KIREINARA

Dr. Khoerul Umam, M.Pd

Matematika Diskrit

Edisi Revisi

2020

Matematika Diskrit

Edisi Revisi

Oleh: Dr. Khoerul Umam, M.Pd.

Cetakan Pertama, September 2020 M. / Muharram 1442 H.

Diterbitkan oleh:

ISBN: 978-602-71744-4-3

CV. Kireinara
Jl. Sidorukun VIII/04, Kertosono, Sidayu, Gresik, Jawa Timur
Telp: 081 357 811800 | WA/SMS: 081 357 811800
Email: muhammadinstitute@gmail.com

Editor: Arul Chairullah
Desain Cover: Ahmad Suhaimi
Penata Letak: Anisatun Nur Laili

Kata Pengantar

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena hanya atas anugerahNya laporan penulisan buku Ajar Matematika Diskrit dapat terselesaikan walaupun masih banyak sekali kekurangan yang harus dipenuhi oleh penulis. .

Buku bahan Ajar Matematika Diskrit Edisi Revisi ini saya tulis disela-sela kesibukan mengajar di Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA, Jakarta. Hal yang menarik pada saat menuliskan buku ini adalah bagaimana menggambarkan masalah–masalah yang berkaitan langsung dengan kehidupan nyata sehingga pada saat membaca buku ini, anda akan merasa betapa matematika diskrit itu begitu dekat dalam kehidupan kita. Kita hanya tidak menyadari bahwa fenomena–fenomena dalam kehidupan dan lingkuangan kita ternyata dekat kaitannya dengan berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Pada buku ini, penulis juga mengajak anda untuk mengetahui beberapa website dan program komputer yang mungkin dibahas secara praktis sehingga buku ini tidak hanya cocok untuk kalangan mahasiswa tetapi juga para programmer yang mungkin membutuhkan beberapa pendalaman ilmu logika pada saat pembuatan pemprograman. Meluangkan waktu untuk menulis merupakan suatu hal baru saya lakukan dalam kehidupan.

Saya sangat menyadari background saya sebagai magister pendidikan tentunya belum menarik beberapa kalangan pembaca namun mudah–mudahan ini dapat membantu para pembaca memahami ilmu matematika diskrit secara lebih komprehensif di kemudian hari.

Jakarta, 12 September 2020

Dr. Khoerul Umam, M.Pd

DAFTAR ISI

BAB I LOGIKA

Logika merupakan pelajaran tentang penalaran. Pelajaran logika di fokuskan pada hubungan pernyataan – penyataan. Logika mengajarkan bagaimana manusia menggunakan dan mengolah kalimat-kalimat menjadi lebih logis dan dapat mudah dimengerti oleh banyak kalangan. Logika mengajarkan secara langsung bagaimana menata dan mengelola akal manusia. Logika mengajarkan kepada kita tentang bagaimana bernalar dengan menggunakan kalimat-kalimat pendukung. Contoh pernyataan:

Semua anak sekolah memakai rok

Setiap pemakai rok adalah anak perempuan

Jadi, semua anak sekolah adalah anak perempuan

1.1 LOGIKA PROPOSISI

Proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah, tapi tidak dapat sekaligus keduanya. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat di sebut nilai kebenaran.

CONTOH :

- Setelah hari sabtu adalah hari minggu
- Surabaya adalah ibukota Indonesia
- Hari ini hari apa?
- Silahkan keluar ruangan

KESIMPULAN :

- Kalimat pertama dan kedua adalah kalimat yang bernilai benar dan salah. Dengan kata lain statemen pertama dan kedua dapat di beri nilai kebenaran.
- Kalimat ketiga dan keempat adalah kalimat yang tidak dapat di tetapkan sebagai benar atau salah, atau statement tersebut tidak dapat diberi nilai kebenaran.

Jika statemen yang tidak dapat di tetapkan benar atau salah tapi dengan cara tertentu dapat di ubah menjadi statemen benar atau salah maka statemen tersebut di namakan sebagai Kalimat Terbuka. Kalimat terbuka juga kadang disebut fungsi proposisi.

CONTOH 1 :

Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan berikut:

a) Hari ini Jakarta banjir.

b) Kambing bisa terbang.

c) Didi anak bodoh

d) Siswa-siswi SMANSA memakai baju batik pada hari Rabu.

PEMBAHASAN

a) Tidak benar bahwa hari ini Jakarta banjir.

b) Tidak benar bahwa kambing bisa terbang.

c) Tidak benar bahwa Didi anak bodoh

d) Tidak benar bahwa siswa-siswi SMANSA memakai baju batik pada hari Rabu.

Atau boleh juga dengan format berikut:

a) Hari ini Jakarta tidak banjir.

b) Kambing tidak bisa terbang.

c) Didi bukan anak bodoh

d) Siswa-siswi SMANSA tidak memakai baju batik pada hari Rabu.

CONTOH. 2:

Tentukan negasi (ingkaran) dari pernyataan-pernyataan berikut:

a) p : Semua dokter memakai baju putih saat bekerja.

b) p : Semua jenis burung bisa terbang

c) p : Semua anak mengikuti ujian fisika hari ini.

PEMBAHASAN

Pernyataan yang memuat kata "Semua" atau "Setiap" negasinya memuat kata "Beberapa" atau "Ada" seperti berikut:

a) ~p : Ada dokter tidak memakai baju putih saat bekerja.

b) ~p : Beberapa jenis burung tidak bisa terbang

c) ~p : Beberapa anak tidak mengikuti ujian fisika hari ini.

CONTOH. 3:

Ingkaran dari pernyataan “Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap” adalah....

A. Semua bilangan prima adalah bilangan genap.

B. Semua bilangan prima bukan bilangan genap.

C. Beberapa bilangan prima bukan bilangan genap.

D. Beberpa bilangan genap bukan bilangan prima.

E. Beberapa bilangan genap adalah bilangan prima.

(Soal UN Matematika Tahun 2008 P12)

PEMBAHASAN

p : Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap

~p : Semua bilangan prima bukan bilangan genap

CONTOH 4:

Tentukan pernyataan majemuk hasil penggabungan pasangan-pasangan pernyataan berikut dengan menggunakan operasi konjungsi (DAN):

a) p : Hari ini Jakarta hujan

q : Hari ini Jakarta banjir

b) p : Iwan memakai topi

q : Iwan memakai dasi

c) p : Mahesa anak jenius.

q : Mahesa anak pemalas.

PEMBAHASAN

a) p : Hari ini Jakarta hujan

q : Hari ini Jakarta banjir

$p \wedge q$: Hari ini Jakarta hujan dan banjir

b) p : Iwan memakai topi

q : Iwan memakai dasi

$p \wedge q$: Iwan memakai topi dan dasi

c) p : Mahesa anak jenius.

q : Mahesa anak pemalas.

$p \wedge q$: Mahesa anak jenius tetapi pemalas

Kata "dan" bisa diganti dengan "tetapi", "walaupun", "meskipun" selaraskan dengan pernyataan. Kalimat terbuka pertama dapat di ubah menjadi kalimat benar atau salah jika variable Negara digantikan dengan nama Negara tertentu. Kalimat terbuka kedua di ubah menjadi benar atau salah dengan mengganti nilai X dengan nilai tertentu.

1.2 OPERASI PADA PROPOSISI

Satu atau lebih proposisi dapat di operasikan membentuk proposisi baru dengan beberapa operasi logika.

1. Negasi (~)

Negasi dari suatu prpposisi p adalah proposisi yang memiliki nilai kebenaran Kebalikan (ingkaran) dari nilai kebenaran proposisi p. negasi p dinotasikan sebagai : ~ *p*

Tabel Kebenaran

p	~*p*
T	F
F	T

T = True

F = False

2. Konjungsi (^)

Jika ada proposisi *p* dan *q* maka konjungsi (di baca “and”).

Tabel kebenaran

p	*q*	*p*^*q*
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. Disjungsi (∨)

Jika ada prposisi *p* dan *q* maka konjungsi (dibaca "Atau").

Tabel Kebenaran

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. Exclusive Or (⊕)

Jika ada proposisi p dan q maka exclusive or (XOR).

Tabel Kebenaran

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Catatan : untuk membedakan pada XOR hanya jika salah satu bernilai True maka kesimulan TRUE.

5. Implikasi (→)

Jika ada proposisi *p* dan *q* maka implikasi (dibaca jika *p* maka *q).*

Tabel Kebenaran

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T

T	F	F
F	T	T
F	F	F

Keterangan :

Dalam implikasi $p \rightarrow q$ maka :

p disebut hipotesis/antesede/premis

q disebut konklusi/kesimpulan

Dalam Implikasi : $p \rightarrow q$ maka baik *p* maupun *q* keduanya adalah proposisi yang dapat bernilai benar atau salah.

Catatan :

- *p*=”kamu belajar”, *q*=”kamu lulus ujian”. Disini terlihat hubungan kasualitas.
- *p*=”1+1=2”, *q*=”Jakarta ibukota Indonesia”

Kalimat tersebut tidak logis tetapi dari sisi operasi implikasi

kalimat tersbut masih dapat diterima.

6. Ekivalen Proposisi Majemuk

Proposisi-proposisi tunggal dapat digabung menjadi proposisi gabungan disebut COMPOUND PROPOSITION (Komposisi Majemuk). Komposisi majemuk ini dapat bernilai selalu benar atau selalu salah. Tautology : Komposisi majemuk yang bernilai selalu benar, misal : $p \vee \sim p$ Contradiction : Komposisi majemuk yang bernilai selalu salah, misal : $p \wedge \sim p$

Tabel Kebenaran

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	T	F

F	T	T	F

EKIVALEN (⇔)

Proposisi majemuk dinyatakan sebagai Ekivalen secara logika jika proposisi tersebut memiliki tabel kebenaran yang sama.

CONTOH :

Ujilah Ekivalen ini benar.

$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Jawab :

Langkah 1 :

Buat dua kolom tabel kebenaran *p* dan *q* .

p	*q*
T	T
T	F
F	T
F	F

Langkah:

Tambahkan satu klom dan cari kebenaran $p \vee q$.

p	*q*	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Langkah 3:

Tambahkan satu kolom dan cari kebenaran ~($p \vee q$). Dengan membalik saja.

p	q	$p \vee$q	~ ($p \vee$q)
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

Langkah 4 :

Tambahkan dua kolom untuk ~p dan kolom ~q. isi kebenaranya.

p	q	$p \vee$q	~ ($p \vee$q)	~p	~q
T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T

Langkah 5 :

Tambahkan satu kolom yaitu kolom : ~p^~q

p	q	$p \vee$q	~ ($p \vee$q)	~p	~q	~ (p^q)
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F

F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Kesimpulan : pada kolom $\sim(p \vee q)$ dan kolom $\sim p \wedge \sim q$ memiliki kebenaran yang sama, jadi benar ekivalen.

1.3 HUKUM - HUKUM LOGIKA PROPOSISI

Hukum Identitas

$p \vee F \Leftrightarrow p$

$P \wedge T \Leftrightarrow p$

Hukum Null/dominasi

$p \wedge F \Leftrightarrow F$

$p \vee T \Leftrightarrow T$

Hukum Negasi

$P \vee \sim p \Leftrightarrow T$

$P \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

Hukum Idempoten

$P \vee p \Leftrightarrow p$

$P \wedge p \Leftrightarrow p$

Hukum Involusi (Negasi Ganda)

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

Hukum Penyerapan (arbsorbsi)

$p \vee (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p$

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Hukum Komutatif

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Hukum Asosiatif

$p \ (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

Hukum Distributif

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Hukum De Morgan

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

1.4 VARIAN PROPOSISI BERSYARAT

Ada tiga varian bersyarat yaitu konvers, invers, dan kontraposisi dari asal $p \rightarrow q$.

Konvers (kebalikan) : $q \rightarrow p$

Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

Tabel Kebenaran

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

BIKONDISIONAL (Bi-implikasi)

Bikondisional adalah proposisi majemuk "p jika hanya jika q" dan di lambangkan dengan $p \leftrightarrow q$

Table kebenaran

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

INFERSE

Inferse adalah proses penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi.

Modus Ponen atau Law Of Detachment

$p \to q$

p

Kesimpulan "q"

Modus ponen menyatakan bahwa jika hipotesis p dan implikasi $p \to q$ benar, maka konklusi q benar.

Modus Tollen

$p \to q$

$\sim q$

Kesimpulan "$\sim p$"

Silogisme Hipotesis

$p \to q$

$q \to r$

Kesimpulan "$p \to r$"

Silogisme Disjungtif

$p \vee q$

$\sim p$

Kesimpulan "q"

Konjungsi

p

q

Kesimpulan "$p \wedge q$"

Simplifikasi

$p \wedge q$

Kesimpulan "p"

Penjumlahan

p

Kesimpulan "$p \vee q$"

LATIHAN LOGIKA MATEMATIKA

Pilihlah jawaban yang menurutmu paling benar.

1) Diketahui pernyataan :
   - Jika hari panas, maka Ani memakai topi.
   - Ani tidak memakai topi atau ia memakai payung.
   - Ani tidak memakai payung.

Kesimpulan yang sah adalah...
A. Hari panas.
B. Hari tidak panas.
C. Ani memakai topi.
D. Hari panas dan Ani memakai topi.
E. Hari tidak panas dan Ani memakai topi.

2) Ingkaran dari pernyataan "Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap" adalah....
A. Semua bilangan prima adalah bilangan genap.
B. Semua bilangan prima bukan bilangan genap.
C. Beberapa bilangan prima bukan bilangan genap.
D. Beberpa bilangan genap bukan bilangan prima.
E. Beberapa bilangan genap adalah bilangan prima.

3) Diketahui premis-premis
   - Jika Badu rajin belajar dan patuh pada orang tua, maka Ayah membelikan bola basket.
   - Ayah tidak membelikan bola basket.

Kesimpulan yang sah adalah....
A. Badu rajin belajar dan Badu patuh pada orang tua.
B. Badu tidak rajin belajar dan Badu tidak patuh pada orang tua.
C. Badu tidak rajin belajar atau Badu tidak patuh pada orang tua.
D. Badu tidak rajin belajar dan Badu patuh pada orang tua.
E. Badu rajin belajar atau Badu tidak patuh pada orang tua.

4)Perhatikan premis-premis berikut!
1. Jika saya giat belajar maka saya bisa meraih juara.
2. Jika saya bisa meraih juara maka saya boleh ikut bertanding.

Ingkaran dari kesimpulan kedua premis di atas adalah...
A. Saya giat belajar dan saya tidak boleh ikut bertanding.
B. Saya giat belajar atau saya tidak boleh ikut bertanding.
C. Saya giat belajar maka saya bisa meraih juara.
D. Saya giat belajar dan saya boleh ikut bertanding.
E. Saya ikut bertanding maka saya giat belajar.

5)Diketahui premis-premis berikut!

- Jika sebuah segitiga siku-siku, maka salah satu sudutnya 90°
- Jika salah satu sudut segitiga 90°, maka berlaku theorema Pythagoras.

Ingkaran dari kesimpulan yang sah pada premis-premis di atas adalah....
A. Jika sebuah segitiga siku-siku, maka berlaku theorema Pythagoras
B. Jika sebuah segitiga bukan siku-siku, maka berlaku theorema Pythagoras
C. Sebuah segitiga siku-siku atau tidak berlaku theorema Pythagoras
D. Sebuah segitiga siku-siku dan tidak berlaku theorema Pythagoras
E. Sebuah segitiga siku-siku dan berlaku theorema Pythagoras

6) Perhatikan premis-premis berikut ini!
i. Jika Adi murid rajin, maka Adi murid pandai
ii. Jika Adi murid pandai, maka ia lulus ujian
Ingkaran dari kesimpulan di atas adalah....
A. Jika Adi murid rajin, maka ia tidak lulus ujian
B. Adi murid rajin dan ia tidak lulus ujian
C. Adi bukan murid rajin atau ia lulus ujian
D. Jika Adi bukan murid rajin, maka ia tidak lulus ujian
E. Jika Adi murid rajin, maka ia lulus ujian

7) Diketahui premis-premis
i. Jika hari hujan, maka ibu memakai payung
ii. Ibu tidak memakai payung
Penarikan kesimpulan yang sah dari premis-premis tersebut adalah….
A. Hari tidak hujan
B. Hari hujan
C. Ibu memakai payung
D. Hari hujan dan Ibu memakai payung
E. Hari tidak hujan dan Ibu memakai payung

8) UN Matematika IPA 2012 C89
Diketahui premis-premis sebagai berikut:
Premis 1: Jika hari ini hujan deras, maka Bona tidak keluar rumah.
Premis 2: Bona keluar rumah.

Kesimpulan yang sah dari premis-premis tersebut adalah….
A. Hari ini hujan deras.
B. Hari ini hujan tidak deras.
C. Hari ini hujan tidak deras atau Bona tidak keluar rumah.
D. Hari ini tidak hujan dan Bona tidak keluar rumah.
E. Hari ini hujan deras atau Bona tidak keluar rumah.

9) Lngkaran pernyataan “Jika semua anggota keluarga pergi, maka semua pintu rumah dikunci rapat” adalah….

A. Jika ada anggota keluarga yang tidak pergi maka ada pintu rumah yang tidak dikunci rapat.
B. Jika ada pintu rumah yang tidak dikunci rapat maka ada anggota keluarga yang tidak pergi.
C. Jika semua pintu rumah ditutup rapat maka semua anggota keluarga pergi.
D. Semua anggota keluarga pergi dan ada pintu rumah yang tidak dikunci rapat.
E. Semua pintu rumah tidak dikunci rapat dan ada anggota keluarga yang tidak pergi.

10) Diketahui premis berikut:

Premis 1 : Jika Nia duduk di kelas XII-IPA maka ia harus masuk sekolah dipagi hari.
Premis 2 : Nia tidak masuk sekolah di pagi hari atau bangun tidur lebih awal.
Premis 3 : Nia tidak bangun tidur lebih awal.

Kesimpulan yang ada dari pernyataan-pernyataan tersebut adalah…

A. Nia duduk di kelas XII-IPA.
B. Nia tidak duduk di kelas XII-IPA.
C. Nia duduk di kelas XII-IPA dan bangun tidur lebih awal.
D. Jika Nia duduk di kelas XII-IPA maka ia tidak bangun tidur lebih awal.
E. Jika Nia duduk di kelas XII-IPA maka ia harus bangun tidur lebih awal.

11) Pernyataan yang setara dengan pernyataan “Jika pemimpin jujur maka rakyat tentram” adalah…
A. Jika rakyat tentram maka pemimpin jujur.
B. Jika rakyat tidak tentram maka pemimpin tidak jujur.
C. Jika rakyat tidak tentram maka pemimpin jujur.
D. Pemimpin jujur atau rakyat tentram.
E. Pemimpin jujur atau rakyat tidak tentram.

12) Diketahui premis-premis berikut:

Premis 1: Jika subsidi BBM dihentikan, maka harga BBM naik.
Premis 2: Harga BBM tidak naik atau rakyat resah.
Premis 3: Rakyat tidak resah.

Kesimpulan yang sah dari ketiga premis tersebut adalah….
A. Harga BBM naik.
B. Subsidi BBM dihentikan.
C. Subsidi BBM tidak dihentikan.
D. Subsidi BBM dihentikan dan rakyat resah.
E. Harga BBM tidak naik tetapi rakyat resah.

13) Pernyataan yang setara dengan “Jika semua preman dtangkap, maka masyarakat merasa tentram” adalah….

A. Jika ada preman yang tidak ditangkap, maka masyarakat tidak merasa tentram.
B. Jika semua preman tidak ditangkap, maka ada masyarakat tidak merasa tentram.
C. Jika masyarakat merasa tentram, maka semua preman sudah ditangkap.
D. Jika masyarakat merasa tentram, maka ada preman yang sudah ditangkap.
E. Jika masyarakat tidak merasa tentram, maka ada preman yang tidak ditangkap.

14. Diketahui premis-premis berikut:

i. Saya bermain atau saya tidak gagal dalam ujian
ii. Saya gagal dalam ujian

Kesimpulan yang sah dari premis-premis tersebut adalah....
A. Saya tidak bermain dan saya gagal dalam ujian.
B. Jika saya bermain, maka saya tidak gagal dalam ujian.
C. Saya bermain.
D. Saya belajar.
E. Saya tidak bermain.

15. Pernyataan yang setara dengan pernyataan:"Jika semua sekolah menyelenggarakan upacara hari senin maka semua siswa lebih mencinai tanah airnya," adalah....

A. Beberapa sekolah tidak menyelenggarakan upacara hari senin datau semua siswa lebih mencintai tanah airnya.
B. Ada siswa tidak mencintai tanah airnya dan ada sekolah yang tidak menyelenggarakan upacara hari senin.
C. Ada sekolah menyelenggarakan upacara hari senin dan ada siswa yang lebih mencintai tanah airnya.
D. Semua siswa mencintai tanah airnya dan semua sekolah menyelenggarakan upacara hari senin.
E. Semua siswa tidak mencintai tanah airnya atau semua sekolah tidak menyelenggarakan upacara pada hari senin.

BAB II METODE FUNDAMENTAL PENCACAHAN

Seandainya barcode suatu barang terdiri dari enam, tujuh, atau delapan karakter. Setiap karakter barcode tersebut harus terdiri dari huruf, dan angka. Setiap barcode harus memiliki minimal satu huruf capital. Berapa banyak barcode barang yang dapat dibentuk yang dapat dibuat? Cara untuk mendapatkan jawaban tersebut sangat bervariatif.

9 – 194 – 032142 - 09

Barcode pada barang

Kode keamaan Chapca

Konsep dasar dari permutasi dan kombinasi, serta perhitungan atau numerasi (pencacahan) menyangkut permutasi maupun kombinasi. Kita awali bab ini dengan dua prinsip**.**

2.1 Prinsip Dasar dalam Pencacahan

Terdapat dua prinsip atau aturan utama dalam menentukan banyaknya sesuatu (numerasi) yaitu Aturan Perkalian dan Aturan Penambahan. Akan dibahas secara lebih rinci ;

2.2 ATURAN PERKALIAN

Secara khusus aturan perkalian dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara, dan setiap kejadian pertama diikuti oleh kejadian kedua yang terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama dan KEJADIAN kedua tersebut secara bersama-sama terjadi dalam (m x n) cara.

CONTOH 1.1.1:

Berapakah banyaknya kejadian yang mungkin muncul jika dua dadu dilempar secara bersama sebanyak satu kali lemparan?

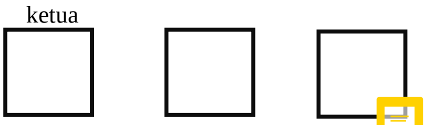
Penyelesaian:

Dadu pertama dapat muncul dalam m = 6 cara yang berbeda dan untuk setiap kejadian yang pertama akan diikuti oleh kejadian dadu kedua yang dapat muncul dalam n = 6 cara yang berbeda, sehingga kedua dadu yang dilembar secara bersama dapat muncul dalam m *x* n = 6 *x* 6 = 36 cara yang berbeda.

CONTOH 1.1.2:

Dari 20 siswa SMA Muhammadiyah 3 Jakarta akan dibentuk sebuah kepengurusan organisasi yang terdiri dari satu ketua, dan satu wakil ketua. Ada berapa cara yang mungkin dapat dilakukan untuk membentuk suatu kepengurusan organisasi?

PENYELESAIAN:



Untuk memilih seorang ketua, terdapat m = 20 cara yang mungkin berbeda, karena terdapat 20 orang yang ada. Selanjutnya untuk memilih seorang wakil ketua, terdapat n = 9 cara yang berbeda, karena hanya terdapat 9 orang yang tersisa. Dengan demikian, terdapat m x n x o = 20 x 19 x 18 = 90 cara yang berbeda untuk membentuk kepengurusan sekolah.

CONTOH 1.1.3:

Berapakah banyaknya kejadian yang mungkin muncul jika dua koin dilempar secara bersama sebanyak satu kali lemparan?

Penyelesaian:

Dadu pertama dapat muncul dalam m = 6 cara yang berbeda dan untuk setiap kejadian yang pertama akan diikuti oleh kejadian dadu kedua yang dapat muncul dalam n = 6 cara yang berbeda, sehingga kedua dadu yang dilembar secara bersama dapat muncul dalam m *x* n = 6 *x* 6 = 36 cara yang berbeda.

CONTOH 1.1.4:

Berapakah banyaknya kejadian yang mungkin muncul jika dua kartu dilempar secara bersama sebanyak satu kali lemparan?

Penyelesaian:

Dadu pertama dapat muncul dalam m = 6 cara yang berbeda dan untuk setiap kejadian yang pertama akan diikuti oleh kejadian dadu kedua yang dapat muncul dalam n = 6 cara yang berbeda, sehingga kedua dadu yang dilembar secara bersama dapat muncul dalam m *x* n = 6 *x* 6 = 36 cara yang berbeda.

CONTOH 1.1.5:

Berapakah banyaknya kejadian yang mungkin muncul jika dua kartu dilempar secara bersama sebanyak satu kali lemparan?

PENYELESAIAN:

Dadu pertama dapat muncul dalam m = 6 cara yang berbeda dan untuk setiap kejadian yang pertama akan diikuti oleh kejadian dadu kedua yang dapat muncul dalam n = 6 cara yang berbeda, sehingga kedua dadu yang dilembar secara bersama dapat muncul dalam m *x* n = 6 *x* 6 = 36 cara yang berbeda.

ATURAN MULTIPLIKASI dapat diperluas sebagai berikut.

Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara, dan setiap kejadian pertama diikuti oleh kejadian kedua yang terjadi dalam n_2 *cara, dan setiap kejadian kedua diikuti oleh kejadian ketiga yang terjadi dalam* n_3 *car, dan seterusny, dan setiap kejadian ke-(p-1) diikuti oleh kejadian ke-p yang terjadi dalam* n_p *cara, makakejadian pertama, kedua, ketiga, ... , ke-p secara bersama-sama terjadi dalam* $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$ *cara.*

CONTOH 1.1.6:

Dari 10 orang mahasiswa, akan dibentuk sebuah kepengurusan yang terdiri dari tiga orang berbeda yaitu satu ketua, satu sekertaris, dan satu bendahara. Ada berapa kepengurusan yang mungkin terbentuk?

Penyelesaian:

Terdapat 10 cara untuk memilih ketua, diikuti oleh 9 cara untuk memilih sekertaris, dan diikuti 8 cara untuk memilih bendahara. Dengan Aturan Perkalian, terdapat 10 x 9 x 8 = 720 kepengurusan yang mungkin terbentuk.

CONTOH 1.1.7:

Sebuah bilangan lima-angka dibentuk dari angka-angka berikut “1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”, “7”, “8”, “9”. Berapakah banyaknya bilangan yang mungkin jika: (a) angka-angka dalam lambing bilangan tersebut tidak ada yang sama?; (b) angka-angka dalam lambing bilangan tersebut boleh sama?

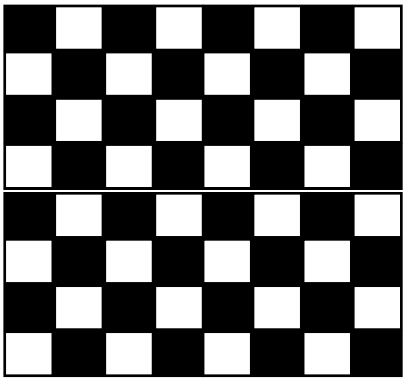
Penyelesaian:

Terdapat 9 cara memilih angka pertama, karena angka kedua tidak boleh sama dengan angka pertama maka ada 8 cara memilih angka kedua, karena angka ketiga tidak boleh sama dengan angka pertama dan angka kedua maka ada 7 cara memilih angka ketiga, dan seterusnya ada 6 cara memilih angka keempat dan 5 cara memilih angka kelima. Dengan aturan Perkalian, terdapat 9 x 8 x 7 x 6 x 5 = 15120 bilangan lima angka yang mungkin.

a. Terdapat 9 cara memilih angka pertama, karena angka kedua boleh sama dengan angka pertama maka ada 9 cara untuk memilih angka kedua, begitu juga terdapat 9 cara masing-masing untuk memilih angka ketiga, keempat dan kelima. Sehingga berdasarkan aturan perkalian, terdapat sebanyak 9 x 9 x 9 x 9 x 9 = 9^5 = 59049 bilangan lima angka yang mungkin.

   Contoh 1.1

   Sebuah papan catur. akan dipilih 2 papan catur

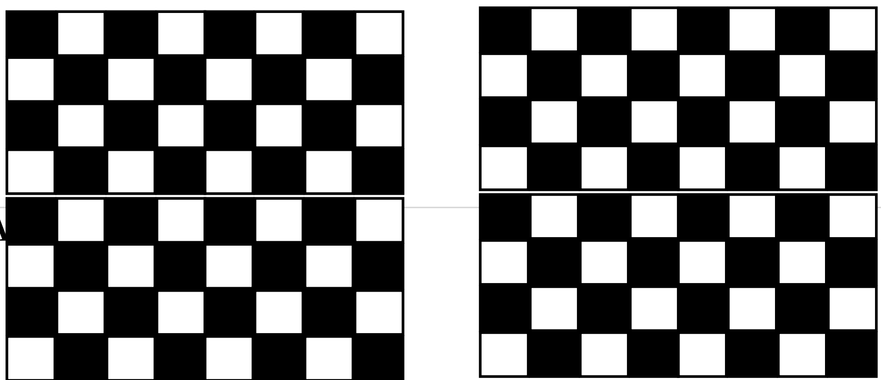


   Jawab :

SOAL ATURAN PERKALIAN

1. Pusat Ekonomi Mikro dan Industri Kreatif memiliki 25 lantai dan setiap lantai terdiri dari 14 kantor.
   a. Berapa banyak kantor yang ada dalam gedung tersebut?
   b. Berapa banyak kantor yang tersedia dalam gedung jika setiap 5 lantai terdapat aula besar untuk pertemuan?
2. Pusat pengembangan teknologi rekayasa memiliki 80 pegawai yang akan diperdayakan untuk membentuk tim investigasi tentang perubahan cuaca yang terdiri dari satu ketua, satu sekertaris, satu orang peneliti, dan satu orang teknisi IT.
   a. Berapa banyak cara yang untuk membentuk tim investigasi tersebut?
   b. Berapa banyak cara membentuk tim investigasi jika 40 orang pegawai laki – laki yang ada harus terpilih menjadi seorang ketua dan wakil?

3. Berapa banyak password suatu program yang memiliki 8 karakter dapat dibentuk jika jumlah karakter huruf dan angka yang berbeda harus sama?
4. Berapa banyak barcode yang dapat dibentuk jika barcode harus memiliki 4 angka yang berbeda, dan diakhiri dengan 2 huruf alphabet yang sama?
5. Pin telpon seluler memiliki 8 karakter yang terdiri dari huruf dan angka. Berapa banyak pin yang dapat dibentuk jika terdapat
    a. paling banyak 3 karakter huruf yang berbeda?
    b. paling sedikit 5 karakter angka?
    c. paling banyak 4 karakter angka yang berbeda?
6. Professor akan memberikan kesempatan kepada mahasiswa yang berprestasi untuk memilih 3 buku referensi. Berapa banyak yang dapat terjadi jumlah total buku referensi sebanyak 100 eksemplar?
7. Pusat penelitian Mikro Biologi Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA terdiri dari Gedung Riset yang memiliki 19 lantai, Gedung Laboratorium yang memiliki 10 lantai, dan Gedung Pusat Pengembangan nutrisi mikro biologi yang memiliki 24 lantai.
    a. Berapa banyak ruangan yang tersedia jika setiap lantai gedung – gedung tersebut memliki 5 ruangan?
    b. Berapa banyak ruangan yang bisa disediakan jika setiap lantai ganjil terdiri dari 6 ruangan dan setiap lantai genap terdiri dari 3 ruangan ?
8. Terdapat 18 Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan 345 Mahasiswa Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar.
    a. Berapa banyak cara untuk memilih dua representative sedemikian hingga satu representasi dari program studi matematika dan pendidikan guru sekolah dasar ?
    b. Berapa banyak cara untuk memilih satu representasi dari jurusan matematika atau satu representasi dari guru sekolah dasar ?
9. Tes ulangan harian yang terdiri dari 20 pertanyaan memiliki 5 jawaban pilihan untuk setiap pertanyaan.
    a. Berapa banyak cara yang untuk menyelesaikan ulangan tersebut jika setiap pertanyaan harus dijawab oleh siswa?
    b. Berapa banyak cara yang untuk menyelesaikan ulangan tersebut jika siswa harus menjawab minimal 20 pertanyaan yang disediakan ?
10. Berapa banyak plat kendaraan roda empat yang dapat Polisi daerah Kota Bekasi buat jika plat tersebut diawali oleh huruf “B” lalu disusul dengan 3 digit angka yang berbeda, dan diakhiri oleh dua huruf alphabet?
11. Seorang pengusaha asal Bekasi akan memberikan barcode asesoris mobil yang bermotif batik dengan 7 angka yang berbeda. Berapa banyak barcode yang dapat dibentuk?



12. Jika terdapat 3 buah dadu. Berapakah cara untuk memilih angka 2?
    a. dapat dibagi 9?
    b. dapat dibagi 4?
    c. dapat dibagi 9 tapi tidak dibagi 7?
    d. dapat dibagi 4?
    e. dapat dibagi 9 tapi tidak dibagi 7?
13. Jika terdapat 3 buah dadu. Berapakah cara untuk memilih angka 2?
    a. dapat dibagi 9?
    b. dapat dibagi 4?
    c. dapat dibagi 9 tapi tidak dibagi 7?
    d. dapat dibagi 4?
    e. dapat dibagi 9 tapi tidak dibagi 7?
14. Berapa banyak plat kendaraan roda empat yang dapat Polisi daerah Kota Bekasi buat jika plat tersebut diawali oleh huruf “B” lalu disusul dengan 3 digit angka yang berbeda, dan diakhiri oleh dua huruf alphabet?
15. Seorang pengusaha asal Bekasi akan memberikan barcode asesoris mobil yang bermotif batik dengan 7 angka yang berbeda. Berapa banyak barcode yang dapat dibentuk?
16. Berapa banyak plat kendaraan roda empat yang dapat Polisi daerah Kota Bekasi buat jika plat tersebut diawali oleh huruf “B” lalu disusul dengan 3 digit angka yang berbeda, dan diakhiri oleh dua huruf alphabet?
17. Seorang pengusaha asal Bekasi akan memberikan barcode asesoris mobil yang bermotif batik dengan 7 angka yang berbeda. Berapa banyak barcode yang dapat dibentuk?
18. Jika terdapat 3 buah dadu. Berapakah cara untuk memilih angka 2?
19. Jika terdapat 3 buah dadu. Berapakah cara untuk memilih angka 2?
    a. dapat dibagi 9?
    b. dapat dibagi 4?
    c. dapat dibagi 9 tapi tidak dibagi 7?
    d. dapat dibagi 4?
    e. dapat dibagi 9 tapi tidak dibagi 7?
20. Jika terdapat 3 buah dadu. Berapakah cara untuk memilih angka 2?

2.3 ATURAN PENAMBAHAN

Secara khusus aturan penambahan (adisi) berbunyi sebagai berikut.

Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama atau kejadian kedua dapat terjadi dalam m + n cara.

Contoh 1.1.8 ;

Dalam percobaan melempar sebuah dadu, banyak sisi dadu bermata genap adalah m = 3 dan banyak sisi dadu bermata ganjil dan prima adalah n = 2, maka banyaknya sisi dadu bermata genap atau bermata ganjil prima adalah m + n = 3 + 2 = 5

Diatas meja terdapat 10 buku matematika berbeda dan 5 uku fisika berbeda. Maka terdapat 10 + 5 = 15 cara memilih satu buku matematika atau buku fisika.

Contoh 1.1.9 ;

Dalam percobaan melempar sebuah dadu, banyak sisi dadu bermata genap adalah m = 3 dan banyak sisi dadu bermata ganjil dan prima adalah n = 2, maka banyaknya sisi dadu bermata genap atau bermata ganjil prima adalah m + n = 3 + 2 = 5

Diatas meja terdapat 10 buku matematika berbeda dan 5 uku fisika berbeda. Maka terdapat 10 + 5 = 15 cara memilih satu buku matematika atau buku fisika.

Contoh 1.1.10 ;

Dalam percobaan melempar sebuah dadu, banyak sisi dadu bermata genap adalah m = 3 dan banyak sisi dadu bermata ganjil dan prima adalah n = 2, maka banyaknya sisi dadu bermata genap atau bermata ganjil prima adalah m + n = 3 + 2 = 5

Diatas meja terdapat 10 buku matematika berbeda dan 5 uku fisika berbeda. Maka terdapat 10 + 5 = 15 cara memilih satu buku matematika atau buku fisika.

Catatan : Secara umum Aturan Penambahan dapat ditulis sebagai berikut.

Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam n_1 cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n_2 cara, dan seterusnya, kejadian ke-p secara terpisah terjadi dalam n_p cara, maka kejadian pertama, atau kedua, ... , atau kejadian ke-p dapat terjadi dalam $n_1 + n_2 + ... + n_p$ cara.

LATIHAN 1

1. Seorang santri yang berprestasi tingkat Nasional mendapatkan kesempatan untuk memilih 4 bola undian sebagai hadiah. Jika dalam kotak undian tersebut terdapat 8 bola hijau, 9 bola putih, dan 10 bola merah. berapa banyak cara yang dapat digunakan oleh santri sedemikian hingga terdapat
   a. maksimal 3 bola merah?
   b. bola putih ?
   c. jumlah bola merah dan bola putih harus sama?
2. Pusat pengembangan teknologi rekayasa akan membentuk tim investigasi tentang perubahan cuaca kota yang terdiri dari . 24 lantai.
   a. Berapa banyak ruangan yang tersedia jika setiap lantai gedung – gedung tersebut memliki 5 ruangan?
   b. Berapa banyak ruangan yang bisa disediakan jika setiap lantai ganjil terdiri dari 6 ruangan dan setiap lantai genap terdiri dari 3 ruangan ?
3. Terdapat 18 Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan 345 Mahasiswa Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar.
   a. Berapa banyak cara untuk memilih dua representative sedemikian hingga satu representasi dari program studi matematika dan pendidikan guru sekolah dasar ?
   b. Berapa banyak cara untuk memilih satu representasi dari jurusan matematika atau satu representasi dari guru sekolah dasar ?
4. Sebuah tes ulangan pilihan ganda
5. Jika setiap gedung terdiri dari 8 ruangan dan terdiri dari 9 lantai. Berapakah banyaknya lantai gedung tersebut !
6. Polisi daerah kota Bekasi akan membuat Plat nomor motor dengan diawali huruf. Berapa banyak plat motor yang dapat dibentuk dari tersebut ?

2.4 PERMUTASI

Diberikan sebanyak n obyek berbeda.Sebuah permutasi-k dari n obyek tersebut adalah sebuah jajaran dari k obyek yang urutannya diperhatikan. Misalnya, diberikan tiga obyek berbeda, katakana a, b, dan c. jajaran seperti ab adalah sebuah permutasi-2 dari tiga obyek tersebut. Begitu juga jajaran seperti ba merupakan sebuah permutasi-2 dari tiga obyek tersebut. Jika pengulangan tidak diperkenankan, artinya obyek-obyek dalam jajaran tersebut tidak boleh sama, maka terdapat 6 permutasi-2 yang mungkin yaitu : ab, ac, ba, bc, ca, cb. Jika pengulangan diperbolehkan maka jajaran seperti aa juga merupakan sebuah permutasi-2 dari tiga obyek tersebut; begitu juga dengan bb dan cc. dengan demikian, jika pengulangan diperbolehkan, maka terdapat 9 permutasi-2 yang mungkin. Selanjutnya, banyaknya permutasi-k dari n obyek berbeda, tanpa pengulangan, disimbolkan dengan**P(n,k)**. sedangkan, **P*(n,k)** menyatakan banyaknya permutasi-k dari n obyek berbeda, dengan pengulangan. Dari uraian diatas diperoleh P(3,2) = 6 dan P*(3,2) = 9.

DEFINISI 1.1:

Jika suatu bilangan bulat $n \geq 0$, maka n! (dibaca "n factorial"), didefinisikan

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots 3.2.1$$

$$0\,! = 1$$

Dengan menggunakan aturan perkalian, kita buktikan teorema berikut. Dengan menggunakan aturan perkalian, kita buktikan teorema berikut. Dengan menggunakan aturan perkalian, kita buktikan teorema berikut. Dengan menggunakan aturan perkalian, kita buktikan teorema berikut.

Dengan menggunakan aturan perkalian, kita buktikan teorema berikut. Dengan menggunakan aturan perkalian, kita buktikan teorema berikut. Dengan menggunakan aturan perkalian, kita buktikan teorema berikut.

10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

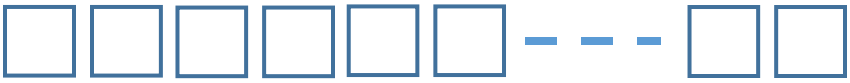
TEOREMA 1.1:

Jika n dan k dua bilangan bulat positif, maka

$$P^*(n,k) = n^k;\ \text{dan}\ P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!},\ \text{untuk}\ k \leq n.$$

BUKTI :

Misalkan O_1, O_2, O_3, … , On adalah n obyek berbeda. Objek – objek tersebut akan dijajarkan secara linear sebanyak ***k*** kotak dari ***n*** obyek yang tersedia.



Misalkan pengulangan tidak diperkenankan. Terdapat n cara memilih obyek pertama (mungkin O_1, atau mungkin O_2, dan seterusnya, mungkin O_n). Jika satu obyek telah terpilih dan diletakkan diposisi pertama dalam jajaran, maka ada (n-1) cara untuk memilih satu obyek untuk diletakkan pada posisi kedua dalam jajaran, karena obyek pada posisi kedua tidak boleh sama dengan obyek posisi pertama. Begitu juga terdapat (n-2) cara untuk memilih obyek yang tersisa untuk diletakkan pada posisi ketiga, dan seterusnya, akhirnya terdapat n-(k-1) cara memilih obyek tersisa untuk diletakkan pada posisi ke-k dalam jajaran. Berdasarkan aturan perkalian, diperoleh

$P(n,k) = n(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1)$

untuk menyederhanakan bentuk perkalian diatas. maka dapat dikalikan dengan $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots \big(n-(k-1)\big)(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Jika pengulangan diperkenankan, maka terdapat n cara memilih satu obyek untuk diletakkan pada setiap posisi dari k posisi dalam jajaran tersebut. Sehingga, berdasarkan aturan perkalian, banyaknya jajaran-k yang mungkin adalah

$P^*(n,k) = n \text{ x } n \text{ x } n \text{ x } \dots \text{ x } n$ (sebanyak k factor) = n^k

Dengan demikian teorema terbukti

Perhatikan bahwa, untuk k = n, sebagai akibat langsung dari teorema diatas, diperoleh

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} n! \, dan \, P*(n,n) = n^n$$

Contoh 1.4 :

a) Dari 10 mahasiswa akan dibentuk sebuah Tim beranggotakan 4 orang berbeda terdiri dari satu ketua, satu wakil ketua, satu sekertaris, dan satu bendahara. Ada berapa Tim yang mungkin terbentuk?

Penyelesaian:

Dalam hal ini urutan diperhatikan. Karena n = 10, k = 4, dan empat orang dalam tim berbeda, maka banyaknya Tim yang mungkin terbentuk adalah

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

b) Ada berapakah barisan binair 5-angka?

Penyelesaian:

Barisan binair dibentuk dari n = 2 angka berbeda yaitu “0” dan “1”. Karena barisan binair 5-angka, maka dalam hal ini k = 5. Selanjutnya, karena angka-angka dalam barisan tersebut tidak harus berbeda, maka banyaknya barisan binair yang dimaksud adalah P*(2,5) = 2^5 = 32.

Perhatikan bahwa dalam permutasi yang dibicarakn diatas, obyek-obyek dijajar pada satu garis.Permutasi yang demikian disebut ***permutasi linear***.Jika obyek-obyek tersebut dijajar melingkar (pada suatu lingkaran) dan arah melingkarnya diperhatikan, misalnya searah putaran jarum jam, maka permutasi yang demikian disebut ***permutasi siklik***. Misalkan tiga obyek 1, 2, dan 3 secara terurut dijajar melingkar menurut putaran jarum jam, maka akan diperoleh sebuah permutasi siklik. Selanjutnya permutasi siklik tersebut ditulis (123). Dua permutasi siklik dikatakan ekuivalen (sama) jika yang satu dapat diperoleh dari yang lain lewat putaran. Misalnya permutasi siklik (123) ekuivalen dengan permutasi siklik (231) dan (312).Jadi dari 3 buah permutasi linear 123, 231, dan 312 diperoleh hanya satu buah permutasi siklik (123). Begitu juga dari 3 permutasi linear 132, 321, dan 213 diperoleh hanya satu permutasi siklik yaitu (132) = (321) = (213). Dengan demikian terdapat dua buah permutasi-3 siklik dari tiga obyek 1, 2, dan 3 yaitu (123) dan (132). Mudah ditunjukkan bahwa terdapat hanya 6 buah permutasi-4 siklik dari empat obyek 1, 2, 3, dan 4, yaitu: (1234), (1243), (1324), (1342), (1432), dan (1423). Perhatikan bahwa dari setiap permutasi-4 siklik tersebut terdapat 4 permutasi linear.Sehingga seluruhnya terdapat 6 x 4 = 24 permutasi linear.Secara umum, jika pengulangan tidak diperkenankan, hubungan antara banyaknya permutasi siklik dan banyaknyapermutasi linear disajikan dalam teorema berikut.

TEOREMA 1.2:

Jika PS(n,k) menyatakan banyak permutasi-k siklik dari n obyek berbeda, maka

$$PS(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

Khususnya, PS(n,n) = (n-1)!

Pembuktian :

Karena dari setiap permutasi-k siklik terdapat k buah permutasi-k linear, maka berdasarkan aturan perkalian diperoleh
PS(n,k) x k = P(n,k), ekuivalen dengan

$$PS(n,k) \times k = \frac{P(n,k)}{k}$$

Berdasarkan Teorema 1.1 diperoleh

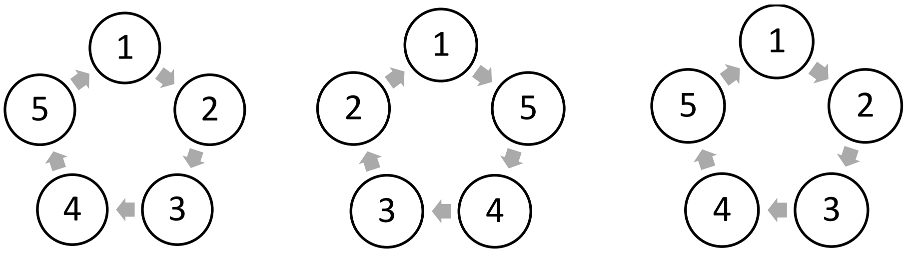
$$PS(n,k) = \frac{n!}{k(n-k)}$$

Jika k = n diperoleh

$$PS(n,n) = \frac{n!}{n.0!} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

Dengan demikian teorema terbukti.

CATATAN:
Jika arah putaran tidak dibedakan, artinya memutar searah ataupun berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam tidak dibedakan, maka permutasi siklik (12345) ekuivalen dengan permutasi siklik (15432), ditulis permutasi siklik [12345], seperti terlihat pada diagram berikut.



(12345) = (15432) → [12345]

Demikian juga, permutasi siklik (12453) ekuivalen dengan permutasi siklik (13542). Jika PS*(n,k) merupakan banyak permutasi-k siklik dari n obyek, tanpa memperhatikan arah putaran, maka

$$PS*(n,k) = \frac{PS(n,k)}{2} = \frac{n!}{2k(n-k)!}$$

Contoh 1.5 :

Dari seratus manik-manik berlabel 1, 2, 3, …, 30 akan dibuat sebuah kalung yang terdiri dari 25 manik-manik berbeda. Maka banyak kalung yang mungkin terbentuk adalah

$$PS*(30,25) = \frac{30!}{2(25)(30-25)!} = \frac{30!}{50(120)} = \frac{30!}{3600}$$

SOAL PERMUTASI

1. Tuliskanlah semua hasil permutasi dari { 1, 2, 3}
2. Tuliskanlah semua hasil permutasi dari { 1, 2, 3, 4}
3. Berapakah banyak permutasi yang dapat dibentuk dari himpunan {a,b,c,d,e,f}?
4. Berapakah banyak permutasi yang berakhiran huruf f dapat dibentuk dari himpunan {a,b,c,d,e,f,g,h}
5. Berapakah banyak permutasi yang dapat dibentuk dari himpunan {a,b,c,d,e,f}?
6. Berapakah banyak permutasi yang berakhiran huruf a dapat dibentuk dari himpunan {a,b,c,d,e,f,g,h}
7. Carilah nilai dari permutasi – permutasi berikut
    a. P (5,3)
    b. P (5,2)
    c. P (5,4)
    d. P (3,3)
    e. P (7,1)
    f. P (6,3)
    g. P (5,3)
    h. P (4,3)
    i. P (5,5)
    j. P (9,3)
    k. P (5,3)
    l. P (5,3)
    m. P (5,3)
    n. P (5,3)
    o. P (5,3)
8. Carilah nilai dari permutasi – permutasi berikut
    a. P (5,3)
    b. P (5,3)
    c. P (5,3)
    d. P (5,3)
    e. P (5,3)
    f. P (5,3)
    g. P (5,3)
    h. P (5,3)
    i. P (5,3)
    j. P (5,3)
    k. P (5,3)
    l. P (5,3)
    m. P (5,3)
    n. P (5,3)
    o. P (5,3)
9. Berapa banyak permutasi huruf ABCDEFGH yang dapat dibentuk sedemikian hingga mememiliki huruf
    a. String ABC
    b. String BCA, dan BAD
    c. String BCA, dan BAD
    d. String BCA, dan BAD
    e. String BCA, dan BAD
    f. String BCA, dan BAD
10. Berapa banyak permutasi huruf ABCDEFGH yang dapat dibentuk sedemikian hingga mememiliki huruf
    a. String ABC
    b. String BCA, dan BAD
    c. String BCA, dan BAD
    d. String BCA, dan BAD
    e. String BCA, dan BAD
    f. String BCA, dan BAD
11. dafa

1.3 KOMBINASI

Diberikan sebanyak n obyek berbeda.Sebuah kombinasi-k dari n obyek tersebut adalah sebuah jajaran dari k obyek yang urutannya tidak diperhatikan. Misalnya dari 4 obyek berbeda a, b, c, dan d, jika pengulangan tidak boleh diperbolehkan, dapat dibentuk sebanyak 4 kombinasi-3 yang berbeda yaitu : abc , abd, acd, dan bcd. Perhatikan kombinasi abc dan kombinasi bca dianggap sama karena dalam kombinasi urutan obyek tidak diperhatikan. Jika pengulangan diperbolehkan maka terdapat sebanyak 20 kombinasi-3 yang dapat dibentuk yaitu: abc, abd, acd, bcd, aab, aac, aad, aaa, bba, bbc, bbd, bbb, cca, ccb, ccd, ccc, dda, ddb, ddc, ddd. Banyaknya kombinasi-k dari n obyek berbeda disimbolkan dengan C(n,k), jika pengulangan tidak diperbolehkan; dan C*(n,k), jika pengulangan diperbolehkan. Dari uraian diatas diperoleh C(4,3) =4 dan C*(4,3) = 20

Teorema 1.2:
Misalkan n dan k bilangan bulat non negative dengan k ≤ n. Banyaknya kombinasi-k dari n obyek berbeda, tanpa pengulangan, adalah $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Karena untuk setiap kombinasi-k dari n obyek dapat dibentuk sebanyak P(k,k) permutasi-k dari n obyek, maka dari aturan perkalian diperoleh
P(k,k) C(n,k) = P(n,k).
Berdasarkan teorema 1.1 diperoleh

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k,k)} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

CONTOH 1.6:
Dari 10 mahasiswa akan dipilih 6 orang sebagai Tim bola-volly. Ada berapa Tim yang mungkin terbentuk?
Penyelesaian:

Karena dalam permainan Tim bola volly, urutan pemain tidak diperhatikan, maka persoalan tersebut terkait dengan persoalan kombinasi . dalam hal ini n=10 dan k=6, sehingga banyaknya Tim yang mungkin terbentuk adalah

$$C(10,6) = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210$$

CONTOH 1.6:

Sebuah kotak berisikan 5 bola merah dan 10 bola putih. Ada berapa cara mengambil 6 bola sedemikian hingga dari bola-bola yang terambil tersebut terdapat:

(a) Tepat 2 bola merah

(b) Paling banyak 2 bola merah

(c) Bola merah

PENYELESAIAN:

(a) Dari 6 bola yang terambil terdapat 2 bola merah dan 4 bola putih. Untuk mengambil 2 bola merah dari 5 bolamerah yang ada dalam kotak terdapat C(5,2)= $\frac{5!}{2!3!}=10$ cara dan untuk mengambil 4 bola putih dari 10 bola putih yang ada dalam kotak terdapat C(10,4)= $\frac{10!}{4!6!}=210$ cara . karena setiap mengambil 2 bola merah diikuti dengan pengambilan 4 bola putih, berdasarkan aturan perkalian, banyaknya cara yang dimaksud adalah C(5,2) x C(10,4)= 10 x 210 =2100.

(b) Untuk memeperoleh paling banyak 2 bola merah dari 6 bola yang diambil dari kotak terdapat tiga kemungkinan, yaitu: 2 bola merah dan 4 bola putih, atau 1bola merah dan 5 bola putih , atau 6 bola putih. Berdasarkan aturan perkalian untuk mengambil 2 bola merah dan 4 bola putih terdapat C(5,2) x C(10,5)=5 x 252 =1260 cara, untuk mengambil 6 bola putih terdapat C(10,6)=210 cara. Selanjutnya, berdasarkan aturan penambahan diperoleh, banyak cara yang dimaksud adalah 2100 + 1260 + 210 = 3570.

(c) Terdapat bola merah maksudnya dari bola yang diambil terdapat minimal 1 bola merah. Ini berarti banyaknya bola merah yang terambil mungkin 1,2,3, 4 atau 5. Seperti jawaban (b), menggunakan aturan perkalaian dan aturan penambahan, banyaknya cara yang dimaksud adalah C(5,1) x C(10,5) + C(5,2) x C(10,4) + C(5,3) + C(10,3) + C(5,4) x C(10,2) + C(5,5) x C(10,1) =5 x 252 + 10 x 120 + 1 x 10 =1260 + 1200 + 225 + 10 = 2695.

CATATAN : perhatikan bahwa C(n,k)= $\frac{n!}{k!(n-k)!}=$ C(n,n-k).

CONTOH 1.7:

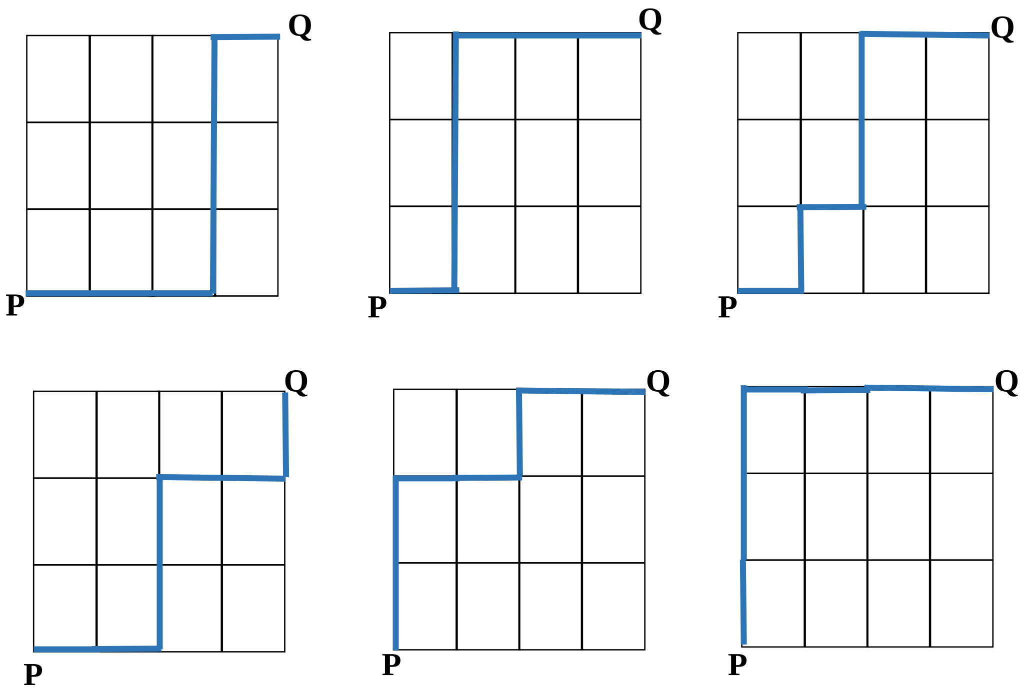
Ada berapa barisan binair 7 angka memuat angka “1” terdapat 4 buah?

Penyelesaian:

Perhatikan beberapa contoh barisan binair 7-angka yang dimaksud: 1111000,1110100,1100110,dll. Pikirkan 7 posisi dalam 1 baris untuk meletakkan angka-angka “0” dan “1”. Setiap dipilih empat posisi dari 7 posisi untuk meletakkan angka “1” diposisi tersebut dan angka-angka “0” di posisi yang lain, akan di peroleh sebuah barisan binair 7 angka yang memuat “1’ tepat 4. Jadi banyaknya barisan binair yang dimaksud sama dengan banyak cara memilih 4 posisi dari 7 posisi untuk meletakkan angka “1’’ , yaitu, C(7,4)=35. Atau bisa juga, sama dengan banyaknya cara memilih 3 posisi dari 7 posisi untuk meletakkan angka “0”, yaitu, C(7,3)=35.

2.5 BARISAN CATALAN

CATATAN : perhatikan “kisi-kisi” berukuran 3 x 4 berikut.



Jika kita ingin melintas dari titik P (pojok kiri bawah) ketitik Q (pojok kanan atas) dengan syarat hanya boleh bergerak kekanan (K) dan keatas (A).. salah satu lintasan yang mungkin diperlihatkan oleh lintasan-1. Lintasan ini dapat dinyatakan dengan barisan KKAKKAA (2 langkah ke kanan, dilanjutkan 1 langkah ke atas , dilanjutkan 2 langkah ke kanan, dan 2 langkah ke atas. Lintasan yang lain adalah lintasan-2 yang dapat dinyatakan dengan barisan AAKKKAK. Perhatikan bahwa dalam setiap barisan terdapat 4 K dan 3 A. Dari setiap barisan yang demikian, diperoleh sebuah lintasan dari P ke Q. Jadi banyaknya lintasan yang mungkin sama dengan banyaknya barisan binair 7 huruf yang memuat 4 huruf K dan 3 huruf A. Untuk mendapatkan banyaknya barisan yang demikian dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut. Hal tersebut dapat diperumum sebagai berikut. Diberikan kisi-kisi berukuran m x n. Jika, dalam melintas, pergerakan yang di perkenankan hanya kekanan (K) dan keatas (A), maka setiap lintasan dari titik pojok kiri bawah ke titik pojok kanan atas berkorespondensi dengan sebuah barisan binair (m+n) huruf dengan sebnayak m huruf A dan sebanyak n huruf K. Banyaknya barisan demikian adalah cara memilih m posisi dari m+n posisi untuk meletakkan huruf A dan sisanya n huruf K yaitu C(M+N,M) .boleh juga, banyaknya barisan demikian sama dengan banyak cara memilih n posisi dari m+n posisi untuk meletakkan huruf K yaitu C(m+n). Dengan demikian, banyaknya lintasan yang mungkin adalah

$$C(m+n,n)=C(m+n,m)=\frac{(m+n)!}{n!m!}.$$

2.6 BARISAN CATALAN

Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas

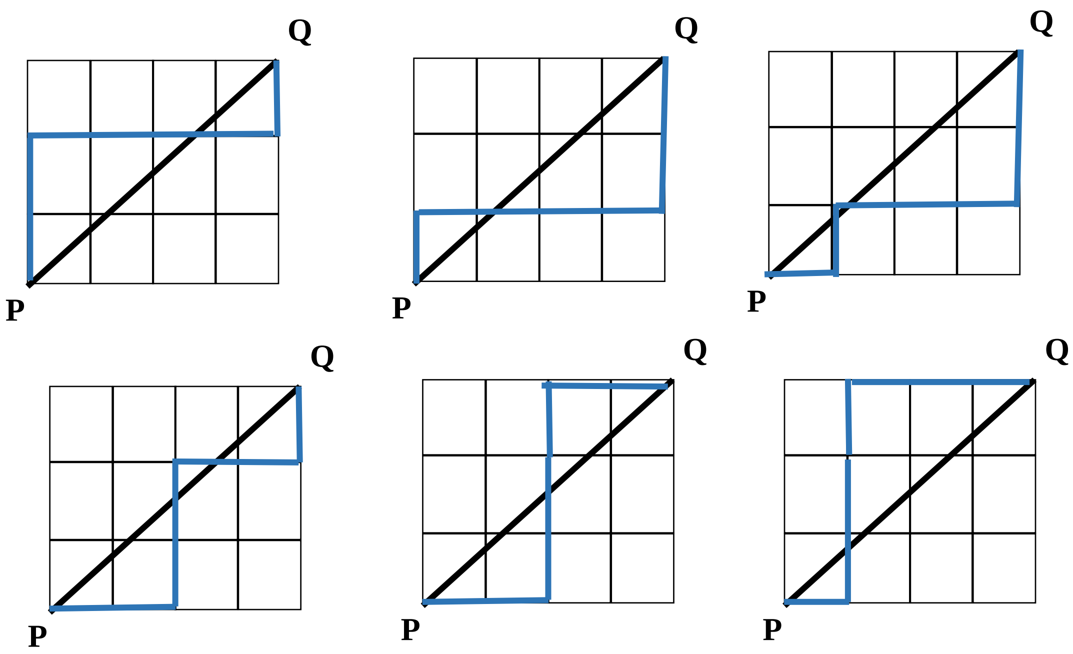
Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok kanan atas

CONTOH 1.8 :

Diberikan kisi-kisi berukuran n x n. Misalkan suatu partikel melintas dari pojok kiri bawah kepojok knan atas, arah pergerakan yang diperbolehkan hanya kekanan (K) dan ke atas (A). Suatu lintasan yang menyentuh atau dibawah diagonal utama dinamakan lintasan cantik, sedangkan lintasan yang melewati atau memotong diagonal utama disebut lintasan tak cantik. Ada berapa lintasan cantik yang mungkin?

PENYELESAIAN :

Lintasan L_1 pada kisi-kisi berukuran 4 x 4 berikut merupakan lintasan tak cantik. Lintasan tersebut berkorespondensi dengan barisan KAAKKKAA. Jika urutan melangkah, setelah satu langkah melewati diagonal utama, 'dipertukarkan' (K menjadi A dan A menjadi K)., maka akan diperoleh barisan baru yaitu KAAAAAKK, dan ternyata barisan ini berkorespondensi dengan lintasan L_1 pada kisi-kisi 5 x 3 seperti tampak pada gambar (b). Demikian pula halnya dengan lintasan tak cantik L_2 pada kisi-kisi 4 x 4 gambar (a) dapat direpresentasikan dengan barisan AAAKKAKK. Setelah urutan melangkah, setelah satu langkah melewati diagonal utama, 'dipertukarkan' diperoleh barisaan AKKAAKAA dan ini berkorespondensi dengan lintasan L_2 pada kisi-kisi 5 x 3 digambar (b).



Setiap lintasan tak cantik pada kisi-kisi 4 x 4 berkorespondensi dengan sebuah lintasan pada kisi-kisi 5 x 3. Hal ini dapat diperumum, bahwa setiap lintasan tak cantik pada kisi-kisi n x n berkorespndensi dengan sebuah lintasan dari pojok kiri bawah ke pojk kanan atas pada kisi-kisi (n+1) x (n-1). Sehingga banyaknya lintasan tak cantik pada kisi-kisi n x n sama dengan banyaknya lintasan dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi (n+1) x (n-1) yaitu:

$$\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1}$$

Banyaknya lintasan dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi n x n adalah $\binom{2n}{n}$

Sehingga banyaknya lintasan cantik pada kisi-kisi n x n adalah C_n dengan:

$$Cn = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{(2n)}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Misalnya, pada kisi-kisi 4 x 4 terdapat $C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = 14$

Lintasan cantik yaitu: KKKKAAAA, KKKAKAAA, KKKAAKAA, KKKAAAKA, KKAKKAAA, KKAKAKAA, KKAKAAKA, KKAAKKAA,KKAAKAKA, KAKKKAAA, KAKKAKAA, KAKKAAKA, KAKAKKAA, KAKAKAKA.

CATATAN:

Bilangan $Cn = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ disebut bilangan catalan sebagai penghormatan terhadap seorang matematikawan belgia bernama Eugene-Charles catalan (1814-1894) sebagai penemu formula tersebut. Publikasi catalan banyak dalam bidang kombinatorika, analisis, aljabar, peluang, geometri dan teori bilangan.

Teorema berikut terkait dengan kombinasi dimana suatu objek boleh muncul lebih dari satu kali dalam suatu kombinasi. Bukti teorema berikut sangat mudah jika digunakan fungsi pembangkit . untuk penjelasan secara kombinatorial, perhatika penjelasan berikut:

Pikirkan n objek yang berbeda dan misalkan obyek-obyek tersebut o1,o2,...,on. Diambil sebnayak k obyek dengan pengulangan diperbolehkan. Dari sebanyak k obyek yang terambil tersebut dapat dideskripsikan dengan mendaftar berapa obyek o1, berapa obyek o2, dan seterusnya. Sebagai contoh , untuk n=3 dan k=5, beberapa kemungkinannya adalah o1o1o1o2o3; o1o1o2o2o3;o1o1o3o3o3;o2o2o2o3o3;o1o1o1o1o1;o2o2o2o2o2;o3o3o3o3o3 kita dapat membedakan cara-cara ini dengan meletakkan sebanyak n-1=2 ‘garis-garis’ diantara obyek-obyek berbeda . jadi ketujuh kemungkinan tersebut, secra berurut-turrut dapat direpresentasikan sebagi berikut: ooo/o/o ; oo/oo/o; oo//ooo (karena tidak ada o2 dan o3); /ooooo/; dan //ooooo perhatikan dalam contoh ini terdapat 7 posisi yaitu 5 posisi untuk meletakkan obyek. Hal ini dapat dilakukan dengan C(7,2)=21 cara.

Secara umum terdapat k + n-1 posisi yaitu k posisi untuk obyek dan n-1 posisi untuk garis selanjutnya dari n+n-1 posisi tersebut dipilih sebanyak k posisi untuk meletakkan k objek. Ini dapat dilakukan dengan C(n+K-1,k) cara. Atau, dapat juga memilih n-1 posisi dari n +k -1 posisi untuk meletakkan n-1 garis. Hal ini dapat dilakukan dengan C(n+k-1,n-1) cara. Dengan demikian diperoleh teorema berikut:

TEOREMA 1.3:

Misalkan n bilangan bulat positif dan k bulangan bulat no negtaif. Banyaknya kombinasi –k dari n obyek bewrbeda, dengan pengulangan , adalah:

$$C^*(n,k) = C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

CONTOH 1.9:

Diatas meja terdapat 4 jenis roti berbeda. Banyak roti untuk setiap jenis roti , diasumsikan sebanyak mungkin (tak terbatas). Ada beberapa cara memilih 5 potong roti?

PENYELESAIAN :

Dalam hal ini terdapat n=4 jenisroti berbeda . akan diambil k=5 potong roti. Berdasarkan teorema 1.3 banyak cara yang dimaksud adalah

$$C^*(4,5) = \frac{(4+5-1)!}{5!(4-1)!} = 56$$

2.7 KOEFISIEN BINOMIAL

Pada 1.2 telah dijelaskan bahwa jumlah – r combinasi dari suatu himpunan yang beranggotakan n elemen dituliskan dengan $\binom{n}{k}$ atau bisa juga ditulis seperti C(n,k). Ini juga bisa disebut sebagai suatu koefisien dari binomial karena hasil tersebut sesuai dengan koefisien pangkat pada binomial ekspresi contohnya $(a + b)^n$.

Ekspresi binomial merupakan penjumlahan antara dua suku yang berbeda contohnya $x + y$, $z + y$, $a + b$. (Perlu bahwa dicatat bahwa suku – suku tersebut bisa jadi merupakan hasil perkalian suatu konstanta dengan variabel). Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh sebagai berikut.

CONTOH 1.1

Penentuan dari koefisien $(x+y)^2$ dapat dicari dengan menggunakan kombinasi – r selain dengan mengalikan keduanya. Ketika kita mengalikan (x+y) (x+y). jumlah suku pertama (x+y) =

TEOREMA BINOMIAL

Jika seandainya x dan y merupakan suatu variabel dan misalkan n adalah bilangan bulat positif. Maka

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y \ + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2$$

$$\ldots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{n-1} x \ \ y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

PEMBUKTIAN :

Kita akan menggunakan induksi matematika untuk membuktikan teorema di atas. Untuk n = 0, jelas pernyataan tersebut Benar.

$$(x+y)^0 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{0} x^{0-0} y^0$$

Asumsikan pernyataan benar untuk n-1 > 0, artinya,

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

Selanjutnya, akan ditunjukan pernyataan benar untuk n, Perhatikan bahwa,

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \quad \text{(berdasarkan asumsi)}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} + y\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \binom{n-1}{n-1} x^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} y^n$$

$$= x^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + y^n$$

Ganti k + 1 dengan k pada suku kedua, diperoleh

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-1}{k-1} x^k \ \ y^{n-k} \ \ + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + y^n$$

Setelah disederhanakan,didapat.

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right\}x^k y^{n-k} + y^n$$

Berdasarkan Teorema 1.4 diperoleh,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

Sehingga pernyataan benar untuk n. Dengan demikian teorema terbukti.

CATATAN:

(i). Karena x + y = y + x, maka Teorema Binomial dapat ditulis sebagai berikut.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} y^k = (x+y)^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(ii). Karena $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, maka Teorema Binomial dapat ditulis seperti berikut.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k} y^k$$

(iii). Substitusi x dan y ,asing-masing dengan 1, dalam Teorema Binomial, diperoleh

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots..+\binom{n}{k}+\ldots..+\binom{n}{n} = 2^n$$

(iv). Substitusi x dengan -1 dan y dengan 1, dalam Teorema Binomial, diperoleh

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots..+(-1)^k\binom{n}{k}+\ldots..+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

Perhatikan bahwa, untuk bilangan bulat n dan k dengan 0 ≤ k ≤ n, $\binom{n}{k}$ merupakan koefisien dari suku $x^k y^{n-k}$ dalam binomial pangkat n, $(x+y)^n$. Untuk n=0, maka k=0 sehingga $\binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1$. Untuk n = 1, maka k = 0 atau k = 1, sehingga barikan $\binom{n}{k}$ adalah $\binom{1}{0} = 1\ \binom{1}{1} = 1$. Untuk n = 2, diperoleh barisan $\binom{n}{k}$ seperti $\binom{2}{0} = 1\ \binom{2}{1} = 1$ $\binom{2}{2} = 1$. Untuk n = 3, diperoleh barisan $\binom{n}{k}$ seperti $\binom{3}{0} = 1\ \binom{3}{1} = 1\ \binom{3}{2} = 1\ \binom{3}{3} = 1$, dan seterusnya.

CONTOH *1 :*
Berapakah koefisien dari ekspansi berikut $(x + y)^3$?

JAWAB
Berdasarkan teorema binomial, maka ekspansi dari

$$(x+y)^3 = \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} x^{4-j} y^j$$
$$= \binom{3}{0} x^{n-j} y^j + \binom{3}{1} x^{n-j} y^j + \binom{3}{2} x^{n-j} y^j + \binom{3}{3} x^{n-j} y^j$$

Contoh 2 :
Berapakah koefisien dari ekspansi berikut $(2x – y)^4$?

Jawab

Berdasarkan teorema binomial, maka ekspansi dari

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$
$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Contoh 3 :
Berapakah koefisien $x^{12}y^{13}$dari ekspansi berikut $(2x – y)^4$?

Jawab
Berdasarkan teorema binomial, maka ekspansi dari

$$(2x-y)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (2x)^{4-j} (-y)^j$$

$$= \binom{4}{0} (2x)^{4-j}(-y)^j + \binom{4}{1} (2x)^{4-j}(-y)^j + \binom{4}{2} (2x)^{4-j}(-y)^j + \binom{4}{3} (2x)^{4-j}(-y)^j + \binom{4}{4} (2x)^{4-j}(-y)^j$$

$$= x^{4-j}(-y)^j + (-y)^j + (2x)^{4-j}(-y)^j + (2x)^{4-j}(-y)^j + (2x)^{4-j}(-y)^j$$

Corollary 1

Corollary 2

2.8 SEGITIGA PASCAL

Teorema 3 : (Formula Pascal)

Jika n dan k bilangan bulat dengan

$1 \le k \le n-1,$ maka $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$

Bukti : salah satu bukti langsung dari teorema tersebut adalah dengan menghitung langsung ruas kiri dari formula, setelah disederhanakan akan sama dengan ruas kanan.

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(n-1)!k}{(k-1)!k(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)(n-k)}{k!(n-k)} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Selain dengan cara diatas, teorema juga dapat dibuktikan secara kombinatorik (pembuktian dengan argumen kombinatorik) seperti berikut. Misalkan S adalah himpunan sebanyak n objek berbeda dan misalkan u sebuah objek dalam himpunan S. Jika X adalah himpunan semua kombinasi-k memuat u dari n objek dalam S, maka $|X| = \binom{n-1}{k-1}$. Jika Y adalah semua kombinasi-k tidak memuat u dari objek dalam S, maka $|Y| = \binom{n-1}{k}$. Jelas bahwa $X \cup Y$ adalah himpunan semua kombinasi-k dari n objek dalam S, sehingga $|X \cup Y|$ menyatakan banyaknya semua kombinasi-k dari n objek berbeda yaitu $\binom{n}{k}$. Karena X dan Y saling lepas maka

$$\binom{n}{k} = |X \cup Y| = |X| + |Y| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dengan demikian, Teorema terbukti. Dengan menggunakan Teorema 1.4, kita buktikan teorema binomial berikut.

Jika barisan bilangan tersebut disusun “kebawah”, akan diperoleh pola bilangan, disebut **pola bilangan segitiga pascal**, seperti tampak pada diagram berikut.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\[6pt]
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\[6pt]
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\[6pt]
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\[6pt]
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{0} \\[6pt]
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\[6pt]
\cdots \\[6pt]
\text{(a)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\[6pt]
1 \quad 1 \\[6pt]
1 \quad 2 \quad 1 \\[6pt]
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\[6pt]
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\[6pt]
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\[6pt]
\cdots \\[6pt]
\text{(b)}
\end{array}
$$

Gambar Segitiga Pascal

2.9 KOEFISIEN MULTINOMIAL

Teorema binomial memberikan formula untuk $(x+y)^n$ dengan n merupakan bilangan bulat positif. Hal ini dapat diperluas dengan menambahkan suku – suku contohnya x1, x2, x3, …., xk hal ini dapat ditulis dengan $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$ yang disebut multinomial. Berikut akan ditunjukan bahwa koefisien suku $x_1{}^n 1 x_2{}^n 2....x_k{}^n k$ adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$$

Dengan $n_1, n_2, ...n_k$ adalah bilangan-bilangan bulat non negatif dan $n_1 + n_2 + ...n_k = n$. Bilangan-bilangan ini disebut koefisien multinomial, dan sering disimbolkan dengan $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Teorema 1.7 :

Misalkan n sebuah bilangan positif. Maka untuk semua $x_1, x_2, ..., x_k$ berlaku

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 .... n_k} x_1^{n}1 x_2^{n}2....x_k^{n}k$$

Dengan 'sigma' mencakup semua kemungkinan bilangan bulat non negatif $n_1, n_2, ...n_k$ yang memenuhi $n_1 + n_2 + ...n_k = n$.

Bukti:

Tulis $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$ sebagai perkalian dari n buah faktor yang masing-masing faktor adalah $(x_1 + x_2 + ... + x_k)$. Ekspansi perkalian tersebut ke dalam suku-suku sehingga tidak ada tanda "kurung" yang tersisa. Karena dari setiap faktor kita dapat memilih $x_1, x_2, ..., x_k$, maka banyak suku yang terbentuk adalah k_n dan setiap suku dapat dijajar dalam bentuk $x_1^{n1}x_2^{n2}...x_k^{nk}$ dengan $n_1, n_2,...,n_k$ bilangan-bilangan bulat non negatif yang memenuhi $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Suku-suku berbentuk $x_1^{n1}x_2^{n2}...x_k^{nk}$ dapat diperoleh dengan: memilih $x_1$sebanyak $n_1$dari n faktor, memilih x_2 sebanyak n_2 dari $n – n_1$ faktor sisanya, memilih x_3 sebbanyak n_3 dari $n – n_1 – n_2$ faktor sisanya, . . . , memilih x_k sebanyak n_k dari $n – n_1 – n_2 – . . . – n_{k-1}$ faktor tersisa. Berdasarkan prinsip perkalian, banyaknya suku berbentuk $x_1^{n1}x_2^{n2}...x_k^{nk}$ adalah

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}...\binom{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} x \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} x \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} x...x \frac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_k!0!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

$$= \binom{n}{n_1 n_2 ... n_k}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Berikut ini diberikan beberapa contoh aplikasi teorema diatas.

CONTOH 1.10:

Jika $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^5$ diekspansi (dijabarkan), berapakah koefisien dari:

(a) $x_1^3x_2x_4$?

(b) $x_1x_2x_3x_4^2$?

PENYELESAIAN:

(a) $\binom{5}{3 \quad 1 \quad 0 \quad 1} = \frac{5!}{3!1!0!1!} = 20$

(b) $\binom{5}{1\quad 1\quad 1\quad 2} = \frac{5!}{1!1!1!2!} = 60$.

CONTOH 1.11:
Berapakah koefisien dari $x_1x_2^3x_3x_4^2$ dalam $(x_1 – 5x_2 + x_3 – 2x_4)^7$?

PENYELESAIAN:
Koefisien $x_1x_2^3x_3x_4^2$ adalah $\binom{7}{1\quad 3\quad 1\quad 2}(-5)^3(-2)^2 = -210000$.

CONTOH 1.12:
Ada berapa cara menempatkan 12 orang mahasiswa ke dalam dua kamar sedemikian hingga kamar pertama berisi 4 mahasiswa dan kamar kedua berisi 8 mahasiswa ?

PENYELESAIAN:
Terdapat C(12:4) cara memilih mahasiswa dari 12 mahasiswa untuk ditempatkan dalam kamar pertama, dan terdapat C(12-4;8) cara memilih 8 mahasiswa dari 12 – 4 = 8 mahasiswa yang tersisa. Jadi banyaknya cara yang dimaksud adalah
$$C(12;4).C(8;8) = \frac{12!}{4!8!}\,x\,\frac{8!}{8!0!} = \frac{12!}{4!8!} = 495.$$

CONTOH 1.13:
Ada berapa bilangan 5-angka memuat dua angka “3”, satu angka “2”, dan dua angka “1” ?

PENYELESAIAN:
Banyaknya bilangan yang dimaksud adalah
$$\binom{5}{2\quad 1\quad 2} = \frac{5!}{2!1!2!} = 30.$$

CONTOH 1.14:
Ada berapa kata sandi dengan panjang 9 yang dibentuk dari huruf-huruf A, B, dan C sedemikian hingga setiap huruf muncul tiga kali dalam setiap kata sandi ?

PENYELESAIAN:
Terdapat C(9,3) cara membuat kata sandi dengan panjang 9 dari 3 huruf yang sama untuk dijadikan kata sandi yang pertama. Terdapat C(9 – 3,6) cara memilih 8 mahasiswa dari 12 – 4 = 8 mahasiswa yang tersisa.
Beberapa kata sandi yang dimaksud adalah:
AAABBBCCC, AABABCCBC, BBACCAAAB, BBACCAABA, BABCCAAAB, BBACACAAB, ABBCCAAAB dll. Banyaknya kata sandi yang diperoleh adalah
$$\binom{9}{3\quad 3\quad 3} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1980.$$

LATIHAN

1. Carilah bentuk ekspasi dari $(2x + y)^4$
   a. Dengan menggunakn kombinatorik
   b. Dengan menggunakan Theorema Binomial.
2. Carilah bentuk ekspasi dari $(x - y)^5$
   a. Dengan menggunakn kombinatorik
   b. Dengan menggunakan Theorema Binomial.
3. Carilah koefisien dari x^6y^9 dalam $(x + y)^{17}$
4. Carilah koefisien dari x^5y^{18} dalam $(x + y)^{23}$
5. Tentukan koefisien dari x^7 dalam $(3 - x)^{12}$
6. Tentukan koefisien dari x^9 dalam $(2 + x)^{12}$
7. Tentukan koefisien dari
8. Berapakah banyaknya dadu yang dapat dibentuk dari
9. Buktikan bahwa jika n dan k adalah bilangan bulat , maka nomor 21
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
   a. dengan menggunakan pembuktian kombinatorik.
   b. dengan menggunakan pembuktian aljabar pada yang diberikan pada
10. Berapakah banyaknya dadu yang dapat dibentuk dari
11. Berapakah banyaknya dadu yang dapat dibentuk dari
12. Tunjukkanlah bahwa untuk semua bilangan bulat positif m dan n
$$n\binom{m+n}{m} = (m+1)\binom{m+n}{m+1}$$
13. Tunjukkan bahwa jika n dan k adalah bilangan bulat positif maka,
$$\binom{n+1}{k} = (n+1)\frac{\binom{n}{k-1}}{k}$$
14. Buktikan bahwa
$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$$
   ketika n dan r adalah bilangan bulat positif,
   a. dengan menggunakan kombinatorial.
   b. dengan menggunakan Identitas Pascal.
15. Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif.Tunjukkan bahwa
$$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2}$$

16. Misalkan n dan k adalah suatu bilangan bulat diama a > k > 1. Tunjukkan bahwa

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   a. dengan menggunakan kombinatorial.
   b. dengan menggunakan Identitas Pascal.

17. Tunjukkan bahwa jika n adalah bilangan bulat positif, maka

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

   a. dengan menggunakan kombinatorial.
   b. dengan menggunakan Identitas Pascal.

18. Buktikan teorema binomial dengan menggunakan matematika induks

2.10 Algoritma Mengurutkan Permutasi dan Kombinasi

Misalkan $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3$ dan $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ dua permutasi-3, tanpa pengulangan, dari semua elemen {1, 2, 3}.

Permutasi π dikatakan mendahului permutasi σ jika:

(i) $\pi_1 < \sigma_1$, atau

(ii) $\pi_1 = \sigma_1$ dan $\pi_2 < \sigma_2$.

Sebagai contoh, permutasi π = 123 mendahului permutasi σ = 231, sebab $\pi_1 = 1 < 2 = \sigma_1$. Demikian permutasi π = 123 mendahului permutasi α = 132, sebab $\pi_1 = 1 = \alpha_1$ dan $\pi_2 = 2 < 3 = \alpha_2$. Secara umu, misalkan $\pi = \pi_1\pi_2 ... \pi_n$ dan $\sigma = \sigma_1\sigma_2 ... \sigma_n$ dua permutasi-n, tanpa pengulangan, dari semua elemen {1, 2, ..., n}. Permutasi π dikatakan mendahului permutasi σ dalam urutan leksikografik jika:

(1) $\pi_1 < \sigma_1$, atau

(2) $\pi_1 = \sigma_1$ dan $\pi_2 < \sigma_2$, atau

(3) $\pi_1 = \sigma_1$ dan $\pi_2 = \sigma_2$ dan $\pi_3 = \sigma_3$, atau

.

.

.

(n) $\pi_1 = \sigma_1$, $\pi_2 = \sigma_2$, ..., $\pi_{n-1} = \sigma_{n-1}$, dan $\pi_n = \sigma_n$.

Misalkan π = 14235, σ = 12435, α = 12453, maka permutasi σ mendahului permutasi α dan permutasi α mendahului permutasi π. Sehungga secara leksikografik ketiga permutasi tersebut terurut sebagai berikut: 12435, 12453, 14235.

Berikut diberikan suatu prosedur untuk mendaftar secara terurut semua permutasi-n dari semua elemen {1, 2, ... , n}. Karena pengulangan tidak diperbolehkan maka terdapat n! peremutasi yang mungkin.

Prosedur Menjenerik Permutasi

INPUT : n

OUTPUT : Daftar semua permutasi-n dari {1, 2, ..., n} dalam urutan leksikografik

STEP 1 : Tulis π = 123...n dan output π

STEP 2 : Jika $\forall i, 1 \le i \le n-1, \pi_1 > \pi_{i+1}$, STOP (daftar lengkap)

STEP 3 : Cari π_i dengan i terbesar sedemikian hingga $\pi_i < \pi_{i+1}$

STEP 4 : Cari π_j terkecil sedemikian hingga i < j dan $\pi_i < \pi_j$

STEP 5 : Pertukarkan π_i dan π_j

STEP 6 : Balik urutan bilangan-bilangan setelah π_j sehingga diperoleh permutasi baru. Namakan permutasi baru ini dengan π ; output π ; kembali ke STEP 2.

2.11 Prosedur Menjenerik Kombinasi

Selanjutnya, akan dibahas sebuah prosedur untuk mendaftar semua kombinasi-r dari elemen-elemen {1, 2, ... , n} menurut urutan leksikograpfik naik.

Misalkan diberi jajaran (string) $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r$ mewakili kombinasi-r { $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$}. Untuk mendapatkan jajaran (string) berikutnya caranya sebagai berikut:

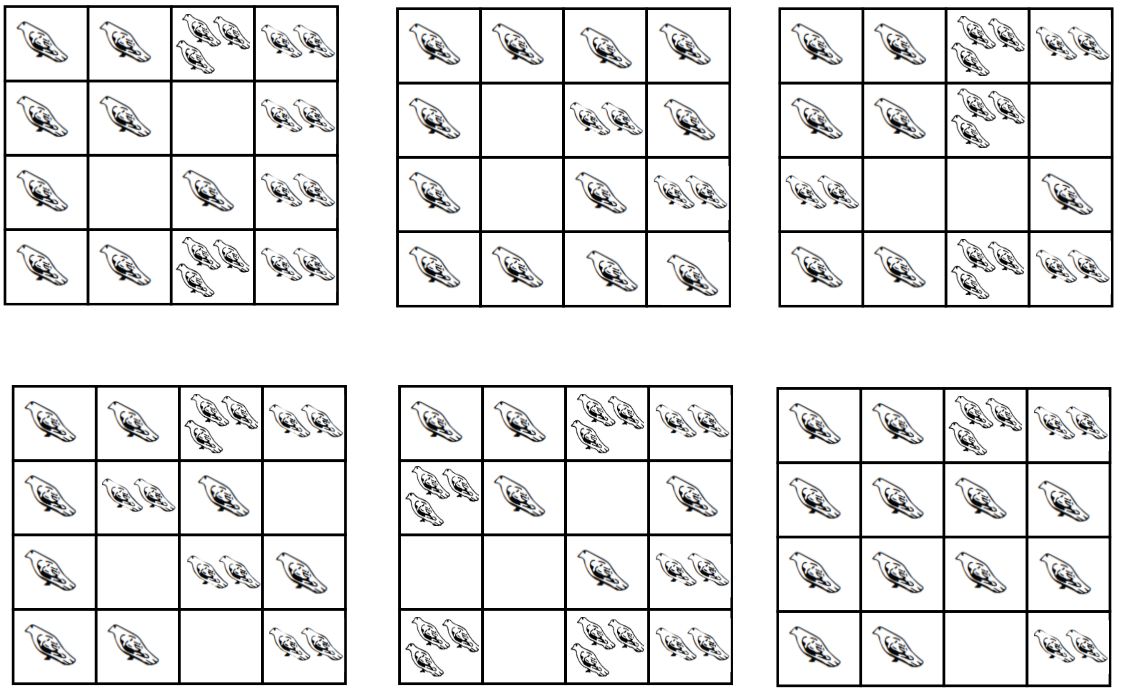
1. Cari elemen terkanan dalam α yang nilainya belum maksimum, katakan elemen tersebut α_m, sedemikian hingga α_m+r-m+1 $\le$ n
2. Jika string berikutnya setelah α adalah $\beta = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_r$, maka: untuk setiap i, 1$\le$ i $\le$ m-1, $\beta_i = \alpha_i$ dan untuk setiap j, 0 $\le$ j $\le$ r-m, $\beta_{m+j} = \alpha_m$+1+j.

CONTOH 1.17:

Diberikan sebuah string 13467 sebagai sebuah kombinasi-5 dari {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Dalam hal ini elemen paling kanan dalam string 13467 yang belum maksimum adalah 4. Sehingga string berikutnya setelah 13467 adalah 13567. Selanjutnya, elemen paling kanan dalam string 13567 yang belum maksimum adalah 3. Sehingga string berikutnya setelah string 13567 adalah 14567. Elemen paling kanan dalam string 14567 yang belum maksimum adalah 1, sehingga string berikutnya setelah 14567 adalah 23456. Elemen paling kanan ddalam string 23456 yang belum maksimum adalah 6, sehingga string berikutnya setelah 23456 adalah 23457. Jika proses dilanjutkan akan diperoleh, secara berturut-turut, string berikut: 23467, 23567, 24567, 34567. Terlihat bahwa, secara berturutan, terdapat 9 kombinasi-5 dari 7 obyek berbeda. Jadi masih terdapat 12 kombinasi-5 sebelumnya, secara berturutn dari yang pertama, adalah sebagai berikut: 12345, 12346, 12356, 12357, 12367, 12456, 12567, 13456, 13457.

2.12 Prinsip 'Sangkar Burung'

Walaupun topik ini merupakan topil Elementer, tetapi menarik dalam kombinatorika.Dikatakan menarik karena prinsip ini dapat digunakan untuk memecahkan sejumlah masalah menarik dalam kombinatorika. Pada hakekatnya prisip ini berbunyi sebagai berikut :



Sejumlah burung di tangkar dalam ssejumlah sebuah sangkar.Jika banyaaknya burung melebihi anyaknya sangkar, maka terdapat sangkar yang memuat lebih dari satu burung.Secara formal, prisip tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

TEOREMA 1.8:

Jika ini burung dimasukkan dalam n sangkar dan m >n, maka terdapat sangkar berisi paling sedikit dua burung.

Bukti :

Andaikan setiap sangkar berisi paling banyak satu ekor burung.Maka banyak burung, m, tidak melebihi banyak sangkar, n, atau $m \leq n$, kontradiksi dengan $m > n$.

CONTOH 1.17:
Diantara 8 orang pasti ada dua orang memiliki hari kelahiran yang sama. Demikian pula, dari 15 orang yang berbeda, pasti terdapat dua orang lahir pada bulan yang sama.

CONTOH 1.18 :
Jika $b_1, b_2, ..., b_m$ adalah m bilangan bulat, tunjukkan terdapat i dan j dengan $1 \leq i < j \leq m$ sedemikian hingga $b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_j$ habis dibagi m.

Penyelesaian :
Pikirkan m penjumlahan berikut :

$b_1, b_1+b_2, b_1+b_2+b_3, ..., b_1+b_2+...+b_m$.

Jika ada dari penjumlahan ini habis dibagi m, maka bukti selesai.Misalkan, masing – masing dari penjumlahan tersebut tidak ada yang habis dibagi m. Ini berarti sisa setiap pembagian lebih dari 0. Sehingga salah satu dari sisa pembagian tersebut adalah 1,2,3,...,m-1. Karena terdapat m penjumlahan dan m-1 sisa, maka terdapat dua penjumlahan mempunyai sisa yang sama jika dibagi m. Sehingga terdapat $i < j$ sedemikian hingga $b_1+b_2+...+ b_i$ dan $b_1+b_2+...+ b_j$ mempunyai sisa yang sama, katakan ss, jika dibagi m. Jadi terdapat bilangan bulat p dan q sedemikian hingga.

$b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_j = pm + s$ (1)

$b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_j = qm + s$ (2)

kurangkan (1) dan (2) diperoleh :

$b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_j = (q - p)m$,

ini berarti $b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_j$ habis dibagi m.

CONTOH 1.19 :

Sebanyak 51 bilangan bulat diambil dari bilangan – bilangan bulat 1,2,3,4,....100. tunjukkan bahwa diantara bilangan – bilangan yang terambil, terdapat dua bilangan sedemikian hingga yang satu pembagi yang lain.

PENYELESAIAN :

Perhatikan bahwa setiap bilangan bulat dapat ditulis sebagai 2^m x n dengan m ≥ 0 dan n ganjil, misal (7 = 2^0 x 7 ; 8 = 2^3 x 1 ; = 2^3 x 3). Karena bilangan bulat yang diberikan dari 1 sampa dengan 100, maka n adalah salah satu dari 50 bilangan ganjil 1,3,5,...,99. Sehingga diantara 51 bilangan yang diambil, terdapat dua bilangan dengan n yang sama. Misalkan kedua bilangan tersebut, 2^k x n dan 2^h x n. Jika k ≤ h, maka 2^k x n pembagi 2^h x n. Jika k > h, maka 2^h x n pembagi 2^k x n.

Untuk mendapat gaambaraan aplikasi ebih luas, kita perumum Teorema 1.6 teoramaa yang lebih kuat berikut.

Teorema 11.9 :

Misalkan $a_1,a_2...,a_n$ adalah bilangan – bilangan bulat. Jika sebanyak $a_1 + a_2 + ... + a_n + 1 - n$ obyek ditempatkan di dalam n kotak, maka kotak pertama mendapat paling sedikit a_1 obyek, atau kotak kedua mendapat paling sedikit a_2 obyek, ..., atau kotak ke-n mendapat paling sedikit an obyek.

Bukti :
Andaikan untuk setiap i, 1 ≤ i ≤ n, kotak ke-i mendapat kurang dari ai obyek, maka totol banyak obyek dalam kotak tidak melebihi

$(a_1 – 1) + (a_2 – 1) +...+ (a_n – 1) = a_1 + a_2 + ... + a_n – n$,

Kontradiksi dengan banyak obyek yang ditempatkan adalah:

$a_1 + a_2 + ... + a_n + 1 – n$. Dengan demikian teorama terbukti.

Catatan :
1. Jika $a_1 = a_2 = ... = a_n = k$, maka $a_1 + a_2 + ... +$ an $+ 1 – n = n (k – 1) + 1$. Sehingga Teorema 1.7 menjadi : jika n (k – 1) + 1 obyek diletakkan dalam n kotak, maka terdapat paling sedikit k obyek.

2. Misalkan untuk i = 1,2,3,...,n banyak obyek dalam kotak ke-i adalah a_i. Maka bilangan a_1, a_2, a_3, ..., a_n adalah
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{n(k-1)+1}{n} = (k-1) + \frac{1}{n}$$
3. Karena rataan ini nilainya melebihi k-1, maka salah satu bilangan bulat a_1 aling sedikit bernilai k. Artinya, paling sedikit ada satu kotak berisi paaling sedikit k obyek. Sehingga diperoleh peryataaan berikut : jika sebanyak n bilangan bulat non negatif a_1, a_2, ..., a_n mempunyai rataan yang nilainya melebihi k-1, maka paling sedikit satu dari bilangan – bilangan tersebut bernilai minimum k.

CONTOH 1.20 :

Diberikan dua disket (berbentuk lingkaran) dengan diameter berbeda.Masing – masing disket dipartisi menjadi 200 juring (sector) kongruen.Sebanyak 100 juring sembarang dipilih dari disk yang lebih besar dan dicat merah, sedangkan 100 juring sisanya dicat kuning.Untuk disket kecil, setiap juring dicat warna warna atau kuning.Selanjutnya, diket kcil diletakkan di atas disket besar sedemikian sehingga titik pusat kedua disket berimpit.Tunjukkan bahwa kedua disket tersebut dapat diatur sedemikian hingga minimal ada 100 juring pada disket kecil cocok warnanya dengan juring – juring seletak pada disket besar.

Penyelesaian :

Perhatikan bahwaa, jika posisi disket besar dibuat tetap, maka terdapt 200 kemungkinan posisi untuk disket sedemikian sehingga setiap juring disket kecil termuat didalam sebuah juring diket besar. Pertama kita hitung total banyaknya warna yang cocok dari 200 kemungkinan tadi. Karena disket besar memiliki 100 jurung masing – masing dari dua wwarna tersebut, maka setiap juring disket kecil akan cocok warnanya dengan juring – juring bersesuaian pada disket besar dalam tepat 100 dari 200 posisi yang mungkin. Sehingga total banyaknya warna yang cocok dari semua posisi yang mungkin adalah banyaknya juring pada disket kecil dikalikan 100, dan ini sama dengan 20.000. sehingga rata – rata banyaknya warna yang cocok per posisi adalah 20.000 : 200 = 100. Oleh karena itu, haruslah terdapat suatu posisi dengan paling sedikit 100 warna yang cocok.

Tahukah Anda !

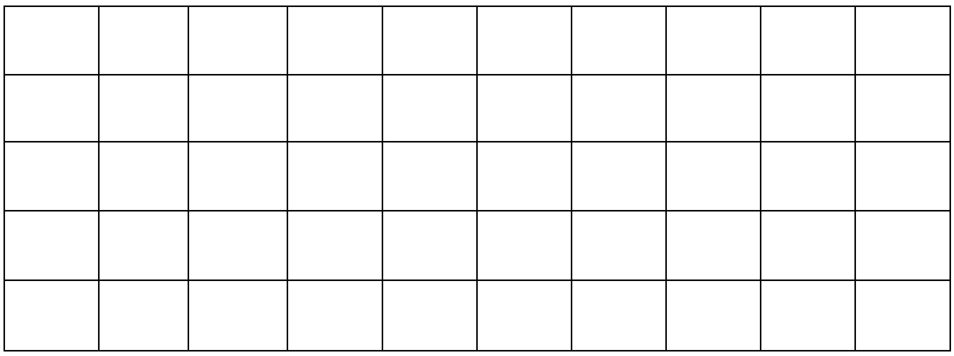
Komputasi berhasil merebut banyak peminat dari berbagai kalangan yang termasuk didalamnya adalah seroang yang berjiwa muda yang sangat energik dan selalu loyal terhadap keinginan yang ia miliki. Komputasi berhasil merebut banyak peminat dari berbagai kalangan yang termasuk didalamnya adalah seroang yang berjiwa muda yang sangat energik dan selalu loyal terhadap keinginan yang ia miliki Komputasi berhasil merebut banyak peminat dari berbagai kalangan yang termasuk didalamnya adalah seroang yang berjiwa muda yang sangat energik dan selalu loyal

SOAL LATIHAN-1

1. Jika n buah koin dilempar bersama , berapa banyak hasil yang mungkin muncul ?
2. Jika n buah dadu dilempar, berapakah banyaknya hasil yang mungkin muncul ?
3. Jika m koin dan n dadu dilempar bersama , berapakah banyaknya hasil yang mungkin muncul ?
4. Sebuah tim terdiri dari ketua , wakil ketua , sekertaris , dan bendahara dipilih dari 25 mahasiswa . berapakah banyak tim yang mungkin terbentuk ?
5. Sebuah plot nomor mobil terdiri dari sebuah huruf , diikuti lima angka , dan diakhiri tiga huruf . ada berapakah plot nomor mobil yang didapat di bentuk ? jika didisaratkan tidak boleh ada huruf yang sama dan tidak ada angka yang sama , ada berapakah plot nomor yang bisa di bentuk ?
6. Barisan binair adalah barisan yang terdiri dari angka “0” dan angka “1” ; barisan ternair adalah barisan yang terdiri dari angka angka “0” ,”1” dan “2”. Panjang barisan adalah banyaknya angka dalam barisan tersebut . jika panjang barisan tersebut n , maka barisan tersebut barisan n – angka . ada berapakah barisan binair n angka ? ada berapakah barisan ternair n angka ?
7. Dari sekelompok orang yang terdiri dari 10 pria dan 5 wanita dibentuk sebuah tim beranggota 3. Ada berapa tim yang mungkin , sedemikian hingga terdapat tepat dua pria dalam tim tersebut ? ada berapa tim yang mungkin sedemikian hingga terdapat wanita dalam tim tersebut ?
8. Dalam sebuah kerajang terdapat 20 apel merah dan 10 apel hijau . berapakah peluang dari 15 apel yang diambil secara acak (tanpa pengembalian) terdapat paling sedikit 7 apel hijau ?
9. Ada berapakah barisan binair dengan panjang kurang dari 6 ? kurang dari satu sama dengan n ?
10. Ada berapakah matriks m x n yang entri entrinya 10 atau 1?
11. Ada berapa fungsi yang mungkin dari himpunan X = {x_1 ,x_2 ……,x_n} ke himpunan Y = { y_1 ,y_2 …,y_m } Ada berapa fungsi dari Y ke X ?
12. Diberikan himpunan A= { a_1,a_2 ……,a_n }.
    (i) Gunakanlah aturan perkalian untuk menentukan banyak himpunan bagian A.
    (ii) Berapakah banyak himpuanan bagian A yang anggotanya sebanyak k dengan $0 \leq k \leq n$?
    (iii) Berapakh nilai $\sum_{k=0}^{n} c(n,k)$?
13. Ada berapa barisan binair 10 – angka yang memuat tepat lima angka “1” ?
14. Misalkan S adalah sebuah barisan n elemen sedemikian hingga dari n elemen tersebut terdapat : n_1 Elemen tipe 1 identik , n_2 elemen tipe – 2 identik , ….., n_k elemen tipe – k identik . tunjukan bahwa banyak barisan S yang demikian adalah $\frac{n!}{n1!n2!n3!.....nk!}$

15. Jika hrurf – huruf dalam kata “ MATEMATIKA” di permutasikan , ada berapa permutasi yang mungkin ?
16. Jika X adalah himpuanan k elemen , tunjukan bahwa bnyak cara mengambil n elemen , pengulangan di perkenankan , adalah C (n+k – 1, k-1) = c(n+k-1, n)
17. Misalakan terdapat tiga kotak beda (merah , biru , hijau) dan setiap kotak beisi minimal 10 bola .
    (i) Ada berapa cara berbeda memilih 10 bola ?
    (ii) Ada berapa cara memilih bola ?sedemikian hingga dari setiap kotak terpilih minimal 1 bola ?
18. Ada berapa cara membagikan 10 buku matematika yang identik kepada tiga orang mahasiswa andre , rino dan johan ?

19. Pada kisi kisi berikut , kita di perkenankan bergerak kekanan atau keatas saja
    (i) Ada berap lintasan dari Ake D ?
    (ii) Ada berapa lintasan dari A ke D lewat B ?
    (iii)Ada berapa lintasan dari A ke D lewat B dan C ?



20. Sebanyak 300 OBJEK DILABEL 1,2,3 …..300. jika sebanyak 151 objek dipilih , tunjukan bahwa terdapat dua objek berlabel berurutan?
21. Misalkan f adalah sebuah fungsi dari X ke Y dengan $|X| = n\ dan\ |Y| = m\ .jika\ \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = k\ , tunjukan$ terdapat palind sedikit k anggota X , katakan x_1, x_2 ,.......... x_k sedemikian hingga f (x_1) = f (x_2) =……= f (x_k)
22. Professor andre , menerima gaji setiap hari jumat . tunjukan bahwa dalam satu bulan tertentu dia menerima gaji tiga kali .

Tunjukan bahwa untuk setia bilangan positif n , terdapat bilangan kelipatan n yang angka angkanya hanya angka “0” dan “ 1” .

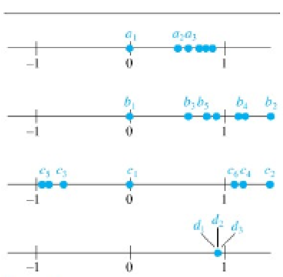
BAB III FUNGSI PEMBANGKIT

Dalam capter ini diperkenalkan sebuah topik penting dalam kombinatorik yang disebut fungsi pembangkit. Metode fungsi pembangkit ini berakar dari karya De Mavre tahun 1720, dikembangkan oleh Euler dalam tahun 1743 untuk memecahkan masalah partisi; kemudian pada akhir abad 18 dan awal abad 19 secara intensif dipakai oleh Laplace sehubungan dengan teori Probabilitas (lihat Robets, 1984).

Sebelum membahas metode fungsi pembangkit, kitanya perlu diperkenalkan beberapa deret kuasa penting, yang akan menunjang pembahasan selanjutnya.

3.1 Deret Kuasa

Deret takhingga yang berbentuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ disebut deret kuasa. Bila ada bilangan positif R sedemikian hingga deret kuasa ini konvergen untuk setiap nilai x dengan $|x| < R$, maka R disebut ***radius kokonvergenan***, namun adakalanya suatu deret kuasa tidak konvergen untuk semua nilai x $(x \neq 0)$; dan dikatakan ***deret divergen***.



(1) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$,	$n \geq 1$:	$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
(2) $b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$,	$n \geq 1$:	$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$
(3) $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,	$n \geq 1$:	$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots$
(4) $d_n = 0.999$,	$n \geq 1$:	$0.999, 0.999, 0.999, 0.999, \ldots$

Perlu dicatat, dalam banyak hal kelak kita tidak tertarik dengan kekonvergenan deret kuasa tersebut, tapi kita tertarik dengan koefisien-koefisien dari x^n; dengan kata lain kita akan memiliki pandang bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sebagai sebuah ekspresi formal saja sehingga deret kuasa demikian kita sebut ***deret kuasa formal***.

Dalam pelajaran kalkulus kita telah mengenal bahwa deret taylor fungsi f(x) di sekitar x =0 mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int^{(n)} (0) x^n$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \ldots.$$

Dari formula tersebut, kita peroleh hasil-hasil berikut :
Untuk bilangan real u, bilangan bulat non negatif k, dan $|x| < 1$ berlaku :

$$(1 + x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

Dimana :

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-k+1)}{k!}, & \text{jika } k > 0 \\ 1 & \text{, jika } k = 0 \end{cases}$$

USEFUL GENERATING FUNCTION

$$(1+x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{x^n}{n} - 1 < x < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 1 \leq x \leq 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

3.2 Definisi Fungsi Pembangkit

Suatu fungsi pembangkit biasa dengan barisan (a_n) terdiri dari a_0, a_1,a_2, a_3, …,a_k,…, dengan a bilangan real dengan barisan tak hingga dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Contoh 1 ;

Tulislah fungsi pembangkit biasa untuk barisan an, sebagai berikut ;

$a_n = 9$, an = n + 7, an = 9^n.

Dengan mengganti a_n dengan yang telah diketahui, maka sesuai dengan definisi fungsi pembangkit sehingga dapat ditulis sebagai berikut;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+7)\, x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 9^n x^n$$

Contoh 2 ;

Tuliskanlah fungsi pembangkit biasa dari barisan (1, 1, 1, 1, 1) ?

Fungsi Pembangkit dari barisan 1, 1, 1, 1, 1 adalah

$$\sum_{n=0}^{4} a_n x^n = 1.x^0 + 1.x^1 + 1.x^2 + 1.x^3 + 1.x^4$$

$$= 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$

$$= \frac{1-x^5}{1-x}$$

Maka, Fungsi pembangkit biasa dari barisan (1, 1, 1, 1, 1) adalah $P(x) = \frac{1-x^5}{1-x}$

Contoh 3 ;

Tuliskanlah fungsi pembangkit biasa dari barisan (1,2, 4, 8, 16, 32,…) ?

Fungsi Pembangkit dari barisan (1,2, 4, 8, 16, 32,…) adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1.x^0 + 2.x^1 + 4.x^2 + 8.x^3 + 16.x^4 + \cdots$$

$$= 2^0.x^0 + 2.x^1 + 2^2.x^2 + 2^3.x^3 + 2^4.x^4 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

Maka, Fungsi pembangkit biasa dari barisan (1,2, 4, 8, 16, 32,…) adalah $P(x) = \frac{1}{1-2x}$

Contoh 4 ;
Carilah barisan a_n dari fungsi pembangkit biasa P(X) = e^{2x} ?

Dengan menggunakan formula 2.1, maka

$$
\begin{aligned}
e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} &= \frac{(2x)^0}{0!} + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots \\
&= \frac{2^0 x^0}{1} + \frac{2^1 x^1}{1} + \frac{2^2 x^2}{2.1} + \frac{2^3 x^3}{3.2.1} + \cdots \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Dari deret di atas, terlihat jelas bahwa barisan a_n dari P(X) = e^{2x} adalah 1, 2, 2, 4/3, …

Contoh 5 ;
Carilah barisan a_n dari fungsi pembangkit biasa P(X) = e^{2x} ?

Dengan menggunakan formula 2.1, maka

$$
\begin{aligned}
e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} &= \frac{(2x)^0}{0!} + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots \\
&= \frac{2^0 x^0}{1} + \frac{2^1 x^1}{1} + \frac{2^2 x^2}{2.1} + \frac{2^3 x^3}{3.2.1} + \cdots \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Dari deret di atas, terlihat jelas bahwa barisan a_n dari P(X) = e^{2x} adalah 1, 2, 2, 4/3, …

Contoh 6 ;
Carilah barisan a_n dari fungsi pembangkit biasa P(X) = e^{2x} ?

Dengan menggunakan formula 2.1, maka

$$
\begin{aligned}
e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} &= \frac{(2x)^0}{0!} + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots \\
&= \frac{2^0 x^0}{1} + \frac{2^1 x^1}{1} + \frac{2^2 x^2}{2.1} + \frac{2^3 x^3}{3.2.1} + \cdots \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Dari deret di atas, terlihat jelas bahwa barisan a_n dari P(X) = e^{2x} adalah 1, 2, 2, 4/3, …

Fungsi Pembangkit Eksponensial (FPE) yang terdiri dari $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots,$ dengan a bilangan real dengan barisan tak hingga sebagai berikut :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Contoh 2 ;

Tulislah fungsi pembangkit eksponensial untuk barisan a_n, $a_n = 6$, $a_n = n - 8$, $an = 2^n$. Dengan mengganti a_n , maka sesuai dengan definisi fungsi pembangkit eksponensial sehingga dapat ditulis sebagai berikut;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 6\frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n-8)\frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\frac{x^n}{n!}$$

Contoh 3 ;

Tuliskanlah fungsi pembangkit eksponensial dari barisan 2, 2, 2, 2, 2 ?

Fungsi Pembangkit dari barisan 1, 1, 1, 1, 1 adalah

$$\sum_{n=0}^{4} a_n x^n = 1.x^0 + 1.x^1 + 1.x^2 + 1.x^3 + 1.x^4 = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$

Contoh 1 ;

Tulislah fungsi pembangkit biasa untuk barisan an, sebagai berikut ;

$a_n = 9$, $an = n + 7$, $an = 9^n$.

Dengan mengganti a_n dengan yang telah diketahui, maka sesuai dengan definisi fungsi pembangkit sehingga dapat ditulis sebagai berikut;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+7)\, x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 9^n x^n$$

Contoh 2 ;

Tuliskanlah fungsi pembangkit biasa dari barisan (1, 1, 1, 1, 1) ?

Fungsi Pembangkit dari barisan 1, 1, 1, 1, 1 adalah

$$\sum_{n=0}^{4} a_n x^n = 1.x^0 + 1.x^1 + 1.x^2 + 1.x^3 + 1.x^4$$
$$= 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$
$$= \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Maka, Fungsi pembangkit biasa dari barisan (1, 1, 1, 1, 1) adalah $P(x) = \frac{1-x^5}{1-x}$

Contoh 3 ;
Tuliskanlah fungsi pembangkit biasa dari barisan (1,2, 4, 8, 16, 32,…) ?

Fungsi Pembangkit dari barisan (1,2, 4, 8, 16, 32,…) adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1.x^0 + 2.x^1 + 4.x^2 + 8.x^3 + 16.x^4 + \cdots$$
$$= 2^0.x^0 + 2.x^1 + 2^2.x^2 + 2^3.x^3 + 2^4.x^4 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

Maka, Fungsi pembangkit biasa dari barisan (1,2, 4, 8, 16, 32,…) adalah $P(x) = \frac{1}{1-2x}$

Contoh 4 ;
Carilah barisan a_n dari fungsi pembangkit biasa P(X) = e^{2x} ?

Dengan menggunakan formula 2.1, maka

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \frac{(2x)^0}{0!} + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots$$
$$= \frac{2^0 x^0}{1} + \frac{2^1 x^1}{1} + \frac{2^2 x^2}{2.1} + \frac{2^3 x^3}{3.2.1} + \cdots$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$$

Dari deret di atas, terlihat jelas bahwa barisan a_n dari P(X) = e^{2x} adalah 1, 2, 2, 4/3, …

Contoh 5 ;
Carilah barisan a_n dari fungsi pembangkit biasa P(X) = e^{2x} ?

Dengan menggunakan formula 2.1, maka

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \frac{(2x)^0}{0!} + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots$$
$$= \frac{2^0 x^0}{1} + \frac{2^1 x^1}{1} + \frac{2^2 x^2}{2.1} + \frac{2^3 x^3}{3.2.1} + \cdots$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$$

Dari deret di atas, terlihat jelas bahwa barisan a_n dari P(X) = e^{2x} adalah 1, 2, 2, 4/3, …

Contoh 6 ;
Carilah barisan a_n dari fungsi pembangkit biasa P(X) = e^{2x} ?

Dengan menggunakan formula 2.1, maka

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \frac{(2x)^0}{0!} + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots$$
$$= \frac{2^0x^0}{1} + \frac{2^1x^1}{1} + \frac{2^2x^2}{2.1} + \frac{2^3x^3}{3.2.1} + \cdots$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$$

Dari deret di atas, terlihat jelas bahwa barisan a_n dari P(X) = e^{2x} adalah 1, 2, 2, 4/3, …

Misalnya,

1. Carilah Fungsi Pembangkit Biasa dari barisan - barisan berikut, sederhanakanlah ;
   a. (0,0,0,1,1,1,1,…)
   b. (0,0,2,2,2,2,2,…)
   c. (1,2,3,4,5,6,7,…)
   d. (1,-4,16,-64,196,…)
   e. (1,3,9,27,81,243,…)
   f. $(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots)$
   g. (1,-2,4,-8,16,-32,…)
   h. (0,2,0,2,0,2,0,…)
   i. (3,2,3,2,3,2,3,…)
   j. (2,4,2,4,2,4,2,…)

2. Carilah Fungsi Pembangkit Eksponesial dari barisan - barisan berikut, sederhanakanlah ;
   a. (3,3,3,3,3,3,3,…)
   b. (4,4,4,4,4,4,4,…)
   c. (0,2,0,2,0,2,0,…)
   d. (3,2,3,2,3,2,3,…)
   e. (2,4,2,4,2,4,2,…)
   f. (2,4,2,4,2,4,2,…)
   g. (2,4,2,4,2,4,2,…)
   h. (2,4,2,4,2,4,2,…)
   i. (2,4,2,4,2,4,2,…)
   j. (2,4,2,4,2,4,2,…)

3. P(x) merupakan Fungsi Pembangkit Biasa dari barisan (a_n). Carilah barisan a_n tersebut ;

$$P(X) = 1 + \frac{1}{1-x}$$
$$P(X) = 2x + \frac{1}{2-2x}$$

$$P(X) = \frac{x^5}{1+8x}$$

$$P(X) = \frac{2}{1-x} + 3x^2 + 6x + 1$$

$$P(x) = \frac{1+x+x^2+x^3}{1-x}$$

4. Cari a_n dengan Fungsi pembangkit biasa P(x) dimana, P(x) = $(1+10x^2)(1+2x+3x^2+4x^3+...)$
5. Cari a_n jika P(x) Fungsi pembangkit eksponensial barisan (a_n) dan k adalah bilangan bulat positif.

   a. $P(x) = \dfrac{2e^{5x}}{2-3x}$

   b. $P(x) = \dfrac{1+2x+x^2}{e^{2x}}$

   c. $P(x) = \dfrac{1+e^x}{(1+x-6x^2)^k}$
6. Tentukan bentuk sederhana Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n) dengan;

   a. $a_n = \dfrac{2}{n+1}$

   b. $a_n = \dfrac{2}{n!}$

   c. $a_n = n+2$

   d. $a_n = n(n+1)$

   e. $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$

   f. $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n!}$

2). Fungsi Pembangkit Eksponensial barisan $(a_n) = (n)$ adalah

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{x^n}{n!} = x\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = xe^x \text{ (dari identitas 2.1.1)}$$

CATATAN :

Penjumlahan, pengurangan maupun perkalian dua fungsi pembangkit atau lebih, dapat dilakukan dengan cara yangsama seperti halnya menjumlah , mengurangkan ataupun mengalikan dua polynomial atau lebih. Dengan demikian, diperoleh pernyataan berikut.

Jika A(X) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan B(X) = $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$,

maka

A(X) $\pm$ B(X) = $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n \pm b_n x^n)$ (2.2.3)

Selanjutnya , dari nperkalian antara A(X) dan B(X), diperoleh

A(X) . B(X) = $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots) (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n + \ldots)$

$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1b_0)x + (a_0 b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) x^2 + \ldots + (a_0 b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_kb_{n-k} + \ldots + a_n b_0)x^n + \ldots$

Dengan demikian,diperoleh formula berikut.

$(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}) x^n$ (2.2.4)

Jika (a_n), (b_n), dan (c_n) adalah barisan-barisan bilangan real sedemikian hingga $c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_kb_{n-k}$, maka kita katakana (c_n) adalah konvolusi dari (a_n) dan (b_n), yang di tulis $(c_n) = (a_n) * (b_n)$

Contoh 2.2.2 :

Cari barisan (c_n) dengan fungsi pembangkit biasa P(x) = $\frac{x^5 + x^6}{1-x}$

<u>Penyelesaian :</u>

Missal P(x) = $(x^5 + x^6)(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{n} c_nx^n$

Jelas bahwa $x^5 + x^6$ adalah fungsi pembangkit biasa dan barisan (a_n) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, …). Selanjutnya dari formula (2.1.2) dan definisi fungsi pembangkit kita ketahui bahwa , $(1 - x)^{-1}$ adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan (b_n) = (1, 1, 1, ..) sehingga dari formula (2.2.4), diperoleh:

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$ (karena $b_i = 1$, untuk setiap i).

Dengan demikian (c_n) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, …, 2,…) atau

$$\boxed{c_n = \begin{cases} 0, & 0 \le n \le 4 \\ 1, & n = \end{cases}}$$

Contoh 2.2.3 :

Cari barisan bilangan real (a_0 = 1, a_1, a_2, a_3, ...) yang memenuhi $\sum_{k=0}^{n} a_n a_{n-k} = 1$, untuk semua n ∈ { 0, 1, 2, 3, ...}.

Penyelesaian:
Misal $P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ adalah FPB barisan (a_n). Dengan mengkuadratkan P(x), diperoleh

$[P(x)]^2 = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k})\, x^n$ (dari (2.2.4))

$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (karena $\sum_{k=0}^{n} a_n a_{n-k} = 1$)

$= \frac{1}{1-x}$, untuk $|x| < 1$. (dari (2.1.2))

Dengan demikian,

$P(x) = (1-x)^{1/2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n$ (dari (2.1.4))

Jadi,barisan yang dimaksud adalah (a_n), dengan

$a_n = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$

$$\begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1^n \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-2n-\frac{1}{2}\right)}{n!} & n > 0 \end{cases}$$

Contoh 2.2.4 :

Jika $P(x) = e^{3x}/ 1+5x$ adalah fungsi pembangkit eksponensial barisan (a_n), tentukan nilai a_n

Penyelesaian :

Karena P(x) fungsi pembangkit eksponensial barisan (a_n),berdasarkan definisi, $P(x) = \sum_{n=0}^{n} a_n \frac{x^n}{n!}$ sehingga a_n adalah koefisien $\frac{x^n}{n!}$ dalam P(x)

$P(x) = \frac{e^{3x}}{1+5x} = e^{3x} \cdot \frac{1}{1+5x}$

$= (\sum_{n=0}^{n} (3)^n \frac{x^n}{n!}) (\sum_{n=0}^{n} (5)^n x^n)$ (dari 2.1.1 dan 2.1.2)

$= \sum_{n=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} (-5)^{n-k}\right) x^n$ (dari 2.2.4)

$\sum_{n=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} (-5)^{n-k}\right) n! \frac{x^n}{n!}$

Dengan demikian,

$\left(\frac{3^k}{k!} (-5)^{n-k}\right) n!\,, n \geq 0$

SOAL FUNGSI PEMBANGKIT

7. Pada barisan - barisan berikut, carilah Fungsi Pembangkit Biasa dan sederhanakanlah ;

a.	(0,0,0,1,1,1,1,…)	f.	(0,0,0,1,1,1,1,…)
b.	(0,1,0,1,0,1,0,…)	g.	(0,1,0,1,0,1,0,…)
c.	(0,2,0,2,0,2,0,…)	h.	(0,2,0,2,0,2,0,…)
d.	(3,2,3,2,3,2,3,…)	i.	(3,2,3,2,3,2,3,…)
e.	(2,4,2,4,2,4,2,…)	j.	(2,4,2,4,2,4,2,…)

8. Pada barisan - barisan berikut, carilah Fungsi Pembangkit Eksponensial dan sederhanakanlah ;

a.	(3,3,3,3,3,3,3,…)	f.	(2,4,2,4,2,4,2,…)
b.	(4,4,4,4,4,4,4,…)	g.	(2,4,2,4,2,4,2,…)
c.	(0,2,0,2,0,2,0,…)	h.	(2,4,2,4,2,4,2,…)
d.	(3,2,3,2,3,2,3,…)	i.	(2,4,2,4,2,4,2,…)
e.	(2,4,2,4,2,4,2,…)	j.	(2,4,2,4,2,4,2,…)

9. P(x) merupakan Fungsi Pembangkit Eksponensial dari barisan (a_n). Carilah barisan a_n tersebut ;

$$P(X) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$P(X) = 2x + \frac{1}{2-2x}$$

$$P(X) = \frac{x^5}{1+8x}$$

$$P(X) = \frac{2}{1-x} + 3x^2 + 6x + 1$$

$$P(x)=\frac{1+x+x^2+x^3}{1-x}$$

10. Cari a_n dengan Fungsi pembangkit biasa P(x) dimana, P(x) = $(1+10x^2)(1+2x+3x^2+4x^3+...)$
11. Cari a_n jika P(x) Fungsi pembangkit eksponensial barisan (a_n) dan k adalah bilangan bulat positif.

d. $P(x)=\frac{2e^{5x}}{2-3x}$

e. $P(x)=\frac{1+2x+x^2}{e^{2x}}$

f. $P(x)=\frac{1+e^x}{(1+x-6x^2)^k}$

12. Tentukan bentuk sederhana Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n) dengan;

g. $a_n=\frac{2}{n+1}$

h. $a_n=\frac{2}{n!}$

i. $a_n=n+2$

j. $a_n=n(n+1)$

k. $a_n=\frac{n+1}{n!}$

l. $a_n=(-1)^n\frac{1}{n!}$

13. Carilah a_n jika G(x) Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n).

a. $G(x)=(5+5x+5x^2+...)e^x$

b. $G(x)=(e^x++e^{3x})^2$

c. $G(x)=\frac{1}{1-5x}.e^{3x}$

d. $G(x)=\left(\frac{2x}{1+x}\right)^{100}$

14. Ada berapa cara menhgambil 100 huruf dari huruf –huruf pembentuk kata KOMBINATORIKA sedemikian sehingga setiap konsonan terpilih paling banyak

3.3 Fungsi Pembangkit Untuk Kombinasi

Misalkan terdapat tiga macam obyek berbeda a, b, dan c katakan. Kita diperkenankan memilih : 0, 1, atau 2 obyek a; dan 0 atau 1 obyek b; dan 0 atau 1 obyek c. Pertanyaan yang muncul ialah ada berapa cara memilih k obyek ?

Untuk menjawab pertanyan ini, akan diterapkan fungsi pembangkit. Misalkan t_k menyatakan banyaknya cara memilih k obyek. Kita coba menyelesaikan masalah ini dengan fungsi pembangkit biasa $P(x) = \sum t_k\, x^k$. Karena obyek a dapat dipilih 0, 1, atau 2 kali; obyek b dapat dipilih 0 atau 1 kali; dan obyek c dapat dipilih 0 atau 1 kali, maka ekspresi yang dipakai adalah :

$$[(ax)^0 + (ax)^1 + (ax)^2][(bx)^0 + (bx)^1][(cx)^0 + (cx)^1] \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

Perhatikan bahwa $(ax)^0$mengindikasikan bahwa obyek a tidak terpilih, $(ax)^1$ mengindikasikan bahwa obyek a terpilih satu kali; $(ax)^2$ mengindikasikan bahwa obyek a terpilih 2 kali; demikian pula $(bx)^0$ mengindikasikan kemungkinan obyek b tidak terpilih; dan seterusnya.

Selanjutnya, ekspresi (2.3.1) dapat disederhanakan menjadi :

$(1 + ax + a^2 x^2)(1 + bx)(1 + cx)$, dan setelah dijabarkan diperoleh :

$$1 + (a + b + c)x + (ab + bc + ac + a^2)x^2 + (abc + a^2b + a^2c)x^3 + a^2bcx^4$$

Perhatikan, koefisien x^3 dalam (2.3.2) memberikan semua kemungkinan memilih 3 obyek (dengan syarat yang diperkenankan) yaitu : a, b, dan c; atau a, a, dan b atau a, a, dan c.

Demikian pula koefisien dari x^2 memberikan semua kemungkinan memilih dua obyek yaitu : a dan b; atau b dan c; atau a dan c atau a dan a. hal yang sama berlaku untuk koefisien-koefisien yang lain. Setiap suku dan koefisien x^3. Agar setiap suku bernilai 1, salah cara yang mudah adalah dengan mensubtitusi nilai a, b, dan c masing-masing dengan 1. Jika a, b, dan c dalam (2.3.2) masing-masing disubtitusikan dengan 1, diperoleh ekspresi berikut.

$$P(x) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4$$

$= (1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x)$

Selanjutnya, P (x) disebut fungsi pembangkit dari permasalahan menentukan banyaknya cara memilih k obyek dari 3 macam obyek berbeda, dimana obyek pertama (obyek a) bisa dipilih sebanyak-banyaknya 2; obyek kedua (obyek b) bisa dipilih sebanyak-banyaknya 1; dan obyek ketiga (obyek c) bisa dipilih tidak lebih dari 1. Perhatikan bahwa banyak cara memilih 3 obyek sama dengan koefisien x^3, yaitu 3. Begitu juga, banyak cara memilih 2 obyek sama dengan koefisien x^2, yaitu 4.

Tampak bahwa, koefisien x^k dalm P (x) menyatakan banyak cara memilih k obyek dengan syarat yang ada.

Secara umum diperoleh :

Misalkan terdapat p tipe obyek berbeda: dan terdapat n_1 obyek tipe 1, n_2 obyek tipe 2, . . ., n_p obyek. Missal tk menyatakan banyaknya cara mengambil k obyek dimana dibolehkan mengambil sembarang banyak tiap tipe. Fungsi pembangkit untuk t_k adalah$P(x) = \sum t_k x^k$ dengan

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n_1})(1 + x + x + x^2 + \dots + x^{n_2})(1 + x + x + x^2 + \dots + x^{n_p})$$

Bilangan t_k diberikan oleh koefisien x^k dalm P(x).

Contoh 2.3.1 :

Tentukan banyak cara memilih r obyek dari n obyek berbeda, dimana pengulangan tidak diperkenankan.

Penyelesaian :

Terdapat n obyek berbeda. Karena pengulangan tidak diperkenankan, maka setiap obyek dapat dipilih 0 atau 1 kali saja. Sehingga fungsi pembangkit dari permasalahan tersebut adalah :

$$P(x) = \underbrace{(1 + x)(1 + x)(1 + x) \dots (1 + x)}_{n\text{-}faktor}$$

$= (1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$ **(Teorema Binomial)**

Banyak cara (tanpa pengulangan) *r* obyek dari *n* obyek berbeda adalah koefisien x^r dalam P(*x*) yaitu $\binom{n}{r}$, dengan $0 \le r \le n$.

Contoh 2.3.2 :

Tentukan banyaknya cara memilih *r* obyek dari *n* dari obyek berbeda, dimana pengulangan diperkenankan.

Penyelesaian :

Missal t_r menyatakan banyak cara memilih *r* obyek. Karena ada *n* macam obyek berbeda dan tiap obyek dapat dipilih berulang (tanpa batas), maka fungsi pembangkit untuk t_r ialah :

$$P(x) = (1 + \underbrace{x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots}_{n\text{-faktor}})$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots)^n$$

Karena, untuk $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$ **(lihat 2.1.2),** maka

$P(x) = (\frac{1}{1-x})^n$

$= (1 - x)^{-n}$

$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r x^r$ **(Teorema Binomial)**

Untuk $r > 0$ koefisien x^r dalam P (*x*) adalah :

$$\binom{-n}{r}(-1)^r = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{r!}(-1)^r$$

$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r\,!}$$

$$= \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots n}{r\,!}$$

$$= \frac{(n+r-1)}{r\,!\,(n-1)!}$$

$$= \binom{n+r-1}{r}$$

untuk $r = 0$, koefisien dari x^r dalam P (*x*) ialah :

$$\binom{-n}{o} = (-1)^0 = 1 = \binom{n+0-1}{0}$$

Sehingga, untuk $r \ge 0$,

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r = 1 = \binom{n+r-1}{r}$$

Dengan demikian,

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

Jadi banyaknya cara memilih *r* obyek dari *n* macam obyek berbeda dimana pengulangan diperkenankan, sama dengan koefisien x^r dalam P (*x*) yaitu :

$$t_r = \binom{n+r-1}{r}$$

CATATAN :

i. Dari penyelesaian soal diatas, diperoleh bahwa untuk bilangan bulat positif *n* berlaku

$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$ **(F 2.3.1)**

ii. Jika *n* bilangan bulat non negatif dan $x \neq 1$, mudah ditunjukkan identitas berikut.

$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ **(F. 2.3.2)**

CONTOH 2.3.3 :

Ada berapa cara mengambil huruf *k* dari huruf-huruf pembentuk kata SURABAYA sedemikian sehingga setiap konsonan terpilih paling sedikit satu dan setiap vokal terpilih paling banyak 10 ?

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa dalam kata SURABAYA terdapat 6 huruf yang berbeda yaitu ; 4 konsonan : S, R, B, Y, dan 2 vokal : U dan A. Karena setiap konsonan terpilih paling sedikit satu maka setiap konsonan tersebut berasosiasi dengan sebuah faktor ($x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$) dalam fungsi pembangkit. Selanjutnya, karena setiap vokal dapat dipilih sebanyak-banyaknya 10, maka setiap vokal tersebut berasosiasi dengan sebuah faktor ($1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}$). Dengan demikian fungsi pembangkit dari permasalahan di atas adalah :

P (*x*) = $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^4 (1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})^2$

$= \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^4 \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^2$ (*dari F 2.1.2 dan F 2.3.2*)

$= x^4 (1 - x^{11})^2 (1 - x)^{-6}$

$= (x^4 - 2x^{15} + 2x^{26}) (1 - x)^{-6}$

$= (x^4 - 2x^{15} + x^{26}) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^r$ (dari F 2.3.1)

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^{r+4} - 2\sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^{r+15} + \sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^{r+26}$$

$$= \sum_{r=4}^{\infty} \binom{r+1}{r+4} x^r - 2\sum_{r=15}^{\infty} \binom{r-10}{r-15} x^r + \sum_{r=26}^{\infty} \binom{r-21}{r-26} x^r$$

Banyak cara yang dimaksud = koefisien x^k dalam P (x).

$$= \begin{cases} 0, & jika\ k < 4 \\ \binom{k+1}{k-4}, & jika\ 4 \le k \le 14 \\ \binom{k+1}{k-4} - 2\binom{k+10}{k-15}, & jika\ 15 \le k \le 25 \\ \binom{k+1}{k-4} - 2\binom{k+10}{k-15} + \binom{k-21}{k-26}, & jika\ k \ge 26 \end{cases}$$

CATATAN :

Dari contoh 2.3.1, 2.3.2, dan 2.3.3, kita lihat bahwa fungsi pembangkit tidak tergantung dari banyaknya obyek yang diambil secara secara keseluruhan tetapi hanya tergantung pada syarat-syarat banyak tiap obyek boleh diambil.

Fungsi Pembangkit Biasa dapat digunakan untuk memecahkan masalah pendistribusian (penempatan) obyek-obyek yang identik ke dalam sel-sel (kotak-kotak) yang berbeda.

Contoh 2.3.4 :

Dengan berapa cara 60 obyek yang identik dapat ditempatkan di dalam 4 sel (kotak) yang berbeda sedemikian hingga :

(i) setiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek ?

(ii) setiap sel (kotak) mendapat paling sedikit 10 obyek dan tak lebih dari 20 obyek ?

Penyelesaian :

(i) karena ada 4 kotak dan setiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek, maka fungsi pembangkit untuk permasalahan tersebut adalah :

$$\begin{aligned} P\,(\,x\,) &= (x + x^2 + x^3 + \cdots)^4 \\ &= x^4 \left(\frac{1}{1-x}\right)^4, untuk\ |x| < 1, \qquad (\,dari\ 2.1.2\,) \\ &= x^4 \sum_{r=0}^{\infty} \binom{4+r-1}{r} x^r (\,F\ 2.3.1) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^{r+4} \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya cara menempatkan 60 obyek yang identik ke dalam 4 kotak yang berbeda sedemikian hingga tiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek adalah koefisien

$X^{60} dalam\ P\ (x\ ), yaitu\ \binom{56+3}{56} = \binom{59}{56} = 32.509.$

(ii) karena ada 4 sel berbeda dan setiap sel mendapat paling sedikit 10 obyek dan tak lebih dari 20 obyek, maka fungsi pembangkit untuk persoalan tersebut adalah :

$$\begin{aligned} P\,(\,x\,) &= (x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{20})^4 \\ &= x^{40}\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^4 \\ &= x^{40}(1-x^{11})^4(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

$$= x^{40}\sum_{s=0}^{4}\binom{4}{s}(-1)^s x^{11s}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+3}{r}x^r$$

Kita tertarik dengan koefisien x^{60} dalam P (x). Untuk itu kita cari bilangan bulat s dan r, sedemikian hingga ;

$40 + 11s + r = 60, 0 \leq s \leq 4 , r \geq 0$.

Nilai s dan r yang memenuhi adalah

S = 1 dan r = 9; atau s = 0 dan r = 20.

Sehingga, banyaknya cara yang dimaksud adalah koefisien dari X^{60} dalam P (x), yaitu

$$\binom{4}{0}\binom{20+3}{20} + (-1)\binom{4}{1}\binom{9+2}{9}$$
$$= 1771 - 880 = 891$$

Fungsi pembangkit biasa juga di dapat digunakan untuk menentukan banyaknya penyelesaian (solusi) bulat dari suatu persaamaan linear beberapa peubah dengan syarat tertentu.

Contoh 2.3.5

Tentukan banyaknya solusi bulat dari persamaan berikut :

$X_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$, $x_i \geq 0$; i ϵ { 1, 2, 3, 4, 5 }

<u>Penyelesaian :</u>

Perhatikan bahwa (0, 0, 0, 25, 75) adalah salah satu solusi bulat yang dimaksud. Begitu pula (0, 5, 20, 5, 70), (2, 3, 7, 28, 60) adalah solusi-solusi bulat dari persamaan tersebut. Karena dalam persamaan tersebut terdapat 5 peubah, maka fungsi pembangkit dari permasalahan memuat 5 faktor. Selanjutnya, karena setiap peubah $X_1 \geq 0$, maka setiap faktor dari kelima faktor dalam fungsi pembangkit tersebut adalah : ($1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$). Sehingga fungsi pembangkit dari persamaan di atas adalah :

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^5.$$
$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 untuk\ |x| < 1 = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{5+r-1}{r}x^r.$$

Banyaknya solusi bulat yang dimaksud adalah koefisien dalam x^{100} dalam P (x) yaitu

$$\binom{5+100-1}{100} = \binom{104}{100} = 4598126.$$

3.4 fungsi pembangkit untuk permutasi

Fungsi pembangkit biasa memberikan pendekatan yang mudah dan sisstematis untuk memecahkan masalah-masalah umum yang melibatkan kombinasi ataupun pendistribusian obyek-obyek yang identik ke dalam sel-sel yang berbeda. Pada bagian ini kita akan menerapkan teknik serupa untuk memecahkan masalah-masalah umum yang melibatkan permutasi ataupun pendistribusian obyek-obyek yang berbeda ke dalam sel-sel yang berbeda. Untuk maksud ini, proposisi berikut penting.

Proposisi 2.4.1 :

Misalkan terdapat k_1 obyek tipe satu, k_2 obyek tipe dua, ... , dan k_n obyek tersebut dipermutasi, maka banyak permutasi yang mungkin adalah :

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} k_i)!}{k_1!\,k_2!\,...\,k_n!}$$

Bukti :

Jika semua obyek berbeda, maka terdapat $(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ Jajaran (permutasi). Tapi obyek-obyek kita tidak semuanya berbeda, sehingga bilangan ini terlalu besar. Pikirkan sebuah jajaran dari terdapat $\sum_{i=1}^{n} k_i$ obyek yang berbeda. Jika kita ganti k_i! Obyek tipe i yang berbeda dengan k_i obyek yang identik, maka k_i! Jajaran akan sama. Karena $1 \leq i \leq n$, kita harus membagi bilangan total penjajaran yang mungkin dengan $k_1!$, $k_2!$, ... , $k_n!$.

Sebagai contoh, banyaknya cara mengajar (banyaknya permutasi) dari unsure-unsur { a,a,a,b,b } atau banyak permutasi dari { a,a,a,b,b } adalah $\frac{5!}{3!2!} = 10$, yaitu aaabb, aabab, abaab, baaab, baaba, babaa, bbaaa, aabba, abbaa, ababa. Mudah diselidiki bahwa hanya terdapat $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$; permutasi dari { a, b, b, c, c }.

Selanjutnya, mari kita tinjau permasalahan berikut .

Berapakah banyak kata sandi dengan panjang k yang dibentuk dari tiga huruf yang berbeda yaitu a, b, dan c dengan syarat setiap kata sandi memuat paling banyak satu b, paling banyak satu c, dan sampai tiga a ?

Yang dimaksud dengan panjang suatu kata sandi adalah banyaknya huruf dalam katra sandi tersebut. Perhatikan bahwa “ urutan “ huruf-huruf dalam kata sandi diperhatikan. Sehingga kita lebih tertarik dengan perhitungan permutasi daripada kombinasi. Walau begitu, kita mulai dengan perhitungan kombinasi, banyaknya cara untuk mendapatkan k huruf bila diperkenankan mengambil paling banyak satu b, paling banyak satu c dan paling banyak tiga a. untuk itu, seperti telah dibahas sebelumnya, fungsi pembangkit dari permasalahan menentukan banyak cara memilih k huruf (dengan syarat yang ditentukan) adalah :

$(1 + a x + a^2 x^2 + a^3 x^3)(1 + b x)(1 + c x)$.

Setelah dijabarkan dan disederhanakan diperoleh,

$1 + (a + b + c)x + (a^2 + ab + ac + bc)x^2 + (a^3 + abc + a^2b + a^2c)x^3 + (a^2bc + a^3b + a^3c)x^4 + a^3bcx^5$ **(2.4.1)**

Koefisien X^k dalam (2.4.1) menginformasikan semua cara yang mungkin untuk mendapatkan k huruf. Misalnya, terdapat tiga cara memilih 4 huruf yaitu: {a,a,b,c}; atau {a,a,a,b}; atau {a,a,a,c}.

Menurut proporsi 2.4.1, jika dipilih {a,a,b,c}, terdapat $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ permutasi yang bersesuaian, yaitu:

aabc, aacb, abac, abca, acab, acba,

bcaa, baac, baca, cbaa, caab, caba.

Jika dipilih {a,a,a,b}, terdapat $\frac{4!}{3!1!} = 4$ permutasi yang bersesuaian, yaitu: aaac, aaba, abaa, dan baaa.

Dan untuk {a,a,a,c}, terdapat $\frac{4!}{3!1!} = 4$ permutasi yang bersesuaian yaitu: aaac, aaca, dan caaa.

Dengan demikian, banyak kata sandi dengan panjang 4 yang dapat dibentuk adalah

$$\frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{3!1!}. \qquad (2.4.2)$$

Pertanyaan yang menarik adalah bagaimanakah kia dapat memperoleh bilangan (2.4.2) tersebut tanpa harus mendaftar semua kata sandi dengan panjang 4? Jelas FPB tidak bias dipakai dalam hal ini. Untuk itu kita coba menggunakan FPE. Dalam hal ini, ekspresi $\frac{(ax)^p}{p!}$ berarti banyaknya huruf a dalam kata sandi tersebut adalah p. Begitu juga, ekspresi $\frac{(bx)^p}{p!}$ dan $\frac{(cx)^p}{p!}$, secara berturut-turut, berarti banyak huruf b dan c dalam kata sandi tersebut adalah q dan r.

Dengan demikian fungsi pembangikit dari permasalahan menjadi:

$$P(x)=\left(1+\frac{ax}{1!}+\frac{a^2x^2}{2!}+\frac{a^3x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{bx}{1!}\right)\left(1+\frac{ax}{1!}\right)$$
$$=1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!}\right)x+\left(\frac{a^2}{2!}+\frac{ab}{1!1!}+\frac{ac}{1!1!}+\frac{bc}{1!1!}\right)x^2+\left(\frac{a^2}{3!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{a^2b}{2!1!1!}+\frac{a^2c}{1!1!}\right)x^3+$$
$$\left(\frac{a^2bc}{2!1!1!}+\frac{a^3b}{3!1!1!}+\frac{a^3c}{3!1!1!}\right)x^4+\frac{a^3bc}{3!1!1!}x^5$$

Setelah a, b dan c masing-masing diganti dengan 1, diperoleh

$$P(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)x+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{1!1!}\right)x^2+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{1!1!1!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{1!1!}\right)x^3+ \quad \textbf{(2.4.3)}$$
$$\left(\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{3!1!1!}+\frac{1}{3!1!1!}\right)x^4+\frac{1}{3!1!1!}x^5$$

Ternyata skematik ini belum merupakan skematik yang memuaskan, karena karena koefisien x^4 dalam (2.4.3) belum identik dengan (2.4.2). akan tetapi skematik jalan, bila kita piker ini sebagai fungsi pembangkit eksponensial dengan memperhatikan koefisien dari $\frac{x^k}{k!}$ sehingga (2.4.3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)x+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{1!1!}\right)2!\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{1!1!1!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{1!1!}\right)3!\frac{x^3}{3!}$$
$$+\left(\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{3!1!1!}+\frac{1}{3!1!1!}\right)4!\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{3!1!1!}5!\frac{x^5}{5!}$$
(2.4.4)

Terlihat bahwa (2.4.2) sama dengan koefisien $\frac{x^4}{4!}$ dalam (2.4.4) selanjutnya, P(X) pada (2.4.4) merupakan Fungsi Pembangkitan dari permasalahan diatas. Koefisien $\frac{x^4}{k!}$ dalam P(X), menyatakan banyaknya kata sandi (permutasi) dengan penjang k yang dapat dibentuk dengan aturan yang telah ditetapkan.

Sebagai contoh, terdapat $4!\left(\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{3!1!}\right)=20$ kata sandi dengan panjang 4;

Dan $3!\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{1!1!1!}+\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{2!1!}\right)=13$ kata sandi dengan panjang 3.

Sebagai generalisasi uraian diatas, diperoleh proposisi berikut.

Proposisi 2.4.2

Missal terdapat p macam(tipe) obyek dengan ni obyek tipe-i untuk $1 \leq i \leq p$. *Maka banyaknya permutasi-k sedemikian hingga dalam setiap permutasi terdapat paling banyak ni obyek tipe-I sama dengan koefisien* $\frac{x^4}{k!}$ *dalam Fungsi*

Pembangkit Eksponensial berikut:

$$P(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + x + \dots \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\dots\left(1 + x + \dots \frac{x^{n_p}}{n_p!}\right)$$

Proporsi berikut penting dalam pemecahan permasalahan yang melibatkan Fungsi Pembangkit Eksponensial.

Proporsi 2.4.3

$$(i)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^n = 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots$$

$$(ii)\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(iii)\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Bukti: *(Latihan)*

Untuk contoh selanjutnya, kita perlu definisi berikut. Barisan kuarternair adalah barisan yang unsur-unsurnya hanya menggunakan angka-angka 0,1,2,3. Barisan kuartenair r-angka adalah barisa kuartenair dengan panjang r. Misalnya, 1200323 atau 3101121 adalah barisan kuartenair 7-angka.

Sedangkan barisan binair adalah barisan yang unsur-unsurnya hanya menggunakan angka 0 atau 1. Barisan binair r-angka adalah barisan binair dengan panjang r. misalnya, 101001 atau 100111 adalah barisan binair 6-angka.

Contoh 2.4.1:

a) Berapakah banyaknya barisan kuartenair r-angka yang memuat paling sedikit satu 1, paling seikit satu 2, dan paling seidkit satu 3?
b) Ada berapa barisan binair r-angka yang memuat 0 sbanyak genap dan 1 sebanyak genap pula?

Penyelesain:

a) Pada barisan kuartenair, secara umum terdapat 4 angka yang berbeda, yaitu 0, 1, 2, dan 3. Angka 0 bisa muncul 0 kali, 1 kali, 2 kali, dan seterusnya; sedangkan untuk setiap angka 1, 2 atau 3 dapat muncul paling sedikit sekali, dan urutan angka dalam suatu barisan diperhatikan, maka untuk menjawab permasalahan diatas kita gunakan Fungsi Pembangkit Eksponensial berikut:

$$P(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^3$$

$$= e^x(e^x - 1)^3 = e^x(e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1)$$

$$= e^{4x} - 3e^{3x} + 3e^{2x} - e^x$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(4x)^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x)^r}{r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2x)^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

Banyaknya barisan= koefisien dari $\frac{x^r}{r!}$ dalam P(x)

$4^r - 3.3^r + 3.2^r - 1 \qquad ; r \geq 0$

$4^r - 3^{r+1} + 3.2^r - 1 \qquad ; r \geq 0$

b) Disini ada dua angka yang berbeda yaitu 0 dan 1. Karena 0 dan 1 muncul sebanyak bilangan genap pada setiap barisan, maka fungsi pembangkit dari persoalan tersebut adalah:

$$P(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \text{ (Proposisi 2.4.3)}$$

$$= \frac{e^x + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots) + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(Proposisi 2.4.2)}$$

$$= 1 + 2\frac{x^2}{2!} + 2^3\frac{x^4}{4!} + 2^5\frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Banyaknya barisan yang dimaksud adalah koefisien $\frac{x^r}{r!}$ dalam P(x), yaitu a_r, dengan

$$a_r = \begin{cases} 0, \text{ bila r ganjil} \\ 1, \text{bila r} = 0 \\ 2^{r-1}, \text{bila r genap dan R} > 0 \end{cases}$$

Contoh 2.4.2 :

Misalkan S adalah himpunan semua barisan ternair n-angka. Jika sebuah barisan dipilih secara acak dari S, berapakah peluang barisan yang terpilih memuat angka 0 sebanyak ganjil dan angka 1 sebanyak genap?

Penyelesaian :

Misalkan A adalah himpunan bagian S sedemikian hingga setiap anggota A memuat angka 0 sebanyak ganjil dan angka 1 sebanyak genap. Misal kardinalitas S adalah |S| dan kardinalitas A adalah |A|.

Fungsi Pembangkit untuk mencari |S| adalah

P(x) =
Sehingga |S| =
Fungsi Pembangkit untuk mencari |A| adalah

$$P(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times e^x$$

Sehingga |A|=
Dengan demikian,

$$P_{rob}(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right), untuk\ \mathrm{n} \geq 0$$

Jadi banyak carra yang dimaksud adalah :

$$\sum_{k+0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r .$$

(b) karena n sel identik, maka jawaban (a) harus dibagi n! Jadi banyak cara mendistribusikan r macam obyek yang berbeda ke dalam n sel yang identik sedemikian hingga setiap sel memperoleh paling sedikit satu obyek ialah :

$$S(r,n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r$$

S(r,n) dikenal sebagai “bilangan Strling ke-dua”. Perhatikan untuk n>r, S(r,n)=0, sebab tidak ada cara menempatkan r macam obyek ke dalam n>r sedemikian hingga tiap sel memperoleh paling sedikit satu macam obyek.

SOAL LATIHAN-2

1. Carilah nilai a_n, jika P(x) merupakan Fungsi Pembangkit Eksponensial barisan (a_n).

a. $P(x) = 5+5x+5x^2+5x^3+...$

b. $P(x) = e^x+e^{4x}$

c. $P(x) = \frac{1}{1-4x}$

d. $P(x) = (1+x^2)^k$

2. Cari kovolusi dari pasang barisan berikut!

   a. (1,1,1,1,...) dan (1,1,1,1,...)

   b. (1,1,1,1,...) dan (0,1,1,2,3,...)

   c. (1,1,1,0,0,...) dan (0,1,2,3,...)

   d. (0,0,0,1,0,0,...) dan (6,7,8,9,...)

3. Misal $P(x) = \frac{1+x+x^2+x^3}{1-x}$ adalah Fungsi Pembangkit biasa dari barisan (a_n).Tentukan a_n!

4. Cari a_n dengan Fungsi pembangkit biasa P(x) dimana, $P(x) = (1+10x^2)(1+2x+3x^2+4x^3+...)$

5. Cari a_n jika P(x) Fungsi pembangkit eksponensial barisan (a_n) dan k adalah bilangan bulat positif.

   g. $P(x) = \frac{2e^{5x}}{2-3x}$

   h. $P(x) = \frac{1+2x+x^2}{e^{2x}}$

   i. $P(x) = \frac{1+e^x}{(1+x-6x^2)^k}$

6. Misal A(x) dan B(x) berturut-turut adalah Fungsi Pembangkit Biasa dari barisan (a_n) dan (b_n). Tulis A(x) dalam B(x) jika;

   a. $a_n = \begin{cases} 1, \textit{jika } n = 0 \\ 4, \text{ jika } n = 2 \\ b_n, \text{ jika } n \neq 0,2 \end{cases}$

b. $a_n = \begin{cases} 0, \textit{jika } \text{n} = 0 \text{ atau n} = 1 \\ \sum_{k=0}^{\text{n-2}} \text{b}_\text{k}, b_{n-k-2}, n \neq 2 \end{cases}$

$b_0=0, b_2=2$

7. Tulis Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n) jika untuk $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

8. Tentukan bentuk sederhana Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n) dengan;

m. $a_n = \frac{2}{n+1}$

n. $a_n = \frac{2}{n!}$

o. $a_n = n+2$

p. $a_n = n(n+1)$

q. $a_n = \frac{n+1}{n!}$

r. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n!}$

9. Carilah a_n jika G(x) Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n).

e. $G(x) = (5 + 5x + 5x^2 + \ldots)e^x$

f. $G(x) = (e^x + +e^{3x})^2$

g. $G(x) = \frac{1}{1-5x}.e^{3x}$

h. $G(x) = \left(\frac{2x}{1+x}\right)^{100}$

10 Tentukan banyaknya cara memilih k huruf dari huruf-huruf C, A, N, T, I, K sedemikian sehingga :

a) Memuat paling sedikit satu C
b) Memuat tepat satu C dan paling banyak 5A
c) Setiap kosonan terpilih
d) Setiap vocal terpilih paling sedikit 10 dan konsonan T dan K masing-masing terpilih tidak lebih dari 20.

10. Ada berapa cara menhgambil 100 huruf dari huruf –huruf pembentuk kata KOMBINATORIKA sedemikian sehingga setiap konsonan terpilih paling banyak 20 ?
11. Sebanyak n koin (mata uang logam) yang identik di tempatkan di dalam k kotak yang berbeda. Berapa probabilitasnya, bahwa setiap kotak mendapat paling sedikit satu koin ?
12. Seorang manager dari suatu perusahaan yang bergerak di bidang transportasi merencanakan membeli 3 jenis kendaraan baru, sedan, bus dan truk. Sang manajer ingin membeli n buah kendaraan baru yang terdiri dari paling sedikit satu sedan, paling sbanyak 10 bus dan sekurang-kurangnya 2 tapi tak lebih dari 15 truk. Ada berapa cara hal ini dapat dilakukan, jika dua kendaraan sejenis tidak dibedakan ?
13. Sebuah team tingkat nasional yang beranggotakan 100 orang dipilih dari orang-orang di ke 27 Propinsi yang ada di Indonesia sedemikian hingga tiap propinsi diwakili oleh paling sedikit dua dan paling banyak 10 orang
14. Ada berapa cara untuk menempatkan 50 koin yang sama ke dalam 5 kotak berbeda sedemikian hingga
    a) Tidak ada kotak yang kosong
    b) Setiap kotak medapat paling sedikit 5 dan paling banyak 25 koin
    c) Tiga kotak pertama masing-masing mendapat paling sedikit 10 koin
15. Terdapat beberapa cara untuk membagi p buah apel (yang identik) kepada q anak, sedemikan hingga :
    a) Setiap anak memeproleh paling sedikit 5 apel
    b) Setiap anak mendapat tidak lebih dari 100 dan tidak kurang dari 10 apel
16. Tentukan banyaknya "solusibulat" dari setiap persamaan berikut :
    a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60, 1 \leq x \leq, \forall\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$
    b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50,\ x1 \geq 3, \forall\ i \in \{1, 2, 3\}$
    c) $x_1 + x_2 + x_3 + . . . + x_4 = k,\ x_1 \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$; k bulat
17. Sebuah kata sandi yang panjangnya k dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf a, b, dan c sedemikian hingga memuat paling sedikit satu a, satu b, dan satu c. ada berapa kata sandi yang dapat dibentuk ?
18. Tentukan banyak barisan binair n-angka memuat :
    a) Angka "1" paling sedikit dua
    b) Angka "0" sebanyak bilangan genap dan angka "1" paling sedikit satu.

c) Angka”1” sebanyak bilangan ganjil dan anka “0” sebanyak bilangan genap.

d) Angka “1” sebanyak bilangan genap.

19. Tentukan banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat

a) Angka “0” sebanyak ganjil dan “1” sebanyak genap.

b) Angka “0” dan “1” masing-masing sebanyak genap dan “2” sebanyak ganjil.

c) Angka “0”, “1”, dan “2” masing-masing sebanyak genap.

d) Angka “0”, “1”, dan “2” masing-masing sebanyak ganjil.

20. Tentukan banyaknya barisan quartenair n-angka yang memuat

a) Angka “0” dan “1” masing-masing genap dan angka “2” dan “3” masing-masing ganjil.

b) Angka “1” paling sedikit satu, dan angka-angka yang lain masing-masing ganjil.

21. Tentukan banyak cara menempatkan n orang yang berbeda di dalam 100 kamar berbeda sedemikian hingga

a) Tidak ada kamar kosong

b) Tiap kamar berisi paling sedikit satu dan paling banyak dua orang

22. Misalkan S adalah himpunan semua bilangan bulat 10-angka yang dibentuk dari angka-angka: ‘1’, ‘2’, ‘3’, ‘4’, dan ‘5’. Jika sebuah bilangan dipilih secara acak dari S, berapakah peluang bilangan tersebut memuat angka ‘1’ sebanyak genap dan angka ‘2’ sebanyak ganjil ?

23. Misalkan S_n adalah semua kata sandi dengan panjang n yang dibentuk dari huruf-huruf dalam kata “RAHASIA”.

a) Ada berapakah kata sandi dalam S_n ?

b) Ada berapakah kata sandi yang memuat huruf dalam S_n ?

c) Ada berapakah kata sandi yang memuat setiap konsumen dalam S_n ?

24. Sebanyak n bola ditempatkan dalam k kotak. Berapakah peluang kotak pertama dan kotak terakhir tak kosong, jika :

a) Bola-bola identik dan kotak-kotak berbeda?

b) Bola-bola berbeda dan kotak-kotak berbeda?

c) Bola-bola berbeda dan kotak-kotak identik?

BAB IV RELASI REKURSIF

4.1 Pendahuluan

Relasi rekursif adalah suatu topic penting dan menarik dalam Kombinatorik. Banyak permasalahan dalam matematika , khususnya kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif. Sebagai ilustrasi, ikuti uraian berikut. Misal p_n menyatakan banyaknya permutasi dari n obyek berbeda. Jelas $p_1 = 1$ karena hanya ada satu permutasi dari 1 obyek. Untuk $n \geq 2, p_n$ diperoleh dengan cara berikut. Terdapat n kemungkinan posisi dari suatu obyek tertentu dan setiap kemungkinan posisi dari obyek ini akan diikuti oleh permutasi dari $n-1$ obyek. Karena banyaknya permutasi dari $n-1$ obyek ini adalah $p_n - 1$, maka terdapat hubungan $p_n = n \;\; p_n - 1$

Dengan demikian ,

$$P_1 = 1, P_n = nP_{n-1}, n \geq 2 \quad \textbf{(3.1.1)}$$

Bentuk (3.1.1) disebut relasi rekursif untuk P_n, banyaknya permutasi dari n obyek. P_n = 1 disebut kondisi awal, sedangkan $P_n = nP_{n-1}$, disebut bagian rekursif dari relasi rekursif tersebut.

Sekarang perhatikan barisan bilang Fibonacci

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . .).

Misal F_n menyatakan suku ke – n dari barisan tersebut. Perhatian bahwa untuk $n \geq 3$ suku ke – n dari barisan adalah jumlah dua suku berurutan persis di depannya. Sehingga relasi rekursif untuk F_n dapat ditulis sebagai berikut :

$$F_1 = F_2 = 1; F_n = F_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2}; n \geq 3 \quad \textbf{(3.1.2)}$$

Dalam relasi ini terdapat du kondisi awl yaitu $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$, kiranya perlu dicatat bahwa kalau kondisi awal ini kita ubah nilainya, maka barisan Fibbonacci yang kita peroleh tentu akan berbeda dari barisan Fibonacci di atas.

Selanjutnya, misalkan n objek yang berbeda dijajar dalam satu baris. Kemudian kita permutasikan obyek – obyek tersebut dalam baris yang sama sedemikian hingga tidak ada obyek menempati tempatnya semula. Pertanyaannya adalah : ada berapa permutasi yang mungkin ? Jika dimisalkan banyaknya permutasi yang dimaksud adalah D_n, maka permasalahan ini dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif seperti berikut ini.

$$D_0 = 1; D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, n \geq 1 \quad \textbf{(3.1.3)}$$

Dalam hal ini $D_0 = 1$ adalah syarat awal , sedangkan $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ adalah bagian rekursif dari relasi rekursif (3.1.3)

Setelah memodelkan suatu masalah kedala bentuk relasi rekursif langkah selanjutnya adalah menyelesaikan relasi rekursif tersebut. Dalam bab ini akan dibahas beberapa tehnik untuk menyelesaikan suatu relasi rekursif. Misalnya relasi rekursif (3.1.2) dapat diselesaikan dengan metode “akar karakterisitik” , sedangkan relasi rekursif (3.1.3) lebih mudah diselesaikan dengan metode fungsi pembangkit. Kita juga akan bicarakan bagaimana menyelesaikan suatu system relasi rekursif. Di bagian akhir pada bab ini akan dibahas sebuah masalah kombinatorik yang dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif yang melibatkan konvolusi.

Soal – soal

1. Carilah lima suku pertama dari barisan yang didefinisikan oleh relasi – relasi rekursif berikut dan nilai awalnya.
   a. $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$
   b. $a_n = a_{n-1} + 3\, a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
   c. $a_n = na_{n-1} + n^2 a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$
   d. $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$
2. Carilah lima suku pertama dari barisan yang didefinisikan oleh relasi – relasi rekursif berikut dan nilai awalnya.
3.

4.2 Relasi Rekursif Linear Dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k adalah sebgai berikut :

$$a_n + h_1(n)a_{n-1} + h_2(n)a_{n-2} + \ldots + h_k(n)a_{n-k} = f(n)$$

Dengan $h_i(n)$ untuk setiap $i, 1 \leq i \leq k$ dan f(n) adalah fungsi – fungsi dalam n dan $h_k(n) \neq 0$

Jika f(n) = 0 maka relasi rekursif tersebut disebut *homogen* , jika tidak demikian disebut *nonhomogen*, selanjutnya jika untuk setiap $i \in \{1,2,3,\ldots,k\}, h_i(n) =$ konstanta, maka relasi rekursif tersebut dinamakan *relasi rekursif dengan koefisien konstanta* . Misalnya,

(i) $a_1 = a_2 = 0; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1, n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen derajat dua dengan koefisien konstanta

(ii) $a_1 = a_2 = 0; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$ adalah relasi rekursif lnear homogeny berderajat dua dengan koefisien konstanta

(iii) $a_0 = a_1 = 1; a_n = a_0 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + a_{n-1} a_0, n \geq 1$ adalah relasi rekursif non linear

(iv) $D_1 = 1; D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, n \geq 1$ adalah relasi rekursif nonhomogen derajat satu dengan koefisien bukn konstanta

Perlu dicatat bahwa suatu relasi rekursif berderajat k terdiri dari sebuah bagian rekursif dan k kondisi awal berurutan. Relasi rekursif demikian mendefinisikan tepat satu fungsi solusi.

4.2.1 Relasi Rekursif Linear Homogen Dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari relasi rekursif linear homogeny dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut :

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} = 0; c_k \neq 0 \quad \textbf{(3.2.1)}$$

Dengan k kondisi awal , dan untuk $1 \leq i \leq k, c_i =$ konstanta.

Pada bagian ini akan dikembangkan suatu teknik untuk menyelesaikan relasi rekursif (3.2.1) . Untuk maksud tersebut diperlukan teorema berikut.

TEOREMA 3.2.1 : (Prinsip Superposisi)

Jika $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut – turut adalah solusi dari :

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots c_1 k a_{n-k} = f_1(n) \quad \textbf{(3.2.2)}$$

Dan

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots c_1 k a_{n-k} = f_2(n) \quad \textbf{(3.2.3)}$$

Maka untuk sebarang konstanta $c_1 danc_2$

$$c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n)$$

Adalah solusi dari

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots c_k a_{n-k} = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \quad \textbf{(3.2.3)}$$

Bukti :

Karena $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut – turut adalah solusi dari (3.2.2) dan (3.2.3), maka

$$g_1(n) + c_1 g_1(n-1) + c_2 g_2(n-2) + \ldots + c_k g_k(n-k) = f_1(n) \text{ Dan}$$

$$g_1(n) + c_1 g_1(n-1) + c_2 g_2(n-2) + \ldots + c_k g_k(n-k) = f_2(n) \text{ Jika}$$

$a_n = c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n)$, Maka

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} = \{c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \ \} + c_1\{c_1 g_1(n-1) + c_2 g_2(n-1)\} + \ldots + c_k \{c_1 g_1(n-k) + c_2 g_2(n-k)\}$$

$$= \{c_1(g_1(n) + \{c_1 g_1(n-1) + \ldots + c_k g_1(n-k) + c_2\{ \ g_2((n) + c_1 g_2(n-1) + \ldots + c_k g_2 n - k\}$$

$$= c_1 f_1(n) + c_1 f_2(n)$$

Ini berarti $c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n)$ solusi dari (3.2.4) . **Terbukti**

Sebagai akibat dari Teorema 3.2.1 diperoleh teorema sebagai berikut.

TEOREMA 3.2.2

Jika $g_1(n), g_2(n), \ldots, g_t(n)$ adalah solusi – solusi dari

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots c_k a_{n-k} = 0 \quad \textbf{(3.2.5)}$$

Maka , untuk sebarang konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_k$

$$c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) + \ldots c_t g_t(n)$$

Solusi dari (3.2.5)

Selanjutnya menggunakan teorema 3.2.2 , kita selesaikan relasi rekrusif (3.2.1) dengan langkah – langkah berikut ini.

Pertama – tama kita misalkn $a_n = x^n, x \neq 0$ untuk menentukan x, untuk setiap $i \in \{n, n-1, n-2, \ldots, n-k\}$ kita substitusi a , dengan x^i pada (3.2.1) diperoleh persamaan berikut,

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_k x^{n-k} = 0$$

Bagi kedua ruas persamaan terahir dengan x^{n-k}, diperoleh

$x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_x = 0$ **(3.2.6)**

Persamaan (3.2.6) disebut persamaan karakteristik dari relasi rekursif (3.2.1). Pada umumnya persamaan (3.2.6) mempunyai k akar, beberapa di antaranya mungkin bilangan kompleks. Misalkan $x_1, x_{2,\ldots,} x_k$ adalah akar – akar persamaan karakteristik (3.2.6). Selanjutnya kita tinjau dua kasus, yaitu apakah diantara akar – akar persamaan tersebut ada yang bernilai sama atau tidak.

Kasus 1

- **Semua akar persamaan (3.2.6)** $x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_x = 0$ **berbeda**

Jika $x_1, x_{2,\ldots,} x_k$ adalah akar – akar yang berbeda dari persamaan $x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_x = 0$, maka $a_n = x_i^n ; 1 \leq i \leq k$ adalah penyelesaian dari relasi rekursif Teorema (3.2.1). Sehingga untuk Teorema (3.2.2) untuk sembarang konstanta $\widehat{c}_1, \widehat{c}_{2,\ldots,} \widehat{c}_k$ pada $\widehat{c}_1 x_1^n + \widehat{c}_2 x_2^n + \ldots + \widehat{c}_k x_k^n = 0$ juga merupakan solusi dari persamaan (3.2.1).

Selanjutnya, $a_n = \widehat{c}_1 x_1^n + \widehat{c}_2 x_2^n + \ldots + \widehat{c}_k x_k^n$ dinamakan Solusi umum relasi (3.2.1).

Perhatikan nlai – nilai $\widehat{c}_1, \widehat{c}_{2,\ldots,} \widehat{c}_k$ masih sembarang. Selanjutnya untuk memperoleh nilai – nilai tersebut kita gunakan kondisi awal dari relasi rekursif tersebut. Dari persamaan $a_n = \widehat{c}_1 x_1^n + \widehat{c}_2 x_2^n + \ldots + \widehat{c}_k x_k^n$ dan k kondisi awal berurutan akan terbentuk suatu sistem persamaan linear yang terdiri dari k persamaan dengan k variabel $\widehat{c}_1, \widehat{c}_{2,\ldots,} \widehat{c}_k$. Jika penyelesaian dari sistem persamaan ini, kita substitusikan ke dalam

$a_n = \hat{c}_1 x_1^n + \hat{c}_2 x_2^n + ... + \hat{c}_k x_k^n$ diperoleh solusi dari relasi rekursif (3.2.1) beserta syarat awalnya.

Contoh dari relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta

- Selesaikanlah relasi rekursif : $a_1 = a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$

Penyelesaian :

Misalkan $a_n = x^n; x \neq 0$ Maka bentuk rekursif $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ menjadi

$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \Leftrightarrow x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$

Bagi kedua ruas persamaan terahir dengan x^{n-2} diperoleh persamaan karateristik sebagai berikut :

$x^2 - x - 1 = 0$, akar – akar persamaan karakteristik ini adalah

$x_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ dan $x_1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Sehingga solusi umum dari relasi rekursif adalah

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad . . . \text{(i)}$$

Karena kondisi awal $a_1 = 1$ dan $a_2 = 1$, maka dari (i) diperoleh sistem persamaan berikut :

$$1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \quad . . . \text{(ii)}$$

$$1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \quad . . .\text{(iii)}$$

Selanjutnya dari persamaan (ii) dan (iii) didapat :

$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

dan

$c_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Substitusikan nilai c_1 dan c_2 ini pada (i), diperoleh penyelesaian dari relasi rekursif sebagai berikut :

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Catatan :

Walau formula a_n melibatkan bilangan irasional, dapat dicek bahwa untuk setiap bilangan bulat n dengan $n \geq 1, a_n$ adalah bilangan bulat non negatif. Perhatikan bahwa solusi umum relasi rekursif tidak tergantung pada syarat awal.

Kasus 2

- **Persamaan(3.2.6)** $x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_x = 0$ **memiliki akar rangkap**

Misalnya persamaan karakteristik $x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_x = 0$ mempunyai sebuah akar rangkap m (artinya dari ke k akar – akar dari (3.2.6) terdapat m akar yang masing – masing nilainya x_1). Maka dapat ditunjukkan bahwa masing – masing dari : $x_1^n, nx_1^n, n^2 x_1^n, \ldots, n^{m-1} x_1^n$ adalah penyelesaian dari relasi (3.2.1). Ini bersama dengan Teorema (3.2.2) menghasilkan teorema (3.2.3)

TEOREMA (3.2.3)

Jika persamaan karakteristik (3.2.6) dari relasi rekursif (3.2.1) mempunyai sebuah akar x_1 , rangkap $m \leq k$, maka solusi umum dari (3.2.1) yang melibatkan x_1 mempunyai bentuk :

$c_0 x_1^n + c_1 n x_1^n + c_2 n^2 x_1^n + \ldots + c_{m-1} n^{m-1} x_1^n,$ dengan $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ adalah sembarang konstanta.

Contoh

Cari formula untuk a_n yang memenuhi relasi rekursif berikut $a_n = 3a_{n-1} + 6a_{n-2} - 28a_{n-3} + 24a_{n-4}, n \geq 4$ dengan sayarat awal $a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 3, a_3 = 4$

Penyelesaian :

Misalkan $a_n = x^n, x \neq 0.$ Maka dari bagian rekursif diperoleh $x^n = 3x^{n-1} + 6x^{n-2} + 28x^{n-3} + 24x^{n-4}$, ekuivalen dengan

$x^n - 3x^{n-1} - 6x^{n-2} - 28x^{n-3} - 24x^{n-4} = 0$

Bagi kedua ruas persamaan dengan terakhir ini dengan x^{n-4}, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut, $x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24 = 0$, ekuivalen dengan $(x-2)^3(x+3) = 0.$

Akar – akar persamaan karakteristik ini adalah 2(rangkap 3) ; dan -3

Hingga, berdasarkan Teorema (3.2.3) dan Teorema (3.2.2), solusi umum dari rekursif di atas adalah

$$a_n = c_1 2^n + c_2 n2^n + c_3 n^2 2^n + c_4(-3)^n \quad \text{(i)}$$

Karena $a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 3, a_3 = 4$ dari (i) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$c_1 + c_4 = 1$$

$$2c_1 + 2c_2 + 2c_3 - 3c_4 = 2$$

$$4c_1 + 8c_2 + 16c_3 + 9c_4 = 3$$

$$8c_1 + 24c_2 + 72c_3 - 27c_4 = 4$$

Penyelesaian dari sistem persamaan ini adalah

$$c_1 = 1\frac{2}{125}, c_2 = \frac{7}{200}, c_3 = \frac{3}{40}, c_4 = -\frac{2}{125}$$

Substitusikan nilai nilai $c_1, c_2, c_3,$ dan c_4 ini ke dalam persamaan (i), sehingga diperoleh penyelesaian yang diminta

$$a_n = 1\frac{2}{125}(2)^n + \frac{7}{200}n(2)^n - \frac{3}{40}n^2(2)^n - \frac{2}{125}(-3)^n$$

4.3 Menyelesaikan Relasi Rekursif Dengan Fungsi Pembangkit

Dalam bab terdahulu, telah dibicarakan tentang fungsi pembangkit serta aplikasinya. Pada bagian ini terlihat bahwa fungsi pembangkit dapat pula dipakai untuk mencari penyelesaian suatu relasi rekursif dengan mudah

CONTOH 3.3.1 :

Gunakan Fungsi Pembangkit Biasa untuk menyelesaikan relasi rekursif berikut $a_0 = 1, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}, n \geq 2.$

Penyelesaian :

Misal P(x) adalah Fungsi Pembangkit Biasa barisan (a_n) . Maka menurut definisi,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\sim} a_n x_n$$

Karena untuk n ≥ 2 , $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$ kalau kedua ruas dari persamaan ini dikali x^n kemudian pankat n dijumlahkan pangkat n untuk n = 2 sampai n = ∼ , diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\sim} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\sim} (2a_{n-1} + 4^{n-1})\, x^n,$$

Ekuivalen dengan, $\sum_{n=2}^{\sim} a_n x^n = 2\sum_{n=2}^{\sim} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\sim} 4^{n-1} x^n.$ (3.3.1)

Ruas kiri persamaan (3.3.1) adalah:

$$\sum_{n=2}^{\sim} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\sim} a_n x^n - a_0 - a_1 x$$

$$= P(x) - 1 - 3x$$

Suku pertama ruas kanan persamaan (3.3.1) adalah

$$2\sum_{n=2}^{\sim} a_{n-1} x^n = 2x\sum_{n=2}^{\sim} a_{n-1} x^{n-1} \qquad = 2x\left(\sum_{n=1}^{\sim} a_{n-1} x^{n-1} - a_0\right)$$

$$= 2x(P(x) - 1)$$

$$= 2xP(x) - 2x$$

Suku kedua ruas kanan persamaan (3.3.1) adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1} x^n = x\sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1} x^{n-1}$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} (4x)^{n-1} - 1\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{1-4x} - 1\right)$$

$$= \frac{x}{1-4x} - x$$

Sehingga persamaan (3.3.1) menjadi,

$$P(x) - 1 - 3x = 2xP(x) - 2x + \frac{x}{1-4x} - x,$$

Ekuivalin dengan,

$$P(x) = \frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)}$$

Karena

$$\frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-4x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x}$$

Maka

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-4x} + \frac{1}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(4^n + 2^n\right)x^n$$

Karena a^n adalah koefisien x^n dalam P(x) , maka penyelesaianya relasi rekursif yang dimaksud adalah,

$a_n = \frac{1}{2}\left(4^n + 2^n\right)$, untuk n $\geq$ 0

Catatan:

(i) Pada dasarnya, relasi rekursif (3.2.1) dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi pembangkit.

(ii) Untuk jenis relasi rekursif tertentu, lebih mudah diselesaikan dengan fungsi pembangkit eksponensial dari pada fungsi pembangkit biasa. Ini akan diperlihatkan pada contoh berikut.

Contoh 3.3.2:

Gunakan Fungsi Pembangkit untuk menyelesaikan relasi rekursif berikut

$a_0 = 1; a_n = na_{n-1} + 2^n, n \geq 1.$.

Penyelesaian:

Misalkan P(x) adalah FPE dari barisan (a_n). Maka, berdasarkan definisi

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^n}{n!} \quad .$$

Kalikan kedua ruas bagian rekursif $a_n = na_{n-1} + 2^n$ dengan $\frac{x^n}{n!}$ kemudian 'dijumlah' untuk n =1 sampai n = ∞ , diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(na_{n-1} + 2^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

Ekuivalen dengan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!}$$

Atau

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} - 1 = x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} - 1)$$

Sehingga,

$$P(x) - 1 = xP(x) + e^{2x} - 1.$$

Setelah disederhanakan diperoleh

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{1-x}$$

Selanjutnya, akan dicari a_n yaitu koefisien — dalam P(x).

Karena $P(x) = e^{2x} \dfrac{1}{1-x}$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right) \frac{x^n}{n!}$$

Maka solusi relasi rekursif yang dimaksud adalah

$$a_n = n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right), \quad n \geq 0$$

Catatan :

Jika solusi pada Contoh 3.3.2 diselesaikan dengan FPB maka penyelesaiannya akan lebih kompleks!

4.4 Derangement (Pengacakan)

Misal terdapat n elemen dijajar pada suatu baris dan diberi label 1, 2, 3, ..., n . Kemudian ke n elemen itu dipermutasikan pada baris yang sama sedemikian hingga tidak ada satu elemen menempati tempatnua semula. Sebuah permutasi yang demikian disebut deragement. Contoh : 3142 atau 4321 adalah deragement dari 1234, akan tetapi 3124 bukan deragement dari 1234, sebab dalam 3124, elemen 4 menempati posisi nya semula (posisi ke 4). Begitu juga 4213 bukan deregement dari 1234 sebab elemen 2 menempati posisinya semula. Mudah diselidiki bahwa hanya terdapat 9 deragement dari 1234. Terdapat tepat 2 deragement dari 123; yaitu 231 dan 312. Ada beberapa deragement dari 12345? Saecara umum kita tertarik dengan permasalahan berikut:

Misalakan D_n menyatakan banyaknya deragement dari n element. Berapakah D_n?

Untuk menjawab pertanyaan ini, pertama-tama akan dicari hubungan rekursif untuk D_n dan selanjutnya kita akan selesaikan hubungan rekursif tersebut dengan fungsi pembangkit eksponensial.

4.4.1 Relasi Rekursif Untuk D_n

Karena hanya ada satu permutasi tanpa elemen, maka $D_0 = 1$. Untuk n = 1, $D_1 = 0$, sebab tidak ada permutasi dengan satu elemen di mana elemen itu tidak menempati tempatnya semula. Untuk n = 2 diperoleh $D_2 = 1$,sebab hanya ada satu permuasi dua elemen di mana setiap elemen tidak menempatinya tempatnya semula (21 adalah satu-satunya deragement dar 12). Untuk $n \geq 2$, kita peroleh relasi rekursif untuk Dn sebagai berikut :

(i) Pandangan sebuah elemen sembarang dari n elemen yang ada. Tanpa menghilangkan keumuman, misal elemen itu adalah elemen n (elemen dengan label n). Karena elemen n tidak boleh menempati posisi ke n; maka terdapat n-1 kemungkinan posisi ke-1, atau ke-2 atau ke-3, ... , atau ke-(n-1).

(ii) Tanpa menghilangkan kumuman misal elemen n ini menempati posisi ke-1. Sekarang ada dua kemungkinan posisi dari elemen 1. Elemen 1 mungkin menempati posisi ke-n atau mungkin tidak.

***Kasus 1*. Elemen 1 menempati posisi ke-n**

Elemen	n 1
Posisi ke	1 2 3 4 ... n-1 n

Sekarang kita punya n-2 elemen yaitu elemen: 2, 3, ... , n-1 yang harus dijajar sedemekian hingga setiap elemen ini tidak boleh menempati tempatnya semula: artinya elemen i tidak boleh pada posisi ke i untuk $2 \leq i \leq n-1$. Ini bisa dilakukan dengan D_{n-2} cara.

***Kasus 2*. Elemen 1 tidak menempati posisi ke n**

Elemen	n . . . . (tdk 1)
Posisi ke	1 2 3 4 ... n-1 n

Dalam kasus ini, kita mempunyai n-1 elemen yaitu elemen-elemen 1, 2, 3, ... , n-1 yang harus dijajar sedemikian hingga elemen 1 tidak pada posisi ke-n, elemen 2 tidak pada posisi ke-2, elemen 3 tidak pada posisi ke-3 dan seterusnya, elemen n-1 tidak pada posisi ke-(n-1). Ini dapat dilakukan dengan D_{n-2} cara. Jadi banyaknya deragement dari n elemen dimana elemen n menempati posisi ke-1 adalah D_{n-2} + Dn-1. Telah disebut pada bagian (i), bahwa ada n-1 kemungkinan posisi dari elemen n. Sehingga, untuk $n \geq 2$, diperoleh hubungan,

Dn = (n-1) (Dn-1 + Dn-2).

Persamaan ini dapat ditulis sebagai berikut,

Dn = nDn-1 – Dn-1 + (n-1) Dn-2

Ekuivalen dengan

Dn - nDn-1 = – (Dn-1 + (n-1) Dn-2)

Misalkan an = Dn – Dn-1, maka (3.4.1) menjadi

An = - an-1, $(n \leq 2)$

Karena

a1 = D1 – D0 = 0 – 1 = -1,

maka

a2 = -a1 = 1

a3 = -a2 = -1

...

An = (-1)n,

Dengan demikian, relasi rekursif untuk Dn adalah sebagai berikut,

D0 = 1; Dn = ndn-1 + (-1)n, n ≥ 1.

4.4.2 Mencari Formula Untuk Dn

Diatas telah ditunjukkan bahwa, untuk n ≥ 1, berlaku hubungan
Dn = ndn-1 + (-1)n (3.4.2)
Kita kan selesaikan relasi rekursif in dengan fungsi pembangkit eksponensial. Untuk itu kita misalkan,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}$$

Kalikan kedua ruas dari (3.4.2) dengan $\frac{x^n}{n!}$ Dan "diambil sigmanya" untuk n ≥ 1, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{D_n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{D_n} \frac{x^n}{n!} - D_0 \frac{x^0}{0!} = P(x) - 1$$

Suku pertama ruas kanan (3.4.3) adalah,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x} - 1$$

Sehingga (3.4.3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(x) - 1 = xP(x) + e^{-x} - 1$$

Ekuivalen dengan,

$$P(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$$

Karena

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} dan \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x^n}$$

Maka

$$P(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x^n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!} \right) \boldsymbol{x^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{n}! \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!} \right) \frac{x^n}{n!}$$

Dengan demikian

$$D_n = n! \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}$$

$$= n! \{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

n ≥ 0

Catatan:

Kalau kita coba menyelesaikan relasi rekursif untuk D_n ini dengan fungsi pembangkit biasa, maka kita akan terbentur dengan persamaan diferensial yang tida mudah untuk dipecahkan!

3.5 Sistem Relasi Rekursif

Adakalanya suatu permasalahan dapat dimodelkan ke dalam bentuk sistem rekursif. Sistem rekursif melibatkan paling sedikit dua rekursif yang terkait satu sama lainnya. Sebagai ilustrasi, ikuti uraian berikut.

Misal a_n menyatakan banyaknya barisan binair n-angka yang memuat “0” sebanyak genap dan “1” sebanyak genap; bn menyatakan banyaknya barisan binair n-angka yang memuat “0” sebanyak genap dan “1” sebanyak ganjil; cn menyatakan banyaknya barisan binair n-angka yang memuat “0” sebanyak ganjil dan “1” sebanyak genap; dn menyatakan banyaknya barisan binair n-angka yang memuat “0” sebanyak ganjil dan “1” sebanyak ganjil.

Karena setiap barisan binair n –angka yang memuat “0” sebanyak genap dan “1” sebanyak genap dapat diperoleh dari sebuah barisan binair (n-1) angka yang memuat “0” sebanyak genap dan“1” sebanyak ganjil dengan menambah/ menyisipkan sebuah digit “1” ; atau sebuah barisan binair (n-1) angka yang memuat “0” sebanyak ganjil dan “1” sebanyak genap dengan menambah/ menyisipkan sebuah digit “0”, maka diperoleh hubungan sebagai berikut ;

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1}, n \geq 1$$

Begitu pula setiap barisan binair n –angka yang memuat “0” sebanyak genap dan “1” sebanyak ganjil dapt diperoleh dari sebuah barisan binair (n-1) – angka yang memuat “0” sebanyak genap dan “1” sebanyak genap dengan menyisipkan sebuah digit “1” atau sebuah barisan binair (n-1) – angka yang memuat “0” sebanyak ganjil dan “1” sebanyak ganjil dengan menyisipkan sebuah digit “0”. Sehingga diperoleh hubungan sebagai berikut,

$$b_n = a_{n-1} + d_{n-1}, n \geq 1$$

Dengan argumen yang serupa dapat ditunjukkan bahwa untuk c_n dan d_n untuk $n \geq 1$, berturut turut berlaku hubungan sebagai berikut,

$$c_n = a_{n-1} + d_{n-1} \quad \text{dan} \quad d_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$

Jelas bahwa $a_n = 1$ dan $b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Jadi relasi rekursif untuk a_n, b_n, c_n dan d_n diberikan oleh sistem rekursif berikut,

$$\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1} + c_{n-1}, n \geq 1 \\
b_n &= a_{n-1} + d_{n-1}, n \geq 1 \\
c_n &= a_{n-1} + d_{n-1}, n \geq 1 \\
d_n &= b_{n-1} + c_{n-1}, n \geq 1
\end{aligned}$$

$$B(x) = \frac{x}{1-4x^2}, \quad C(x) = \frac{x}{1-4x^2}, \quad D(x) = \frac{2x}{1-4x^2}$$

$$A(x) = \frac{1-2x^2}{1-4x^2} = \frac{1}{1-(2x)^2} - \frac{2x^2}{1-(2x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} - x\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1+2x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k + \frac{1}{2}x\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k - \frac{1}{2}x\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k (x)^{k+1} - \frac{1}{2}x\sum_{k=0}^{\infty}2^k (x)^{k+1}$$

maka $a_n = 1$ dan untuk $n \geq 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}(2)^n + \frac{1}{2}(-2)^{n-1} - \frac{1}{2}(2)^{n-1} \\
&= 2(-2)^{n-2} + 2(2)^n - (-2)^{n-2} - (2)^{n-2} \\
&= (-2)^{n-2} + (2)^{n-2}
\end{aligned}$$

Atau

$$a_n = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 2^{n-1} & ; n = genap, n \geq 2 \\ 0 & ; n = ganjil \end{cases}$$

Selanjutnya, karena

$$B(x) = \frac{x}{1-4x^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-2x} - \frac{\frac{1}{4}}{1+2x}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n\right\},$$

maka $b_n = \frac{1}{4}\left[2^n - (-2)^n\right] = \begin{cases} 0 & ; n = genap \\ 2^{n-1} & ; n = ganjil \end{cases}$

Perhatikan bahwa C (x) = B (x), sehingga jelas $a_n = b_n$. Akhirnya,

$$D(x)=\frac{2x}{1-4x^2}=x\left\{\frac{\frac{1}{2}}{1+2x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-2x}\right\}$$

$$=x\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=0}(2x)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}(-2x)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1}$$

Dengan demikian,

$$d_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{2}(-2)^{n-1}$$

$$=\begin{cases}2^{n-1} & ; n\geq 0, n=genap\\ 0 & ; n=ganjil; n=0\end{cases}$$

3.6 Relasi Rekursif Melibatkan Konvolusi

Beberapa permasalahan dalam kombinatorika dapat dimodelkan ke dalam bentuk rekursif yang melibatkan konvolusi;seperti terlihat berikut ini.

Misalkan diberi sebaris n bilangan, $x_1, x_{2,...} x_n$. Kita perintahkan "komputer" untuk mencari hasil kalinya. Terdapat banyak cara untuk mendapatkan hasil kali tersebut. Misalnya untuk n = 3; pertama – tama mungkin komputer mengalika x_1 dan x_2, kemudian mengalikan hasil kali ini dengan x_3 ; atau mungkin x_2 dan x_3 dikalikan terlebih dahulu, kemudian hasil kali ini dikalikan dengan x_1 . Kita bisa bedakan kedua cara ini dengan menyisipkan tanda kurung yang sesuai di dalam deretan bilangan x_1, x_2, x_3 , sehingga cara pertama dan kedua, berturut – turut dapat ditulis sebagai berikut : $((x_1\cdot x_2)x_3)$ dan $(x_1(x_2\cdot x_3))$. Dalam hal ini komputer tidak dapat mengalikan x_1 dengan x_3 terlebih dahulu, karena dalam deretan tersebut terdapat bilangan x_2 di antara x_1 dan x_3. Dengan kata lain, komputer hanya mampu mengoperasikan dua bilanga yang letaknya berdekatan setiap kali pengoperasian. Dengan demikian untuk x = 4, terdaat 5 cara yang berbeda seperti berikut : $(((x_1x_2)x_3)x_4)$, $((x_1(x_2x_3))x_4)$, $(x_1(x_2(x_3x_4)))$, $((x_1x_2)(x_3x_4))$. Sedangkan untuk n = 2 terdapat satu cara saja, yaitu x_1x_2. Kalau diberi barisan n bilangan, pertanyaan yang muncul adalah sebagai berikut : dengan beberapa cara berbeda menginstruksikan komputer untuk mendapatkan hasil dari barisan n bilangan tersebut ?

Misal K_n menyatakan banyak cara untuk mendapatkan hasil kali (dengan aturan di atas) dari barisan n bilangan. Jelas bahwa $K_1 = 1; K_2 = 1; K_3 = 2$ dan $K_4 = 5$. Selanjutnya $n \geq 2$, relasi rekursif untuk K_n dapat diperoleh dengan cara berikut: Perhatikan “perkalian terakhir” yang dilakukan untuk menentukan hasil dari n bilangan $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ini melibatkan hasil kali dari dua subperkalian $x_1, \ldots, x_r$ dan $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$: dimana $1 \leq r \leq n-1$: yaitu $((x_1 \ldots x_r)\ (x_{r+1} \ldots x_n))$.

Disini kita definisikan, untuk $r = 1$, $((x_1)(x_2 \ldots x_n)) \equiv (x_1(x_2 \ldots x_n))$

Karena ada K_1 cara untuk mendapatkan hasil kali dari sub perkalian $x_1 \ldots x_r$ dan K_{n-r} cara untuk mendapatkan hasil kali subperkalian $x_{r+1} \ldots x_n$ serta $1 \leq r \leq n-1$, maka

$$K_n = \sum_{r=1}^{n-1} K_r K_{n-r} \text{ untuk } n \geq 2. \qquad (3.6.1)$$

Kalau kita definisikan $K_0 = 0$, maka (3.6.1) menjadi $K_n = \sum_{r=0}^{n} K_r K_{n-r}$ untuk $n \geq 2$.

(3.6.2)

Selanjutnya, kita selesaikan rekursif (3.6.2) dengan fungsi pembangkit. Untuk itu, misalkan $P_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n x^n$.

Kalikan kedua ruas (3.6.2) dengan x^n dan “diambil sigmanya” untuk $n \geq 2$, diperoleh,

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} K_n K_{n-r} \right] x^n . \qquad (3.6.3)$$

Perhatikan bahwa
$$\sum_{n=2}^{\infty} K_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} K_n x^n - K_1 x - K_0$$

$$= P(x) - x$$

dan
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^{\infty} K_r K_{n-r} \right] x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^{\infty} K_n K_{n-r} \right] x^n$$

$$= \{P(x)\}^2$$

Sehingga (3.6.3) menjadi :

$$P(x) - x = [P(x)]^2$$
$$\Leftrightarrow [P(x)]^2 - P(x) + x = 0 \qquad (3.6.4)$$
$$\Leftrightarrow P(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Selanjutnya, kita ekspansi bentuk $\sqrt{1-4x}$.

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x))^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (-4)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (-4)^n x^n$$

Dari Teorema Binomial Umum, diperoleh untuk $n \geq 1$, didapat

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (-4)^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n 2^n 2^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n 2^n 2^n$$

$$= \frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)(-1)^{2n-1}}{n!2^n} (-1)^n 2^n 2^n$$

$$= \frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)n!}{n!n!} (-1)^{2n-1} 2^n$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-3)1.2.3\ldots(\mathrm{n}-1)\mathrm{n}}{(n-1)!(n-1)!\mathrm{n.n}} 2.2.2\ldots2.2$$

$$= -\frac{2}{n} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)2.4.6\ldots(2\mathrm{n}-2)}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$= -\frac{2}{n} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)(2\mathrm{n}-2)}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$= -\frac{2}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = -\frac{2}{n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga,

$$\sqrt{1-4x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n x^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$ Dengan demikian, dari (3.6.4)

dengan memilih "tanda negatif" diperoleh,

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

Ini berarti, untuk $n \geq 1$,

$$K_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \qquad (3.6.5)$$

Catatan:

Telah disebut pada bab terdahulu dalam buku ini (pada halaman 16) bahwa bilangan dalam (3.6.5) disebut bilangan Catalan.

SOAL LATIHAN 3

1. Selesaikan relaasi rekursif berikut dengan metode karakteristik!

   a. $a_1 = a_2 = 1; a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$

   b. $a_0 = 0; a_1 = -1; a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, n \geq 2$

   c. $a_0 = a_1 = 1; a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2$

   d. $a_1 = 2; a_2 = 6; a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2$

   e. $a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = 2; a_n\ 2a_{n-1} + 3a_{n-2},$

   $n \geq 2$

   $a_n = 9an_{-1} - 15a_{n-2} + 7a_{n-3}, n \geq 3$

   f. $a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 3;$

   $a_0 + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0 \ n \geq 4$

   g. $a_0 = a_1 = a_2 = 0; a_3 = 5;$

   $a_n = {}_{10an-1} - 37a_{n-2} + 60a_{n-3} - 36a_{n-4}, n \geq 4$

2. Misalkan x_1 adalah sebuah akar karakteristik dari relasi rekursif (3.2.1):

   a. Bila x_1 adalah akar karakteristik rangkap dua, tunjukan bahwa x_1^n dan n x_1^n adalah solusi-solusi dari (3.2.1)

   b. Bila x_1 adalah akar karakteristik rangkap tiga, tunjukan bahwa x_1^n, n x_1^n, $n^2 x_1^n$ adalah solusi-solusi dari (3.2.1)

   c. Perumum, untuk x_1 adalah karakteristik rangkap m.

3. Misal a_n menyatakan banyaknya cara untuk menempatkan n obyek berbeda di dalam 5 kotak. Tulis dan selesaikan relasi rekursif untuk a_n !

4. Sebuah tangga memiliki n buah tangga. Saudara diminta untuk menaiki tangga tersebut dengan aturan sebagai berikut: setiap kali melangkah, saudara diperbolehkan “melangkah” satu atu dua anak tangga sekaligus.

   a. Jika b_n menyatakan banyaknya cara yang berbeda saudara dapat menaiki tangga dengan n anak tangga tersebut, tulis relasi rekursif untuk b_n.

   b. Selesaikan relasi rekursif pada soal (a).

5. Selesaikan relasi rekursif berikut dengan fungsi pembangkit!

   a. $a_1 = 3; a_{n-1} = 2a_n + 4^n, n \geq 0$

b. $a_0 = 3; a_{n-1} = a_n + n + 7;\ \ n \geq 0$

c. $a_0 = 2; a_1 = 1; a_{n+2} – 2a_{n+1} + a_n = 2^n,$

$n \geq 0$

d. $a_0 = 1; a_{n+1} = 2n\, a_n + 2a_n + 2 ;\ \ n \geq 0$

e. $a_0 = 2; a_n = 2n\, a_{n-1} + n,\ \ n \geq 1$

f. $a_0 = 0; a_n = a_{n-1} + 2^n, n \geq 1$

g. $a_0 = 2; a_n = a_{n-1} + n(n-1), n \geq 1$

6. Gambarlah n buah garis lurus pada bidang datar, sedemikian hingga setiap pasang garis berpotongan di suatu titik dan tidak ada tiga garis berpotongan di satu titik. Bila b_n menyatakan banyaknya daerah (region) yang terbentuk, maka tulis dan selesaikan relasi rekursif untuk b_n.

7. Sebanyak n buah lingkaran digambar pada sebuah bidang datar sedemikian hingga setiap dua lingkaran berpotongan di dua titik yang berbeda dan tidak ada tiga lingkaran berpotongan di satu titik. Banyaknya daerah yang terbentuk dilambangkan dengan R_n.

   a. Tulis Relasi rekursif untuk R_n

   b. Cari formula untuk R_n

8. Selesaikan sistem rekursif berikut !

   a. $a_1 = b_1 = c_1 = 1$

   $a_{n-1} = a_n + b_n + c_n, n \geq 1$

   $b_{n+1} = 4_n - c_n + c_n, n \geq 1$

   $c_{n+1} = a_n + b_n + c_n, n \geq 1$

   b. $a,_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$

   $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}, n \geq 1$

   $b_n = b_{n-1} - c_{n=1} + 4^{n-1}, n \geq 1$

   $c_n = c_{n-1} + b_{n-1} + 4^{n-1}, n \geq 1$

9. Diberikan :

   a_n : banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat “0” sebanyak bilangan genap dan “1” sebanyak bilangan genap.

   b_n : banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat “0” sebanyak bilangan genap dan “1” sebanyak bilangan ganjil.

   a. Tulis sistem rekursif yang memuat a_n, b_n, dan c_n!

   b. Selesaikan sistem rekursif dalam soal (a)!

10. Selesaikan relasi rekursif berikut!

a. $a_0 = 1$; $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, a_{n-k-1}$, $n \geq 1$

b. $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-k-1}$, $n \geq 2$

c. $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \, a_{n-k-1}$, $n \geq 2$

11. Gambarlah 2n titik pada sebuah lingkaran. Pasangkan dua titik pada lingkaran tersebut dengan ruas garis sedemikian hingga tidak ada ruas garis yang saling berpotongan. Misalkan b_n menyatakan banyaknya cara memasangkan ke 2n titik tersebut.

    a. Tulis relasi rekursif untuk b!

    b. Selesaikan relasi rekursif pada soal (a)!

12. Perhatikan permasalahan Menara Hanoi berikut! Pada bidang papan ditancapkan tiga buah tiang A, B, dan C, katakan.Sebanyak n buah cakram berdiameter berbeda diletakkan pada salah satu tiang (tiang A katakana), secara tersusun dari bawah ke atas, dari cakram diameter terkecil. Menara akan dipindahkan ke tiang lain (B atau C), dengan aturan sebagai berikut. (i) setiap kali memindah hanya boleh memindahkan satu cangram dari satu tiang ke tiang lain; (ii) dalam susunan cakram, tidak boleh cakram diameter besar di atas cakram diameter kecil. Jika a_n menyatakan banyak cara sesedikit mungkin untuk memindah menara dengan n cakram, tentukan relasi rekursif untuk a_n. kemudian selesaikan relasi rekursif tersebut!

BABA V PRINSIP INKLUSI – EKSKLUSI

5.1 Pendahuluan

Misalkan S adalah suatu himpunan dari N obyek dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh obyek-obyek yang ada di S. Sebuah obyek di S mungkin saja memiliki beberapa (bisa nol) sifat dari sifat-sifat yang ada. Banyaknya obyek S yang mempunyai sifat a_i dilambangkan dengan $N(a_i)$, sedangkan $N(a_i')$ menyatakan banyaknya obyek S yang tidak memiliki sifat a_i. Dengan demikian,

$$N = N(a_i) + N(a_i')$$

Selanjutnya $N(a_i\ a_j)$ menyatakan banyaknya obyek S yang memiliki sifat a_i dan a_j, dan $N(a_i'\ a_j')$ melambangkan banyaknya obyek yang tidak memiliki sifat a_i maupun a_j. Begitu pula, $N(a_i'\ a_j)$ menyatakan banyaknya obyek yang memiliki sifat a_j tapi bukan sifat a_i. Secara umum $N(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ adalah banyak obyek S yang memiliki sifat-sifat $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$, dan a_{ik}.

Misalkan A adalah himpunan bagian dari S yang anggota-anggotanya memiliki sifat a_1 dan B adalah himpunan bagian dari S yang anggota-anggotanya memiliki sifat a_2. Maka himpunan bagian dari S yang anggota-anggotanya memiliki sifat a_1 dan a_2 adalah $A \cap B$. Begitu pula himpunan bagian dari S yang anggota-anggotanya tidak memiliki sifat a_i maupun a_2 adalah $A' \cap B'$ yang sama dengan $(A \cup B)'$.

Kita peroleh,

$$|S| = N, |A| = N(a_1), |B| = N(a_2),$$

dan

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = N(a_1, a_2).$$

Karena

$$S = (A \cup B) \cup (A \cup B)' dan\ (A \cup B) \cap (A \cup B)' = \emptyset,$$

maka

$$|S| = |A \cup B| + |(A \cup B)'|$$

Dapat ditunjukkan bahwa,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} |(A \cup B)'| &= |S| - |A \cup B| \\ &= |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \end{aligned}$$

Dengan demikian, banyaknya obyek di S yang tidak memiliki sifat a_1 dan tidak memiliki sifat a_2 adalah ;

$$N(a_1'\ a_2') = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1\ a_2) \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa banyaknya obyek di S yang tidak memiliki sifat di a_1, a_2, ataupun a_3 adalah,

$$\begin{aligned} N(a_1'\ a_2'\ a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1\ a_2) + \\ N(a_1\ a_3) + N(a_2\ a_3) - N(a_1\ a_2\ a_3) \quad \textbf{(4.1.2)} \end{aligned}$$

Persamaan (4.1.1) dan (4.1.2) adalah bentuk-bentuk khusus dari suatu prinsip yang disebut prinsip inklusi-eksklusi.

Bentuk umum dari prinsip inklusi-eksklusi akan disajikan di bagian berikut. Sebelumnya mari kita tinjau sejenak formula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ yang telah kita pakai untuk memperoleh persamaan (4.1.1). Untuk menghitung ruas kiri dari formula ini, kita telah "melibatkan" (*to include*) semua elemen A dan semua elemen B mendapatkan |A| + |B| ; sedangkan dalam menentukan nilai |A| + |B| setiap elemen sekutu dari A dan B dihitung dua kali. Dengan kata lain sebanyak $|A \cap B|$ elemen dihitung dua kali. Sehingga sebesar $|A \cap B|$ pula yang harus dikurangkan atau "dikeluarkan" (*to be excluded*) dari |A| + |B| untuk memperoleh $|A \cup B|$. Kiranya jelas, istilah *include* dan *exclude* mengilhami istilah inklusi-eksklusi yang kita pakai. Sudah kita singgung sebelumnya, beberapa bentuk khusus dari prinsip inklusi-eksklusi. Berikut kita sajikan bentuk umumnya.

5.2 Bentuk Umum Prinsip Inklusi-Eksklusi

Secara umum prinsip inklusi-eksklusi dapat ditulis sebagai berikut.

Teorema 4.2.1 : (Prinsip inklusi-eksklusi)

Jika N adalah banyaknya obyek dalam himpunan S dan a_1, ... , a_r sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh suatu obyek di S, maka banyaknya obyek di S yang tidak memiliki sifat $a_1, a_2, \ldots, a_r$ adalah

$$N(a_1', a_2', \ldots, a_r') = N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i,j} N(a_i a_j) - \sum_{i,j,k} (a_i a_j a_k) \pm \ldots + (-1)^r N(a_1, a_2, \ldots, a_r). \qquad (4.2.1)$$

Catatan : Dalam persamaan (4.2.1) "**sigma**" pertama mencakup semua i ∈ (1, 2, 3, ... , r); "**sigma**" kedua mencakup semua pasangan {i,j}, i ≠ j, i,j ∈ (1, 2, 3, ... , r); "**sigma**" ketiga mencakup semua triple {i, j, k} ∈ (1, 2, 3, ... , r) dan i, j, k berbeda; dan seterusnya.

Bukti Teorema 4.2.1 :

Ruas kiri dari persamaan (4.2.1) menyakatan banyak obyek di S yang tidak memiliki sifat a_1, a_2, ... , a_r. Untuk menunjukkan bahwa ruas kiri = ruas kanan dalam (4.2.1) cukup ditunjukkan bahwa : setiap obyek yang tidak memiliki sifat a_1, sifat a_2, ... ataupun sifat a_r tepat dihitung sekali dalam menghitung ruas kanan (4.2.1); dan setiap obyek yang memiliki paling sedikit satu sifat, dihitung nol kali dalam menghitung ruas kanan dari (4.2.1).

Pandang sebuah obyek di S, x katakan. Jika obyek x tidak memiliki sifat dari sifat-sifat yang ada, maka obyek ini dihitung tepat sekali dalam menghitung N, di ruas kanan (4.2.1); dan tidak dihitung dalam menghitung suku-suku yang lain dalam ruas kanan (4.2.1).

Jika obyek x dalam S memiliki sebanyak p ≥ 1 sifat dari r sifat yang ada, maka obyek ini dihitung sebanyak :

$\binom{p}{0}$ = 1 kali dalam menghitung N,

$\binom{p}{1}$ kali dalam menghitung $\sum_{i} N(a_i)$,

$\binom{p}{2}$ kali dalam menghitung $\sum_{i,j} N(a_i a_j)$,

$\binom{p}{3}$ kali dalam menghitung $\sum_{i,j,k} N(a_i, a_j, a_k)$; dst.

Sehingga dalam menghitung ruas kanan (4.2.1) obyek x tersebut dihitung sebanyak n kali, dengan

$$n = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \ldots + (-1)\binom{p}{r}$$

Karena $\binom{p}{t} = 0$ untuk t ≥ p, maka,

$$n = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \ldots + (-1)^p \binom{p}{p}$$

Selanjutnya, karena

$$\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{p}{p} = 0.$$

maka n = 0.

Dengan demikian teorema terbukti.

Catatan : Dari Teorema Binomial diperoleh

$$(x+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{x} x^k \qquad \textbf{(*)}$$

Substitusikan x dengan -1 pada (*) didapat

$$0 = (1 + (-1))^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k$$

atau

$$0 = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \ldots + (-1)^p \binom{p}{p}$$

Beberapa contoh aplikasi prinsip inklusi-eksklusi diberikan berikut ini.

Contoh 4.2.1:

Ada berapa bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang :

a. Tidak habis dibagi 3 dan tidak habis dibagi 5?

b. Tidak habis dibagi 3,5,7?

Penyelesaian:

Misalnya S={1,2,3, …, 1000} dan

a_1 : sifat habis dibagi 3,

a_2 : sifat habis dibagi 5,

a_3 : sifat habis dibagi 7.

Yang ditanyakan adalah :

a. N (a_1, a_2)

b. N (a_1, a_2, a_3)

Jelas bahwa N = |S| = 1000

Selanjutnya kita peroleh,

N (a_1) = banyaknya anggota S yang habis dibagi 3

= |1000/3|= 333

N (a_2) = banyaknya anggota S yang habis dibagi 5

= |1000/5|= 200

N (a_3) = banyaknya anggota S yang habis dibagi 7

= |1000/7|=142

N (a_1,a_3) = |1000/21|= 66

N (a_2,a_3) = |1000/35|= 28

N (a_1,a_2,a_3) = |1000/35|= 28

Sehingga dengan prinsip inklusi-eksklusi, didapat:

a. N (a_1,a_2) = N - N (a_1) - N (a_2) + N (a_1,a_2)

= 1000 – 333 – 200 + 66 = 533

b. N (a_1,a_2,a_3) = N - N (a_1) - N (a_2) - N (a_3)

+ N (a_1,a_2) + N (a_1,a_3) - N (a_1,a_2,a_3)

$= 1000 – 333 – 200 – 142 + 66 + 47 + 28 – 9$

$= 457$

Contoh 4.2.2:

Sebanyak *n* bola berbeda ditempatkan ke dalam *k* kotak yang berbeda. Berpakah peluang bahwa tidak terdapat kotak yang kosong?

Penyelesaian:

Misal *S* adalah himpunan semua kejadian (pendistribusian) yang mungkin. E_i adalah kejadian bahwa kejadian E_i muncul. Dalam hal ini $i \in \{1,2,3,...,k\}$.

Kita peroleh $N=|S| = k^n$. Demikian pula; $N(a_i) = (k-1)^n$; $N(a_ia_j) = (k-2)^n$; $N(a_ia_ja_k) = (k-3)^n$; … dan seterusnya. Selanjutnya terdapat $\binom{k}{1}$ cara memilih sifat a_i; $\binom{k}{2}$ cara memilih sifat a_i dan a_j; $\binom{k}{3}$ cara memilih sifat a_i, a_j, dan a_k dan seterusnya. Sehingga banyaknya cara menempatkan (mendistribusikan) *n* bola ke dalam kotak sedemikian hingga tidak ada kotak yang kosong adalah :

$$N\ (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k)\ = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + ... + (-1)^k\binom{k}{k}(k-k)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

Dengan demikian, peluang tidak ada kotak kosong adalah…

$$\frac{N(a_1,a_2,...,a_k)}{N} = k^{-n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left(1-\frac{i}{k}\right)^n$$

Contoh 4.2.3:

Gunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menentuka banyaknya solusi bulat dari persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 0 \le x_i \le 5, \forall i \in \{1,2,3\}$$

Penyelesaian :

Misalkan S adalah himpunan semua solusi bulat dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 20, 0 \le x_i \le 5, \forall i \in \{1,2,3\}$. Maka dapat ditunjukkan bahwa

$$N = |S| = \binom{3+20-1}{20} = \binom{22}{20} (\text{lihat contoh 2.3.5 bab 2})$$

Untuk setiap $i \in \{1,2,3\}$, misalkan a_i menyatakan sifat $x_i \ge 6$.

Sehingga,

N(a_1) = banyaknya anggota S yang mempunyai sifat a_1

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$,

$x_1 \ge 6, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 - 6 + x_2 + x_3 = 14$,

$x_1 - 6 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 14$,

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

$= \binom{3+14-1}{14} = \binom{16}{14}$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai $N(a_3) = \binom{16}{14}$

Selanjutnya,

N(a_1a_2) = banyak anggota S yang memiliki sifat a_1 dan a_2

= banyaknya solusi $x_1 + x_2 + x_3 = 20$,

$x_1 \ge 6, x_2 \ge 6, x_3 \ge 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 - 6 + x_2 - 6 + x_3 = 8$,

$x_1 - 6 \ge 0, x_2 - 6 \ge 0, x_3 \ge 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 8$,

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$N(a_1a_2) = N(a_1 \, dan \, a_2) = \binom{10}{8}$$

N($a_1a_2a_3$) = banyak anggota S yang memiliki sifat a_1,a_2 dan a_3

= banyaknya solusi $x_1 + x_2 + x_3 = 20$,

$x_1 \ge 6, x_2 \ge 6, x_3 \ge 6$

= banyaknya solusi bulat $x_1 - 6 + x_2 - 6 + x_3 - 6 = 8$,

$x_1 - 6 \geq 0, x_2 - 6 \geq 0, x_3 - 6 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 2$,

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

$$= \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2}$$

Menurut prinsip inklusi-eksklusi, diperoleh:

N (a_1,a_2,a_3) = N - N (a_1) - N (a_2) - N (a_3) + N (a_1,a_2) + N (a_1,a_3) - N (a_1,a_2,a_3)

$$= \binom{22}{20} - \binom{16}{14} - \binom{16}{14} - \binom{16}{14} + \binom{10}{8} + \binom{10}{8} + \binom{10}{8} - \binom{4}{2}$$

$$= \binom{22}{20} - 3\binom{16}{14} + 3\binom{10}{8} - \binom{4}{2}$$

Jadi banyak solusi bulat dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, 0 \leq x_i \leq 5, \forall i \in \{1,2,3\}$$

Adalah :

$$\binom{22}{20} - 3\binom{16}{14} + 3\binom{10}{8} - \binom{4}{2}$$

4.3 **Banyak Obyek Memiliki Tempat *m* Sifat**

Seperti sebelumnya, misalkan S adalah himpunan N obyek, dan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ adalah sifat-sifat dari obyek-obyek yang terdapat di dalam S. adakalanya kita ingin mengetahui banyaknya obyek di S yang memiliki tepat m sifat. Kita akan lambangkan dengan e_m banyaknya obyek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat. Selanjutnya untuk $t \geq 1$, kita definisikan s_t sebagai berikut :

$$S_t = \sum N(a_{i1,} a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{it})$$

Dimana "sigma" mencakup semua kemungkinan memilih t sifat $a_{i1,} a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{it}$ dari r sifat yang ada. Hubungan e_m dan s_m dapat dilihat di teorema berikut.

Teorema 4.3.1

Misalkan $a_{1,} a_2, \ldots, a_r$ adalah sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh suatu obyek di himpunan S, maka banyak obyek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat adalah :

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \binom{m+3}{3} + \ldots$$

$$+ (-1)^p \binom{m+p}{p} s_{m+p} + \ldots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r$$

Bukti :

Seperti halnya bukti teorema 4.2.1 untuk membuktikan Teorema 4.3.1, cukup ditunjukan bahwa :

(i) Setiap obyek S yang memiliki kurang dari m sifat, tidak dihitung dalam menghitung ruas kiri maupun ruas kanan (4.3.1)

(ii) Setiap obyek S yang memiliki tepat m sifat, dihitung tepat satu kali dalam menghitung ruas kiri dan ruas kanan (4.3.1)

(iii) Setiap obyek S yang memiliki lebih dari m sifat, dihitung nol kali dalam menghitung ruas kiri dan ruas kanan (4.3.1)

Pandang sebuah obyek sembarang di S, misalnya obyek x. kita tinjau tiga kasus. Pertama, obyek x memiliki kurang dari m sifat; kedua obyek x memiliki tepat m sifat; dan ketiga, obyek x memiliki lebih dari m sifat.

Jika obyek ini memiliki kurang dari m sifat, maka jelas obyek tersebut tidak dihitung dalam menghitung e_m dan tidak dihitung dalam menghitung setiap suku ruas kanan dari persamaan (4.3.1).

Jika obyek x memiliki tepat m sifat maka obyek ini dihitung tepat satu kali dalam menghitung e_m. selanjutnya, karena obyek x dihitung sekali dalam menghitung s_m; dihitung no kali dalam menghitung s_{m+k}, untuk $k \geq 1$, maka obyek ini dihitung tepat satu kali dalam menghitung ruas kanan (4.3.1).

Jika obyek x memiliki lebih dari m sifat, m+j sifat katakana, jelas obyek ini tidak dihitung dalam menghitung e_m. dan akan ditunjukan bahwa obyek ini dihitung sebanyak nol kali dalam menghitung ruas kanan (4.3.1).

Perhatikan bahwa obyek tersebut dihitung sebanyak $\binom{m+j}{m}$ dalam menghitung s_m, $\binom{m+j}{m+1}$ dalam menghitung s_{m+1}, $\binom{m+j}{m+2}$ dalam menghitung s_{m+2}, $\binom{m+j}{m+3}$ dalam menghitung s_{m+3}, dan seterusnya. Secara umum obyek tersebut dihitungsebanyak

$\binom{m+j}{m+p}$ dalam menghitung s_{m+p}, untuk $p \le j$. Sedangkan untuk $p \ge j$., obyek tersebut tidak dihitung dalam menghitung s_{m+p}, karena sudah kita misalkan obyek tersebut memiliki m+j sifat. Dengan demikian, dalam menghitung ruas kanan (4.3.1) obyek x tersebut dihitung sebanyak :

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+j}{m+1}\binom{m+1}{1} + \binom{m+j}{m+2}\binom{m+2}{2} - \binom{m+j}{m+3}\binom{m+3}{3} + \dots$$
$$+(-1)^p \binom{m+j}{m+p}\binom{m+p}{p} + \dots + (-1)^j \binom{m+j}{m+j}\binom{m+j}{j} \qquad (4.3.2)$$

Dapat ditunjukan bahwa :

$$\binom{m+j}{m+p}\binom{m+p}{p} = \binom{m+j}{m}\binom{j}{p}$$

Sehingga bentuk (4.3.2) menjadi :

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+j}{m+1}\binom{j}{1} + \binom{m+j}{m}\binom{j}{2} - \binom{m+j}{m}\binom{j}{3} + \dots$$
$$+(-1)^j \binom{m+j}{m}\binom{j}{j}$$

Yang sama dengan :

$$\binom{m+j}{m}\left\{\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \binom{j}{3} + \dots + (-1)^j \binom{j}{j}\right\} \qquad (4.3.3)$$

Karena :

$$\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \dots + (-1)^j \binom{j}{j} = 0$$

Maka (4.3.3) sama dengan nol. Dengan demikian teorema terbukti.

Catatan :

(i) Perhatikan bahwa :

$$\binom{m+j}{m+p}\binom{m+p}{p} = \frac{(m+j)!}{(m+p)!(j-p)!} \cdot \frac{(m+p)!}{}$$

$$= \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \cdot \frac{j}{p!(j-p)!}$$

$$= \binom{m+j}{m}\binom{j}{p}$$

(ii) Jika $S_0 = N$, maka prinsip inklusi-eksklusi adalah kejadian khusus Teorema 4.3.1 (yaitu untuk m=0).

Salah satu aplikasi dari Teorema 4.3.1 daoat dilihat pada contoh berikut ini.

Contoh 4.3.1 :

Sebanyak n pasang suami istri hadir dalam suatu pesta dansa. Dansa dilakukan serentak dan seorang pria harus berdansa dengan seorang wanita.

a) Berapakah peluang terdapat tepat satu pasang suami istri dansa dalam pesta dansa tersebut ?
b) Berapakah peluang terdapat tiga pasang suami istri berdansa bersama dalam pesta dansa tersebut ?

Penyelesaian :

Misalkan S adalah himpunan semua pasangan dansa yang mungkin, dan a_i menyatakan sifat dimana suami ke I berpasangan dengan istrinya, $1 \le i \le n$. Karena terdapat n pasang suami istri, maka $N = |S| = n!$. Selanjutnya kita peroleh :

$N(a_i)$ =banyaknya pasangan yang mungkin dimana pasangan ke-I adalah pasangan suami istri.

= banyaknya permutasi (n-1) elemen

=(n-1)!

Begitu pula,

$N(a_i a_j)$ = banyaknya pasangan yang mungkin dimana pasangan ke-i dan ke-j adalah pasangan-pasangan suami istri

= banyaknya permutasi (n-2) elemen

=(n-2)!

Secara umum diperoleh,

$$N(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}) = (n-k)!$$

Karena ada $\binom{n}{k}$ cara memilih k sifat dari n sifat yang ada, maka:

$$Sk = \sum N(a_{i1}, a_{i3}, \dots, a_{ik}) = \binom{n}{k}(n-k)!$$

a) Dari Teorema 4.3.1 (r = n, m = 1), diperoleh:

$$e_1 = s_1 - \binom{2}{1} s_2 + \binom{3}{2} s_3 + \cdots (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} s_n$$
$$= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{2}{1}\binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!$$
$$= \frac{n!}{1!\,(n-1)!}(n-1)! - \frac{2!}{1!\,1!}.\frac{n!}{2!\,(n-2)!}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-1)!\,1!}0!$$
$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]$$

b) Dari **Teorema 4.3.1** (r = n, m = 3), diperoleh:

$$e_3 = s_3 - \binom{4}{1} s_4 + \binom{5}{2} s_5 - \cdots + (-1)^{n-3} \binom{n}{n-3} s_n$$
$$= \binom{n}{3}(n-3)! - \binom{4}{1}\binom{n}{4}(n-4)! + \binom{5}{2}\binom{n}{5}(n-5)! - \cdots + (-1)^{n-3}\binom{n}{n-3}\binom{n}{n}(n-n)!$$
$$= \frac{n!}{3!\,(n-3)!}(n-3)! - \frac{4!}{1!\,3!}.\frac{n!}{4!\,(n-4)!} - \frac{n!}{(n-4)!} + \frac{5!}{2!\,3!}.\frac{n!}{5!\,(n-5)!}(n-5)! - \cdots + (-1)^{n-3}\frac{n!}{(n-3)(n-3)!}0!$$
$$= \frac{n!}{3!}\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-3)!}\right]$$

Dengan demikian peluang terdapat tepat tiga pasang suami istri berdansa bersama adalah:

$$\frac{e_3}{N} = \frac{1}{3!}\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-3}\frac{1}{(n-3)!}\right]$$

5.3 Banyak Obyek Yang Memiliki Sifat Sebanyak Genap Atau Ganjil

Disini kita tertarik dengan obyek-obyek dari S yang mempunyai sifat sebanyak bilangan genap ataupun ganjil. Berapa banyakkah obyek-obyek dari S yang memiliki sifat sebanyak genap atau ganjil? Jawaban dari pertanyaan tersebut diberikan dalam teorema berikut. Dalam teorema berikut, e_m dan s_m untuk suatu m, sama seperti didalam Teorema 4.3.1.

Teorema 4.4.1:

Jika didalam himpunan S terdapat r sifat, maka banyaknya obyek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan genap adalah:

$$e_0 + e_2 + e_4 + \cdots = \frac{1}{2}\left[s_0 + \sum_{t=0}^{r} (-2)^t s_t\right]$$

Dan banyaknya obyek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan ganjil adalah:

$$e_1 + e_3 + e_5 + \cdots = \frac{1}{2}\left[s_0 + \sum_{t=0}^{r} (-2)^t s_t\right]$$

Bukti:

Misal $E(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m x^m$ adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan (e_m). Dari teorema 4.3.1 diperoleh:

$$E(x) = [s_0 - s_1 + s_2 - s_3 - \cdots + (-1)^r s_r]$$
$$+ \left[s_1 - \binom{2}{1} s_2 + \binom{3}{2} s_3 - \cdots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} s_r\right] x$$
$$+ \left[s_2 - \binom{3}{1} s_3 + \binom{4}{2} s_4 - \cdots + (-1)^{r-2} \binom{r}{r-2} s_r\right] x^2 + \cdots$$
$$+ \left[s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \cdots\right.$$
$$\left. + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r\right] x^m + \cdots + s_r x^r$$

Ekuivalen dengan:

$$E(x) = s_0 - s_1[x-1] + s_2\left[x^2 - \binom{2}{1} x + 1\right] + \cdots$$
$$+ s_m \left[x^m - \binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} x\right.$$
$$\left. + (-1)^m\right] + \cdots$$
$$+ s_r \left[x^r - \binom{r}{1} x^{r-1} + \binom{r}{2} x^{r-2} + \cdots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} x + (-1)^r\right]$$

Sehingga,

$$E(x) = \sum_{m=0}^{r} s_m (x - x_1)^m$$

Dengan demikian,

$$E(1) = \begin{cases} s_0, jika\ m = 0 \\ 0, jika\ m \geq 1 \end{cases}$$

Dan $E(-1) = \sum_{m=0}^{r}(-2)^m s_m$

Karena $E(x) = \sum_{m=0}^{r} e_m x^m$ maka,

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_{2t} = \frac{1}{2}[E(1) + E(-1)] = \frac{1}{2}[s_0 + \sum_{m=0}^{r}(-2)^m s_m],$$

Dan

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_{2t} = \frac{1}{2}[E(1) - E(-1)] = \frac{1}{2}[s_0 - \sum_{m=0}^{r}(-2)^m s_m]$$

Dengan demikian teorema terbukti.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tentukan banyak bilangan bulat dari 1 sampai dengan 10000 yang tidak habis dibagi 4, 6, 7 atau 10!
2. Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai dengan 1000000 yang tidak habis dibagi bilangan kuadrat sempurna atau bilangan cacah pengkat tiga kurang dari 30!
3. Tentukan banyaknya permutasi dari {1, 2, 3, 4, 5, 6} sedemikian hingga pola-pola "124" dan "35" tidak muncul!
4. Sebuah kata sandi dengan panjang 9 dibentuk dari angka-angka 0, 1, dan 2 sedemikian hingga tiap angka muncul tiga kali dan tiga angka berurutan dalam kata sandi tersebut tidak boleh sama. Ada berapa kata sandi yang dapat dibentuk?
5. Delapan kecelakaan terjadai dalam satu minggu. Dengan prinsip inklusif dan ekslusif, hitung probabilitas bahwa terdaat paling sedikit satu kecelakaan tiap hari?
6. Untuk suatu bilangan cacah n, banyaknya solusi bulat dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n, x_i \geq 0, \forall i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$ adalah $\binom{n+k-1}{n}$. Gunakan prinsip inklusi dan ekslusi untuk menentukan banyaknya solusi bulat dari setiap persamaan berikut :
   a. $x_1 + x_2 + x_3 = 13, 0 \leq x_i \leq 7, \forall i \in \{1,2,3\}$;
   b. $x_1 + x_2 + x_3 = 14, 1 \leq x_i \leq 7, \forall i \in \{1,2,3\}$;
   c. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, $1 \leq x_i \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 7$, $4 \leq x_3 \leq 8$, $2 \leq x_4 \leq 6$
   d. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$, $1 \leq x_i \leq 5$, $\forall i \in \{1,2,3,4\}$
7. Diketahui $X = \{1,2,3,\ldots,k\}$ dan $Y = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Dengan prinsip inklusi-eksklusi tunjukkan bahwa banyaknya fungsi surjektif dari X ke Y adalah :

$$n^k - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-i} \binom{n}{j} (n-j)^k$$

8. Terdapat 10 orang pilot dan 5 pesawat terbang di bandara udara A. Kesepuluh pilot tersebut ditugasi oleh atasannya untuk menerbangkan kelima pesawat tersebut bersama-sama ke bandara udara B. Ada berapa cara yang mungkin untuk mengelompokkan pilot-pilot tersebut ke dalam pesawat?
9. Tentukan banyaknya permutasi dari $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ sedemikian hingga :
   a. Tidak ada bilangan ganjil menempati tempatnya semula ;
   b. Terdapat tepat 3 bilangan menempati tempatnya semula ;
   c. Terdapat tepat 6 bilangan menempati tempatnya semula ;
10. Hitunglah banyaknya permutasi dari $\{1,2,3,\ldots,n\}$ sedemikian hingga terdapat tepat k bilangan menempati tempatnya semula!
11.
   a. Misalkan Q_n menyatakan banyaknya permutasi dari $\{1,2,3,\ldots,n\}$ sedemikian hingga pola-pola : 12, 23, 34, ... , $(n-1)n$ tidak muncul. Tentukan Q_n !
   b. Jika $Dn = n!\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$, buktikan $Q_n = D_n + D_{n-1}$
12. Dua bilangan bulat disebut *prima relatif* jika kedua bilangan tersebut hanya memiliki tepat satu faktor sekutu yaitu 1. Contoh : 6 dan 7 adalah prima relatif : tapi, 6 dan 9 bukan.

   Euler mendefinisikan fungsi ∅ (n) sebagai berikut :

   ∅ (n) = banyaknya bilangan bulat positif kurang dari n yang prima relatif terhadap n.
   a. Misal $p_1, p_2, \ldots, p_k$ adalah faktor-faktor prima dari n dan semua $p_1, p_2, \ldots, p_k$ berbeda. Gunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menunjukkan bahwa :

   $$\emptyset(n) = n - n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k}\right) + n\left(\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1 p_3} + \ldots\right)$$

   $$\ldots + (-1)^k n\left(\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k}\right)$$
   b. Hitung ∅ (10), ∅ (90) dan ∅ (105)!
   c. Tunjukkan bahwa :

$$\emptyset(n) = n\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_9}\right)!$$

d. Gunakan formula dalam (c) untuk menghitung ∅ (90) dan ∅ (315).

13. Setiap bilangan positif n dapat ditulis sebagai perkalian dari faktor-faktor primanya. Misal $p_1, p_2, ..., p_r$ adalah berbeda dan merupakan faktor-faktor prima dari n. Maka :

$n = p_1^{e_1}, p_2^{e_2}, p_3^{e_3}, ..., p_k^{e_i}$ dengan $e_i \geq 1$

Sebagai contoh : $50 = 2^1 5^2$; $150 = 2^1 3^1 5^2$

Fungsi Moebius μ(n) didefinisikan sebagai berikut :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \ jika \quad n = 1 \\ (-1) & , \ jika \ e_1 = 1 \forall 1 \leq i \leq r \\ 0 & , \ jika \quad e_i = 1 \quad untuk.suatu.i \end{cases}$$

Misal : $\mu(50) = 0$, sebab 5^2 adalah faktor dari 50

$\mu(30) = (-1)^3 = 1$, sebab $30 = 2^1 3^1 5^1$

$\mu(15) = (-1)^2 = 1$, sebab $15 = 3^1 5^1$

a. Gunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menunjukkan

$$\sum_{d/12} \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) + \mu(6) + \mu(12)$$

$$= 1 + (-1) + (-1) + 0 + (-1)^2 + 0 = 0$$

b. Misal f dan g adalah fungsi sedemikian hingga

$f(n) = \sum_{d/n} g(d)$. Tunjukan bahwa :

$g(n) = \sum_{d/n} f\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$ (formula inversi Moebius)!

c. Jika ∅(n) adalah fungsi Euler seperti soal di atas, tunjukkan $n = \sum_{d/n} \emptyset(d)$ dan

$\emptyset(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\frac{n}{d}$!

d. Tunjukkan $\emptyset\left(p^e\right) = p^e\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Albertson, M.O. and Hutchinson, J.P. (1998), *Discrete Mathemathics with Algorithms*, John Wiley and Sons, New York.
2. Balakrishnan, V.K. (1991), *Introductory Discrete Mathematics,* Prentice-Hall International Editions, New Jersey, USA.
3. Biggs, N.L. (1987), *Discrete Mathematics,* Oxford University Press, New York.
4. Brualdi, R.A. (1982), *Introductory Combinatorics,* North Holland, New York-Amsterdam-Oxford
5. Budayasa, I.K. (1995), *Matematia Diskrit I,* University Press, Surabaya
6. Johnsonbaugh, R. (1997), *Discrete Mathematics,* Printece-Hall International, New Jersey.
7. Liu, C.L. (1985), *Elements of Discrete Mathematics,* McGraw-Hill, New York.
8. Papadimitriou, C.H. and Steiglitz, K. (1982), *Combinatorial Optimization: Algorithm and Complexity,* Printice-Hall, E.C, New Jersey, USA.
9. Roberts, F.S. (1984), *Applied Combinatorics,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

BIOGRAFI PENULIS

Khoerul Umam dilahirkan di Jakarta pada bulan April tanggal 23 tahun 1989. Memulai bangku sekolah dari **Taman Kanak-kanak Aisiyah Margahayu Bekasi** yang tidak diselesaikannya. Kemudian melanjutkan pendidikan dasarnya di **SDN Cempaka Putih Barat 17 Pagi Jakarta Pusat** dan pindah sekolah ke SDN Margahayu XIII Bekasi Timur. Sejak sekolah dasar, dia menunjukkan ketertarikannya pada bidang matematika yang diinspirasi oleh seorang guru kelas VI. Kemudian melanjutkan studinya ke Pesantren **Daar El – Qolam**. Selama menempuh studinya di pondok pesantren **Daar El – Qolam**. Khoerul Umam pernah menjadi muridnya disukai oleh guru matematikanya di kelas IX. Selanjutnya, pada saat SMA, kembali menunjukkan ketertarikannya pada bidang matematika dengan memperdalam ilmu kalkulus dasar yang setiap pagi diberikan latihan oleh Guru.

Setelah menamatkan Sekolah Tingkat Menengah, Khoerul Umam melanjutkan studi di **Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA, Jakarta Timur**. Pada tingkat III berhasil mendapatkan beasiswa BPPA sampai akhir studinya. Setelah lulus dari **UHAMKA**, Khoerul Umam mendapatkan kesempatan untuk melanjutkan studi magister bidang pendidikan matematika di **UNESA (Universitas Negeri Surabaya)** dengan bantuan Beasiswa BPPS selama 2 tahun dari 2011 – 2013. Pada tahun 2016, Khoerul Umam mendapatkan Beasiswa Doktor di Universitas Negeri Malang. Saat ini saya hidup Bersama Istri tercinta Indri Trisno Wibowo, dan dua putri saya yang cantik; Mischa Mahreen Nusabha dan Zareen Khumaira Setelah menamatkan studinya, dia mengajar di almamater tercintanya UHAMKA sampai saat ini dan memegang mata kuliah, Kalukulus Peubah Banyak, Matematika Realistik, Masalah Bawah dan Nilai Syarat Bawah.

Moto hidup : Memberi Jauh lebih Indah.

Matematika Diskrit

Edisi Revisi

Matematika Diskrit merupakan mata kuliah yang diajarkan dengan menerapkan konsep – konsep dasar matematika yang diterapkan secara sederhana pada aplikasi-aplikasi kehidupan nyata.

ISBN 978-602-71744-4-3

9 786027 174443

CV. Kireinara