

**PELABELAN LINGKARAN AJAIB - SUPER PADA GRAF
HASIL KALI SISIR - SISI DARI
DUA GRAF LINGKARAN**

PROYEK

Karya Tulis sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Pengajaran Matematika dari
Institut Teknologi Bandung

Oleh :

TRISNA ROY PRADIPTA

NIM : 90112001



**PROGRAM STUDI MAGISTER PENGAJARAN MATEMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG**

2014

ABSTRAK

Pelabelan Lingkaran-Ajaib Super pada Graf Hasil Kali Sisir-Sisi dari Dua Lingkaran

Oleh

Trisna Roy Pradipta

NIM: 90112001

Pada proyek ini diperkenalkan graf hasil kali sisir-sisi dari dua graf G dan H , dinotasikan dengan $G \bowtie_e H$, yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan G dan $|E(G)|$ salinan H yaitu $H_1, H_2, \dots, H_{|E(G)|}$, kemudian menempelkan sisi ke- i di G pada suatu sisi e di H_i , $i = \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$.

Misalkan C_n adalah graf lingkaran. Sebuah graf $G = (V, E)$ dikatakan memiliki selimut- C_n jika setiap sisi $e \in E(G)$ merupakan sisi pada minimal satu subgraf dari G yang isomorfik dengan C_n . Graf $G = (V, E)$ yang memuat sebuah selimut-lingkaran C_n dikatakan lingkaran-ajaib jika terdapat pelabelan total $\varphi : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ sedemikian sehingga setiap subgraf G yang isomorfik dengan C_n mempunyai bobot yang sama. Dalam hal ini, bobot C_n dinotasikan $\varphi(C_n')$, didefinisikan sebagai $\sum_{v \in V(C_n')} \varphi(v) + \sum_{e \in E(C_n')} \varphi(e)$, dengan memperhatikan bahwa $\varphi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$.

Pada proyek ini dibahas sebuah teknik yang diberi nama m -seimbang multihimpunan untuk mempartisi multihimpunan menjadi m submultihimpunan dengan kardinalitas yang sama sedemikian sehingga jumlah seluruh elemen pada setiap submultihimpunan bernilai sama. Teknik ini digunakan untuk menunjukkan pelabelan lingkaran-ajaib super pada graf hasil kali sisir-sisi dari dua lingkaran.

Kata kunci: graf hasil kali sisir-sisi, graf lingkaran-ajaib, m -seimbang, pelabelan lingkaran-ajaib super, selimut- C_n .

ABSTRACT

Some Cycle-Supermagic Labeling of The Edge-Comb Product Graph of Two Cycles

By

Trisna Roy Pradipta

NIM: 90112001

In this project, we introduce the edge-comb product graph of two graph G and H , denoted by, $G \bowtie_e H$, is a graph obtained by taking one copy of G and $|E(G)|$ copies H which is $H_1, H_2, \dots, H_{|E(G)|}$ and grafting the i -th edge of G to the e edge of H_i , $i = \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$.

Let C_n be a cycle on n vertices. A graph $G = (V, E)$ admits a C_n -covering, if every edge $e \in E(G)$ belongs to a subgraph of G isomorphic to a given cycle C_n . The graph G is called cycle-magic, if there exists a total labeling $\varphi : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ such that for every subgraph $C_n' = (V', E')$ of G isomorphic to C_n has the same weight. In this case, the weight of C_n , denoted by $\varphi(C_n')$, is defined as $\sum_{v \in V(C_n')} \varphi(v) + \sum_{e \in E(C_n')} \varphi(e)$. Furthermore, G is called cycle-supermagic if $\varphi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$.

In this project, we also provide a technique, called a m -balanced multiset, for partitioning a multiset into m sub-multiset with the same cardinality such the sum of all elements of each sub-multiset is same. This technique is used to prove the cycle-supermagic labeling of an edge-comb product of two cycle.

Key-words: *edge-comb product, cycle-magic graph, m -balanced multiset, cycle-supermagic labeling, C_n -covering.*

LEMBAR PENGESAHAN

**Pelabelan Lingkaran Ajaib-Super pada Graf Hasil Kali Sisir-Sisi
dari Dua Lingkaran**

Oleh

Trisna Roy Pradipta

NIM: 90112001

Program Studi Magister Pengajaran Matematika

Institut Teknologi Bandung

Bandung, 9 Juni 2014

Menyetujui,

Pembimbing

Prof. Dr. M. Salman A.N.

Pedoman Penggunaan Proyek

Proyek yang tidak dipublikasikan terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Institut Teknologi Bandung, dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada pengarang dengan mengikuti aturan HaKI yang berlaku di Institut Teknologi Bandung.

Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizing pengarang dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Memperbanyak atau menerbitkan sebagian atau seluruh proyek haruslah seizing Dekan Sekolah Pascasarjana, Institut Teknologi Bandung.

Dan katakanlah (olehmu Muhammad), "ya TuhanKu, tambahkan kepadaku ilmu pengetahuan." (Q.S. Thoha : 114)

"... dan sesungguhnya seorang penuntut ilmu akan dimintakan ampun untuknya oleh makhluk-makhluk Allah yang di langit dan yang di bumi, ..."

(HR. Abu Dawud)

Karya Tulis ini kudedikasikan untuk

*cahaya dan semangat hidupku ibunda **Hj. Tri Ikati** dan ayahanda **H. Royalih**.*

Terima kasih atas do'a dan cinta yang selalu diberikan untukku.

UCAPAN TERIMA KASIH

Alhamdulillah Rabbil'alamiin.

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan kasih sayang-Nya penulis mempunyai kesempatan dan kekuatan untuk mengikuti studi di Program Studi Magister Pengajaran Matematika Institut Teknologi Bandung. Atas kehendak-Nya akhirnya penulis dapat menyelesaikan proyek ini sebagai tugas akhir untuk memenuhi syarat meraih gelar Magister Pengajaran Matematika.

Dalam proses penyusunan proyek ini, penulis menemui berbagai kendala teknis maupun nonteknis. Namun, itu semua dapat dilalui berkat bimbingan, bantuan, dukungan, serta dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang turut berperan dalam penyusunan proyek ini.

Pertama, penulis menyampaikan terima kasih kepada Prof. Dr. M. Salman A.N., sebagai pembimbing, dengan penuh kesabaran telah membimbing penulis dalam penulisan dan cara penelitian pada proyek ini. Menjadi sebuah kesan yang mendalam bagi penulis terhadap semua perhatian, bantuan, dan bimbingan yang penuh kesabaran. Semoga Allah SWT memberi limpahan kasih sayang sebagai balasan atas kebaikan dan ketulusan hati dalam menurunkan ilmu kepada penulis.

Selanjutnya, penulis sampaikan terima kasih kepada pimpinan dan staf Institut Teknologi Bandung, Sekolah Pasca Sarjana ITB, dan Fakultas MIPA ITB, khususnya Prof. Dr. Pudji Astuti, yang telah memberi kesempatan bagi penulis menerima beasiswa voucher ITB selama satu tahun. Kepada Ketua Program Studi Magister Pengajaran Matematika ITB dari tahun 2012 hingga saat ini, serta kepada seluruh staf dan dosen Program Studi Magister Pengajaran Matematika ITB, terima kasih atas bantuan dan perhatian yang penuh kekeluargaan selama ini.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan mahasiswa Program Studi Magister Pengajaran Matematika ITB angkatan 2012-2014 atas persahabatan yang terjalin. Spesial untuk teman *base-camp*, Ibu Dewi, Sarah, Amalia, Guntur, Iden, dan Soeleman, terima kasih telah berbagi cerita kehidupan dan canda tawa. Semoga kehangatan persahabatan kita selalu terjaga.

Terima kasih kepada bapak Tubagus Ishaq beserta keluarga yang teramat baik hati telah meminjamkan tempat tinggal serta menjadi keluarga bagi kami selama dua tahun ini. Semoga Allah SWT selalu melimpahkan kesehatan dan keselamatan serta memberikan balasan yang berlipat ganda atas kebaikan bapak, ibu, nenek, beserta keluarga.

Terima kasih teramat dalam kepada orang-orang terdekat penulis yang luar biasa, Ibunda tercinta Hj. Tri Ikati dan Ayahanda H. Royalih, terima kasih atas kasih sayang yang tiada henti untuk penulis. Semoga Allah SWT selalu memberi kesehatan dan kebahagiaan untuk ibu dan ayah. Kakakku Novita Puspahaty, Onin Najmudin, dan Adikku Aditya Roy Pradipta, terima kasih atas perhatian dan pengertian yang diberikan demi keberhasilan studi penulis selama ini. Spesial untuk Nurul Safitrah, jadilah selalu sandaran hati serta inspirasi bagi penulis.

Bandung, 9 Juni 2014

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK	i
ABSTRACT	ii
Lembar Pengesahan	iii
Pedoman Penggunaan Proyek	iv
Ucapan Terima Kasih	vi
Daftar Isi	viii
Daftar Gambar	ix
Daftar Lambang	x
BAB I Pendahuluan	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Perumusan Masalah	3
1.3. Tujuan Penelitian	3
1.4. Manfaat Penelitian	3
1.5. Sistematika Penulisan	3
BAB II Pelabelan Graf	4
2.1. Graf	4
2.2. Pelabelan Graf	11
BAB III Pelabelan Lingkaran-Ajaib Super pada Graf Hasil Kali Sisir- Sisi dari Dua Lingkaran	18
BAB IV Kesimpulan dan Masalah Terbuka	28
Daftar Pustaka	29
Indeks	30
Riwayat Hidup Penulis	31

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Permasalahan Jembatan Konigsberg	4
Gambar 2.2	Graf G	5
Gambar 2.3	Graf dan subgrafnya	6
Gambar 2.4	Graf yang isomorfik $G_1 \cong G_2$	7
Gambar 2.5	Graf Lintasan P_1, P_2, P_3 dan P_4	7
Gambar 2.6	Graf lengkap K_1, K_2, K_3 , dan K_4	7
Gambar 2.7	Graf lingkaran C_3, C_4 , dan C_5	8
Gambar 2.8	Graf roda W_3, W_4 , dan W_5	8
Gambar 2.9	Graf pohon T berorde 12	8
Gambar 2.10	Graf yang dihasilkan dari operasi gabungan	9
Gambar 2.11	Graf yang dihasilkan dari operasi join	9
Gambar 2.12	Graf tangga L_4 dan graf prisma D_2^4	10
Gambar 2.13	Graf yang dihasilkan dari operasi <i>corona</i>	10
Gambar 2.14	Hasil kali sisir P_3 dan W_4	11
Gambar 2.15	Ilustrasi hubungan persegi ajaib 3×3 dan pelabelan ajaib super pada $K_{3,3}$	12
Gambar 2.16	pelabelan total sisi ajaib super pada graf C_5	13
Gambar 2.17	pelabelan $K_{1,3}$ -ajaib pada $K_{3,3}$	15
Gambar 2.18	pelabelan C_3 -ajaib super pada W_7	16
Gambar 2.19	pelabelan C_5 -ajaib super pada $4C_5$	17
Gambar 3.1	Graf yang dikonstruksi dari sebuah C_6 dan enam salinan C_4	18
Gambar 3.2	Ilustrasi hasil kali sisir-sisi $G \triangleright_e H$	19
Gambar 3.3	Notasi pelabelan graf hasil kali sisir-sisi $C_4 \triangleright C_5$	21
Gambar 3.4	Pelabelan C_4 -ajaib super pada graf $C_6 \triangleright C_4$	25
Gambar 3.5	Pelabelan C_4 -ajaib super pada graf $C_4 \triangleright C_4$	26
Gambar 3.6	Pelabelan C_5 -ajaib super pada graf $C_5 \triangleright C_5$	27

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
$A \uplus B$	gabungan plus multihimpunan A dan B	16
$A \subseteq B$	A himpunan bagian B	5
$G \cong H$	graf G isomorfik dengan graf H	6
C_n	lingkaran dengan n titik	2
$E(G)$	himpunan sisi graf G	2
$f(e)$	label sisi e di bawah pelabelan f	12
$f(v)$	label titik v di bawah pelabelan f	12
$G \times H$	graf hasil kali kartesius dari G dan H	8
$G \triangleright_v H$	graf hasil kali sisir titik v dari G dan H	8
$G \triangleright_e H$	graf hasil kali sisir sisi e dari G dan H	14
$G = (V, E)$	graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E	5
$[a, b]$	himpunan bilangan bulat dari a sampai dengan b	2
K_n	graf lengkap dengan n titik	7
P_n	graf lintasan dengan n titik	6
$\sum_{v \in V} f(v)$	jumlah seluruh label elemen-elemen V di bawah pelabelan f	12
$\sum_{e \in E} f(e)$	jumlah seluruh label elemen-elemen E di bawah pelabelan f	12
$\sum A$	menyatakan $\sum_{a \in A} a$	2
$G(V)$	himpunan titik graf G	4
$V(G) \setminus \{v\}$	menghilangkan titik v dari himpunan titik G	5
W_n	graf roda.....	7
\mathbb{Z}^+	himpunan bilangan bulat positif	2

Bab I Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh seorang ahli matematika asal Swiss, Leonhard Euler 1736. Gagasan itu muncul sebagai upaya penyelesaian masalah jembatan Königsberg. Di kota Königsberg terdapat sungai yang membelah kota sehingga menjadi empat daratan terpisah. Keempat daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Permasalahan jembatan Königsberg adalah mungkinkah seseorang berjalan berangkat dari salah satu empat daratan dan melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat awal. Permasalahan jembatan Königsberg tersebut telah dibuktikan oleh Euler dan jawabannya tidak mungkin. Dalam pembuktiannya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf.

Graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) atau $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan bagian dari pasangan tak terurut dari titik-titik di G yang disebut dengan sisi. Setiap sisi memiliki satu atau dua titik yang dihubungkan olehnya, titik-titik itu disebut *endpoint*. Suatu sisi yang menghubungkan sebuah titik ke titik itu sendiri disebut *gelung (loop)*. Dua buah sisi berbeda yang menghubungkan sepasang titik yang sama disebut *sisi berganda (multiple edge)*. Graf G dikatakan sebagai *graf sederhana* jika pada graf tersebut tidak terdapat gelung dan sisi berganda. Graf G dengan titik yang tak hingga banyaknya disebut *graf tak hingga*, sedangkan graf G dengan banyak titiknya berhingga disebut *graf hingga*. Suatu graf G disebut *terhubung* jika setiap titik dari graf terdapat jalur yang menghubungkan kedua titik tersebut. Pada proyek ini pembahasan graf dibatasi pada graf hingga, terhubung dan sederhana.

Operasi graf merupakan operasi himpunan titik dan atau himpunan sisi dari dua buah graf, di antaranya operasi gabungan, irisan, selisih, dan penjumlahan. Operasi graf terus mengalami perkembangan yang cukup pesat hingga bermunculan operasi baru seperti hasil kali sisis (*comb product*).

Dalam proyek ini penulis mendefinisikan operasi baru yaitu hasil kali sisir-sisi (*edge comb product*) yang terinspirasi dari hasil kali sisir. Selanjutnya, graf hasil kali sisir-sisi dari dua lingkaran merupakan graf yang menjadi perhatian dalam penelitian ini.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf adalah pemberian nilai (label) pada titik, sisi, atau keduanya. Label yang biasa digunakan berupa bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Sampai dengan tahun 2009, berdasarkan hasil survey (Gallian, 2009), terdapat sekitar 45 jenis pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan salah satu topic yang banyak berguna untuk aplikasi luas, seperti masalah teori pengkodean, masalah kristalografi sinar x , radar, sistem alat jaringan komunikasi dan desain sirkuit (Slamin, 1997).

Jumlah dari semua label yang terkait dengan elemen graf disebut *bobot*. Suatu graf dikatakan memiliki *pelabelan ajaib* jika bobot untuk setiap titik dan atau sisi bernilai sama. Pelabelan ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964). Salah satu jenis pelabelan ajaib yaitu pelabelan H -ajaib atau pelabelan selimut H -ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutiérrez dan Llado (2005) dalam karya tulis yang berjudul *Magic covering*. Graf G dikatakan mempunyai selimut- H , jika setiap sisi di G termuat pada subgraf-subgraf G yang isomorfik dengan suatu graf H . Graf G dikatakan mempunyai pelabelan H -ajaib, jika bobot-bobot dari semua selimut- H bernilai sama. Pelabelan H -ajaib dengan memberikan label terkecil pada titik disebut pelabelan H -ajaib super. Lebih lanjut, graf yang bisa dilabeli dengan pelabelan ini disebut H -ajaib super.

Pelabelan H -ajaib super relatif baru diperkenalkan sehingga hasil-hasil penelitian tentang konsep ini masih relatif sedikit. Dengan memperhatikan suatu kelas graf hasil kali sisir-sisi dari dua lingkaran yang memiliki selimut- H , dalam hal ini H adalah graf lingkaran, penelitian pada proyek ini difokuskan pada pelabelan lingkaran-ajaib super pada graf hasil kali sisir-sisi dari dua lingkaran.

Terinspirasi oleh teknik *k-seimbang multihimpunan* (*k-balanced multiset*), sebuah teknik mempartisi multihimpunan yang diperkenalkan oleh Maryati (2010). Teknik *k-seimbang multihimpunan* ini mempartisi suatu multihimpunan menjadi k submultihimpunan sedemikian sehingga setiap submultihimpunan memiliki kardinalitas yang sama dan hasil penjumlahan seluruh elemen pada setiap submultihimpunan bernilai sama. Teknik ini akan diterapkan dalam konstruksi pembuktian pelabelan lingkaran-ajaib super pada graf hasil kali sisir-sisi dari dua lingkaran.

Pembahasan pada proyek ini menggunakan notasi yang disederhanakan, yaitu $[a, b]$ untuk menyatakan $\{a \leq x \leq b \mid a, b \in \mathbb{Z}^+\}$ dan notasi $\sum A$ yang didefinisikan dengan $\sum_{a \in A} a$. Banyaknya anggota himpunan atau kardinalitas A dinotasikan dengan $|A|$.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam proyek ini adalah apakah graf hasil kali sisir-sisi dari lingkaran C_m dengan lingkaran C_n merupakan C_n ajaib - super.

1.3 Tujuan

Sejalan dengan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan proyek ini adalah merancang pelabelan lingkaran-ajaib super pada graf hasil kali sisir-sisi dari dua lingkaran

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pelabelan graf.

1.5 Sistematika Penulisan

Pada Bab I, terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penelitian. Selanjutnya pada bab II, dibahas tentang graf dan pelabelan graf. Pada bab III, dibahas tentang pendefinisian hasil kali sisir-sisi dari dua graf lingkaran dan pembahasan pelabelan lingkaran-ajaib super pada graf hasil kali sisir-sisi dari dua lingkaran. Kesimpulan dan masalah terbuka dibahas pada bab IV.

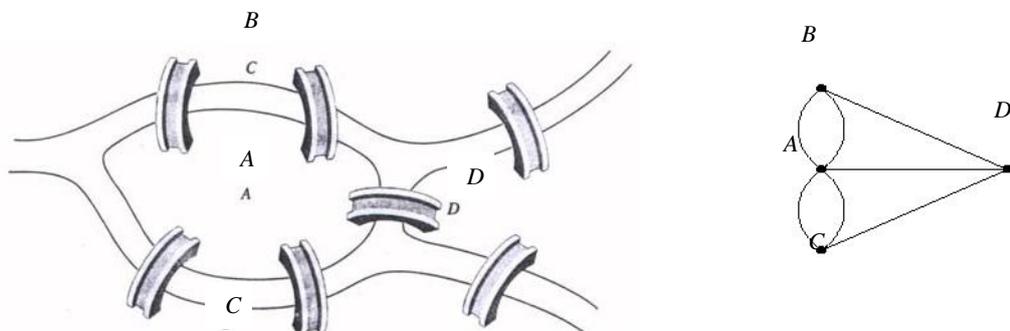
Bab II

Pelabelan Graf

Pada bab ini diperkenalkan beberapa istilah dan notasi yang digunakan pada proyek ini. Istilah yang digunakan merupakan dasar-dasar dalam teori graf berupa definisi, beberapa kelas graf, operasi graf, dan pelabelan graf.

2.1 Graf

Pada tahun 1736, seorang matematikawan bernama Leonard Euler memperkenalkan konsep tentang teori graf. Euler memecahkan permasalahan Jembatan Konigsberg yang telah lama menjadi misteri. Di tempat tersebut mengalir sebuah sungai yang bernama Pregel yang mengalir mengitari sebuah pulau lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai dan di sana terdapat tujuh jembatan. Euler membuktikan bahwa tidak mungkin seseorang melewati semua jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat asal.

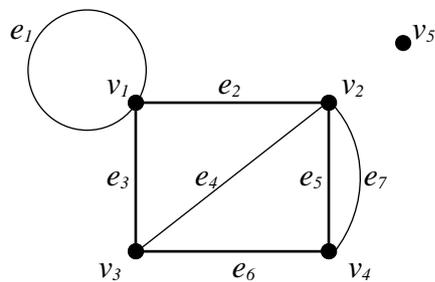


Gambar 2.1 Permasalahan Jembatan Konigsberg

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan bagian dari pasangan tak terurut dari titik-titik di G yang disebut dengan sisi. Banyaknya anggota atau kardinalitas himpunan titik dan himpunan sisi pada graf G dinotasikan berturut-turut dengan $|V|$ dan $|E|$. Graf G disebut *graf berhingga* jika terdapat suatu bilangan bulat non negatif n sehingga $|V| = n$. Lebih lanjut, graf G dikatakan mempunyai *orde* n .

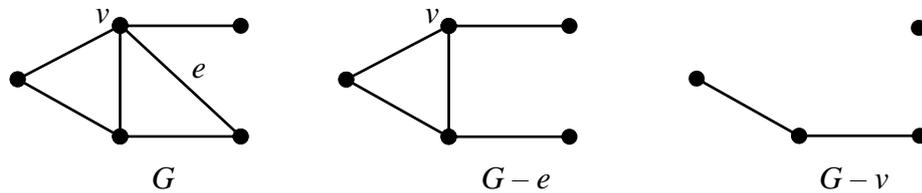
Setiap sisi memiliki satu atau dua titik yang dihubungkan olehnya, titik-titik itu disebut *endpoint*. Misalkan $e = \{u, v\} = uv$ adalah suatu sisi pada graf G dengan u dan v merupakan titik yang dihubungkan oleh e . Titik u dan v disebut titik yang bertetangga (*adjacent vertices*), sedangkan sisi e dan titik u dikatakan bersisian/insiden (*incident*), begitu pula dengan sisi e dan titik v . Jika e_1 dan e_2 adalah dua sisi berbeda di G yang berinsiden dengan suatu titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi-sisi yang bertetangga (*adjacent edges*). Derajat, $\delta(v)$, dari titik v pada graf G adalah banyaknya tetangga dari titik v .

Sebuah sisi yang menghubungkan suatu titik ke titik itu sendiri disebut *gelung* atau *loop*. Graf memiliki *sisi berganda* (*multiple edge*) jika terdapat dua sisi yang menghubungkan sepasang titik yang sama. Graf yang tidak memiliki sisi berganda dan gelung disebut *graf sederhana*. Sebagai ilustrasi, pada gambar 2.1, sisi e_5 dan e_7 adalah sisi berganda dan e_1 adalah gelung. Titik v_5 dinamakan *titik terpencil* (*isolated vertex*) yaitu titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.



Gambar 2.2. Graf G

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf. Graf $H = (V(H), E(H))$ dikatakan *subgraf* dari G , jika $V(H) \subseteq V$ dan $E(H) \subseteq E$, dinotasikan dengan $H \subseteq G$. Suatu subgraf G dapat diperoleh dengan menghapus suatu titik atau sisi di G . Misalkan $v \in V(G)$ dan $|V(G)| \geq 2$, maka $G - v$ adalah subgraf dari G dengan $V(G - v) = V(G) \setminus \{v\}$ dan $E(G - v) = E(G) \setminus \{uv \mid uv \in E(G)\}$. Misalkan $e \in E(G)$, maka $G - e$ adalah subgraf dari G dengan $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$. Gambar 2.2. menunjukkan graf G dan subgrafnya yang diperoleh dengan menghapus suatu sisi atau titik.



Gambar 2.3. Graf dan subgrafnya

Sebuah *jalan* J dari titik v ke titik w pada graf G dengan panjang k adalah suatu barisan titik

$$v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = w$$

sedemikian sehingga

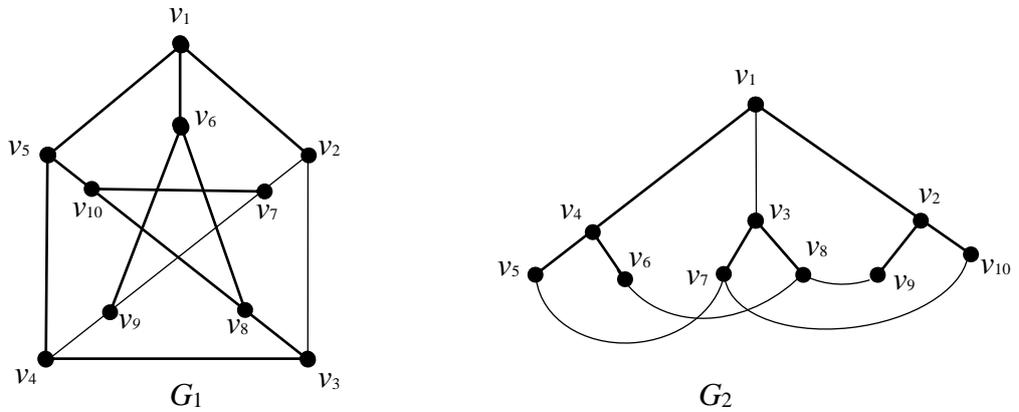
$$v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$$

merupakan sisi-sisi pada graf G . Selanjutnya v dan w disebut titik ujung dari jalan J . Bila $v = w$, maka jalan J disebut *jalan tertutup*. Bila jalan J tersebut memiliki sisi-sisi yang semuanya berbeda, maka J disebut *trail*. Selanjutnya, bila jalan J memiliki titik-titik yang semuanya berbeda, maka J disebut *lintasan (path)*.

Titik v dikatakan *terhubung* dengan w pada graf G jika terdapat suatu lintasan dengan titik v dan titik w sebagai titik ujungnya. Suatu graf G dikatakan *terhubung* jika setiap dua titiknya terhubung, sedangkan graf yang tidak demikian disebut *tak terhubung*.

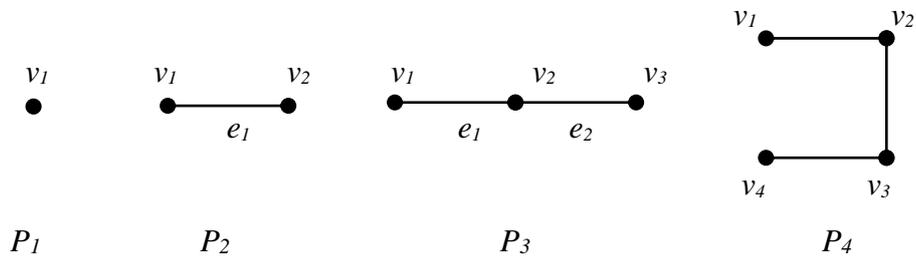
Graf G dan H disebut *isomorfik*, dinotasikan dengan $G \cong H$, jika terdapat fungsi bijektif $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ sedemikian sehingga berlaku $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. Fungsi φ yang demikian disebut *isomorfisma*. Pada gambar 2.3. diberikan graf G_1 yang isomorfik dengan G_2 . Sebagai contoh, fungsi $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= v_1, & \varphi(v_2) &= v_2, & \varphi(v_3) &= v_9, & \varphi(v_4) &= v_5, & \varphi(v_5) &= v_4, \\ \varphi(v_6) &= v_3, & \varphi(v_7) &= v_{10}, & \varphi(v_8) &= v_8, & \varphi(v_9) &= v_7, & \varphi(v_{10}) &= v_6 \end{aligned}$$



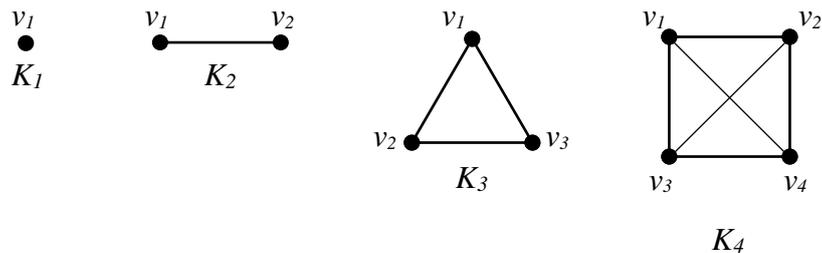
Gambar 2.4. Graf yang isomorfik, $G_1 \cong G_2$

Beberapa kelas graf sederhana di antaranya graf lintasan (*path graph*), graf lengkap (*complete graph*), graf lingkaran (*cycle graph*), graf roda (*wheel graph*) dan graf pohon (*tree graph*). Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n , yaitu graf yang terdiri dari lintasan tunggal. P_n memiliki $n-1$ sisi.



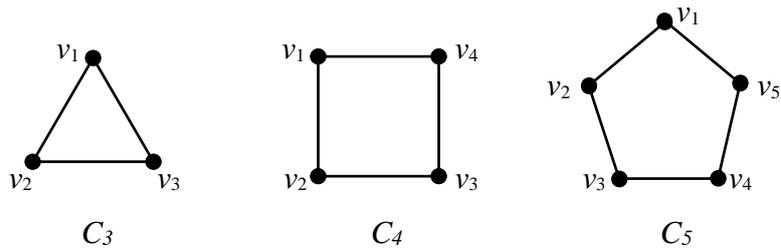
Gambar 2.5. Graf Lintasan P_1, P_2, P_3 dan P_4

Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n yaitu sebuah graf dengan setiap titiknya bertetangga dengan titik lainnya. Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$.



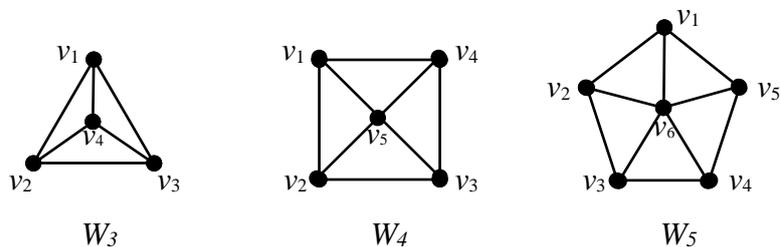
Gambar 2.6 Graf lengkap K_1, K_2, K_3 , dan K_4

Graf lingkaran adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n , $n \geq 3$, adalah graf dengan n titik yaitu v_1, v_2, \dots, v_n dan sisi – sisinya $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$.



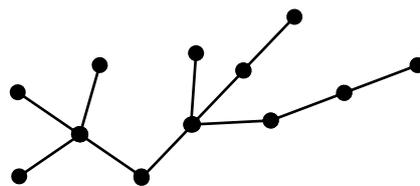
Gambar 2.7 Graf lingkaran C_3 , C_4 , dan C_5

Graf roda W_n , yaitu graf dengan $n + 1$ titik dan $2n$ sisi yang diperoleh dari graf C_n dan ditambahkan satu titik dan n sisi yang mengaitkan titik tersebut dengan setiap titik pada lingkaran C_n . Sisi-sisi yang mengaitkan satu titik tersebut ke setiap titik lainnya disebut *spokes*.



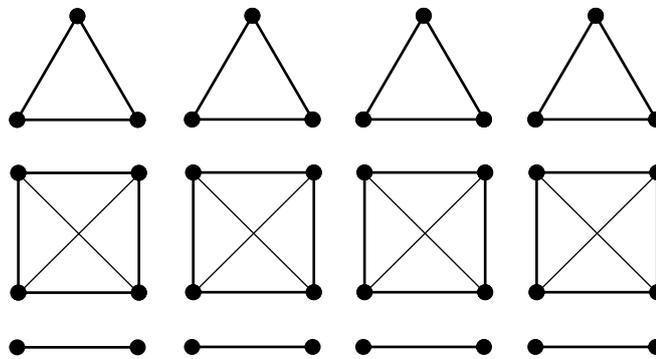
Gambar 2.8. Graf roda W_3 , W_4 , dan W_5

Graf pohon T adalah graf terhubung yang tidak memiliki subgraf berupa lingkaran C_n . Jika suatu graf pohon dikurangi satu sisi, maka graf tersebut menjadi tidak terhubung. Namun, apabila graf pohon tersebut ditambahkan satu sisi, maka graf baru tersebut akan memuat subgraf lingkaran.



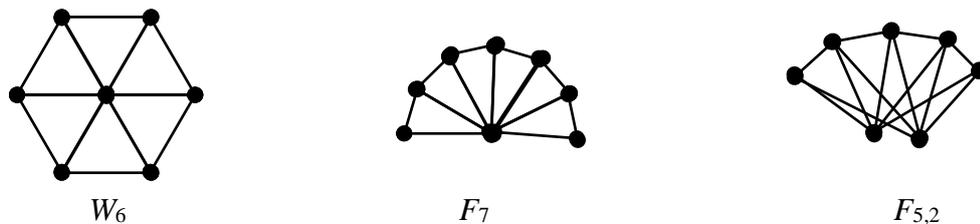
Gambar 2.9 Graf pohon T berorde 12

Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua buah graf sedemikian sehingga $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Gabungan $G = G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Secara umum, jika G_1, G_2, \dots, G_n adalah n buah graf sedemikian sehingga $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ untuk $i \neq j$, maka gabungan $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n = \bigcup_{i=1}^n G_i \cong G$ adalah graf dengan $V(G) = \bigcup_{i=1}^n V(G_i)$ dan $E(G) = \bigcup_{i=1}^n E(G_i)$. Jika $G_1 = G_2 = \dots = G_n = H$, maka $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ ditulis $G = nG$. Sebagai contoh, graf $G = 4H$ dengan $H \cong C_3 \cup K_4 \cup P_2$, lihat Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Graf yang dihasilkan dari operasi gabungan

Join dari graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Graf roda W_n adalah join dari C_n dan K_1 . Graf kipas F_n adalah join dari P_n dan K_1 . Graf kipas ganda $F_{n,2}$ adalah join dari P_n dan $2K_1$ (lihat Gambar 2.11).



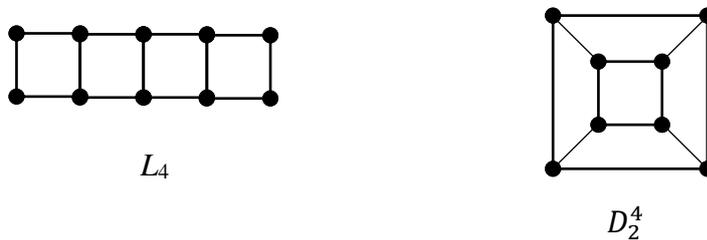
Gambar 2.11 Graf yang dihasilkan dari operasi join

Hasil kali graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G = G_1 \times G_2$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$$

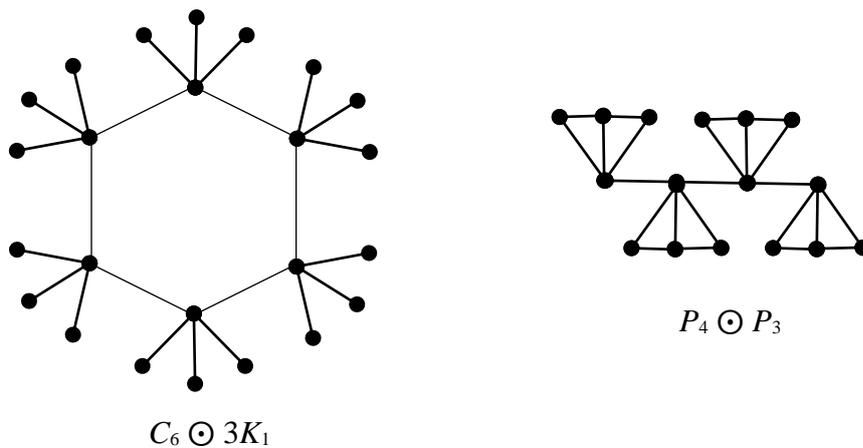
dan $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G) \Leftrightarrow x_1 = y_1$ dan $x_2 y_2 \in E(G_2)$ atau $x_2 = y_2$ dan $x_1 y_1 \in E(G_1)$.

Graf *prisma diperumum* D_n^m didefinisikan sebagai $C_n \times P_m$. Graf tangga L_n didefinisikan sebagai $P_n \times P_2$. Graf tangga L_4 dan graf prisma D_2^4 dapat dilihat pada Gambar 2.12.



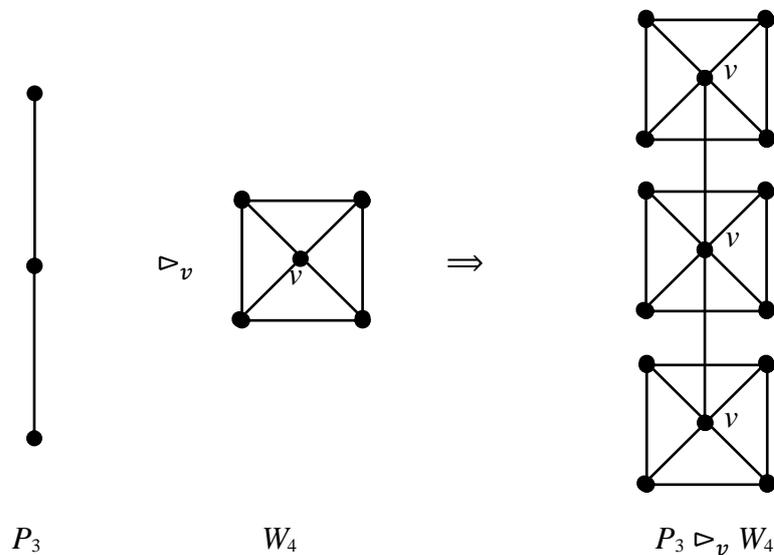
Gambar 2.12 Graf tangga L_4 dan graf prisma D_2^4

Corona $G \odot H$ dari dua graf terhubung G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan G dan $|V(G)|$ salinan H , yaitu $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$, kemudian menghubungkan titik ke- i di G ke setiap titik di $H_i, i = [1, |V(G)|]$. Sebagai contoh, $C_6 \odot 3K_1$ dan $P_4 \odot P_3$.



Gambar 2.13. Graf yang dihasilkan dari operasi *corona*

Misal G dan H adalah dua buah graf terhubung. Misal $v \in V(H)$. *Graf hasil kali sisir* dari G dan H dinotasikan dengan $G \triangleright_v H$, didefinisikan sebagai sebuah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan G dan $|V(G)|$ salinan H , yaitu $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$, kemudian menempelkan titik ke- i di G pada titik v di H_i , $i = [1, |V(G)|]$. Hasil kali sisir dari P_3 dan W_4 diilustrasikan pada Gambar 2.14. Pada bab selanjutnya penulis mendefinisikan hasil kali sisir-sisi yang terinspirasi dari hasil kali sisir ini.



Gambar 2.14 Hasil kali sisir P_3 dan W_4

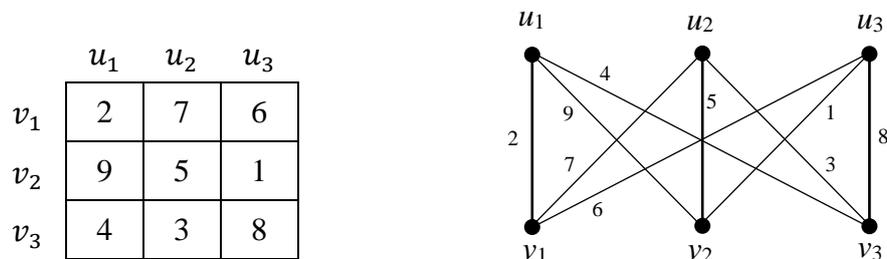
2.2 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Bilangan-bilangan tersebut disebut label. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut *pelabelan titik*. Jika domainnya adalah sisi, maka disebut *pelabelan sisi*, dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut *pelabelan total*.

Jumlah dari semua label yang terkait dengan suatu elemen graf disebut *bobot*. Jenis pelabelan berdasarkan cara menghitung bobot dapat dibedakan menjadi beberapa macam di antaranya pelabelan ajaib, pelabelan anti-ajaib, dan pelabelan graceful. *Pelabelan ajaib* adalah suatu fungsi yang memetakan

elemen graf ke bilangan bulat positif sehingga jumlah label akan sama pada setiap titik di G . Sedangkan *pelabelan anti-ajaib* adalah sebuah fungsi yang memetakan elemen graf ke bilangan bulat positif sehingga jumlah label tidak sama pada setiap titik di G . *Pelabelan graceful* adalah sebuah fungsi yang memetakan titik-titik di G ke bilangan bulat positif sehingga selisih label dari dua titik membentuk bilangan yang berurutan. Dalam proyek ini yang dibahas adalah pelabelan ajaib.

Graf G dikatakan memiliki pelabelan ajaib (*magic labeling*) jika bobot untuk setiap titik dan atau sisi bernilai sama yaitu k . Pelabelan ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964) sebagai perumuman dari persegi ajaib (*magic square*). Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Pelabelan ajaib (*magic labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif dari E ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda, sehingga untuk setiap titik $v \in V$, penjumlahan semua label sisi e yang insiden terhadap titik v sama. Selanjutnya, jika seluruh label pada sisi berupa bilangan bulat positif berurutan, oleh Stewart (1966), disebut sebagai pelabelan ajaib super (*supermagic labeling*). Pelabelan ajaib dari graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ merupakan contoh kesesuaian dengan konsep persegi ajaib berukuran $n \times n$. Untuk m dan n bilangan bulat positif, graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ didefinisikan dengan (V, E) untuk $V(K_{m,n}) = \{u_i, v_j | i \in [1, m], j \in [1, n]\}$ dan $E(K_{m,n}) = \{u_i v_j | i \in [1, m], j \in [1, n]\}$. Ilustrasi hubungan persegi ajaib dengan pelabelan ajaib super pada $K_{3,3}$ dapat dilihat pada gambar 2.15.



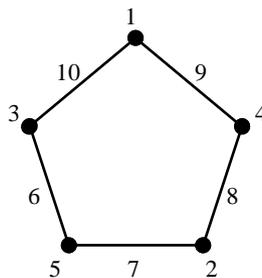
Gambar 2.15 Ilustrasi hubungan persegi ajaib 3×3 dan pelabelan ajaib super pada $K_{3,3}$

Pelabelan graf berkembang pesat setelah Kotzig dan Rosa (1970) memperkenalkan pelabelan ajaib yang selanjutnya disebut *pelabelan total sisi-ajaib* (*edge-magic total labeling*). Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyak titik di G adalah p , banyak sisi di G adalah q dan h merupakan banyak titik dan sisi pada graf G atau $h = p + q$. Pelabelan total sisi ajaib pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, \dots, h\}$ sehingga untuk sebarang sisi xy di G berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut *konstanta ajaib* pada G , dan G disebut *graf total sisi ajaib*.

Jika label bilangan-bilangan terkecilnya diberikan pada titik dan sisanya label bilangan-bilangan yang lebih besar diberikan pada sisi, maka pelabelan itu disebut *pelabelan total sisi ajaib super* (Enomoto dkk., 1998). Penelitian tentang pelabelan total sisi ajaib super telah banyak dibahas untuk berbagai kelas graf. Kotzig dan Rosa (1970) telah membuktikan pelabelan ajaib super pada graf terhubung $K_{m,n}$ untuk sebarang m dan n dan graf lingkaran C_n untuk $n \geq 3$. Gambar 2.16 merupakan contoh pelabelan total sisi ajaib super pada C_5 dengan konstanta ajaib $k = 14$.



Gambar 2.16. Pelabelan total sisi ajaib super pada graf C_5

Beberapa penelitian pelabelan total sisi ajaib super pada beberapa graf gabungan dan graf hasil operasi juga telah banyak dihasilkan, antara lain graf gabungan nP_2 jika dan hanya jika n ganjil (Kotzig dan Rosa, 1970), nK_2 jika dan hanya jika n ganjil (Chen, 2001), nP_3 untuk $n \geq 4$ (Baskoro dan Ngurah,

2003), graf hasil kali $P_n \times C_3$ dan graf hasil operasi *corona* $C_n \odot K_1$ (Yegnanarayanan, 2001).

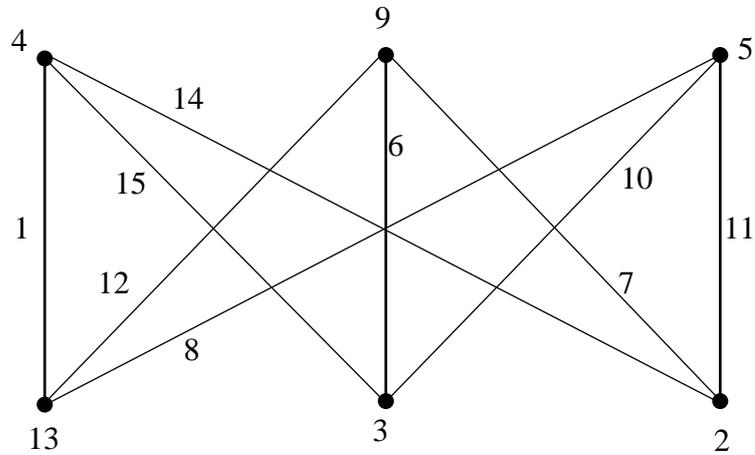
Selain pelabelan total ajaib super, terdapat beberapa jenis pelabelan ajaib lain. Pelabelan-pelabelan tersebut di antaranya pelabelan total titik ajaib (*vertex magic labeling*) yang diperkenalkan oleh MacDougall dkk (2002), yaitu pelabelan ajaib yang memperhatikan kekonstanan bobot suatu titik v yaitu $f(v) + \sum f(vu) = k$, dengan u adalah seluruh titik yang bertetangga dengan v , dan k selanjutnya disebut konstanta ajaib. Sementara itu, Lih (1983) memperkenalkan pelabelan tipe (a, b, c) yaitu pelabelan ajaib untuk pelabelan pada titik, sisi, dan muka yang difokuskan untuk graf planar.

Gutiérrez dan Lladó (2005), memperkenalkan pelabelan H -ajaib (*H-magic labeling*) yang memperhatikan selimut H dalam pelabelannya. Misalkan H suatu graf. Sebuah graf $G = (V, E)$ dikatakan memiliki selimut H jika setiap sisi $e \in E(G)$ merupakan sisi pada minimal satu subgraf dari G yang isomorfik dengan H . Dimisalkan bahwa $G = (V, E)$ memuat sebuah selimut H , maka sebuah fungsi bijektif $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ adalah sebuah *pelabelan H-ajaib* dari G jika terdapat sebuah bilangan bulat positif k_h yang disebut konstanta ajaib sedemikian sehingga untuk setiap subgraf $H' = (V', E')$ dari G isomorfik terhadap H berlaku

$$f(H') = \sum_{v \in V'} f(v) + \sum_{e \in E'} f(e) = k_h.$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa graf G adalah H -ajaib. Jika label pada titik-titiknya adalah label-label terkecil, maka G dikatakan H -ajaib super. Dilihat dari sejarah perkembangannya, Pelabelan H -ajaib super diinspirasi dari pelabelan total sisi ajaib super jika $H = P_2$. Pelabelan total sisi ajaib super dapat dinyatakan sebagai pelabelan P_2 -ajaib super.

Hasil penelitian pelabelan H -ajaib pertama kali yaitu pelabelan bintang-ajaib dan pelabelan lintasan ajaib super terhadap graf terhubung (Gutiérrez dan Lladó, 2005). *Graf bintang*, dinotasikan dengan $K_{1,n}$ untuk bilangan bulat $n \geq 1$, didefinisikan dengan $V(K_{1,n}) = \{v, v_i | i \in [1, n]\}$ dan $E(K_{1,n}) = \{vv_i | i \in [1, n]\}$. Sebagai contoh, pelabelan $K_{1,3}$ -ajaib pada $K_{3,3}$ dapat dilihat pada gambar 2.12.

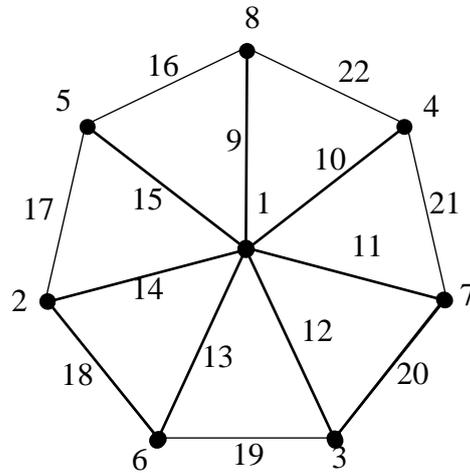


Gambar 2.17 pelabelan $K_{1,3}$ -ajaib pada $K_{3,3}$

Pada Gambar 2.12 dapat diperiksa bahwa jumlah label setiap $K_{1,3}$ adalah konstan. Dari graf tersebut diperoleh 6 buah $K_{1,3}$ dengan jumlah masing-masing labelnya adalah sebagai berikut:

- $f(K_{1,3}) = 4 + 13 + 3 + 2 + 1 + 15 + 14 = 52$
- $f(K_{1,3}) = 9 + 13 + 3 + 2 + 12 + 6 + 7 = 52$
- $f(K_{1,3}) = 5 + 13 + 3 + 2 + 8 + 10 + 11 = 52$
- $f(K_{1,3}) = 13 + 4 + 9 + 5 + 1 + 12 + 6 = 52$
- $f(K_{1,3}) = 3 + 4 + 9 + 5 + 15 + 6 + 10 = 52$
- $f(K_{1,3}) = 2 + 4 + 9 + 5 + 14 + 7 + 11 = 52$

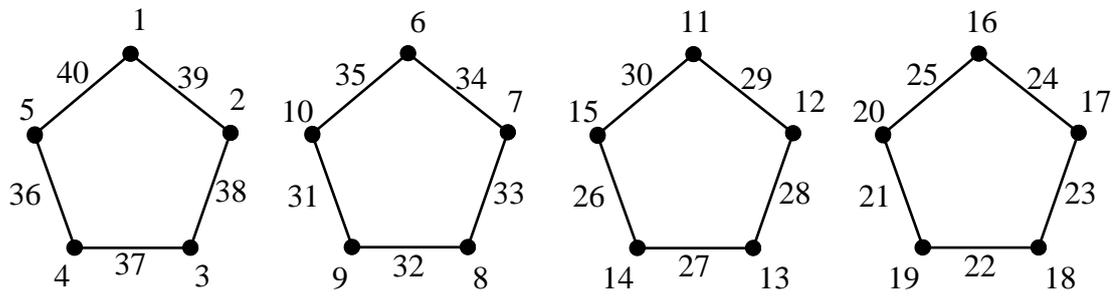
Kemudian Lladó dan Moragas (2007) memberikan banyak kontribusi pada pelabelan H -ajaib dalam tulisannya yang berjudul *Cycle-magic graphs*. Pada karya tulis tersebut diantaranya telah dibuktikan bahwa graf roda W_n untuk $n \geq 5$ ganjil merupakan C_3 -ajaib super. Salah satu contoh pelabelan ini ditunjukkan pada Gambar , yaitu pelabelan C_3 -ajaib super pada graf roda W_7 .



Gambar 2.18 Pelabelan C_3 -ajaib super pada W_7

Kontribusi hasil penelitian tentang C_n -ajaib super juga diberikan oleh Salman dan Purnomo (2010) untuk graf bipartit lengkap $K_{m,n}$. Sementara itu, Ngurah dkk (2010) memberikan beberapa hasil untuk pelabelan C_n -ajaib super pada beberapa jenis kelas graf, antara lain lintasan- kC_n . Lintasan kC_n merupakan graf rantai dengan k blok identik dan isomorfik dengan C_n . Sedangkan kelas graf lainnya di antaranya graf kipas F_n dan graf tangga L_n .

Selanjutnya, Maryati dkk., (2011) memberikan kontribusi untuk pelabelan C_n -ajaib super untuk graf gabungan beberapa lingkaran, cC_n . Graf cC_n didefinisikan sebagai sebuah graf yang dikonstruksi dari c salinan C_n . Sebuah teknik mempartisi himpunan atau multihimpunan, yang diberi nama k -seimbang (multi)himpunan, diperkenalkan oleh Maryati, dkk., (2010) dan dijadikan perangkat utama dalam pembuktian teorema-teoremanya. Teknik k -seimbang multihimpunan ini mempartisi suatu multihimpunan menjadi k submultihimpunan sedemikian sehingga setiap submultihimpunan memiliki kardinalitas yang sama dan hasil penjumlahan seluruh elemen pada setiap submultihimpunan bernilai sama. Sebagai contoh, suatu pelabelan C_5 -ajaib super pada $4C_5$ dapat dilihat pada gambar 2.14.



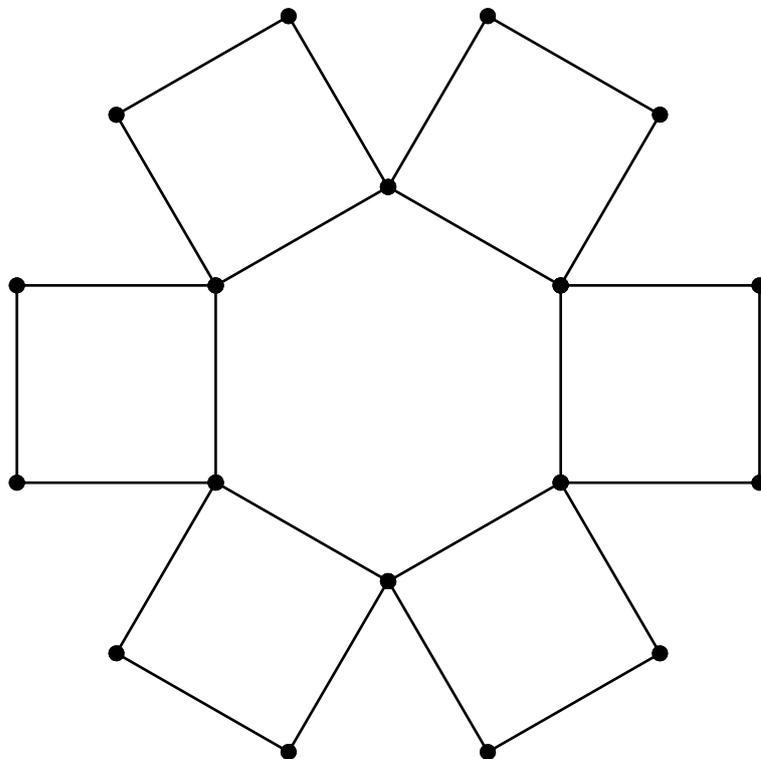
Gambar 2.19. Pelabelan C_5 -ajaib super pada $4C_5$

Setelah melihat uraian hasil-hasil penelitian yang telah diperoleh oleh peneliti lain, dapat dilihat bahwa hasil penelitian tentang C_n -ajaib super masih sangat terbatas.

Bab III

Pelabelan Lingkaran-Ajaib Super pada Graf Hasil Kali Sisir-Sisi dari Dua Lingkaran

Pada awalnya, penulis memperhatikan sebuah graf yang dikonstruksi dari dua lingkaran, C_m dan C_n . Setiap sisi C_m , ditempeli oleh sebuah sisi dari salinan C_n . Untuk $m = 6$ dan $n = 4$, ilustrasi graf tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.1.



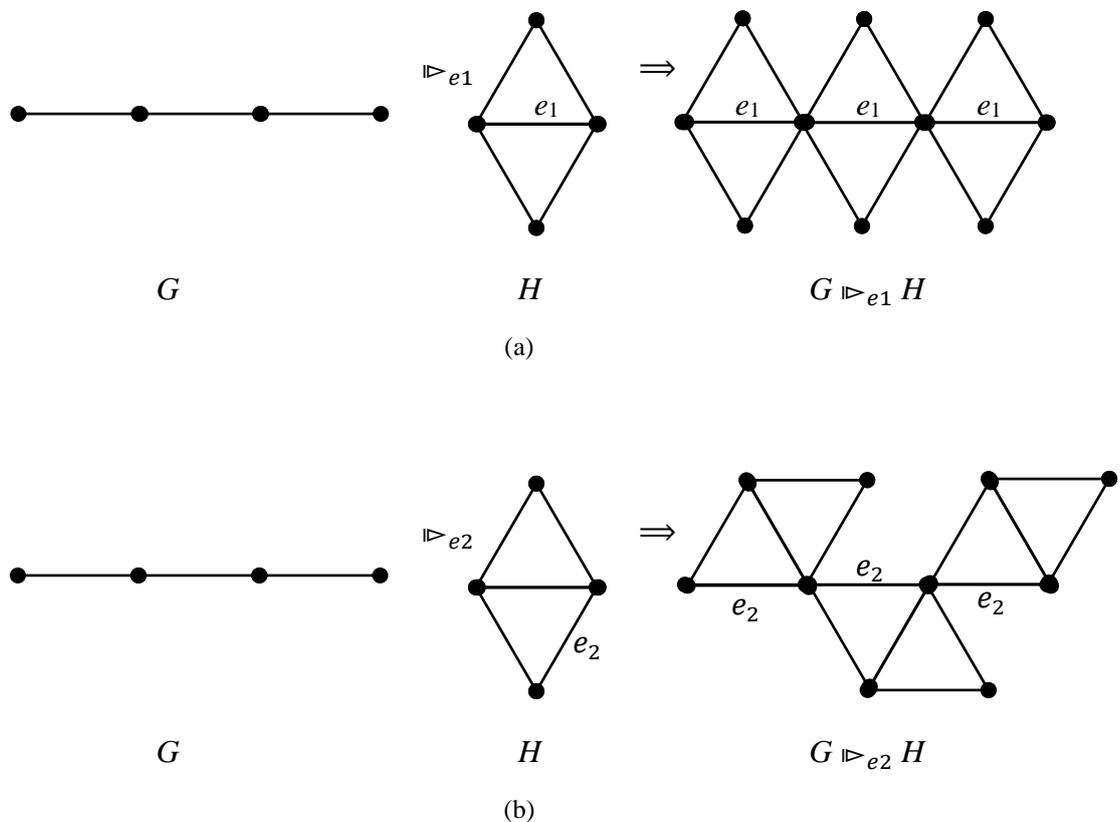
Gambar 3.1. Graf yang dikonstruksi dari sebuah C_6 dan enam salinan C_4

Pada Gambar 3.1, dapat dilihat bahwa graf yang dikonstruksi dari sebuah C_6 dan enam salinan C_4 tersebut memiliki selimut- C_4 . Demikian pula halnya dengan graf yang dikonstruksi dari sebuah C_m dan m salinan C_n , graf tersebut memiliki selimut- C_n . Oleh karena itu, graf yang memiliki selimut- C_n ini menjadi fokus pada proyek ini untuk dibuktikan bahwa graf tersebut memiliki pelabelan

C_n -ajaib super. Graf dengan pola konstruksi seperti di atas, mengingatkan penulis pada graf hasil kali sisir (*comb product*). Pada graf hasil kali sisir dari graf G dan H , titik v salinan H_i ditempelkan pada titik ke- i sebuah salinan G , $i \in [1, |V(G)|]$. Sedangkan graf yang menjadi fokus proyek ini, yang ditempelkan bukan titik, melainkan sisi. Sehingga didefinisikanlah operasi baru pada proyek ini, yaitu operasi hasil kali sisir-sisi e . Secara formal, graf hasil kali sisir-sisi e didefinisikan sebagai berikut.

Misalkan G dan H adalah dua graf dan misalkan e adalah suatu sisi pada graf H . Graf hasil kali sisir-sisi e dari G dan H dinotasikan dengan $G \triangleright_e H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan G dan $|E(G)|$ salinan H yaitu $H_1, H_2, \dots, H_{|E(G)|}$, kemudian menempelkan sisi ke- i di G pada sisi e di H_i , $i = [1, |E(G)|]$.

Pada gambar 3.2 diilustrasikan graf hasil kali sisir-sisi e dari G dan H .



Gambar 3.2 Ilustrasi hasil kali sisir-sisi $G \triangleright_e H$

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa operasi hasil kali sisir-sisi terhadap graf G dan H menghasilkan graf yang berbeda, tergantung pada sisi di H yang mana yang dipilih. Berbeda halnya dengan graf yang dihasilkan oleh operasi hasil kali sisir-sisi terhadap dua lingkaran, C_m dan C_n . Hasil operasi $C_m \triangleright_e C_n$, selalu menghasilkan graf yang sama, tidak tergantung dengan sisi di C_n yang dipilih.

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, graf hasil kali sisir-sisi pada dua graf lingkaran, $C_m \triangleright_e C_n$ adalah graf yang merupakan hasil kali sisir-sisi dari sebuah lingkaran dengan m titik, C_m , dan sebuah lingkaran dengan n titik, C_n . Karena setiap sisi e pada C_n yang ditempelkan pada C_m akan menghasilkan graf yang sama (lihat Gambar 3.1), notasi $C_m \triangleright_e C_n$ disederhanakan menjadi $C_m \triangleright C_n$.

Misalkan Graf $C_m \triangleright C_n$ dengan m dan n bilangan bulat, $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ memiliki himpunan titik

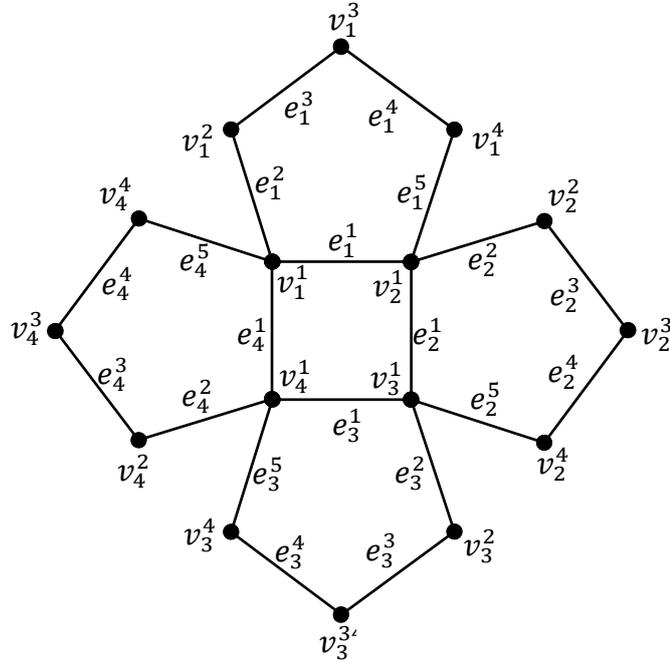
$$V(C_m \triangleright C_n) = \{v_i^j \mid i \in [1, m] \text{ dan } j \in [1, (n - 1)]\},$$

dan himpunan sisi

$$E(C_m \triangleright C_n) = \{e_i^j \mid i \in [1, m] \text{ dan } j \in [1, n]\}.$$

Banyak titik dari $C_m \triangleright C_n$ adalah $m(n - 1)$ dan banyak sisi dari $C_m \triangleright C_n$ adalah mn , sehingga $|V| + |E| = m(2n - 1)$. Untuk $m \neq n$ dapat diperiksa bahwa graf $C_m \triangleright C_n$ memiliki m subgraf C_n' yang isomorfik dengan C_n . Sedangkan untuk $m = n$, graf $C_m \triangleright C_n$ memiliki $(m+1)$ subgraf C_n' yang isomorfik dengan C_n . Dengan demikian, graf $C_m \triangleright C_n$ memuat selimut- C_n .

Pelabelan lingkaran C_n -ajaib super pada graf $C_m \triangleright C_n$ pada proyek ini didefinisikan sebagai suatu fungsi bijektif $\varphi : V \cup E \rightarrow [1, |V| + |E|]$ sedemikian sehingga $\varphi(C_n') = \sum_{x \in V(C_n')} \varphi(x) + \sum_{y \in E(C_n')} \varphi(y) = k_n$, dengan memperhatikan bahwa $\varphi : V \rightarrow [1, |V|]$. Selanjutnya k_n disebut konstanta ajaib super selimut- C_n .



Gambar 3.3 Notasi pelabelan graf hasil kali sisir-sisi $C_4 \triangleright C_5$

Untuk menunjukkan graf $C_m \triangleright C_n$ memiliki pelabelan C_n -ajaib super dalam proyek ini digunakan teknik mempartisi multihimpunan yaitu k -seimbang multihimpunan (k -balanced multiset) yang digagas oleh Maryati dkk., (2010). Multihimpunan adalah himpunan yang memperbolehkan adanya elemen yang sama. Misalkan himpunan $V = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan himpunan $W = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, didefinisikan multihimpunan yang diperoleh dari himpunan V dan W adalah hasil dari $V \uplus W = \{a_1, a_2, \dots, a_m, a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Selanjutnya, k -seimbang multihimpunan didefinisikan sebagai berikut. Misalkan $k \in \mathbb{Z}^+$ dan Y adalah multihimpunan bilangan bulat positif. Y disebut k -seimbang jika terdapat k submultihimpunan dari Y , yaitu Y_1, Y_2, \dots, Y_k , sedemikian sehingga untuk setiap $i \in [1, k]$, berlaku $|Y_i| = \frac{|Y|}{k}$, $\sum Y_i = \frac{\sum Y}{k} \in \mathbb{Z}^+$, dan $\uplus_{i=1}^k Y_i = Y$.

Konsep k -seimbang tersebut digunakan untuk membuktikan hasil utama dari proyek ini yaitu pelabelan lingkaran C_n -ajaib super pada graf $C_m \triangleright C_n$ sehingga diperoleh lemma sebagai berikut.

Lemma. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Jika multihimpunan $X = [1, m] \uplus [1, m(2n - 1)]$, maka X adalah m -seimbang.

Bukti:

Untuk setiap $i \in [1, m]$ dan $j \in [1, 2n]$, didefinisikan multihimpunan

$X_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,2n}\}$ dengan

$$a_{i,j} = \begin{cases} i, & \text{untuk } i \in [1, m] \text{ dan } j = 1 \\ i + 1, & \text{untuk } i \in [1, m - 1] \text{ dan } j = 2; \\ 1, & \text{untuk } i = m \text{ dan } j = 2; \\ 2m - i + 1, & \text{untuk } i \in [1, m] \text{ dan } j = 3; \\ 3m - i, & \text{untuk } i \in [1, m - 1] \text{ dan } j = 4; \\ 3m, & \text{untuk } i = m \text{ dan } j = 4; \\ (j - 1)m - i + 1, & \text{untuk } i \in [1, m] \text{ dan } j \in [5, n], j \equiv 1 \pmod{2}; \\ (j - 2)m + i & \text{untuk } i \in [1, m] \text{ dan } j \in [5, n], j \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk setiap $i \in [1, m - 1]$ dan $j \in [1, 2n]$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= i + (i + 1) + (2m - i + 1) + (3m - i) + (4m - i + 1) + (4m + i) + \\ &\quad (6m - i + 1) + (6m + i) + \dots + ((2n - 2)m - i + 1) + ((2n - 2) + i) \\ &= 2m + 3m + n + \sum_{i=2}^{2n-4} 4m \\ &= 2mn^2 - 2mn + m + n \end{aligned}$$

untuk setiap $i = m$ dan $j \in [1, 2n]$

$$\begin{aligned}\sum X_i &= m + 1 + (m + 1) + 3m + (4m - i + 1) + (4m + i) + (6m - i + 1) + (6m + i) + \dots + ((2n - 2)m - i + 1) + ((2n - 2) + i) \\ &= 2m + 3m + n + \sum_{i=2}^{2n-4} 4m \\ &= 2mn^2 - 2mn + m + n\end{aligned}$$

Misalkan untuk $j \in [1, 2n]$, $A_j = \{a_{i,j} | 1 \leq i \leq m\}$. Diperoleh

$$A_j = \begin{cases} [1, m] & \text{untuk } j \in [1, 2] \\ [((j - 2)m + 1), ((j - 1)m)] & \text{untuk } j \in [3, 2n] \end{cases}$$

Dapat diperiksa bahwa $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{2n} = X$ dan $\cup_{i=1}^m X_i = X$. Untuk setiap $i \in [1, m]$ diperoleh $|X_i| = 2n$ dan $\sum X_i = 2mn^2 - 2mn + m + n$.

Jadi, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, X adalah m -seimbang. \square

Selanjutnya, pada teorema berikut, lemma di atas digunakan untuk menunjukkan bahwa graf $C_m \triangleright C_n$ memiliki pelabelan C_n -ajaib super. Pelabelan C_n -ajaib super pada graf $C_m \triangleright C_n$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m \neq n$ diperoleh hasil sebagai berikut.

Teorema. Misalkan m dan n bilangan bulat, dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Misalkan $C_m \triangleright C_n$ adalah graf hasil kali sisir-sisi dari C_m dan C_n , maka $C_m \triangleright C_n$ adalah C_n -ajaib super.

Bukti

Misalkan C'_n adalah subgraf dari $C_m \triangleright C_n$ yang isomorfik dengan C_n dan $|V(C_m \triangleright C_n)| + |E(C_m \triangleright C_n)| = m(2n - 1)$. Definisikan pelabelan total φ pada $C_m \triangleright C_n$ dengan cara sebagai berikut.

(i) Untuk $m \neq n$

Misalkan multihimpunan $X = [1, m] \cup [1, m(2n - 1)]$. Partisi X menjadi beberapa submultihimpunan, X_i dengan $i \in [1, m]$ berdasarkan Lemma di

atas. Labeli v_i^j dan e_i^j yang berada pada C'_n yang sama dengan menggunakan elemen-elemen X_i untuk suatu $i \in [1, m]$ dan label terkecil untuk melabeli titik sedemikian sehingga setiap subgraf C'_n pada $C_m \triangleright C_n$ berlaku

$$\varphi(C'_n) = 2mn^2 - 2mn + m + n.$$

Oleh karena itu, φ merupakan pelabelan C_n -ajaib super pada $C_m \triangleright C_n$ untuk $m \neq n$.

Selanjutnya, $C_m \triangleright C_n$ dengan $m = n$, memiliki $(n + 1)$ subgraf C'_n . Oleh karena itu, dilakukan modifikasi pelabelan (i) sedemikian sehingga $(n + 1)$ subgraf C'_n memiliki bobot yang sama.

(ii) Untuk $m = n \equiv 0 \pmod{2}$.

Terlebih dahulu, lakukan pelabelan seperti pada (i). Selanjutnya, lakukan pelabelan ulang pada beberapa sisi e_i^j dengan menukar sepasang label sisi e_i^j yang berada pada C'_n yang sama dengan cara sebagai berikut:

- tukar label sisi e_i^1 dengan e_i^n , untuk $i = 1$;
- tukar label sisi e_i^1 dengan e_i^{n-1} , untuk $n > 4$, $i \in \left[2, \left(\frac{1}{2}n - 1\right)\right]$ dan $i \in \left[\left(\frac{1}{2}n + 1\right), n\right]$;
- tukar label sisi e_i^1 dengan e_i^{n-2} , untuk $n > 4$, $i = \frac{1}{2}n$, dan untuk $n = 4$, $i = 2$

Pelabelan ulang ini tidak merubah bobot dari n subgraf C'_n yang diperoleh pada (i). Lebih jauh lagi, diperoleh pelabelan sebuah subgraf C'_n baru dengan bobot yang sama sedemikian sehingga terdapat $(n + 1)$ subgraf C'_n yang bobot sama pada $C_m \triangleright C_n$ untuk $m = n \equiv 0 \pmod{2}$.

(iii) Untuk $m = n \equiv 1 \pmod{2}$.

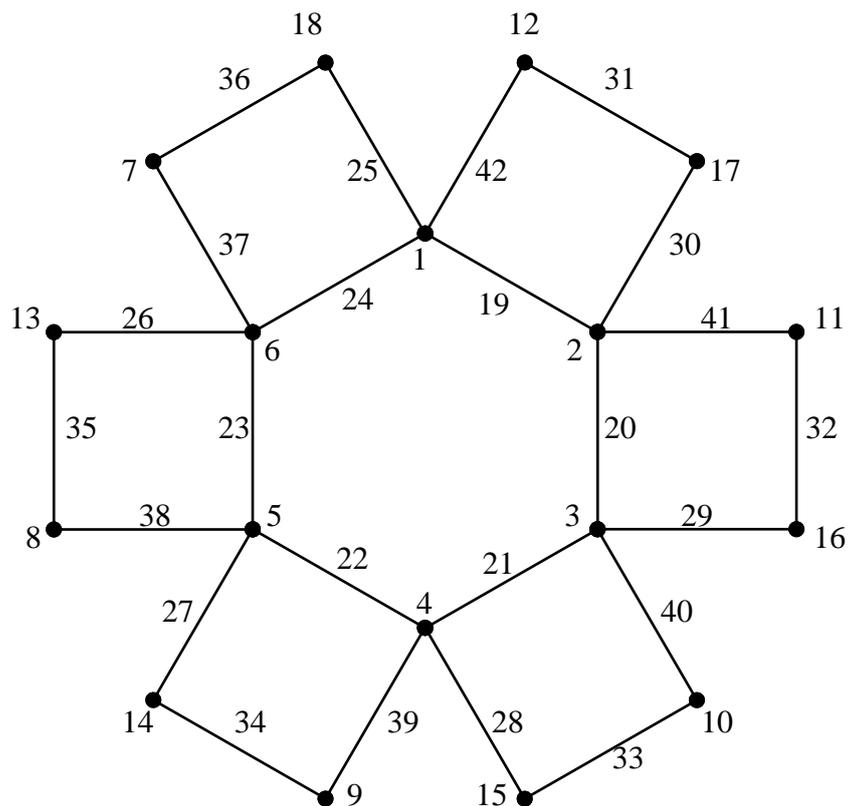
Lakukan pelabelan seperti pada (i). Selanjutnya, lakukan pelabelan ulang pada beberapa sisi e_i^j dengan menukar sepasang label sisi e_i^j yang berada pada C'_n yang sama dengan cara sebagai berikut:

- tukar label sisi e_i^1 dengan $e_i^{\frac{1}{2}(n+1)}$, untuk $i = 1, n$;
- tukar label sisi e_i^1 dengan e_i^n , untuk $i \in [2, (n - 1)]$.

Sama halnya dengan (ii), pelabelan ulang ini tidak merubah bobot dari n subgraf C'_n yang diperoleh pada (i). Selanjutnya, diperoleh pelabelan sebuah subgraf C'_n baru dengan bobot yang sama sedemikian sehingga terdapat $(n + 1)$ subgraf C'_n yang bobot sama pada $C_m \triangleright C_n$ untuk $m = n \equiv 1 \pmod 2$.

Dari (i), (ii), dan (iii), untuk m dan n bilangan bulat, dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, $C_m \triangleright C_n$ adalah C_n -ajaib super. \square

Sebagai ilustrasi, berikut pelabelan lingkaran ajaib – super pada graf $C_6 \triangleright C_4$

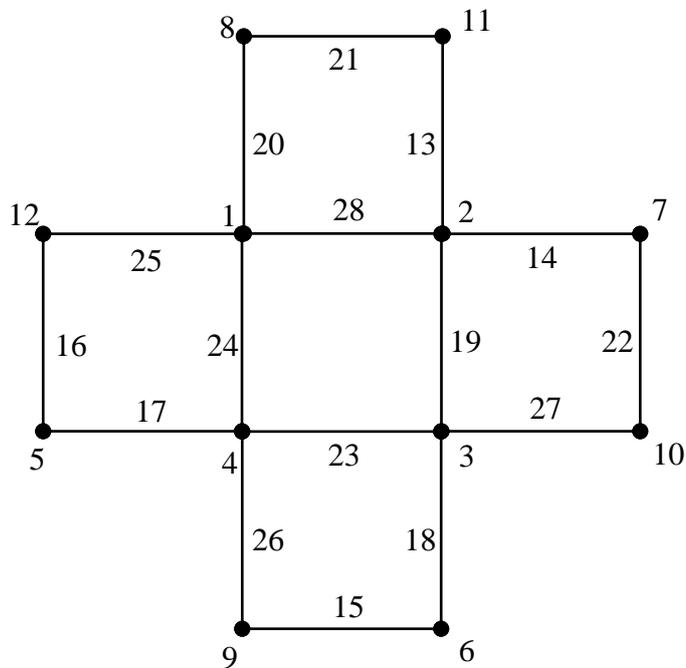


Gambar 3.4 Pelabelan C_4 -ajaib super pada graf $C_6 \triangleright C_4$

Pada Gambar 3.4, dapat diperiksa bahwa jumlah label setiap C_4 adalah konstan. Dari graf tersebut diperoleh 6 buah C_4 dengan jumlah masing-masing labelnya adalah sebagai berikut:

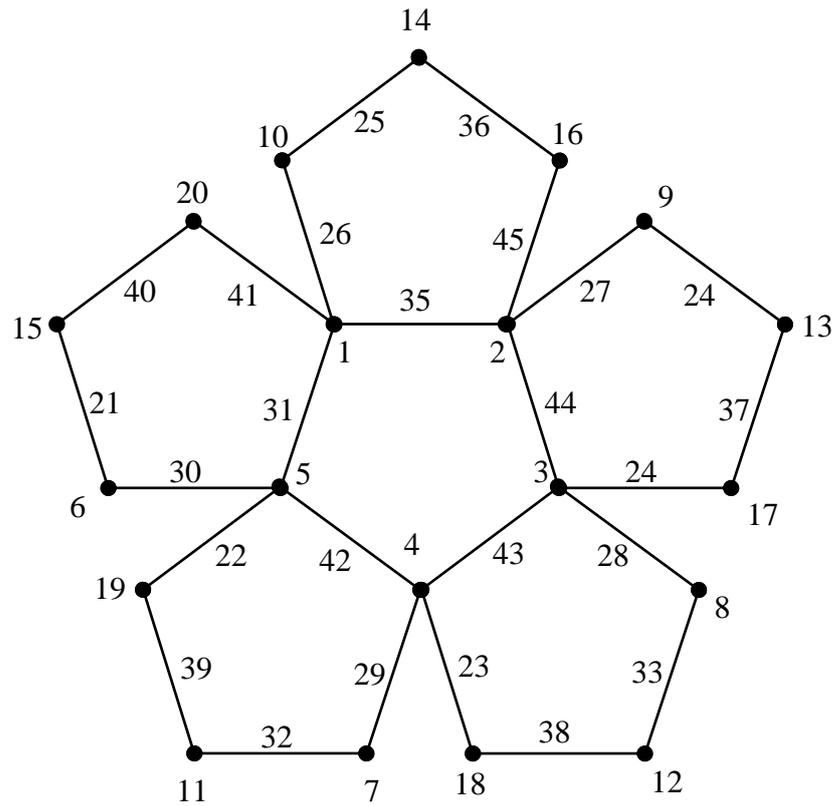
- $f(C_4^1) = 1 + 2 + 12 + 17 + 19 + 30 + 31 + 42 = 154$
- $f(C_4^2) = 2 + 3 + 11 + 16 + 20 + 29 + 32 + 41 = 154$
- $f(C_4^3) = 3 + 4 + 10 + 15 + 21 + 28 + 33 + 40 = 154$
- $f(C_4^4) = 4 + 5 + 9 + 14 + 22 + 27 + 34 + 39 = 154$
- $f(C_4^5) = 5 + 6 + 8 + 13 + 23 + 26 + 35 + 38 = 154$
- $f(C_4^6) = 6 + 1 + 7 + 18 + 24 + 25 + 36 + 37 = 154$

Ilustrasi $C_m \triangleright C_n$ dengan $m = n \equiv 0 \pmod 2$, memiliki $(n + 1)$ subgraf C'_n dapat dilihat pada contoh pelabelan $C_4 \triangleright C_4$.



Gambar 3.5 Pelabelan C_4 -ajaib super pada graf $C_4 \triangleright C_4$

Selanjutnya, ilustrasi $C_m \triangleright C_n$ dengan $m = n \equiv 1 \pmod{2}$, memiliki $(n + 1)$ subgraf C'_n dapat dilihat pada contoh pelabelan $C_5 \triangleright C_5$.



Gambar 3.4 Pelabelan C_5 -ajaib super pada graf $C_5 \triangleright C_5$

Bab IV

Kesimpulan dan Masalah Terbuka

Suatu graf hasil operasi baru diperkenalkan dengan nama graf *hasil kali sisir-sisi* sebagai bagian dari hasil penelitian ini. Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf dan e adalah suatu sisi pada graf G_2 . Graf hasil kali sisir-sisi e dari G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G_1 \triangleright_e G_2$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan G_1 dan $|E(G_1)|$ salinan G_2 kemudian menempelkan sisi e salinan G_2 ke- i pada sisi ke- i di G_1 , untuk $1 \leq i \leq |E(G_1)|$. Pada graf hasil kali sisir – sisi dari dua graf lingkaran, notasi $C_m \triangleright_e C_n$ disederhanakan menjadi $C_m \triangleright C_n$ karena setiap sisi e pada C_n yang ditempelkan pada C_m akan menghasilkan graf yang sama.

Hasil penelitian yang ditulis pada proyek ini memberi kontribusi pada pelabelan H -ajaib super khususnya pelabelan lingkaran-ajaib. Pelabelan lingkaran-ajaib super pada graf hasil kali sisir–sisi dari dua graf lingkaran telah dibuktikan menggunakan teknik m -seimbang. Untuk bilangan bulat $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, graf hasil kali sisir – sisi dari dua lingkaran, $C_m \triangleright C_n$ mempunyai pelabelan lingkaran-ajaib super dengan konstanta ajaib super $\varphi(C'_n) = 2mn^2 - 2mn + m + n$.

Kami tutup bab ini dengan beberapa masalah terbuka sebagai berikut.

Masalah 1. Apakah graf hasil kali sisir-sisi dari lingkaran dan graf lengkap, $C_m \triangleright K_n$ mempunyai pelabelan lingkaran-ajaib super untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$?

Masalah 2. Graf hasil kali sisir-sisi dari kelas graf apa saja yang mempunyai pelabelan H -ajaib super?

DAFTAR PUSTAKA

- Hartsfield, N., & Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory*. New York: Dover Publication, Inc.
- Gallian, J.A. (2009). *A Dynamic survey of graph labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics 5, #DS6.
- Gutiérrez, A., dan Lladó, A., (2005). *Magic coverings*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 55, 43-56.
- Jordan, J. (2005). *Comb graphs and spectral decimation*, Glasg. Math. J. 51, No.1, 71 – 81.
- Lladó, A., dan Moragas, J., (2007). *Cycle-magic graphs*. Discrete Mathematics, 307(23), 2925-2933.
- Maryati, T. K., Salman A.N.,M., Baskoro, E.T., (2011). *Supermagic coverings of the disjoint union graphs and amalgamations*. Elsevier J. 313 (2012), 397-405.
- Salman A.N.,M., Purnomo, A.D., (2010). *Some cycle-supermagic labelings of the of some complete bipartite graphs*. East-West Journal of Mathematics. 283-291.
- Saputro, S.W., Mardiana, N. Purwasih, I.A. (2013) *The metric dimension of comb product graphs*, dalam *Graph Theory Conference in honor of Egawa's 60th birthday*, September 10-14.
- Wallis, W.D. (2001). *Magic graphs*. Birkhauser Boston.

INDEKS

- H*-ajaib, 2
- k*-seimbang multihimpunan, 16
- m*-seimbang, 17

- bintang, 12
- bobot, 2

- gelung, 5
- graf lengkap, 7
- graf hasil kali, 8
- graf hasil kali sisir, 1
- graf hasil kali sisir-sisi, 14
- graf sederhana, 5
- graf terhubung, 2

- himpunan, 1

- isomorfik, 2

- konstanta *H*-ajaib, 12
- konstanta ajaib, 11

- lingkaran, 1
- lintasan, 1

- multihimpunan, 16

- pelabelan *H*-ajaib, 2
- pelabelan ajaib, 2
- pelabelan ajaib super, 10
- pelabelan ajaib-tipe (*a, b, c*), 12
- pelabelan graf, 2
- pelabelan sisi, 9
- pelabelan titik, 9
- pelabelan total, 9
- pelabelan total sisi-ajaib, 11
- persegi ajaib, 10

- roda, 8

- selimut-*H*, 12
- subgraf, 12
- submultihimpunan, 16

Riwayat Hidup Penulis



Penulis yang memiliki nama lengkap Trisna Roy Pradipta adalah seorang anak kedua dari tiga bersaudara, dilahirkan di Bekasi pada tanggal 19 September 1989 dari Ibu Hj. Tri Ikati dan Drs. H. Royalih, M.Pd. Penulis menempuh pendidikan dasar dan menengah atas di kota kelahirannya, Bekasi, mulai dari SDN Sindang Mulya 04, SLTPN 3 Cibarusah, dan kemudian SMAN 1 Cibarusah. Pada tahun 2011, penulis meraih gelar sarjana di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. Hamka (UHAMKA) Jakarta.

Penulis mulai mengikuti Program Studi Magister Pengajaran Matematika di Institut Teknologi Bandung pada tahun 2012. Selama di kampus ganesha ini, penulis berkesempatan menerima beasiswa voucher dari ITB hingga studi selesai.