\sin({}^\pi/_6) = \frac{1}{2} = \sin({}^{5\pi}/_6)$ dan $\sin x > \frac{1}{2}$ untuk x dalam interval $l_1 \coloneqq ({}^\pi/_6, {}^{5\pi}/_6)$. Karena panjang l_1 adalah ${}^{5\pi}/_6 - {}^\pi/_6 = {}^{2\pi}/_3 > 2$, setidaknya ada dua bilangan asli yang terletak di dalam l_1, dan membiarkan n_1 menjadi nomor pertama seperti itu. Demikian pula, untuk masing-masing $k \in \mathbb{N}, \sin x > \frac{1}{2}$ untuk x dalam interval

$$l_k \coloneqq ({}^\pi/_6 + 2\pi(k-1), {}^{5\pi}/_6 + 2\pi(k-1)).$$

Karena panjang l_k lebih besar dari 2, setidaknya ada dua bilangan asli yang terletak di dalam l_k; sehingga membiarkan n_k menjadi yang pertama. Barisan $S' \coloneqq (\sin n_k)$ dari S yang diperoleh dengan cara ini memiliki property yang semua nilainya terletak pada interval $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Demikian pula, jika $k \in \mathbb{N}$ dan j_k adalah intervalnya.

$$j_k := \left({}^{7\pi}/_{6} + 2\pi(k-1), {}^{11\pi}/_{6} + 2\pi(k-1)\right).$$

Maka dapat dilihat $\sin x > -\frac{1}{2}$ untuk semua $x \in j_k$ dan panjang j_k lebih besar dari 2. Biarkan m_k menjadi bilangan asli pertama terletak di j_k. Kemudian selanjutnya $S' := (\sin m_k)$ dari S memiliki property yang sama semua nilainya terletak pada interval $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

Diberikan sembarang bilangan real c, dapat dilihat bahwa paling sedikit salah satun dari barisan S' dan S'' yang terletak seluruhnya di luar $\frac{1}{2}$ lingkungan c. Oleh karena itu c tidak dapat menjadi limit s. Maka dari itu $c \in \mathbb{R}$ arbitrer, dapat disimpulkan bahwa S divergen.

Keberadaan Barisan Monoton

Meskipun tidak setiap barisan adalah barisan yang monoton, menunjukkan bahwa setiap barisan memiliki barisan yang monoton.

Teorema Barisan Monoton

jika $X = (X_n)$ adalah barisan bilangan real, maka ada barisan dari V yang monoton.

Bukti: tujuan pembuktian mengatakan bahwa suku ke-m x_m adalah "puncak" jika $x_m \geq x_n$ untuk semua n sedemikian rupa sehingga $n \geq m$. (Artinya, x_m tidak pernah dilampaui oleh suku apa pun yang mengikutinya secara berurutan). Jika diperhatikan bahwa dalam barisan menurun, setiap suku adalah puncak, sedangkan dalam barisan naik, tidak ada suku yang merupakan puncak.

Akan dipertimbangkan dua kasus, tergantung pada apakah X memiliki banyak tak terhingga, atau terhingga, puncak.

Kasus 1 : X memiliki banyak puncak tak terhingga. Dalam hal ini, akan membuat daftar puncak dengan meningkatkan langganan : $X_{m1}, X_{m2}, \ldots\ldots, X_{mk.}$ Biarkan $S_1 := m_r + 1$ jadilah indeks pertama setelah yang terakhir pada puncak. Karena X_{s1} bukan puncak, maka ada $S_2 > S_1$ seperti yang $X_{s1} < X_{s2}$. Karena X_{s2}bukan puncak, ada $S_3 > S_2$ seperti yang

$X_{s2} < X_{s3}$. Selanjutnya dengan cara ini, kami memperoleh peningkatan barisan (X_{sk}) dari X.

Tidak sulit untuk melihat bahwa suatu barisan yang diberikan mungkin memiliki satu barisan yaitu meningkat, dan turuan lainnya menurun.

Teorema Bolzano – Weierstrass

Teorema Barisan Monoton untuk membuktikan Bolzano-Weierstrass. Yang dimana teorema yang menyatakan bahwa setiap barisan berbatas memiliki barisan yang konvergen. Karena teorema ini penting, maka akan memberikan bukti kedua berdasarkan teorema ini pada Properti Interval Bersarang.

3.4.7 **Teorema Bolzano-Weirstrass**

Barisan bilangan real berbatas yang memiliki a barisan konvergen

Bukti pertama : Teorema Subsequence Monoton jika $X = (X_n)$ adalah barisan terbatas, maka ia memiliki barisan $X' = (X_{nk})$ yaitu monoton. Sejak barisan ini juga terbatas,mengikuti dari Teorema Konvergensi 3.3.2 bahwa barisan tersebut konvergen.

Bukti kedua : karena himpunan nilai $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dibatasi oleh himpunan yang terkandung dalam sebuah interval $I_1 \coloneqq [a, b]$. Kami mengambil $n_1 \coloneqq 1$.

Membagi dua l_1 menjadi dua subinterval yang sama l_1' dan l_1'', dan membagi himpunan indeks menjadi $\{n \in \mathbb{N}: n > n_2\}$ menjadi dua bagian.

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N}: n > n_2, X_n, \in I_2'\}\ ,\ B_2 = \{n \in \mathbb{N}: n > n_2, X_n, \in I_2''\}$$

Jika A_2 tak terhingga, maka dapat diambil $I_3 = I_2'$ dan biarkan n_3 menjadi bilangan asli tekecil di A_2. Jika A_2 merupakan himpunan berhingga, maka B_2 harus tak terhingga, dan dapat ambil $I_3 \coloneqq I$ dan biarkan n_3 menjadi yang terkecil pada nomor di B_2.

Selanjutnya dengan cara ini untuk mendapatkan urutan interval bersarang $I_1 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$ dan turunan X_{nk} dari X sedemikian rupa sehingga $X_{nk} \in I_k$untuk $k \in \mathbb{N}$. Karena panjang I_k adalah sama dengan $(b - a)/\ 2^{k-1}$, berikut dari Teorema

2.5.3 bahwa ada titik umum (unik) $\xi \in I_k$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Selain itu X_{nk} dan ξ keduanya milik I_k, maka kita mempunyai :

$$|X_{nk} - \xi| \leq (b-a)/\ 2^{k-1},$$

Dapat disimpulkan bahwa barisan X_{nk} dari X konvergen ξ.

Teorema 3.4.8 biasa disebut dengan Teorema Bolzano-Weierstrass untuk barisan, oleh karena yang berhubungan dengan himpunan terbatas di $\mathbb{R}$. Dapat dilihat bahwa barisan terbatas dapat memiliki berbagai sub urutan yang konvergen batas yang berbeda atau bahkan menyimpang. Misalnya pada urutan$((-1)^n)$ memiliki turunan yang konvergen ke-1, su urutan yang konvergen $+1$ dan memiliki urutan yang menyimpang.

Misalkan X adalah barisan bilangan real dan misalkan X' dalah turunan dari X. Maka X' merupakan urutan dalam dirinya sendiri, karena memiliki sub urutan. Kami mencatat bahwa jika X'' merupakan turunan dari X', maka juga merupakan turunan dari X.

3.4.8 Teorema

Biarkan $X = (X_n)$ menjadi barisan bilangan real berbatas dan $x \in \mathbb{R}$ memiliki sifat bahwa setiap barisan konvergen dari X konvergen ke X. Maka barisan X konvergen ke X.

Misalkan $M > 0$ adalah terikat untuk barisan X sehingga $|X_n| \leq M$ Untuk $n \in \mathbb{N}$. Jika X tidak konvergen ke X, maka Teorema 3.4.4 menyiratkan bahwa ada $\varepsilon_0 > 0$ dan urutan $X' = (X_n)$ dari X sehingga

$$(1)|X_{nk} - x| \geq \varepsilon_0 \text{ Untuk } k \in \mathbb{N}.$$

Karena X' adalah turunan dari X, bilangan M juga terikat untuk X'. Oleh karena itu Teorema Bolzano-Weierstrass menyiratkan bahwa X' memiliki turunan konvergen X''. Karena X'' juga urutan dari X, konvergen ke X dengan hipotesis. Dengan demikian, istilahlah pada akhirnya ε_0 lingkungan dari X, kontaradiksi (1) *Q.E.D*

Limit Superior dan Limit Inferior

Barisan bilangan real berbatas (X_n) mungkin konvergen atau tidak,jika di ketahui Teorema Bolzano-Weierstrass 3.4.8 bahwa aka nada barisan konvergen dan mungkin banyak turunan yang konvergen. Bilangan real yang merupakan limit suatu barisan dari (X_n) disebut *limit lanjutan dari* (X_n) . biarkan S menyatakan himpunan semua limit berikutnya dari barisan berbatas (X_n). Himpunan S berbatas, karena barisannya berbatas. Misalnya, jika (X_n) didefinisikan oleh $X_n \coloneqq (-1)^n + 2/n$, maka barisan (X_{2n}) konvergen ke 1, dan turunannya (X_{2n-1}) konvergen ke -1/ dapat dilihat bahwa himpunan limit berikutnya adalah $S = \{-1,1\}$. Jika diamati bahwa anggota terbesar dari barisan itu sendiri adalah $X_2 = 2$, yang tidak memberikan informasi mengenai perilaku pada pembatas dari urutan.

Contoh ekstrim yang diberikan olehhimpunan semua bilangan rasional dalam interval $[0,1]$. Himpunan tersebut dapat didenumerasi (lihat bagian 1.3) dan oleh karena itu dapat ditulis sebagai barisan (r_n). Kemudian dari Teorema 2.4.8 Massa Jenis bahwa setiap bilangan di [0,1] adalah limit (r_n). Sehingga $S = [0,1]$.

Barisan terbatas (X_n) yang divergen akan menampilkan beberapa bentuk osilasi. Artikel tersebut terkandung dalam interval menurun sebagai berikut. Interval $[t_1, u_1]$, dimana $t_1 \coloneqq \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dan . $u_1 \coloneqq \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, berisi seluruh urutan. Jika untuk masing-masing $m = 1,2, \ldots$, mendefinisikan $t_m \coloneqq \inf\{x_n : n \geq m\}$ dan $u_m \coloneqq \sup\{x_n : n \geq m\}$, dengan menurutkan (t_m) dan (u_m) adalah monoton dan memperoleh urutan interval bersarang $[t_m, u_m]$ dimana interval ke m berisi m dari urutan.

Diskusi sebelumnya menyarankan cara yang berbeda untuk menggambarkan perilaku membatasi urutan yang dibatasi. Selain itu untuk mengamati bahwa jika bilangan real v memiliki property yang $x_n > v$ untuk paling banyak sejumlah nilai n yang terbatas, maka tidak ada turunan dari (X_n) yang dapat konvergen ke limit yang lebih besar dari v karena itu akan membutuhkan banyak suku barisan menjadi lebih besar dari v. Dengan kata lain, jika v memiliki sifat bahwa N_v sedemikian rupa sehingga $x_n \leq v$ untuk semua $n \geq N_v$. Maka tidak ada bilangan yang lebih besar dari v yang dapat menjadi limit lanjutan dari (X_n).

Pengamatan ini mengarah pada definisi limit superior. Yang menyertai definisi limet inferior serupa.

3.4.10 Definisi

Misalkan $X = (x_n)$ *barisan bilangan real berbatas.*

a. **Limit Superior** diatas (x_n) adalah minimum dari himpunan $V\ jika\ v \in \mathbb{R}$ seperti yang $v\ < x_n$ untuk di sebagian besar jumlah yang terbatas dari $n \in \mathbb{N}$ dilambangkan dengan :

$$\lim\inf(x_n)\ atau\ \lim\sup X\ atau\ \lim\ x_n$$

b. **Limit Inferior**

Misalkan (x_n) adalah supremum dari himpunan $w \in \mathbb{R}$ jika $x_m < w$ untuk di sebagian besar jumlah yang terbatas dari $m \in \mathbb{N}$ dilambangkan dengan *:*

$$\lim\inf(x_n)\ atau\ \lim\inf X\ atau\ \lim\ x_n$$

Untuk konsep limit superior, menunjukkan bahwa pendekatan yang berbeda adalah ekuivalen.

3.4.11 Teorema

jika (x_n) *adalah barisan bilangan real berbatas, maka : pernyataan untuk bilangan real X equivalen*.

a. $x * = \lim\sup(x_n)$

b. jika $\varepsilon > 0$, ada paling banyak sejumlah terbatas $n \in \mathbb{N}$ jika $x * + \varepsilon < x_n$ tetapi jumlah tak terbatas $n \in \mathbb{N}$ jika $x * - \varepsilon < x_n$

c. jika S adalah himpunan limit berikutnya dari (x_n), jika $x * = \sup S$

3.4.12 Teorema barisan berbatas (x_n) konvergen jika dan hanya jika $\lim\sup(x_n) = \lim\inf(x_n)$.

Contoh Soal :

1. Investigate the convergence of the sequence (x_n) where :

   a. $x_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n+n^2}$

   Penyelesaian:

   Since $(1 + 2 + \cdots + n)\frac{1}{n+n^2} \leq x_n \leq (1 + 2 + \cdots + n)\frac{1}{1+n^2}, x_n\ \to \frac{1}{2}$

2. Show that the following sequences are divergent.

   a. $(\sin n\pi/\ 4)$. b. $(1 - (-1)^n + 1/n)$

Jawab:

a. $(\sin n\pi/\ 4)$.

Penyelesaian :

$x_{2n} \rightarrow 0\ dan\ x_{2n+1} \rightarrow 2$

b. $(1 - (-1)^n + 1/n)$

Penyelesaian :

$x_{8n} = 0\ and\ x_{8n+1} = \sin\left({}^{\pi}/_{4}\right) = {}^{1}/_{\sqrt{2}}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

3. Suppose than $x_n \geq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ and that lim $((-1)^n x_n$ exists. Show that (x_n) converges.

   Penyelesaian:

   Show that $\lim((-1)^n x_n) = 0$

Latihan :

1. Determine the limits of the following.

   (a) $(\left(1 + {}^{1}/_{2n}\right)^n)$
2. Let I_n be nested sequence of closed bounded intervals. For each $n \in \mathbb{N}$, let $x_n \in I_n$. use the Bolzano-Weirstrass Theorema to give a proof of the Nested Interval Property 2.5.2
3. Show that if (x_n) is a bounded sequence, then (x_n) converges if and only if $\lim\sup(x_n) = \lim\inf(x_n)$.
4. Given an example to show that Theorema 3.4.9 fails if the hypothesis that X is a bounded sequence is dropped.
5. Suppose that every subsequence of $X = (x_n)$ has a subsequence that converges to 0. Show that $\lim \mathrm{X} = 0$.

BAB VII BARISAN CAUCHY

ada sistem bilangan real, barisan Cauchy menjadi salah satu alternatif untuk menyimpulkan kekonvergenan suatu barisan, tanpa perlu mencari limit barisannya. Barisan Cauchy diperkenalkan oleh seorang matematikawan Perancis bernama Augustin-Louis Cauchy. Secara sederhana, Barisan Cauchy adalah suatu barisan yang semakin lama jarak antara suku-sukunya semakin kecil. Hal tersebut dituangkan dalam definisinya sebagai berikut.

Definisi

Suatu barisan bilangan riil x_n disebut Barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli N_ε sedemikian sehingga untuk semua bilangan asli $n, m \geq N_\varepsilon$ maka kondisi x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon < 0$

ada bilangan asli $H = H(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n, m \geq H$ berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Barisan bilangan real $X = (x_n)$bukan barisan cauchy jika ada bilangan real $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap bilangan asli H ada bilangan asli $n_0, m_0 \geq H$ dan $\left|x_{n_0} - x_{m_0}\right| \geq \varepsilon_0$

Sifat-Sifat Barisan Cauchy

1. Setiap barisan cauchy terbatas
2. Suatu barisan adalah konvergen jika hanya jika merupakan barisan Cauchy.

Dari sifat 2, kita mengetahui satu hal: Jika suatu barisan konvergen ke L maka semakin mendekati L jarak antra suku-sukunya akan semakin kecil.

Hubungan antara barisan konvergen, barisan Cauchy, dan barisan terbatas.

Permasalahan yang sering ditemui pada barisan konvergen adalah menentukan limit barisannya. Pada sistem bilangan real, barisan Cauchy menjadi salah satu alternatif untuk menyimpulkan kekonvergenan suatu barisan, tanpa perlu mencari limit barisannya. Barisan Cauchy diperkenalkan oleh seorang matematikawan Perancis bernama Augustin-Louis Cauchy.

Definisi Suatu barisan bilangan real $X = (Xn)$ disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap € > 0 terdapat bilangan asli H, sehingga untuk setiap n ≥ H, m ≥ H, berlaku |xn − xm| < €.

Contoh-contoh Barisan Cauchy.

1. Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ Merupakan barisan Cauchy.
2. Barisan $\frac{1}{n^2}$ Merupakan barisan Cauchy
3. Barisan $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ Merupakan barisan Cauchy

Berikut dijelaskan bagaimana hubungan antara barisan Cauchy dan barisan terbatas.

Teorema: Diketahui (x_n) barisan bilangan real. Jika (x_n) barisan Cauchy, maka (x_n) terbatas.

Hubungan antara barisan Cauchy dan barisan terbatas selanjutnya akan digunakan pada pembuktian hubungan antara barisan konvergen dan barisan Cauchy yang akan dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema: Diberikan barisan bilangan real (x_n). Barisan (x_n) konvergen jika dan hanya jika (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Contoh Soal

1. Buktikan X =$\left(\frac{n}{n+1}\right)$adalah barisan Cauchy

Bukti

Ambil $\varepsilon > 0$, pilih $k_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$, sehingga jika n, m ≥ k_ε maka

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} + \frac{1}{k_\varepsilon}$$

$$= \frac{2}{k_\varepsilon} < \varepsilon$$

Cara pengerjaan:

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| = \left|\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\right|$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} \qquad = \left|\frac{1}{m+1} - \frac{m}{n+1}\right|$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \leq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$$

$\frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} \qquad < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} + \frac{1}{k_\varepsilon}$

$= \frac{2}{k_\varepsilon} < \varepsilon$

Terbukti bahwa X = $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ merupakan barisan Cauchy

2. Buktikan bahwa X =$\left(\frac{(-1)^n.n)}{n+1}\right)$ $adalah\ bukan\ barisan\ cauchy$
   Bukti pilih $\varepsilon_0 = 1\ sehingga$ ∀ k ∈ N, pilih n, m ≥ k
   $sedemikian\ sehingga\ \ n = m + 1\ dan\ m\ adalah\ bilangan\ gasal,$
   $$maka\ |x_n - x_m| = \left|\frac{m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1}\right|$$
   $$= 2 - \frac{2m+3}{m^2+3m+2}$$
   $$> 1 = \varepsilon_0$$
   Terbukti bahwa X =$\left(\frac{(-1)^n.n)}{n+1}\right)$ $bukan\ barisan\ cauchy$

3. Jika $X = x_n$ adalah barisan konvergen dari bilangan real, maka X adalah Cauchy urutan.
   Jika x = lim X, maka diberikan ε > 0 ada bilangan asli K (ε/2) sehingga jika n ≥ K (ε/2) maka $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Maka, jika H(ε) = = K (ε/2) dan jika n,m ≥ H (ε), maka kita memiliki
   $$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$
   $$\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   Karena ε > 0 adalah sembarang, maka (x_n) adalah barisan Cauchy

Latihan Soal

1. Tunjukkan menggunakan definisi bahwa barisan berikut merupakan barisan Cauchy

   a. $\left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ b. $\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2. Jika $0 < r < 1$ dan $|x_{n+1} - x_n| < r^n untuk\ semua\ \ n \in N$ tunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy.
3. Tunjukkan menggunakan definisi bahwa barisan berikut bukan barisan Cauchy

   a. $((-1)^n)$ b. $\left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

4. Jika x1 > 0 dan $X_{n+1} = (2 + X_n)^{-1}$ untuk n ≥ 1, tunjukkan bahwa (xn) adalah barisan kontraktif. Temukan batasnya.
5. Jika x1 > 0 dan $X_{n+1} = 2 + 1/x_n^{-1}$ untuk n ≥ 1, tunjukkan bahwa (xn) adalah barisan kontraktif. Temukan batasnya.

BAB VIII BARISAN DIVERGEN MURNI

Definisi

Misalkan (x_n) suatu barisan bilangan real.

i. Barisan (x_n) disebut menuju $+\infty$, ditulis $\lim (x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real α terdapat bilangan asli K sehingga jika n K, maka $x_n > \alpha$

ii. Barisan (x_n) disebut menuju $-\infty$, ditulis $\lim (x_n) = -\infty$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real β terdapat bilangan asli K sehingga jika n K, maka $x_n < \beta$

Barisan (x_n) dengan $\lim (x_n) = +\infty$ atau $\lim (x_n) = -\infty$ disebut barisan divergen murni

Teorema

A. Teorema Barisan bilangan real monoton divergen benar jika dan hanya jika itu tidak terbatas.

Jika (xn) barisan monoton naik tak terbatas, maka lim (xn) = $+\infty$

Jika (xn) barisan monoton turun tak terbatas, maka lim (xn) = $-\infty$

B. Teorema Misalkan (x_n) dan (y_n) dua barisan bilangan real dan misalkan

$$xn \leq yn \text{ untuk setiap } n \in N.$$

Jika lim (xn) = $+\infty$ maka lim (yn) = $+\infty$

Jika lim (yn) = $-\infty$ maka lim (xn) = $-\infty$

C. Teorema misalkan (x_n) dan (y_n) menjadi dua barisan bilangan real positif dan misalkan bahwa untuk beberapa $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, kita dapat

$$\text{Lim } (x_n/y_n) = L$$

Jika $\lim (x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika $\lim (y_n) = +\infty$

Contoh Soal

1. Akan dibuktikan jika $\lim (x_n) = +\infty$, maka $\lim (y_n) = +\infty$

   Ambil sebarang $\alpha > 0$

   Karena $\lim (x_n) = +\infty$, maka terdapat $K(\alpha) \in N$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq K(\alpha)$ berlaku $xn > \alpha$

   Akibatnya, untuk semua $n > K(\alpha)$ berlaku $(y_n) \geq x_n > \alpha$

   Jadi, $\lim (y_n) = +\infty$

2. Akan dibuktikan jika lim (xn) = $+\infty$, maka lim (yn) = $+\infty$

   Ambil sebarang $\beta < 0$

Karena lim (yn) = - ∞, maka terdapat K (β) ∈ N sedemikian hingga untuk semua n ≥

K (β) berlaku yn < β

Akibatnya, untuk semua n ≥ K (β) berlaku xn ≤ yn < (β

Jadi, lim (x_n) = - ∞

3. Diketahui lim $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L$, artinya terdapat K ∈ N sedemikian sehingga untuk setiap n > K berlaku

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L$$

Oleh karena itu, diperoleh $\left(\frac{1}{2}L\right) y_n < x_n < \left(\frac{3}{2}L\right) y_n$untuk semua n ≥ K

Latihan Soal

1. Tunjukan bahwa jika (xn) adalah barisan yang tak terbatas, maka terdapat subbarisan divergen sejati
2. Buktikan untuk xn > 0, ∀ n ∈ N, lim (xn) = 0 jika dan hanya jika lim $\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$
3. Apakah barisan (n sin n) adalah divergen sejati?
4. Misalkan (xn) divergen sejati dan misalkan yn sedemikian hingga lim (xnyn) ada di dalam R. Tunjukkan bahwa (yn) konvergen ke 0
5. Tunjukan bahwa jika lim $\left(\frac{a_n}{n}\right) = L$, dimana L= 0 dan lim $(a_n) = +\infty$