MODUL PEMBELAJARAN

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dr. Joko Soebagyo, M.Pd.
Dr. Khoerul Umam, M.Pd.
Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd.
Dr. Samsul Maarif, M.Pd.
Dr. Ishaq Nuriadin, M.Pd.

MODUL PEMBELAJARAN
KALKULUS PEUBAH BANYAK

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4
Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26
Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

MODUL PEMBELAJARAN KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dr. Joko Soebagyo, M.Pd.
Dr. Khoerul Umam, M.Pd.
Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd.
Dr. Samsul Maarif, M.Pd.
Dr. Ishaq Nuriadin, M.Pd.

Penerbit

CV. MEDIA SAINS INDONESIA
Melong Asih Regency B40 - Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
www.penerbit.medsan.co.id

Anggota IKAPI
No. 370/JBA/2020

MODUL PEMBELAJARAN
KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dr. Joko Soebagyo, M.Pd.
Dr. Khoerul Umam, M.Pd.
Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd.
Dr. Samsul Maarif, M.Pd.
Dr. Ishaq Nuriadin, M.Pd.

Editor :
Rintho R. Rerung

Tata Letak :
Rizki R. Pratama

Desain Cover :
Rintho R. Rerung

Ukuran :
A4: 21 x 29,7 cm

Halaman :
xii, 419

ISBN :
978-623-362-225-7

Terbitan:
November, 2021

PENERBIT MEDIA SAINS INDONESIA
(CV. MEDIA SAINS INDONESIA)
Melong Asih Regency B40 - Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
www.penerbit.medsan.co.id

KATA PENGANTAR

Pada kesempatan ini, penyusun tak lupa ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penyusun, baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyusunan modul ini sampai selesai. Dengan kerendahan hati, perkenankan penyusun menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Gunawan Suryoputro, M.Hum., selaku Rektor Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.
2. Prof. Dr. Ade Hikmat, M.Pd., selaku Direktur Sekolah Pascasarjana Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.
3. Prof. Dr. Abd. Rahman Ghani, M.Pd., selaku Wakil Rektor 1 Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.
4. Dr. Zamah Sari, M.Ag., selaku Wakil Rektor 2 Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.
5. Dr. Desvian Bandarsyah, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Kependidikan Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.
6. Dr. Samsul Maarif, M.Pd., selaku Wakil Dekan 2 Fakultas Keguruan dan Ilmu Kependidikan Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.
7. Dr. Edy Sigid Purwanto, M.Pd., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika SPs Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.
8. Meyta Dwi Kurniasih, M.Pd., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka.

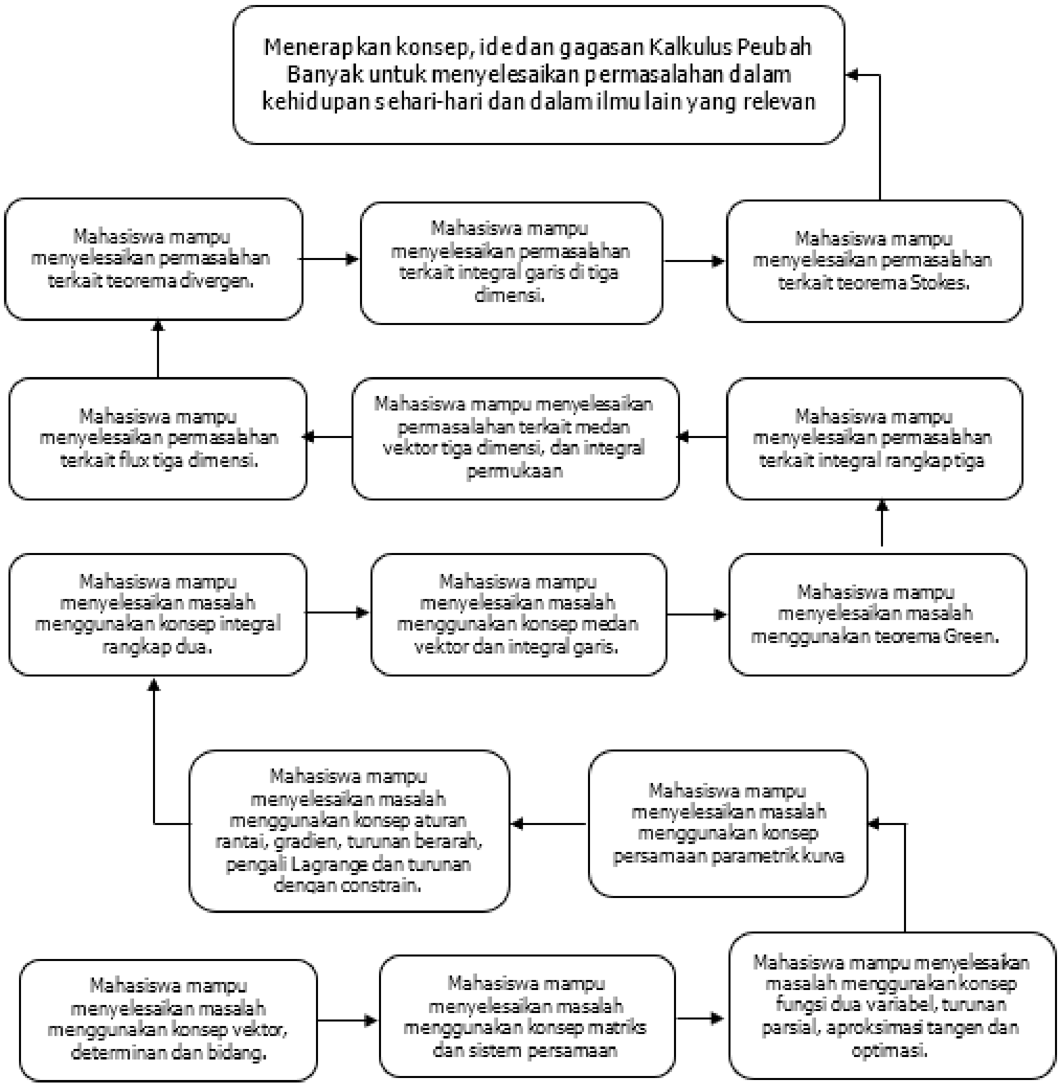
Penulis

DAFTAR ISI

DESKRIPSI MATA KULIAIH

Mata kuliah ini mencakup diferensial, integral dan kalkulus vektor untuk fungsi lebih dari satu variabel. Aplikasi dari mata kuliah ini digunakan secara luas dalam ilmu fisika, teknik, ekonomi, dan grafik komputer.

Peta Kompetensi



MODUL 1

VEKTOR, DETERMINAN DAN BIDANG

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep vektor, determinan dan bidang.

Materi 1

Konsep Vektor

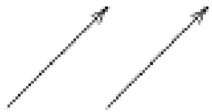
Topik pertama kita tidak biasa karena kita akan mulai dengan presentasi tertulis singkat. Lebih khusus lagi, kita akan memulai setiap topik dengan ceramah yang direkam oleh para dosen dan diikuti dengan presentasi tertulis singkat.

Seperti yang kami tunjukkan di pendahuluan, vektor akan digunakan selama perkuliahan. Konsep dasarnya sangat mudah, tetapi Anda harus menguasai beberapa terminologi baru. Poin penting lainnya yang telah kita buat sebelumnya adalah kita dapat melihat vektor dengan dua cara yang berbeda: secara geometris dan aljabar. Kita akan mulai dengan tampilan geometris dan memperkenalkan terminologi di dalamnya.

Tampilan Geometris

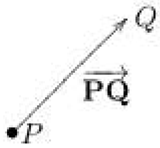
Sebuah vektor didefinisikan sebagai sesuatu yang memiliki besaran dan arah. Kita merepresentasikan vektor dengan panah baik pada bidang atau di ruang. Panjang panah adalah besaran vektor dan arah panah adalah arah vektor.

Dengan cara ini, dua anak panah dengan besaran dan arah yang sama mewakili vektor yang sama (ekuivalen) seperti gambar berikut.



Gambar 1. 1. Vektor Equivalen

Kita akan merujuk ke awal panah sebagai *tail* (ekor) dan akhir panah sebagai tip atau kepala atau terminal. Vektor antara dua titik akan dilambangkan dengan $\overrightarrow{PQ}$ [1].



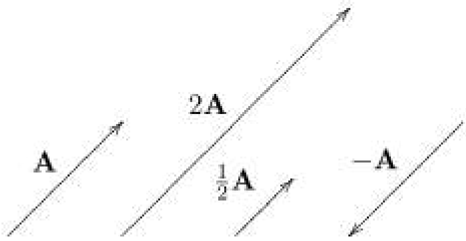
Gambar 1. 2. Vektor Antara Dua Titik

Kita sebut P titik awal dan Q titik terminal dari $\overrightarrow{PQ}$.

Besaran dari vektor **A** akan dilambangkan $|\mathbf{A}|$. Besaran juga akan disebut panjang atau norma.

Penskalaan, Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

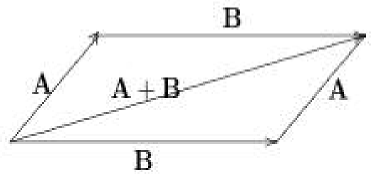
Penskalaan vektor berarti mengubah panjangnya dengan faktor skala. Sebagai contoh,



Gambar 1. 3. Vektor Skalar

Karena kita menggunakan bilangan untuk menskalakan vektor, kita akan sering menyebut bilangan real sebagai skalar.

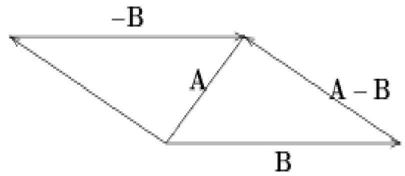
Anda menambahkan vektor dengan menempatkannya dari kepala ke ekor. Seperti yang ditunjukkan gambar tersebut, ini bisa dilakukan dalam urutannya [2].



Gambar 1. 4. Penjumlahan Vektor Secara Geometris

Seringkali berguna untuk menganggap vektor sebagai perpindahan. Dengan cara ini, **A** + **B** dapat dianggap sebagai perpindahan **A** diikuti dengan perpindahan **B**.

Anda mengurangi vektor baik dengan menempatkan ekor ke ekor atau dengan menambahkan **A** + (− **B**).



Gambar 1. 5. Pengurangan Vektor Secara Geometris

Dianggap sebagai perpindahan **A** – **B** adalah perpindahan dari akhir **B** sampai akhir **A**.

Tampilan Aljabar

Secara konvensional, kita memberi label titik pusat O di mana pada bidang $O = (0, 0)$ dan di ruang $O = (0, 0, 0)$.

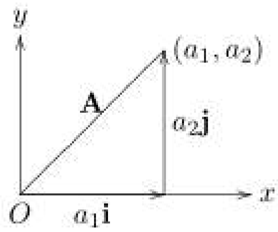
Dalam bidang−xy jika kita menempatkan ekor **A** di asalnya atau titik$O$ = (0,0), kepalanya atau titik terminal akan berada di titik dengan koordinat, katakanlah, (a_1, a_2). Dengan cara ini, koordinat kepala menentukan vektor **A**.

Saat kita menggambar **A** dari pusat kita akan menyebutnya sebagai vektor pusat atau vektor posisi.

Menggunakan koordinat atau komponen vektor kita tulis:

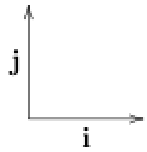
$$\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$$

Penjumlahan, pengurangan dan penskalaan menggunakan koordinat dibahas di bawah ini. Secara grafis:



Gambar 1. 6. Vektor Posisi Dua Dimensi

Vektornya **i** dan **j** yang digunakan pada gambar di atas memiliki koordinat **i** = (1, 0), **j** = (0, 1). Kita sangat sering menggunakannya sehingga mereka mendapatkan simbolnya sendiri.



Gambar 1. 7. Vektor Satuan Standar

Notasi dan terminologi

1. (a_1, a_2) menunjukkan sebuah titik pada bidang.
2. $\langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. Ini sama dengan vektor yang ditarik dari titik awal O ke titik (a_1, a_2).
3. Untuk $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, a_1 dan a_2 disebut **i** dan **j** komponen dari **A**. (Perhatikan bahwa mereka adalah skalar)
4. $\vec{\mathbf{P}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$ adalah vektor posisi dari titik pusat O ke P.
5. Pada papan tulis vektor biasanya akan ada panah di atas hurufnya. Dalam bentuk cetak kita sering hilangkan panah dan cukup gunakan huruf tebal untuk menunjukkan vektor, yaitu $\mathbf{P} \equiv \vec{\mathbf{P}}$.
6. Bilangan real adalah skalar, Anda dapat menggunakannya untuk menskalakan vektor.

Aljabar vektor menggunakan koordinat

Untuk vektor $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ dan $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ kita memiliki aturan aljabar berikut. Gambar di bawah ini menghubungkan aturan-aturan ini dengan sudut pandang geometris.

$$\text{Norm: } |\mathbf{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{(ini hanya teorema Pythagoras)}$$

Penjumlahan:

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$,

di mana

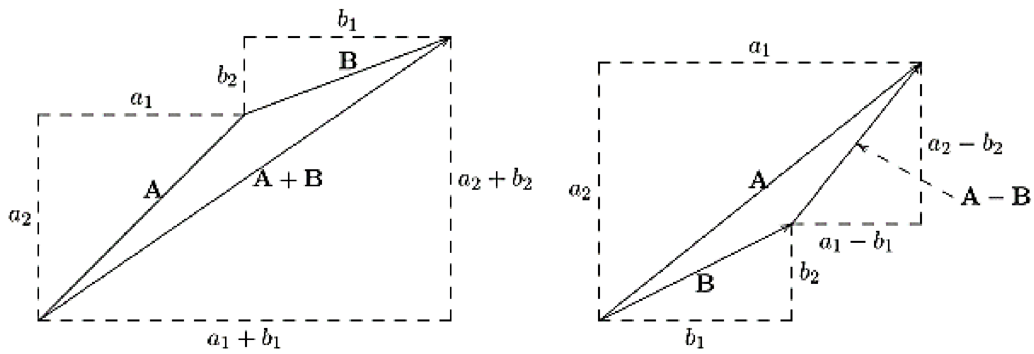
$$\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

Pengurangan:

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$,

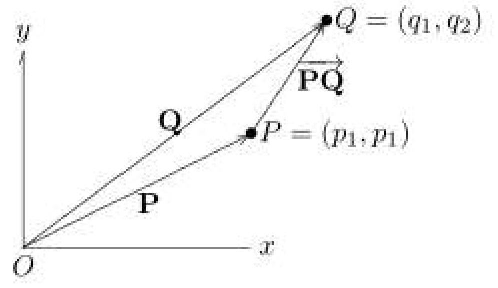
di mana

$$\langle a_1, a_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$



Gambar 1. 8. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor Secara Aljabar

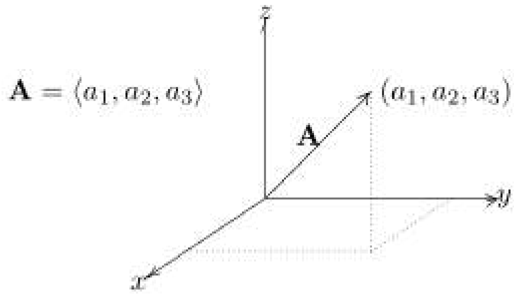
Untuk dua titik P dan Q vektor $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = \vec{\mathbf{Q}} - \vec{\mathbf{P}}$ yaitu, $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ adalah pemindahan dari P ke Q.



Gambar 1. 9. Perpindahan Vektor

Vektor dalam tiga dimensi

Kita mewakili vektor tiga dimensi sebagai panah di ruang. Menggunakan koordinat tiga dimensi, kita membutuhkan tiga angka untuk merepresentasikan sebuah vektor.



Gambar 1. 10. Vektor Posisi Tiga Dimensi

Secara geometris tidak ada yang berubah untuk vektor dalam tiga dimensi. Mereka diskalakan dan ditambahkan persis seperti vektor dua dimensi.

Secara aljabar vektor asal $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dimulai dari asal O dan meluas ke titik (a_1, a_2, a_3). Kita memiliki vektor khusus $\mathbf{i} = \langle 1,0,0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0,1,0 \rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0,0,1 \rangle$. Menggunakannya menghasilkan:

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Kemudian, untuk $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ kita punya:

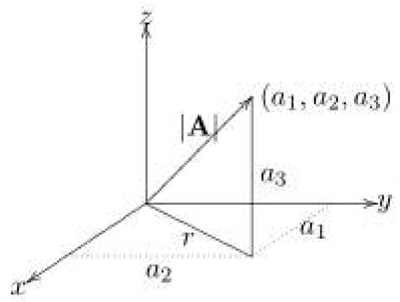
$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

persis seperti kasus dua dimensi.

Besaran dalam tiga dimensi juga mengikuti dari teorema Pythagoras.

$$|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}| = |\langle a_1, a_2, a_3 \rangle| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Hal ini dapat Anda lihat pada gambar di bawah ini, dimana $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ dan $|\mathbf{A}| = \sqrt{r^2 + a_3^2}$



Gambar 1. 11. Panjang Vektor Tiga Dimensi

Vektor satuan

Vektor satuan adalah sebarang vektor dengan panjang satuan. Ketika kita ingin menunjukkan bahwa suatu vektor adalah vektor satuan, kita meletakkan topi di atasnya, misalnya, $\hat{\mathbf{u}}$.

Vektor khusus dalam bentuk $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ dan $\mathbf{k}$ adalah vektor satuan standar.

Karena vektor dapat diskalakan, setiap vektor dapat diskalakan kembali menjadi vektor satuan.

Contoh 1:

Temukan vektor satuan yang sejajar $\langle 3,4 \rangle$

Jawab:

Karena $|3,4| = 5$ maka vektor $\frac{1}{5}\langle 3,4 \rangle = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ memiliki panjang satuan dan sejajar $\langle 3,4 \rangle$.

Dot Product

Dot product atau perkalian titik adalah salah satu cara untuk menggabungkan ("mengalikan") dua vektor. Outputnya adalah skalar (angka).

Disebut perkalian titik karena lambang yang digunakan adalah titik. Karena produk titik menghasilkan skalar, maka disebut juga produk skalar [1].

Seperti kebanyakan vektor pada umumnya, kita memiliki tampilan geometris dan aljabar dari perkalian titik.

Definisi aljabar (untuk vektor 2D):

Jika $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ maka:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Contoh 2:

Tentukan dot product dari $\langle 6, 5 \rangle$ dan $\langle 1, 2 \rangle$.

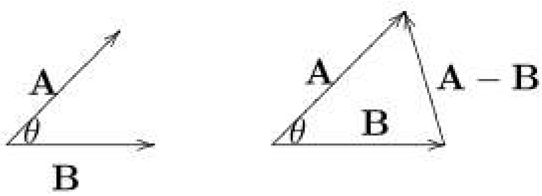
Jawab:

$\langle 6, 5 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 16.$

Tampilan geometris:

Gambar di bawah ini menunjukkan $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dengan sudut θ diantara mereka. Kita mendapatkan:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$$



Gambar 1. 12. Vektor A, B dan Sudut θ

Memperlihatkan dua pandangan (aljabar dan geometris) yang sama membutuhkan hukum cosinus.

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$$

$\Rightarrow (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2) = 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$

$\Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta.$

Karena $\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ kita telah menunjukkan bahwa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$$

Dari definisi aljabar perkalian titik kita dengan mudah mendapatkan hukum aljabar berikut:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

Contoh 3:

Tentukan perkalian titik dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ jika $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 5, \theta = \pi/4$.

Jawab:

(gambar sendiri gambarnya)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Contoh 4:

Tentukan perkalian titik dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ jika $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Jawab:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

Vektor tiga dimensi

Produk titik dalam 3D serupa seperti pada 2D. Jika $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ maka:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Tampilan geometrisnya identik dan bukti yang sama menunjukkan bahwa:

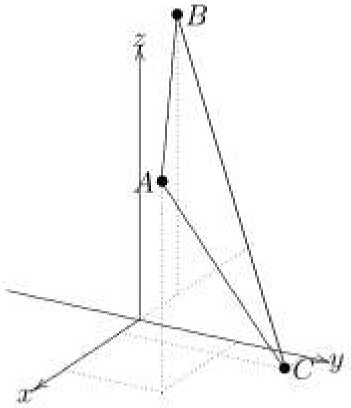
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$$

Contoh 5:

Tunjukkan bahwa $A = (4, 3, 6), B = (-2, 0, 8), C = (1, 5, 0)$ adalah titik-titik atau simpul dari segitiga siku-siku.

Jawab:

Dua kaki segitiga itu adalah $\overrightarrow{\mathbf{AC}} = \langle -3, 2, -6 \rangle$ dan $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \langle -6, -2, 2 \rangle \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AC}} = 18 - 6 - 12 = 0$. Tampilan geometris perkalian titik menunjukkan sudut antara kakinya $\frac{\pi}{2}$ (yaitu cos θ = 0).



Gambar 1. 13. Tampilan Geometris Dot Product

Definisi Istilah Ortogonal dan Pengujian Ortogonal

Ketika dua vektor tegak lurus satu sama lain, kita katakan itu ortogonal.

Seperti yang terlihat pada contoh, karena $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, perkalian titik memberikan tes untuk ortogonalitas antar vektor:

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Produk titik dan panjang

Baik rumus aljabar maupun geometris untuk perkalian titik menunjukkan bahwa keduanya berhubungan erat dengan panjang. Faktanya, mereka menunjukkan vektor $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$$

Mari tunjukkan ini menggunakan kedua tampilan.

Secara aljabar: misalkan $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ maka

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = |\mathbf{A}|^2$$

Secara geometris: sudut θ antara $\mathbf{A}$ dan dirinya sendiri adalah 0. Oleh karena itu,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| \cos\theta = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^2$$

Seperti yang dijanjikan, kedua pandangan memberikan formula.

Komponen dan Proyeksi Vektor

Jika $\mathbf{A}$ adalah sebarang vektor dan $\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor satuan maka komponen dari $\mathbf{A}$ searah $\hat{\mathbf{u}}$ adalah:

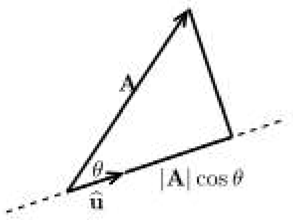
$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

(Catatan: komponennya adalah sebuah skalar)

Jika θ adalah sudut antara $\mathbf{A}$ dan $\hat{\mathbf{u}}$ dan karena $|\hat{\mathbf{u}}| = \mathbf{1}$ maka:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\mathbf{A}||\hat{\mathbf{u}}| \cos\theta = |\mathbf{A}| \cos\theta$$

Gambar di bawah ini menunjukkan bahwa secara geometris panjang kaki segitiga siku-siku dengan hipotenusa $\mathbf{A}$ dan satu kaki sejajar $\hat{\mathbf{u}}$.



Gambar 1. 14. proyeksi ortogonal dari A pada $\hat{u}$

Kita juga menyebut kaki sejajar $\hat{\mathbf{u}}$ sebagai **proyeksi ortogonal dari $\mathbf{A}$ pada $\hat{\mathbf{u}}$.**

Untuk vektor bukan satuan: komponen vektor $\mathbf{A}$ **searah vektor** $\mathbf{B}$ secara sederhana komponen dari $\mathbf{A}$ searah $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}$**. (**$\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor satuan searah dengan $\mathbf{B}$.)

Contoh 6:

Tentukan komponen $\mathbf{A}$ ke arah $\mathbf{B}$ jika $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 5, \theta = \pi\ /\ 4$.

Jawab:

Mengacu pada gambar di atas: komponennya adalah $|\mathbf{A}| \cos\theta = 2\cos(\pi/4) = 2$. Perhatikan, panjang $\mathbf{B}$ diberikan tidak relevan, karena kita hanya peduli tentang vektor satuan yang sejajar $\mathbf{B}$.

Contoh 7:

Tentukan komponen $\mathbf{A}$ ke arah $\mathbf{B}$ jika $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Jawab:

Vektor satuan ke arah $\mathbf{B}$ adalah

$$\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

$\Rightarrow$ komponennya adalah

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5}$$

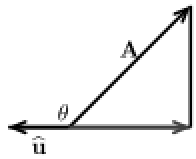
Contoh 8:

Tentukan komponen $\mathbf{A} = \langle 2, 2 \rangle$ searah $\hat{\mathbf{u}} = \langle -1, 0 \rangle$

Jawab:

Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor satuan, jadi komponennya adalah $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \langle 2, 2\rangle \cdot \langle -1, 0\rangle = -2$.

Komponen negatif tidak apa-apa, hal ini mengatakan bahwa proyeksi dari **A** dan $\hat{\mathbf{u}}$ menunjuk ke arah yang berlawanan.



Gambar 1. 15. Komponen Proyeksi Negatif

Kami menekankan sekali lagi bahwa komponen vektor adalah sebuah skalar.

Cross Product

Perkalian silang atau cross product adalah cara lain untuk mengalikan dua vektor. (Nama berasal dari lambang yang digunakan untuk menunjukkan hasil perkalian.) Karena hasil perkalian ini adalah vektor lain itu juga disebut produk vektor.

Seperti biasa, ada cara aljabar dan geometri untuk menggambarkan perkalian silang. Kami akan mendefinisikannya secara aljabar dan kemudian pindah ke deskripsi geometris.

Definisi determinan untuk perkalian silang

Untuk vektor $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ kami mendefinisikan produk silang dengan rumus berikut [2]:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_3 - a_3 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\rangle$$

Tiga persamaan terbawah di atas mudah dilihat sebagai persamaan dan harus dianggap sebagai definisi hasil perkalian silang. Baris paling atas secara teknis mempesona karena kita tidak benar-benar diizinkan menggunakan vektor sebagai entri dalam determinan. Meskipun demikian, ini adalah cara terbaik untuk mengingat cara menghitung perkalian silang.

Contoh 9:

Hitung $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

Jawab:

$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ dan $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ sehingga:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(1) = \mathbf{k}$$

Fakta aljabar: (ini mengikuti dengan mudah dari sifat determinan).

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$

2. Anti-komutatif: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

3. Hukum distributif: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

4. Non-asosiatif: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ (contoh dalam sekejap).

Untuk vektor satuan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kita punya:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Contoh 10:

(non-asosiatif) $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ tapi $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = 0$.

Contoh 11:

Hal ini dimungkinkan untuk menghitung perkalian silang menggunakan fakta aljabar dan produk yang diketahui dari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Misalkan,

$$(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = (6\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - (4\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + (9\mathbf{j} \times \mathbf{i}) - (6\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = -13\mathbf{k}$$

Persamaan pertama mengikuti hukum distributif. Yang kedua, kita gunakan saya $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$ (fakta aljabar 1), $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ (dihitung di atas) dan $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ (anti-komutatif).

Deskripsi geometris

Untuk mendeskripsikan perkalian silang secara geometris kita perlu mendeskripsikan besar dan arahnya. Ini dilakukan dalam teorema berikut.

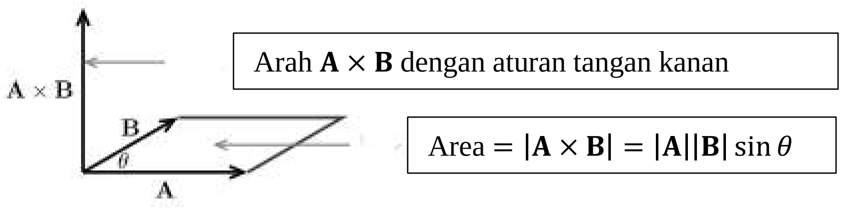
Dalil: magnitude dari $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah:

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta$ dimana θ adalah sudut di antara mereka

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ = luas jajaran genjang yang merentang oleh $\mathbf{A}$ **dan** $\mathbf{B}$.

Arah dari $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ditentukan sebagai berikut.

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tegak lurus dengan bidang $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$. Pada gambar di bawah ini ada dua arah tegak lurus dengan bidang atas dan bawah. Pilihan dibuat oleh aturan tangan kanan. Aturan ini mengatakan untuk mengambil tangan kanan Anda dan mengarahkan jari Anda ke arah $\mathbf{A}$ sehingga mereka melengkung ke arah $\mathbf{B}$; lalu ibu jari Anda menunjuk ke arah $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.



Gambar 1. 16. Aturan Tangan Kanan pada Cross Product

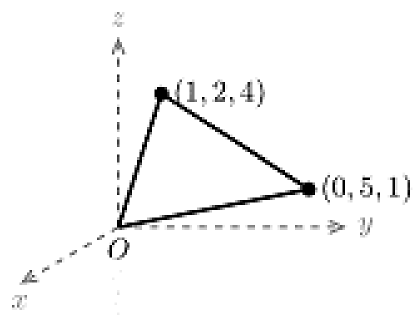
Kita tidak akan membahas bukti teorema ini. Itu menggunakan identitas Lagrange:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

Identitas ini mudah ditunjukkan dengan memperluas kedua sisi menggunakan komponen.

Contoh 12:

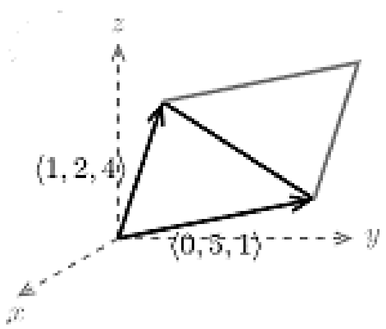
Temukan luas segitiga dari gambar berikut.



Gambar 1. 17. Segitiga di Tiga Dimensi

Jawab:

Luas segitiga adalah setengah luas jajaran genjang (lihat gambar).



Gambar 1. 18. Jajar Genjang di Tiga Dimensi

Jadi, luas segitiga = $\frac{1}{2}|\langle 1,2,4\rangle \times \langle 0,5,1\rangle|$

$$\langle 1,2,4\rangle \times \langle 0,5,1\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-18) - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Luas segitiga = $\frac{1}{2}\sqrt{18^2 + (-1)^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{350}$.

JANGAN LUPAKAN GEOMETRI - akan berguna untuk memecahkan masalah.

Persamaan Bidang

Nanti kita akan kembali lagi kedalam topik persamaan bidang lebih lanjut. Sebagai gambaran, berikut ini salah satu contohnya.

Contoh 13:

Tentukan persamaan bidang yang mengandung tiga titik $P_1 = (1,3,1), P_2 = (1,2,2), P_3 = (2,3,3)$.

Jawab:

Pertama, kita tentukan dua vektor yang melalui titik-titik tersebut. Misalkan kita ambil vektor:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \text{ dan } \overrightarrow{P_1P_3}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 1-1, 2-3, 2-1\rangle = \langle 0,-1,1\rangle$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \langle 2-1, 3-3, 3-1\rangle = \langle 1,0,2\rangle$$

Kedua, lakukan cross product kedua vektor tersebut untuk mendapatkan vektor normal **N**, diperoleh:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ((-1).2 - 1.0)\mathbf{i} - (0.2 - 1.1)\mathbf{j} + (0.0 - 1.(-1))\mathbf{k}$$

$\mathbf{N} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = \langle -2,1,1 \rangle$

Ketiga, ambil sebarang titik $P = (x, y, z)$ pada bidang yang melalui ketiga titik tersebut dan buat vektor $\overrightarrow{P_1P} = \langle x - 1, y - 3, z - 1 \rangle$ sehingga tegak lurus dengan **N**.

Sehingga:

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$$

$$\langle -2,1,1 \rangle \cdot \langle x - 1, y - 3, z - 1 \rangle = 0$$

$$-2.(x - 1) + 1.(y - 3) + 1.(z - 1) = 0$$

$$-2x + y + z + 2 - 3 - 1 = 0$$

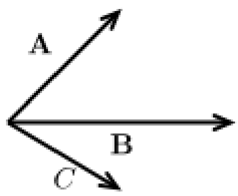
$$-2x + y + z - 2 = 0$$

$$-2x + y + z = 2$$

Jadi persamaan bidang yang mengandung tiga titik $P_1 = (1,3,1), P_2 = (1,2,2), P_3 = (2,3,3)$ adalah $-2x + y + z = 2$.

Latihan 1

1. Tentukan $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$.



2. Tentukan $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, dimana $\mathbf{A} = \langle 1, 2 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, 0 \rangle$, $\mathbf{C} = \langle 2, -1 \rangle$.
3. Tentukan $\langle 1, 2, 5 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle$.
4. Median segitiga adalah vektor dari titik sudut ke titik tengah sisi yang berlawanan. Tunjukkan jumlah median segitiga = **0**.

5. Misalkan $\mathbf{A} = \langle 1, 2 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, -1 \rangle$ dan $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Tentukan panjang $\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{B}$, dan $\mathbf{C}$.

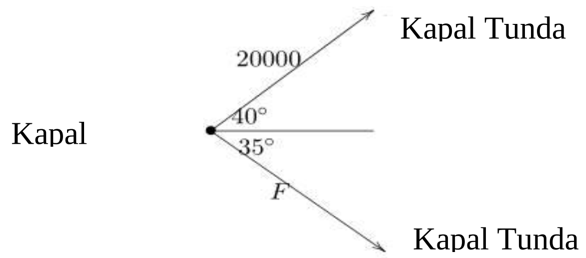
6. a) Sebuah sungai mengalir dengan kecepatan 3 mil per jam (mph) dan satu tim pendayung beregu dengan kecepatan 6 mph. Arah apa yang harus diambil pendayung untuk menyeberangi sungai?

   b) Jawab pertanyaan yang sama jika sungai mengalir dengan kecepatan 6 mph dan tim pendayung beregu dengan kecepatan 3 mph.

7. Gunakan vektor untuk membuktikan bahwa diagonal jajaran genjang saling membagi dua sama besar.

8. Buktikan dengan menggunakan metode vektor bahwa titik tengah dari sisi segiempat ruang membentuk jajaran genjang.

9. Gambar berikut menunjukkan dua kapal tunda menarik tongkang. Jika satu kapal tunda menarik dengan gaya 20000 Newton, berapakah gaya tarik yang harus diberikan oleh tarikan kapal tunda lainnya untuk menjaga tongkang lurus ke kanan.



10. a) Hitunglah $\langle 1,2,-4 \rangle \cdot \langle 2,3,5 \rangle$?

    b) Apakah sudut antara dua vektor tersebut lancip, tumpul atau siku-siku?.

11. Jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ maka berapakah sudut antara $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$?.

12. Tentukan sudut antara vektor $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

13. Ambil titik $P = (a, 1, -1), Q = (0,1,1), R = (a, -1,3)$. Tentukan nilai a sehingga PQR menjadi segitiga siku-siku?

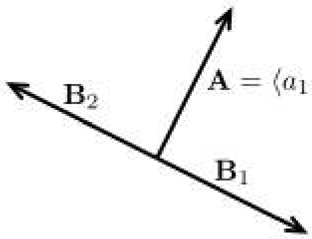
14. Tunjukkan diagonal dari parallelogram tegak lurus jhj rhombus yaitu empat sisinya memiliki panjang yang sama.

15. Tentukan sudut antara vektor $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dan $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

16. a) Apakah $\langle 1,3 \rangle$ dan $\langle -2,2 \rangle$ ortogonal?

    b) Untuk nilai a berapakah sehingga sudut antara vektor $\langle 1, a \rangle$ dan $\langle 2,3 \rangle$ siku-siku?

    c) Pada gambar berikut, vektor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}_1$ ortogonal sebagai mana $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}_2$. Jika semua vektor panjangnya sama, maka tentukan koordinat $\mathbf{B}_1$ dan $\mathbf{B}_2$.



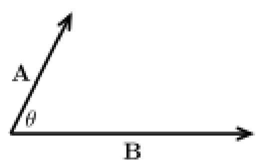
17. Dengan menggunakan vektor dan produk titik tunjukkan bahwa diagonal dari parallelogram memiliki panjang yang sama jhj berbentuk persegi panjang.

18. Misal $\mathbf{A} = \langle 1,3 \rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle 3,4 \rangle$. Tentukan komponen dari $\mathbf{A}$ searah $\mathbf{B}$.

19. Misal $\mathbf{A} = \langle 3,5,7 \rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle 3,4,0 \rangle$. Tentukan komponen dari $\mathbf{A}$ searah $\mathbf{B}$.

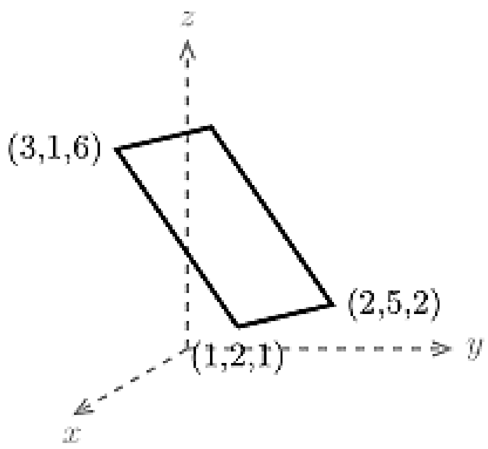
20. Misalkan $\mathbf{A} = \langle a, 2 \rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle 1, 3 \rangle$. Untuk nilai a berapakah agar komponen $\mathbf{A}$ searah $\mathbf{B}$ sama dengan nol?. Untuk nilai a berapakah agar komponennya negatif?

21. Perhatikan gambar berikut. U ntuk nilai θ berapakah agar komponen $\mathbf{A}$ searah $\mathbf{B}$ sama dengan nol?.



22. Hitung $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$

23. Tentukan luas parallelogram dari gambar berikut.

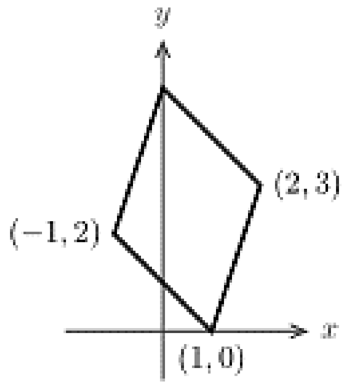


24. a) Hitung $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b) Hitung $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

c) Hitung $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

25. Tentukan area dari parallelogram berikut.



26. Tentukan area dari segitiga dengan titik-titik $(0,0), (-2,2)$ dan $(1,3)$.

27. a) Hitung $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

b) Hitung $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

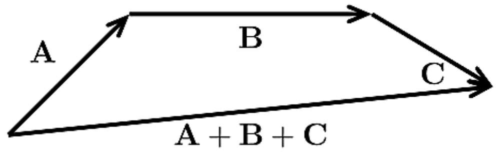
c) Hitung $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

28. Tentukan volume dari parallelepiped dengan sisi-sisi vektor dari titik pusatnya adalah $\langle 1,2,4\rangle, \langle 2,0,0\rangle, \langle 1,5,2\rangle$.

29. Kita tahu bahwa $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Apa yang dapat disimpulkan terkait vektor posisi $\langle 1,2,3\rangle, \langle 4,5,6\rangle, \langle 7,8,9\rangle$?

Jawaban 1

1. Vektor-vektor perpindahan dari $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ adalah perpindahan bersih dari **A** ke **B** kemudian ke **C**, yaitu:

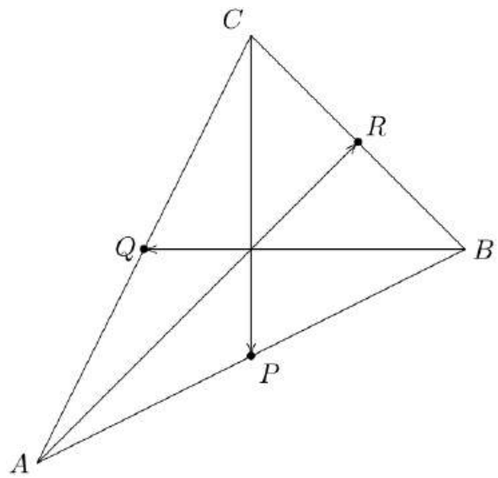


2. Penjumlahan vektor secara aljabar menjumlahkan komponen-komponen yang sesuai dari masing-masing vektor, yaitu:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \langle 1 + 1 + 2, 2 + 0 + (-1)\rangle = \langle 4,1\rangle$$

3. $\langle 1, 2, 5\rangle + \langle -2, 1, 5\rangle = \langle 1 + (-2), 2 + 1, 5 + 5\rangle = \langle -1,3,10\rangle$

4. Misalkan median atau titik tengah dari tiap sisi pada segitiga ABC seperti gambar berikut.



Dari gambar kita peroleh:

$$P = \frac{1}{2}(A + B)$$

$$Q = \frac{1}{2}(A + C)$$

$$R = \frac{1}{2}(B + C)$$

$$\overrightarrow{AR} = R - A = \frac{1}{2}(B + C) - A$$

$$\overrightarrow{BQ} = Q - B = \frac{1}{2}(A + C) - B$$

$$\overrightarrow{CP} = P - C = \frac{1}{2}(A + B) - C$$

Maka jumlah median adalah:

$$\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CP} = \left(\frac{1}{2}(B + C) - A\right) + \left(\frac{1}{2}(A + C) - B\right) + \left(\frac{1}{2}(A + B) - C\right)$$

$$\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C - B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - C = 0 \ \blacksquare$$

5. Berdasarkan definisi bahwa panjang vektor adalah akar dari jumlah kuadrat komponennya. Sehingga:

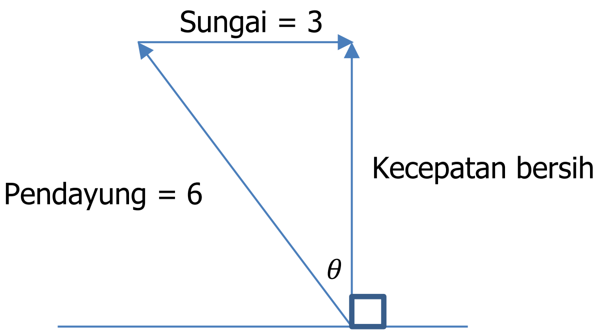
$$|\mathbf{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{(1 + 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\mathbf{C}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

6. a) Misalkan θ adalah sudut yang terbentuk antara arah pendayung dan garis tegak lurus sungai, seperti gambar berikut.



Gambar di atas menunjukkan bahwa jumlah kecepatan bersih sama dengan jumlah kecepatan pendayung ditambah kecepatan sungai. Jika kecepatan bersih adalah tegak lurus maka terbentuk segitiga siku-siku di mana:

$$\sin\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Maka:

$$\theta = 30^o = \frac{\pi}{6}$$

Sehingga arah yang harus diambil pendayung untuk menyeberangi sungai adalah 30^o atau $\frac{\pi}{6}$ radian ke atas kiri dari garis tegak lurus.

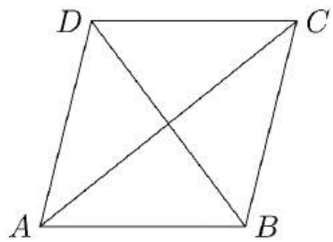
b) Pada kasus ini dengan gambar yang sama diperoleh:

$$\sin\theta = \frac{6}{3} = 2$$

Dan hal ini tidak mungkin terjadi karena $\sin\theta \leq 1$. Sehingga tidak ada arah yang mungkin diambil untuk menyeberangi sungai.

Secara intuisi, tidak mungkin menyeberangi sungai pada kasus ini karena arus sungai lebih kencang daripada kecepatan pendayung, sehingga pendayung akan selalu terdorong ke bawah tidak peduli arah mana yang diambil.

7. Misalkan jajar genjang yang dimaksud adalah sebagai berikut:



Dari gambar di atas, misalkan M_1 adalah titik tengah AC dan M_2 adalah titik tengah BD, akan dibuktikan bahwa titik tengah AC dan BD adalah titik yang sama atau $M_1 = M_2$ dengan menunjukkan bahwa $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AM_2}$.

Diketahui bahwa:

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Karena $ABCD$ adalah jajar genjang maka:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

Disisi lain:

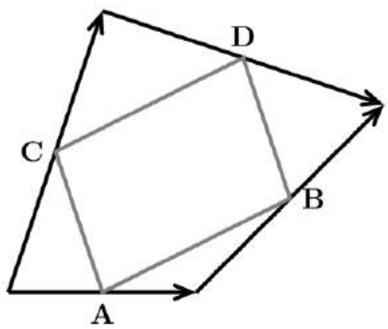
$$\overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

Sehingga:

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Jadi, terbukti bahwa $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AM_2}$ ■

8. Misalkan segiempat sebarang terdiri dari sisi $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Jika vektor-vektor dengan arah seperti pada gambar berikut maka $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$.



Gambar di atas menunjukkan vektor dari titik tengah $\mathbf{A}$ ke titik tengah $\mathbf{C}$ adalah

$$\frac{1}{2}\mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$$

Begitu juga dengan vektor dari titik tengah $\mathbf{B}$ ke titik tengah $\mathbf{D}$ adalah

$$\frac{1}{2}\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{D}$$

Sehingga:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{D}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{D})$$

Dengan demikian dua sisi berlawanan pada segiempat sama dan sejajar. Bukti vektor dari titik tengah **A** ke titik tengah **B** dan vektor dari titik tengah **C** ke titik tengah **D** serupa. Sehingga titik tengah dari sisi segiempat ruang membentuk jajaran genjang.

9. Kita membutuhkan komponen vertikal dari masing-masing gaya untuk mengeliminir atau mengimbanginya, misalkan komponen tersebut x.

Sehingga:

$$\sin 40^o = \frac{x}{2000}$$

$$\sin 35^o = \frac{x}{F}$$

$$2000 \sin 40^o = F \sin 35^o$$

$$F = \frac{2000 \sin 40^o}{\sin 35^o} \approx 22413{,}32$$

10. a) $\langle 1,2,-4\rangle \cdot \langle 2,3,5\rangle = 1.2 + 2.3 + (-4).5 = -12$

b) Misalkan θ adalah sudut yang terbentuk antara dua vektor. Karena hasil dot product negatif maka $\cos\theta < 0$, artinya $\theta > \pi/2$. Maka sudut yang terbentuk adalah tumpul.

11. $\pi/2$

12. Misalkan sudut yang terbentuk adalah θ. Karena $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$ maka:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\langle 1,8\rangle \cdot \langle 1,2\rangle}{\sqrt{1^2+8^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1+16}{\sqrt{65}\sqrt{5}} = \frac{17}{5\sqrt{13}}$$

Maka:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{17}{5\sqrt{13}}\right)$$

13. Karena segitiga siku-siku memiliki dua sisi yang tegak lurus, maka kita memerlukan dua vektor yang merepresentasikannya. Ambil $\overrightarrow{QP}$ dan $\overrightarrow{QR}$, sehingga:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$$

$$\langle a-0, 1-1, -1-1\rangle \cdot \langle a-0, -1-1, 3-1\rangle = 0$$

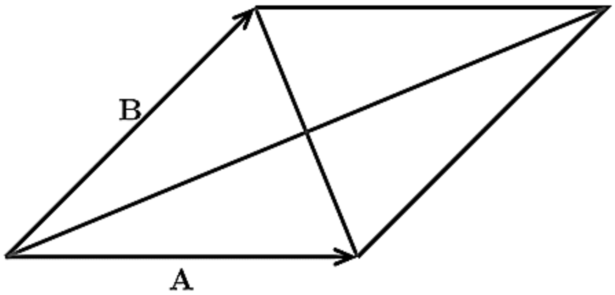
$$\langle a, 0, -2\rangle \cdot \langle a, -2,2\rangle = 0$$

$$a^2 - 4 = 0$$

$$a = \pm 2$$

Jadi, a haruslah bernilai -2 atau 2 agar PQR menjadi segitiga siku-siku.

14. Misalkan dua sisi yang berdekatan dari jajaran genjang menjadi vektor **A** dan **B** seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Maka kita memiliki dua diagonal yaitu $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ dan $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. Sehingga dot product dari kedua diagonal adalah:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

Jika kedua diagonal tegak lurus maka:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

Jadi, kedua diagonal tegak lurus jika dan hanya jika dua sisi yang berdekatan memiliki panjang yang sama. Dengan kata lain, jika jajar genjang adalah rhombus.

15. Misalkan θ adalah sudut antara kedua vektor, maka:

Secara aljabar diperoleh:

$$\langle 1,1,2\rangle \cdot \langle 2, -1,1\rangle = 2 - 1 + 2 = 3$$

Secara geometris diperoleh:

$$\langle 1,1,2\rangle \cdot \langle 2, -1,1\rangle = |\langle 1,1,2\rangle||\langle 2, -1,1\rangle| \cos\theta$$

$$3 = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos\theta$$

$$3 = 6\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^o = \frac{\pi}{3}$$

16. a) Dua buah vektor ortogonal (tegak lurus) jika dot product keduanya 0. Kita cek dot productnya, diperoleh:

$$\langle 1,3\rangle \cdot \langle -2,2\rangle = -2 + 6 = 4 \neq 0$$

Karena dot productnya bukan 0 maka kedua vektor tidak ortogonal.

b) Agar siku-siku, atur dot product sama dengan 0, diperoleh:

$$\langle 1, a\rangle \cdot \langle 2,3\rangle = 0$$

$$2 + 3a = 0$$

$$3a = -2$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

c) Dari gambar diketahui bahwa vektor $\mathbf{B}_1$ adalah vektor $\mathbf{A}$ yang dirotasi sebesar 90^o searah jarum jam. Karena $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}_1|$ dan $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}_1$ maka:

$$\langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle a_2, -a_1\rangle = 0$$

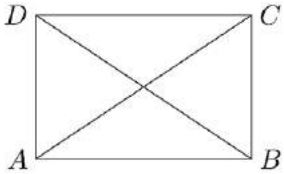
Jelas bahwa $\mathbf{B}_1 = \langle a_2, -a_1\rangle$

Dari gambar diketahui bahwa vektor $\mathbf{B}_2$ adalah vektor $\mathbf{A}$ yang dirotasi sebesar 90^o berlawanan jarun jam. Karena $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}_2|$ dan $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}_2$ maka:

$$\langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle -a_2, a_1\rangle = 0$$

Jelas bahwa $\mathbf{B}_2 = \langle -a_2, a_1\rangle$

17. Misalkan persegi panjang yang diberikan adalah sebagai berikut:



Kita akan gunaka sifat-sifat dari dot product yaitu:

a. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

b. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

Berdasarkan gambar diketahui bahwa $ABCD$ adalah persegi panjang, sehingga:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Dan dari gambar juga diketahui:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$$

Ambil dot product dari $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{BD}$ diperoleh:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

Dari :

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 \text{ dan } \left|\overrightarrow{BD}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Artinya kedua diagonal memiliki panjang yang sama jhj $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ dan jhj sisi-sisi dari persegi panjang saling tegak lurus ■.

18. Komponen **B** searah **A** adalah

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \langle 3,4 \rangle \cdot \frac{\langle 1,3 \rangle}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

19. Komponen **A** searah **B** adalah

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \langle 3,5,7 \rangle \cdot \frac{\langle 3,4,0 \rangle}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{29}{5}$$

20. Komponen **A** searah **B** agar bernilai 0 adalah

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \langle a, 2 \rangle \cdot \frac{\langle 1,3 \rangle}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 0$$

$$\frac{a + 6}{\sqrt{10}} = 0$$

$$a + 6 = 0$$

Maka komponen **A** searah **B** agar bernilai 0 jika $a = -6$.

Dan komponen **A** searah **B** agar bernilai negatif jika $a < -6$.

21. $\theta = \pi/2$

22. Cross product dari kedua vektor adalah:

$$\langle 1,2,0\rangle \times \langle 2,-3,0\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\langle 1,2,0\rangle \times \langle 2,-3,0\rangle = (2.0 - 0(-3))\mathbf{i} - (1.0 - 0.2)\mathbf{j} + (1(-3) - 2.2)\mathbf{k}$$

$$\langle 1,2,0\rangle \times \langle 2,-3,0\rangle = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\langle 1,2,0\rangle \times \langle 2,-3,0\rangle = \langle 0,0,-7\rangle$$

23. Luas parallelogram merupakan panjang cross product dari dua vektor.

Ambil dua vektor $\langle 2-1, 5-2, 2-1\rangle = \langle 1,3,1\rangle$ dan $\langle 3-1, 1-2, 6-1\rangle = \langle 2,-1,5\rangle$.

Cross product dari kedua vektor adalah:

$$\langle 1,3,1\rangle \times \langle 2,-1,5\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\langle 1,3,1\rangle \times \langle 2,-1,5\rangle = (3.5 - 1(-1))\mathbf{i} - (1.5 - 1.2)\mathbf{j} + (1(-1) - 3.2)\mathbf{k}$$

$$\langle 1,3,1\rangle \times \langle 2,-1,5\rangle = 16\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\langle 1,3,1\rangle \times \langle 2,-1,5\rangle = \langle 16,-3,-7\rangle$$

Maka luas parallelogram adalah

$$|\langle 16,-3,-7\rangle| = \sqrt{16^2 + (-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{314}$$

24. a) Kita gunakan aturan panah, diperoleh:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$$

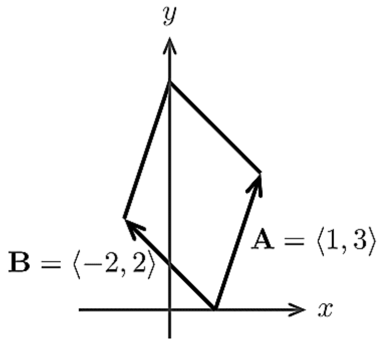
b) Kita gunakan aturan panah, diperoleh:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - (-2)(-3) = -2$$

c) Kita gunakan aturan panah, diperoleh:

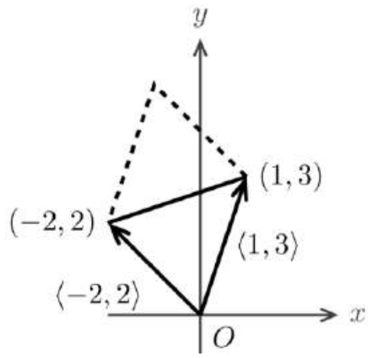
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 4.1 = 2$$

25. Luas area segiempat diperoleh dari determinan vektor penyusun segiempat, seperti pada gambar berikut:



$$\text{Luas segiempat} = |\det(\mathbf{A}, \mathbf{B})| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2 + 6 = 8$$

26. Sketsa sari permasalahan adalah:



Luas segitiga sama dengan luas setengah segiempat, yaitu:

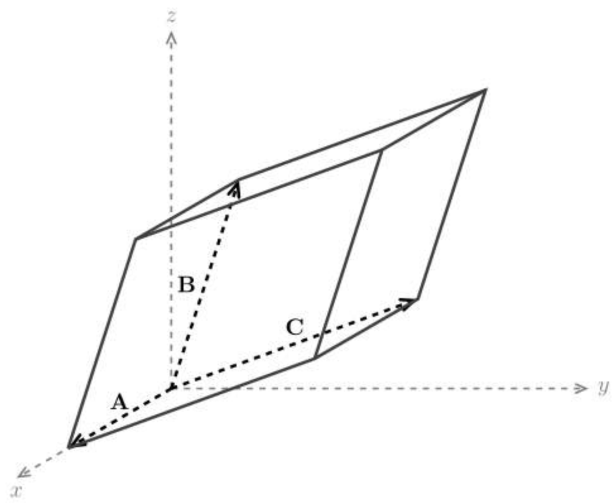
$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4.$$

27. a) 0

b) 4

c) -96

28. Sketsa permasalahan adalah sebagai berikut:



Maka volume dari parallelepiped adalah:

$$V = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right| = |-2(2.2 - 4.5)| = |-2(-16)| = 32$$

29. Misalkan vektor-vektor tersebut adalah $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, dan $\mathbf{C}$. Karena $\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = 0$ maka volume dari parallelepiped dengan vektor-vektor bersisi 0. Artinya semua vektor posisi terletak dalam sebuah bidang.

Rangkuman 1

1. Vektor didefinisikan sebagai sesuatu yang memiliki besaran dan arah.
2. Vektor dinotasikan dengan huruf berpanah atau huruf tebal.
3. Besaran atau panjang dari vektor **A** akan dilambangkan $|\mathbf{A}|$ dan dihitung menggunakan jarak Euclid atau teorema Pythagoras.
4. Vektor satuan adalah vektor dengan panjang 1.
5. Vektor satuan normal adalah vektor satuan dalam bentuk standar $\mathbf{i} = \langle 1,0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0,1 \rangle$ atau $\mathbf{i} = \langle 1,0,0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0,1,0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0,0,1 \rangle$.
6. Penjumlahan dua vektor secara geometri, dapat dianggap sebagai perpindahan dari satu vektor diikuti dengan perpindahan vektor lainnya.
7. Pengurangan dua vektor secara geometri, dapat dianggap sebagai perpindahan dari satu vektor diikuti dengan perpindahan vektor lainnya dengan arah yang berlawanan.

8. Penjumlahan dua vektor secara aljabar, dilakukan dengan menjumlahkan komponen yang sesuai.
9. Pengurangan dua vektor secara aljabar, dilakukan dengan mengurangkan komponen yang sesuai.
10. Penskalaan vektor adalah perkalian skalar dengan vektor baik memperpanjang atau memperpendek vektor.
11. Dot product atau perkalian titik adalah dengan formula:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \text{ atau } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

12. Cross product atau perkalian silang antara dua vektor dihitung dengan rumus:

    Jika **a** dan **b** vektor pada dimensi tiga dan tidak bernilai 0 maka:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta)\mathbf{n}$$

    Atau

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

13. Jika $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ maka $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
14. Jika $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
15. Proyeksi vektor **b** pada **a** dihitung dengan rumus:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$

16. Proyeksi skalar vektor **b** pada **a** dihitung dengan rumus:

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

Tes Formatif 1

1. Vektor satuan searah $\langle 2, 3 \rangle$ adalah …

   A. $\langle \frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}} \rangle$

   B. $\langle \frac{2}{\sqrt{9}}, \frac{3}{\sqrt{9}} \rangle$

C. $\langle \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \rangle$

D. $\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \rangle$

E. $\langle \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}} \rangle$

2. Misalkan $\mathbf{B} = \langle 2, 2,1 \rangle$ dan sudut antara $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ membentuk sudut 30^o dimana $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 6$. Maka nilai $|\mathbf{A}|$ adalah …

A. $4\sqrt{3}$

B. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

E. $3\sqrt{2}$

3. Misal $\mathbf{A} = \langle 1,3 \rangle$ dan $\mathbf{B} = \langle 3,4 \rangle$, maka komponen dari $\mathbf{B}$ searah $\mathbf{A}$ adalah...

A. $\frac{15}{3}$

B. $\frac{15}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{10}{\sqrt{15}}$

D. $\frac{15}{\sqrt{10}}$

E. $\frac{15}{2}$

4. Hasil dari $\langle 1,3,1 \rangle \times \langle 2, -1,5 \rangle$ adalah …

A. $\langle 3,16, -7 \rangle$

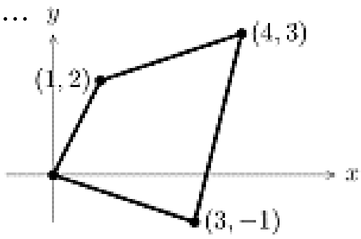
B. $\langle 7, -3, -16 \rangle$

C. $\langle -12,3,7 \rangle$

D. $\langle -7, -3, -12 \rangle$

E. $\langle 16, -3, -7 \rangle$

5. Luas area dari quadrilateral berikut…



A. 9

B. 7

C. 5

D. 3

E. 1

Jawaban Tes Formatif 1

1. C

Untuk mendapatkan vektor satuan kita melakukan penskalaan terhadap vektor asli dengan membaginya dengan panjangnya.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\langle 2,3 \rangle}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \rangle$$

$\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor satuan yang sejajar dengan vektor aslinya.

2. B

Karena $\theta = 30^o = \pi/6$ radian dan $|\mathbf{B}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ maka:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$$

$$6 = |\mathbf{A}|. 3 \cos \frac{\pi}{6}$$

$$2 = |\mathbf{A}| \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$|\mathbf{A}| = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

3. D

Komponen **B** searah **A** adalah

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \langle 3,4 \rangle \cdot \frac{\langle 1,3 \rangle}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

4. E

$$\langle 1,3,1 \rangle \times \langle 2,-1,5 \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

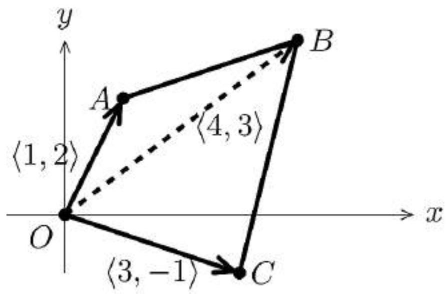
$$\langle 1,3,1\rangle \times \langle 2,-1,5\rangle = (3.5 - 1(-1))\mathbf{i} - (1.5 - 1.2)\mathbf{j} + (1(-1) - 3.2)\mathbf{k}$$

$$\langle 1,3,1\rangle \times \langle 2,-1,5\rangle = 16\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\langle 1,3,1\rangle \times \langle 2,-1,5\rangle = \langle 16,-3,-7\rangle$$

5. A

Pertama, kita urai segiempat menjadi dua segitiga seperti gambar berikut.



Dari gambar diperoleh komponen-komponen $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, dan $\overrightarrow{OC}$.

$$\text{Luas } \Delta OAB = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-5| = \frac{5}{2}$$

$$\text{Luas } \Delta OBC = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-13| = \frac{13}{2}$$

Jadi luas segiempat $OABC = \frac{18}{2} = 9$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 1.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 2. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 2

MATRIKS DAN SISTEM LINIER

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan menggunakan konsep matriks dan sistem persamaan.

Materi 2

Matriks dan Operasi Matriks

Barisan persegi panjang dari bilangan real muncul dalam konteks selain sebagai matriks perluasan sistem linear. Pada bagian ini kita akan mulai mempelajari matriks sebagai mana mestinya dengan mendefinisikan operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian pada mereka.

Terminologi dan Notasi Matriks

Pada matematika sekolah kita menggunakan barisan angka berbentuk persegi panjang yang disebut matriks perluasan, untuk menyingkat sistem persamaan linier. Namun demikian, susunan bilangan segi empat juga muncul dalam konteks lain. Misalnya, susunan persegi panjang berikut dengan tiga baris dan tujuh kolom mungkin menggambarkan jumlah jam yang dihabiskan seorang mahasiswa untuk mempelajari tiga subjek selama satu minggu tertentu:

	Senin	**Selasa**	**Rabu**	**Kamis**	**Jumat**	**Sabtu**	**Minggu**
Matematika	2	3	2	4	1	4	2
Sejarah	0	3	1	4	3	2	2
Bahasa	4	1	3	1	0	0	2

Jika kita menghilangkan *heading*-nya, maka kita akan tersisa dengan susunan angka persegi panjang berikut dengan tiga baris dan tujuh kolom, yang disebut "matriks":

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Secara umum, kita akan mendefinisikannya sebagai berikut [3]:

DEFINISI 1

Matriks adalah susunan angka/bilangan dalam bentuk persegi panjang. Bilangan/angka dalam susunan tersebut disebut entri.

Catatan: *Matrik yang hanya memiliki satu kolom disebut vektor kolom atau matrik kolom, dan matrik yang hanya memiliki satu baris disebut vektor baris atau matrik baris.*

Contoh 1: Contoh-contoh Matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [4]$$

Ukuran matriks dijelaskan dalam hal jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Sebagai contoh, matriks pertama dalam Contoh 1 memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 dengan 2 (ditulis 3×2). Dalam deskripsi ukuran, angka pertama selalu menunjukkan jumlah baris, dan angka kedua menunjukkan jumlah kolom. Matriks yang tersisa dalam Contoh 1 memiliki ukuran $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1,$ dan 1×1 secara berturut-turut.

Kita akan menggunakan huruf besar untuk menunjukkan matriks dan huruf kecil untuk menunjukkan jumlah numerik, sehingga kita bisa menulis:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ atau } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Ketika membahas matriks, adalah umum untuk merujuk ke jumlah numerik sebagai skalar. Kecuali dinyatakan sebaliknya, skalar adalah bilangan real; skalar kompleks akan dipertimbangkan nanti dalam teks.

Kurung matriks sering diabaikan dari matriks 1×1*, sehingga mustahil untuk mengatakan, misalnya, apakah simbol 4 menunjukkan angka "empat" atau matriks [4]. Ini jarang menimbulkan masalah karena biasanya mungkin untuk mengetahui mana yang dimaksudkan dari konteks.*

Entri yang terjadi di baris i dan kolom j dari matriks A akan dilambangkan dengan a_{ij}. Jadi matriks 3×4 secara umum dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Dan secara umum matriks $m \times n$ adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ketika notasi ringkas diinginkan, matriks sebelumnya dapat ditulis sebagai:

$$[a_{ij}]_{m\times n} \text{ atau } [a_{ij}]$$

Notasi pertama digunakan ketika penting dalam diskusi untuk mengetahui ukuran, dan yang kedua digunakan ketika ukuran tidak perlu ditekankan. Biasanya, kita akan mencocokkan huruf yang menunjukkan matriks dengan huruf yang menunjukkan entri-nya; dengan demikian, untuk matriks B kita biasanya menggunakan b_{ij} untuk entri dalam baris i dan kolom j, dan untuk matriks C kita akan menggunakan notasi c_{ij}.

Entri di baris i dan kolom j dari matriks A juga biasanya dilambangkan dengan simbol $(A)_{ij}$. Jadi, untuk matriks 1 di atas, kita punya:

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Dan untuk matris:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Kita punya $(A)_{11} = 2, (A)_{12} = -3, (A)_{21} = 7$, dan $(A)_{22} = 0$.

Vektor baris dan kolom sangat penting, dan ini adalah praktik umum untuk menunjukkannya dengan huruf tebal huruf kecil dan bukan huruf besar. Untuk matriks semacam itu, subskrip ganda entri tidak diperlukan. Jadi secara umum vektor baris $1 \times n$ dan vektor kolom $m \times 1$ akan ditulis sebagai:

$$\mathbf{a} = [a_1 a_2 \dots a_n] \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks persegi ordo n, dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ yang diarsir dalam 2 dikatakan berada di diagonal utama A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Operasi Matriks

Sejauh ini, kita telah menggunakan matriks untuk menyingkat pekerjaan dalam memecahkan sistem persamaan linear. Untuk aplikasi lain, bagaimanapun, itu diinginkan untuk mengembangkan "aritmatika matriks" di mana matriks dapat ditambahkan, dikurangi, dan dikalikan dengan cara yang bermanfaat. Bagian selanjutnya dari bagian ini akan dikhususkan untuk mengembangkan aritmatika ini.

DEFINISI 2

Dua matriks didefinisikan sama jika mereka memiliki ukuran yang sama dan entri yang sesuai adalah sama.

Kesetaraan dua matriks:

$$A = [a_{ij}] \text{ dan } B = [b_{ij}]$$

dengan ukuran yang sama dapat diekspresikan baik dengan menulis:

$$(A)_{ij} = (B)_{ij}$$

atau dengan menulis:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

di mana dipahami bahwa kesetaraan berlaku untuk semua nilai dari i dan j.

Contoh 2: Kesamaan Matriks

Perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $x = 5$ maka $A = B$, tetapi untuk semua nilai lain dari x, matriks A dan B tidak sama, karena tidak semua entri yang sesuai adalah sama. Tidak ada nilai x dimana $A = C$ karena A dan C memiliki ukuran yang berbeda.

DEFINISI 3

Jika A dan B adalah matriks dengan ukuran yang sama, maka penjumlahan $A + B$ *adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri B ke entri A yang sesuai, dan pengurangan* $A - B$ *adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi entri B dari entri A yang sesuai. Matriks dengan ukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangi.*

Dalam notasi matrik, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dengan ukuran yang sama, maka:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Dan

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Contoh 3: Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Ekspresi $A + C,\ B + C,\ A - C$ dan $B - C$ tidak terdefinisi.

DEFINISI 4

Jika A adalah matriks dan c adalah skalar apa pun, maka produk cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri dari matriks A oleh c. Matriks cA dikatakan sebagai kelipatan skalar A.

Dalam notasi matrik, jik $A = [a_i j]$ maka:

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Contoh 4: Kelipatan Skalar

Untuk matrik-matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Kita punya:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix},\ (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix},\ \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ini adalah praktik umum untuk menunjukkan $(-1)B$ oleh $-B$.

Sejauh ini kita telah mendefinisikan perkalian matriks oleh skalar tetapi bukan perkalian dari dua matriks. Karena matriks ditambahkan dengan menambahkan entri yang sesuai dan dikurangkan dengan mengurangkan entri yang sesuai, akan terlihat alami untuk menentukan perkalian matriks dengan mengalikan entri yang bersesuaian. Namun, ternyata definisi seperti itu tidak akan sangat berguna untuk sebagian besar masalah. Pengalaman telah menyebabkan para matematikawan mengikuti definisi perkalian matriks yang lebih bermanfaat berikut ini.

DEFINISI 5

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka produk AB adalah matriks $m \times n$ yang entri ditentukan sebagai berikut: Untuk menemukan entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih satu baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Gandakan entri yang sesuai dari baris dan kolom bersama-sama, dan kemudian tambahkan produk yang dihasilkan.

Contoh 5: Perkalian Matrik

Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matrik 2×3 dan B adalah matrik 3×4, produk AB adalah matrik 2×4. Untuk menentukan, misalnya, entri di baris 2 dan kolom 3 dariAB, kita memilih baris 2 dari A dan kolom 3 dari B. Kemudian, seperti yang digambarkan di bawah ini, kita mengalikan entri yang terkait bersama dan menambahkan produk-produk ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{26} & \square \end{bmatrix}$$

$$(2.4) + (6.3) + (0.5) = 26$$

Entri dalam baris 1 dan kolom 4 dari AB dihitung sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1.3) + (2.1) + (4.2) = 13$$

Perhitungan entri sisanya adalah:

$$(1.4) + (2.0) + (4.2) = 12$$

$$(1.1) - (2.1) + (4.7) = 27$$

$$(1.4) + (2.3) + (4.5) = 30$$

$$(2.4) + (6.0) + (0.2) = 8$$

$$(2.1) - (6.1) + (0.7) = -4$$

$$(2.3) - (6.1) + (0.2) = 12$$

Sehingga diperoleh $AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$

Definisi perkalian matriks mensyaratkan bahwa jumlah kolom dari faktor pertama A sama dengan jumlah baris dari faktor kedua B untuk membentuk produk AB. Jika kondisi ini tidak dipenuhi, produk tidak terdefinisi. Cara mudah untuk menentukan apakah produk dari dua matriks didefinisikan adalah dengan menuliskan ukuran faktor pertama dan, ukuran faktor kedua dituliskan disebelah kanannya. Jika, seperti pada (3), angka di dalam adalah sama, maka produk dapat ditentukan. Angka-angka di luar kemudian memberikan ukuran produk.

$$\underset{m \times r}{A} \quad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB} \qquad (3)$$

Angka dalam

Angka luar

Contoh 6: Menentukan Apakah Suatu Produk Terdefinisi

Misalkan A, B dan C adalah matrik-matrik dengan ukuran sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3\times 4 & 4\times 7 & 7\times 3 \end{array}$$

Maka dengan (3), AB terdefinisi matriks berukuran 3×7; BC terdefinisi dengan ukuran matrisk 4×3; dan CA terdefinisi dengan ukuran matrik 7×4. Produk AC, CB dan BA semuanya tidak terdefinisi.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Entri $(AB)_{ij}$ dalam baris i dan kolom j dari AB diperoleh dengan:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \quad (5)$$

Partisi Matriks

Matriks dapat dibagi atau dipartisi menjadi matriks yang lebih kecil dengan memasukkan aturan horizontal dan vertikal antara baris dan kolom yang dipilih. Sebagai contoh, berikut ini adalah tiga partisi yang mungkin dari matriks A secara umum - yang pertama adalah partisi A menjadi empat submatrik A_{11}, A_{12}, A_{21}, danA_{22}; yang kedua adalah partisi A ke dalam vektor baris r_1, r_2, dan r_3; dan yang ketiga adalah partisi A ke dalam vektor kolom c_1, c_2, c_3, dan c_4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks dengan Kolom dan Baris

Partisi memiliki banyak kegunaan, salah satunya adalah untuk menemukan baris atau kolom tertentu dari produk matriks AB tanpa menghitung seluruh produk. Secara khusus, rumus berikut, yang buktinya dibiarkan sebagai latihan, menunjukkan bagaimana vektor kolom individu AB dapat diperoleh dengan mempartisi B ke dalam vektor kolom dan bagaimana vektor baris individu AB dapat diperoleh dengan mempartisi A ke dalam vektor baris.

$$AB = A[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \dots \quad Ab_n] \tag{6}$$

(AB dihitung kolom dengan kolom)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix} \tag{7}$$

(AB dihitung baris dengan baris)

Dalam kata-kata, rumus-rumus ini menyatakan bahwa:

$$\text{Vektor kolom ke} - j \text{ dari } AB = A[\text{vektor kolom ke } j \text{ dari } B] \tag{8}$$

$$\text{Vektor baris ke} - \text{i dari } AB = [\text{vektor kolom ke } j \text{ dari } A]B \tag{9}$$

Contoh 7: Lihat kembali Contoh 5

Jika A dan B adalah matriks dalam Contoh 5, maka dari (8) vektor kolom kedua AB dapat diperoleh dengan perhitungan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Kolom ke 2 dari B Kolom ke 2 dari AB

Dan dari (9) vektor baris pertama dari AB dapat diperoleh dengan perhitungan:

$$[1 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = [12 \quad 27 \quad 30 \quad 13]$$

Baris pertama dari A Baris pertama dari AB

Produk Matriks sebagai Kombinasi Linier

Kita telah membahas tiga metode untuk menghitung produk matriks AB – entri demi entri, kolom demi kolom, dan baris demi baris. Definisi berikut memberikan cara lain untuk berpikir tentang perkalian matriks.

DEFINISI 6

Jika $A_1, A_2, \dots, A_r$ adalah matriks dengan ukuran sama, dan jika $c_1, c_2, \dots, c_r$ adalah skalar, maka ekspresi dari bentuk [4]*:*

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$

Disebut kombinasi linier dari $A_1, A_2, \dots, A_r$ dengan koefisien $c_1, c_2, \dots, c_r$

Untuk melihat bagaimana produk matriks dapat dilihat sebagai kombinasi linear, misalkan A menjadi matriks dan x vektor kolom, katakan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ini membuktikan teorema berikut:

TEOREMA 2.1.

Jika A adalah matriks $m \times n$, dan jika **x** *adalah vektor kolom $n \times 1$, maka produk A***x** *dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor kolom A di mana koefisien adalah entri dari* **x***.*

Contoh 8: Produk Matrik Sebagai Kombinasi Linier

Produk matrik:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor kolom sebagai berikut:

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Contoh 9: Kolom produk AB sebagai kombinasi linier

Kita sudah membuktikan dalam contoh 5 bahwa:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Ini mengikuti dari Rumus (6) dan Teorema 1.3.1 bahwa vektor kolom ke-j dari AB dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor kolom A dimana koefisien dalam kombinasi linear adalah entri dari kolom ke-j dari B. Perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk Matriks dari Sistem Linier

Perkalian matriks memiliki aplikasi penting untuk sistem persamaan linear. Perhatikan m sistem persamaan linier dalam n tidak diketahui:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Karena dua matriks sama jika dan hanya jika entri yang sesuai sama, kita dapat mengganti m persamaan dalam sistem ini dengan persamaan matriks tunggal:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks $m \times 1$ di sisi kiri persamaan ini dapat ditulis sebagai produk sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika kita menunjuk matriks ini dengan A, $\mathbf{x}$, dan $\mathbf{b}$, masing-masing, maka kita dapat mengganti sistem asli m persamaan dengan n tidak dikenal oleh persamaan matriks tunggal:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Matriks A dalam persamaan ini disebut matriks koefisien dari sistem. Matriks perluasan untuk sistem diperoleh dengan adjoining $\mathbf{b}$ ke A sebagai kolom terakhir; dengan demikian matriks perluasannya adalah:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

garis vertikal di $[A|\mathbf{b}]$ adalah cara yang nyaman untuk memisahkan A dari $\mathbf{b}$ secara visual; itu tidak memiliki signifikansi matematis.

Transpose Matriks

Kita menyimpulkan bagian ini dengan mendefinisikan dua operasi matriks yang tidak memiliki analog dalam aritmatika bilangan real.

DEFINISI 7

Jika A adalah matriks $m \times n$, *maka transpose dari A, dilambangkan dengan* A^T, *didefinisikan sebagai matriks yang dihasilkan dengan mempertukarkan baris dan kolom A; yaitu, kolom pertama* A^T *adalah baris pertama A, kolom kedua* A^T *adalah baris kedua A, dan seterusnya.*

Contoh 10: Beberapa Contoh Transpose

Berikut ini adalah beberapa contoh matriks dan transposnya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, D^T = [4]$$

Perhatikan bahwa tidak hanya kolom A^T dari baris A, tetapi baris A^T adalah kolom A. Dengan demikian entri dalam baris i dan kolom j dari A^T adalah entri dalam baris j dan kolom i dari A; yaitu:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} \tag{11}$$

Perhatikan pembalikan subscript.

Dalam kasus khusus di mana A adalah matriks persegi, transpose A dapat diperoleh dengan entri pertukaran tempat yang diposisikan secara simetris pada diagonal utama. Dalam bagian 12 kita melihat bahwa A^T juga dapat diperoleh dengan "mencerminkan" A dengan diagonal utamanya.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Pertukaran tempat entri yang diposisikan secara simetris pada diagonal utama

DEFINISI 8

Jika A adalah matriks persegi, maka jejak A, dilambangkan dengan tr (A), didefinisikan sebagai jumlah dari entri pada diagonal utama A. Jejak A tidak terdefinisi jika A bukan matriks persegi.

Contoh 11: Jejak Matriks

Berikut ini adalah contoh-contoh matrik dan jejaknya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ dan } tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

Dalam latihan soal, Anda akan mendapati beberapa latihan untuk dikerjakan terkait operasi transpose dan trace.

Latihan 2

1. Misal $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Hitunglah (jika memang bisa dihitung):

   (a) AA

(b) AB

(c) AC

(d) AE

(e) DA

(f) CE

(g) $A + B$

(h) $A + D$

2. Misal $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Tentukan vektor kolom B sehingga $A\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$.

3. Tuliskan sistem linier berikut dalam bentuk perkalian matriks.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 2 \\ 2y + z &= 1 \\ x - 2y \quad &= 3 \end{aligned}$$

4. Misalkan A, B, C, D dan E adalah matrik-matrik dengan ukuran sebagai berikut:

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Dari matriks di atas, tentukan apakah ekspresi matrik tersebut terdefinisi. Untuk matriks yang terdefinisi, tentukan ukuran dari hasil matrik berikut:

(a) BA

(b) $AC + D$

(c) $AE + B$

(d) $AB + B$

(e) $E(A + B)$

(f) $E(AC)$

(g) $E^T A$

(h) $(A^T + E)D$

5. Misalkan A, B, C, D dan E adalah matrik-matrik dengan ukuran sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (3\times 1) & (3\times 6) & (6\times 2) & (2\times 6) & (1\times 3) \end{array}$$

Dari matriks di atas, tentukan apakah ekspresi matrik tersebut terdefinisi. Untuk matriks yang terdefinisi, tentukan ukuran dari hasil matrik berikut:

(a) EA

(b) AB^T

(c) $B^T(A+E^T)$

(d) $2A+C$

(e) $(C^T+D)B^T$

(f) $CD+B^TE^T$

(g) $(B^T)C^T$

(h) $DC+EA$

6. Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}6 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Dari matrik-matrik tersebut, hitung ekspresi yang mungkin:

(a) $D+E$

(b) $D-E$

(c) $5A$

(d) $-7C$

(e) $2B-C$

(f) $4E-2D$

(g) $-3(D+2E)$

(h) $A - A$

(i) $tr(D)$

(j) $4tr(7B)$

(k) $tr(A)$

7. Dengan menggunakan matrik pada soal nomor 6, hitunglah ekspresi-ekspresi di bawah ini yang mungkin:

(a) $2A^T + C$

(b) $D^T - E^T$

(c) $(D - E)^T$

(d) $B^T + 5C^T$

(e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$

(f) $B - B^T$

(g) $2E^T - 3D^T$

(h) $(2E^T - 3D^T)$

(i) $(CD)E$

(j) $C(BA)$

(k) $tr(DE^T)$

(l) $tr(BC)$

8. Dengan menggunakan matrik pada soal nomor 6, hitunglah ekspresi-ekspresi di bawah ini yang mungkin:

(a) AB

(b) BA

(c) $(3E)D$

(d) $(AB)C$

(e) $A(BC)$

(f) CC^T

(g) $(DA)^T$

(h) $(C^T B)A^T$

(i) $tr(DD^T)$

(j) $tr(4E^T - D)$

(k) $tr(C^T A^T + 2E^T)$

(l) $tr((BC^T)^T A)$

9. Dengan menggunakan matrik pada soal nomor 6, hitunglah ekspresi-ekspresi di bawah ini yang mungkin:

   (a) $(2D^T - E)A$

   (b) $(4B)C + 2B$

   (c) $(-AC)^T + 5D^T$

   (d) $(BA^T - 2C)^T$

   (e) $B^T(CC^T - A^T A)$

   (f) $D^T E^T - (ED)^T$

10. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

   Gunakan metode baris atau metode kolom yang tepat untuk menentukan:

   (a) Baris pertama AB

   (b) Baris ketiga AB

   (c) Kolom pertama BA

   (d) Baris ketiga AA

   (e) Kolom ketiga AA

11. Berdasarkan matriks pada soal nomor 10, gunakan metode baris atau metode kolom yang tepat untuk menentukan:

   (a) Kolom pertama AB

   (b) Kolom ketiga BB

(c) Baris kedua BB

(d) Kolom pertama AA

(e) Kolom ketiga AB

(f) Baris pertama BA

12. Berdasarkan matrik A dan B dalam soal nomor 10, dan contoh 9:

(a) Ekspresikan masing-masing vektor kolom AA sebagai kombinasi linier dari vektor kolom A.

(b) Ekspresikan masing-masing vektor kolom BB sebagai kombinasi linier dari vektor kolom B.

13. Berdasarkan matrik A dan B dalam soal nomor 10, dan contoh 9. Tentukan ekspresi masing-masing vektor kolom AB sebagai kombinasi linier dari vektor kolom A.

14. Tentukan matriks A, $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{b}$ sistem persamaan linier berikut sebagai persamaan matrik tunggal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dan tuliskan persamaan matriknya.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

15. Tentukan matriks A, $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{b}$ sistem persamaan linier berikut sebagai persamaan matrik tunggal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dan tuliskan persamaan matriknya.

(a) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ -3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

16. Ekspresikan persamaan matrik sebagai sistem persamaan linier.

(a) $$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$

17. Ekspresikan persamaan matrik sebagai sistem persamaan linier.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

18. Tentukan nilai k yang memenuhi persamaan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

19. Tentukan nilai a, b, c, d yang memenuhi persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$$

Jawaban 2

1. Hasilnya adalah:

(a) $AA =$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{pmatrix}$

(b) $AB =$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 24 & 29 & 34 \end{pmatrix}$

(c) AC tidak dapat dilakukan.

(d) $AE =$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 35 \end{pmatrix}$

(e) $DA =$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$

(f) $CE =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix}$$

(g) $A + B =$ tidak dapat dilakukan.

(h) $A + D =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Vektor kolom B haruslah:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sehingga } AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$$

3. Bentuk matriksnya adalah:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Hasil ukuran matriksnya adalah:

   (a) Tidak terdefinisi.

   (b) 4×2

   (c) Tidak terdefinisi.

   (d) Tidak terdefinisi.

   (e) 5×5

   (f) 5×2

   (g) Tidak terdefinisi.

   (h) 5×2

5. Hasil ukuran matriksnya adalah:

   (a) 1×1

   (b) Tidak terdefinisi.

   (c) 6×1

   (d) Tidak terdefinisi.

   (e) 2×3

(f) Tidak terdefinisi.

(g) 3×6

(h) Tidak terdefinisi.

6. Ekspresi yang mungkin adalah:

(a) $D + E =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) $D - E =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $5A =$

$$5A = 5\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(d) $-7C =$

$$-7C = -7\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{pmatrix}$$

(e) $2B - C =$ tidak terdefinisi.

(f) $4E - 2D =$

$$4\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(g) $-3(D + 2E) =$

$$-3\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = -3\begin{pmatrix} 13 & 7 & 8 \\ -3 & 2 & 5 \\ 11 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{pmatrix}$$

(h) $A - A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $tr(D) = 1 + 0 + 4 = 5$

(j) $4tr(7B) =$

$$4tr(7B) = 4tr\left[\begin{pmatrix} 28 & -7 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}\right] = 4(28 + 14) = 168$$

(k) $tr(A)$ tidak terdefinisi.

7. Ekspresi yang mungkin adalah:

(a) $2A^T + C =$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) $D^T - E^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $(D - E)^T =$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $B^T + 5C^T$ tidak terdefinisi.

(e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(f) $B - B^T =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(g) $2E^T - 3D^T =$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(h) $(2E^T - 3D^T) =$

$$\begin{pmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

(i) $(CD)E =$

$$\begin{pmatrix} 65 & 26 & 69 \\ 185 & 69 & 182 \end{pmatrix}$$

(j) $C(BA)$ tidak terdefinisi.

(k) $tr(DE^T) = 17 + 3 + 26 = 46$

(l) $tr(BC)$ tidak terdefinisi.

8. Ekspresi yang mungkin adalah:

(a) $AB =$

$$\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) BA tidak terdefinisi.

(c) $(3E)D =$

$$\begin{pmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{pmatrix}$$

(d) $(AB)C =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

(e) $A(BC) =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

(f) $CC^T =$

$$\begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{pmatrix}$$

(g) $(DA)^T =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

(h) $(C^T B)A^T =$

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

(i) $tr(DD^T) = 30 + 2 + 29 = 61$

(j) $tr(4E^T - D) = 23 + 4 + 8 = 35$

(k) $tr(C^T A^T + 2E^T) = 15 + 0 + 13 = 28$

(l) $tr((EC^T)^T A) = 55 + 44 = 99$

9. Ekspresi yang mungkin adalah:

(a) $(2D^T - E)A =$

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) $(4B)C + 2B$ tidak terdefinisi.

(c) $(-AC)^T + 5D^T =$

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -12 & 2 & -5 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 25 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

(d) $(BA^T - 2C)^T =$

$$\left[\begin{pmatrix} 12 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

(e) $B^T(CC^T - A^T A) =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 72 \\ 27 & 42 \end{pmatrix}$$

(f) $D^T E^T - (ED)^T =$

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 12 \\ 36 & -2 & 26 \\ 25 & 7 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 4 & 12 \\ 36 & -2 & 26 \\ 25 & 7 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Hasil perkaliannya adalah:

(a) Baris pertama AB

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 & 41 & 41 \end{pmatrix}$$

(b) Baris ketiga AB

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 67 & 57 \end{pmatrix}$$

(c) Kolom pertama BA

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 63 \end{pmatrix}$$

(d) Baris ketiga AA

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 56 & 97 \end{pmatrix}$$

(e) Kolom ketiga AA

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix}$$

11. Ekspresi yang mungkin adalah:

(a) Kolom pertama AB

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 64 \\ 63 \end{pmatrix}$$

(b) Kolom ketiga BB

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 18 \\ 74 \end{pmatrix}$$

(c) Baris kedua BB

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 18 \end{pmatrix}$$

(d) Kolom pertama AA

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix}$$

(e) Kolom ketiga AB

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 59 \\ 57 \end{pmatrix}$$

(f) Baris pertama BA

$$(6 \quad -2 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} = (6 \quad -6 \quad 70)$$

12. Ekspresi masing-masing vektor adalah:

(a) Ekspresi masing-masing vektor kolom AA sebagai kombinasi linier dari vektor kolom A.

$$AA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 76 \\ 48 & 29 & 98 \\ 24 & 56 & 97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 29 \\ 56 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(b) Ekspresi masing-masing vektor kolom BB sebagai kombinasi linier dari vektor kolom B.

$$BB = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 14 & 38 \\ 21 & 22 & 18 \\ 77 & 28 & 74 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 64 \\ 21 \\ 77 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 28 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 38 \\ 18 \\ 74 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

13. Ekspresi masing-masing vektor adalah:

$$AB = \begin{pmatrix} 67 & 41 & 41 \\ 64 & 21 & 59 \\ 63 & 67 & 57 \end{pmatrix}$$

Ekspresi masing-masing vektor kolom AB sebagai kombinasi linier dari vektor kolom A.

$$\begin{pmatrix}67\\64\\63\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}41\\21\\67\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}41\\59\\57\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$$

14. Persamaan matriksnya adalah:

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\9 & -1 & 1\\1 & 5 & 4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}7\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\9 & -1 & 1\\1 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-1\\0\end{pmatrix}$$

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{pmatrix}4 & 0 & -3 & 1\\5 & 1 & 0 & -8\\2 & -5 & 9 & -1\\0 & 3 & -1 & 7\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 0 & -3 & 1\\5 & 1 & 0 & -8\\2 & -5 & 9 & -1\\0 & 3 & -1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}$$

15. Persamaan matriksnya adalah:

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 1 & 0\\0 & -3 & 4\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16. Sistem liniernya adalah:

(a)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 &= -9 \end{aligned}$$

17. Sistem liniernya adalah:

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 27x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3w - 2x + z &= 0 \\ 5w + 2y - 2z &= 0 \\ 3w + x + 4y + 7z &= 0 \\ -2w + 5x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

18. Perhitungan nilai k:

$$[k \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[k+1 \quad k+2 \quad -1] \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(k+1)k + k + 2 - 1 = 0$$

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

$(k+1)(k+1)=0$

$k=-1$

19. Dari soal diketahui:

$a=4 \quad \ldots(1)$

$d-2c=3 \quad \ldots(2)$

$d+2c=-1 \quad \ldots(3)$

$a+b=-2 \quad \ldots(4)$

Dari (1) dan (4) diperoleh $b=-6$.

Dari (2) dan (3) diperoleh $d=1$ dan $c=-1$

Maka $a=4,\ b=-6,\ c=-1,\ d=1$.

Rangkuman 2

1. Matriks adalah susunan angka/bilangan dalam bentuk persegi panjang. Bilangan/angka dalam susunan tersebut disebut entri.
2. Dua matriks didefinisikan sama jika mereka memiliki ukuran yang sama dan entri yang sesuai adalah sama.
3. Jika A dan B adalah matriks dengan ukuran yang sama, maka penjumlahan A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri B ke entri A yang sesuai, dan pengurangan A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi entri B dari entri A yang sesuai. Matriks dengan ukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangi.
4. Jika A adalah matriks dan c adalah skalar apa pun, maka produk cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri dari matriks A oleh c. Matriks cA dikatakan sebagai kelipatan skalar A.
5. Jika A adalah matriks m×r dan B adalah matriks r×n, maka produk AB adalah matriks m×n yang entri ditentukan sebagai berikut: Untuk menemukan entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih satu baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Gandakan entri yang sesuai

dari baris dan kolom bersama-sama, dan kemudian tambahkan produk yang dihasilkan.

6. Jika $A_1, A_2, \dots, A_r$ adalah matriks dengan ukuran sama, dan jika $c_1, c_2, \dots, c_r$ adalah skalar, maka ekspresi dari bentuk:

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$

   Disebut kombinasi linier dari $A_1, A_2, \dots, A_r$ dengan koefisien $c_1, c_2, \dots, c_r$.

7. Jika A adalah matriks m×n, dan jika x adalah vektor kolom n×1, maka produk Ax dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor kolom A di mana koefisien adalah entri dari x.
8. Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpose dari A, dilambangkan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks yang dihasilkan dengan mempertukarkan baris dan kolom A; yaitu, kolom pertama A^T adalah baris pertama A, kolom kedua A^T adalah baris kedua A, dan seterusnya.

Tes Formatif 2

1. Perhatikan matrik-matrik berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Maka nilai dari $tr(D - 3E)$ adalah …

   A. -25

   B. 168

   C. Tidak terdefinisi

   D. -5

   E. 122

2. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

   Maka metode baris atau metode kolom yang tepat untuk menentukan kolom kedua AB adalah …

A.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 63 \end{pmatrix}$$

B.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{pmatrix}$$

C.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 64 \\ 63 \end{pmatrix}$$

D.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 & 41 & 41 \end{pmatrix}$$

E.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 67 & 57 \end{pmatrix}$$

3. Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Maka ekspresi salah satu vektor kolom BA sebagai kombinasi linier dari vektor kolom B yang tepat adalah …

A.

$$\begin{pmatrix} 67 \\ 64 \\ 63 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

B.

$$\begin{pmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

C.

$$\begin{pmatrix}41\\59\\57\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$$

D.

$$\begin{pmatrix}67\\64\\63\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$$

E.

$$\begin{pmatrix}41\\21\\67\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$$

4. Nilai k yang memenuhi persamaan matriks berikut adalah …

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 3\\0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\k\end{bmatrix} = 0$$

A. $k = 4$ atau $k = -5$

B. $k = -4$ atau $k = -5$

C. $k = -2$ atau $k = 10$

D. $k = -2$ atau $k = -10$

E. $k = 2$ atau $k = -10$

5. Nilai a, b, c, d yang memenuhi persamaan matriks berikut adalah …

$$\begin{bmatrix}a-b & b+a\\3d+c & 2d-c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 1\\7 & 6\end{bmatrix}$$

A. $a = -4{,}5,\ b = -3{,}5,\ c = -0{,}8,\ d = -2{,}6$

B. $a = -4{,}5,\ b = -3{,}5,\ c = -0{,}8,\ d = 2{,}6$

C. $a = 4{,}5,\ b = -3{,}5,\ c = 0{,}8,\ d = -2{,}6$

D. $a = -4{,}5,\ b = 3{,}5,\ c = -0{,}8,\ d = 2{,}6$

E. $a = 4{,}5,\ b = -3{,}5,\ c = -0{,}8,\ d = 2{,}6$

Jawaban Tes Formatif 2

1. A

$tr(D-3E)=$

$$tr(D)-tr(3E)=5-tr\left[\begin{pmatrix}18 & 3 & 9\\ -3 & 3 & 6\\ 12 & 3 & 9\end{pmatrix}\right]=5-(18+3+9)=-25$$

2. B

$$AB=\begin{pmatrix}67 & 41 & 41\\ 64 & 21 & 59\\ 63 & 67 & 57\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 7\\ 6 & 5 & 4\\ 0 & 4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41\\ 21\\ 67\end{pmatrix}$$

3. C

$$BA=\begin{pmatrix}6 & -6 & 70\\ 6 & 17 & 31\\ 63 & 41 & 122\end{pmatrix}$$

Ekspresi masing-masing vektor kolom BA sebagai kombinasi linier dari vektor kolom B.

$$\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 63\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 7\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 7\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6\\ 17\\ 41\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 7\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 7\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}70\\ 31\\ 122\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 7\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 7\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$$

4. D

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ k\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}6 & 4+3k & 6+k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ k\end{bmatrix}=0$$

$$12+8+6k+6k+k^2=0$$

$$k^2+12k+20=0$$

$(k+2)(k+10)=0$

$k=-2$ atau $k=-10$

5. E

Dari soal diketahui:

$a-b=8 \quad \dots(1)$

$a+b=1 \quad \dots(2)$

$3d+c=7 \quad \dots(3)$

$2d-c=6 \quad \dots(4)$

Dari (1) dan (2) diperoleh $a=4{,}5$ dan $b=-3{,}5$.

Dari (3) dan (4) diperoleh $d=2{,}6$ dan $c=-0{,}8$

Maka $a=4{,}5,\ b=-3{,}5,\ c=-0{,}8,\ d=2{,}6$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 2.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 3. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 3

PERSAMAAN PARAMETRIK, SIKLOID DAN TURUNAN VEKTOR

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep persamaan parametrik kurva.

Materi 3

Persamaan parametrik umum

Di bagian unit ini kita akan melihat kurva parametrik. Ini hanyalah gagasan bahwa sebuah titik yang bergerak di ruang menelusuri jalur dari waktu ke waktu. Dengan demikian ada empat variabel yang perlu diperhatikan, posisi titik (x, y, z) dan variabel bebas t, yang bisa kita anggap sebagai waktu. (Jika titik bergerak dalam bidang hanya ada tiga variabel, posisi titik (x, y) dan waktu t.)

Karena posisi titik tergantung t kita tuliskan:

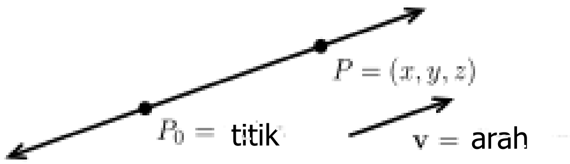
$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

untuk menunjukkan bahwa x, y dan z adalah fungsi dari t. Kita sebut t parameter dan persamaan untuk x, y dan z disebut persamaan parametrik [5].

Dalam contoh fisika, parameter sering kali mewakili waktu. Kita akan melihat kasus lain di mana parameter memiliki interpretasi yang berbeda, atau bahkan tidak ada interpretasi.

Persamaan parametrik garis

Nanti, kita akan melihat persamaan parametrik garis pada kurva umum. Saat ini, kita melihat titik bergerak pada satu garis. Data dasar yang kita butuhkan untuk menentukan garis adalah titik pada garis dan vektor yang sejajar dengan garis. Artinya, kita membutuhkan titik dan arah.



Gambar 3. 1. Titik dan Arah Vektor

Contoh 1:

Tuliskan persamaan parametrik untuk garis melalui titik $P_0 = (1,2,3)$ dan sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = \langle 1,3,5 \rangle$.

Jawab:

Jika $P = (x, y, z)$ berada di garis maka vektor $\overrightarrow{\mathbf{P_0P}} = \langle x - 1, y - 2, z - 3 \rangle$ sejajar dengan $\langle 1,3,5 \rangle$. Yaitu, $\overrightarrow{\mathbf{P_0P}}$ adalah kelipatan skalar dari $\langle 1,3,5 \rangle$. Kita menyebutnya skala t dan ditulis:

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x - 1, y - 2, z - 3 \rangle = t\langle 1,3,5 \rangle$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = t, \qquad y - 2 = 3t, \qquad z - 3 = 5t$$

$$\Leftrightarrow x = t + 1, \qquad y = 3t + 2, \qquad z = 5t + 3$$

Contoh 2:

Dalam contoh 1, jika vektor arah adalah $\langle 2,6,10 \rangle = 2\mathbf{v}$, Apa yang dapat kita simpulkan?

Jawab:

Kita akan mendapatkan garis yang sama dengan parameterisasi yang berbeda. Artinya, lintasan titik akan bergerak mengikuti jalur yang sama dengan lintasan pada contoh 1, tetapi akan tiba di setiap titik pada garis di waktu yang berbeda.

Contoh 3:

Tentukan persamaan parametrik pada garis yang melalui $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ searah (yaitu, sejajar) $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Jawab:

Persamaan parametrik pada garis yang melalui P_0 dan searah $\mathbf{v}$ adalah:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3\rangle$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2, \qquad z = z_0 + tv_3$$

Contoh 4:

Tentukan persamaan parametrik pada garis yang melalui titik $P_0 = (1,2,3)$ dan $P_1 = (2,5,8)$.

Jawab:

Kita menggunakan data yang diberikan untuk menemukan data dasar (vektor titik dan arah) untuk garis.

Kita diberi satu titik $P_0 = (1,2,3)$ dan vektor arah $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{P_0P_1}} = \langle 1,3,5\rangle$. Sehingga kita peroleh:

$$\langle x, y, z\rangle = \overrightarrow{\mathbf{OP_1}} + t\mathbf{v} = \langle 1 + t, 2 + 3t, 3 + 5t\rangle$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + t, \qquad y = 2 + 3t, \qquad z = 3 + 5t$$

Perpotongan Garis dan Bidang

Terkadang, kita ingin mengetahui titik perpotongan antara suatu bidang dengan garis dalam bentuk parametrik. Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5:

Perhatikan bidang $\mathcal{P}: 2x + y - 4z = 4$.

a) Tentukan semua titik perpotongan bidang $\mathcal{P}$ dengan garis:

$$x = t, \;\; y = 2 + 3t, \;\; z = t$$

b) Tentukan semua titik perpotongan bidang $\mathcal{P}$ dengan garis:

$$x = 1 + t, \;\; y = 4 + 2t, \;\; z = t$$

c) Tentukan semua titik perpotongan bidang $\mathcal{P}$ dengan garis:

$$x = t, \;\; y = 4 + 2t, \;\; z = t$$

Jawab:

a) Untuk menentukan perpotongan, kita substitusi formula x, y, z ke dalam persamaan pada $\mathcal{P}$ dan selesaikan t.

$$2(t) + (2 + 3t) - 4(t) = 4 \Leftrightarrow t = 2$$

Kemudian substitusi nilai $t = 2$ untuk menentukan titik perpotongan, diperoleh:

$$(x, y, z) = (2,8,2)$$

b) Substitusi:

$$2(1 + t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \Leftrightarrow 6 = 4$$

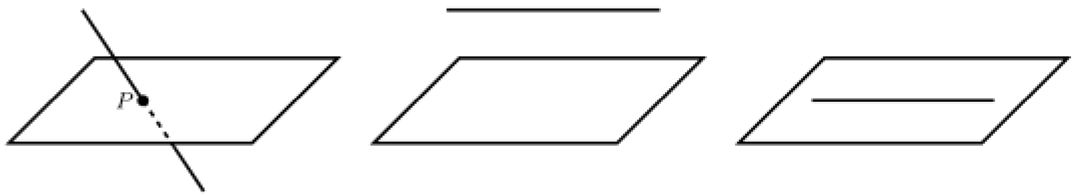
Tentu pernyataan tersebut salah, sehingga tidak ada nilai t yang memenuhi persamaan. Dengan demikian, tidak terdapat titik potongnya.

c) Substitusi:

$$2(t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$$

Tentu saja pernyataan tersebut benar, namun hal ini mengindikasikan bahwa semua nilai t memenuhi persamaan. Dengan demikian, titik potongnya adalah semua titik pada garis berpotongan pada bidang.

Sketsa untuk ketiga permasalahan di atas.



Persamaan Parametrik Kurva

Kita telah melihat persamaan parametrik untuk garis. Sekarang kita akan melihat persamaan parametrik dari lintasan yang lebih umum. Mengulangi apa yang telah dikatakan sebelumnya, persamaan paramterik kurva hanyalah gagasan bahwa sebuah titik yang bergerak dalam ruang menelusuri sebuah jalur.

Kita bisa menggunakan parameter untuk mendeskripsikan gerakan ini. Cukup sering kita akan menggunakan t sebagai parameter dan anggap saja sebagai waktu. Karena posisi titik tergantung t kita tulis:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

untuk menunjukkan bahwa x, y dan z adalah fungsi dari t. Kita menyebut t sebagai parameter dan persamaan untuk x, y dan z disebut persamaan parametrik.

Tidak selalu perlu untuk menganggap parameter sebagai waktu yang mewakili. Kita akan melihat kasus-kasus di mana akan lebih mudah untuk menyatakan posisi sebagai fungsi dari beberapa variabel lain.

Vektor posisi

Untuk menggunakan teknik vektor, kita mendefinisikan vektor posisi sebagai:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$$

Ini hanyalah vektor dari titik pusat sepanjang pergerakan titik. Saat titik bergerak demikian pula vektor posisinya (lihat gambar dengan contoh 6).

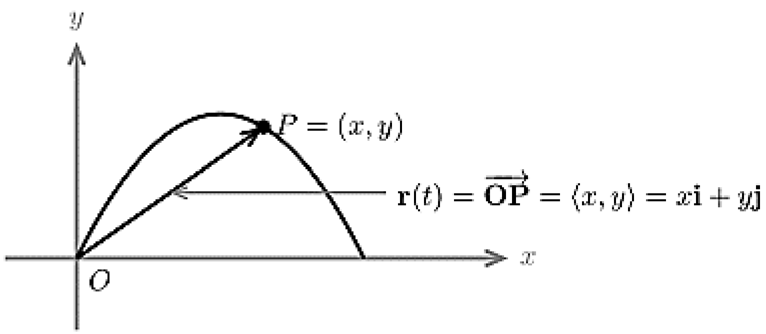
Contoh 6:

Sebuah tank menembakkan roket dari titik asalnya. Kecepatan x awal adalah $v_{0,x}$dan kecepatan y awal adalah $v_{0,y}$. Tentukan persamaan vektor posisinya.

Jawab:

Anda mungkin pernah melihat ini, tetapi bagaimanapun, ilmu fisika memberi tahu kita bahwa persamaan parametrik untuk lintasan parabola adalah:

$$x(t) = v_{0,x}t, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t$$



Gambar 3. 2. Pergerakan Titik dan Vektor Posisi

Pada waktu t roketnya ada di titik $P = (x(t), y(t))$. Vektor posisi dapat ditulis dengan banyak cara yang berbeda, yaitu:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \langle x, y \rangle$$

Selanjutnya kita akan melihat serangkaian contoh kurva dalam bentuk parametrik. Yang terpenting adalah lingkaran dan garis. Yang terakhir adalah sikloid. Ini adalah contoh penting yang menggabungkan garis dan lingkaran.

Lingkaran dan elips

Perhatikan persamaan parametrik kurva di bidang yaitu:

$$x(t) = a\cos t\,, \qquad y(t) = a\sin t$$

Dengan mudah kita mendapatkan hubungannya yaitu:

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$$

Karena itu lintasannya terus berjalan pada lingkaran dengan jari-jari a berpusat pada O. Kita menyebut $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$ sebagai bentuk parametrik dari kurva dan $x^2 + y^2 = a^2$ sebagai bentuk simetris.

Perhatikan, parameterisasi yang berbeda, misalnya:

$$x(t) = a\cos(3t)\,, \qquad y(t) = a\sin(3t)$$

menghasilkan lintasan yang sama, yaitu lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, tetapi dua lintasan tersebut berbeda dalam hal seberapa cepat mereka bergerak mengelilingi lingkaran.

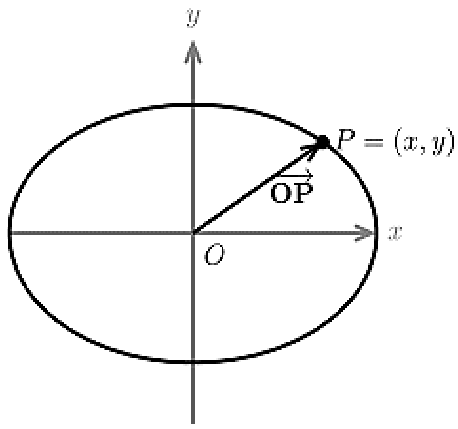
Lingkaran dengan mudah diubah menjadi elips oleh:

bentuk parametrik:

$$x(t) = a\cos t\,, \qquad y(t) = b\sin t$$

bentuk simetris:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Gambar 3. 3. Vektor Posisi pada Elips

Garis

Kita meninjau persamaan parametrik garis dengan menulis persamaan garis umum di bidang. Kita tahu kita dapat membuat parameter garis melalui (x_0, y_0) sejajar dengan (b_1, b_2) oleh:

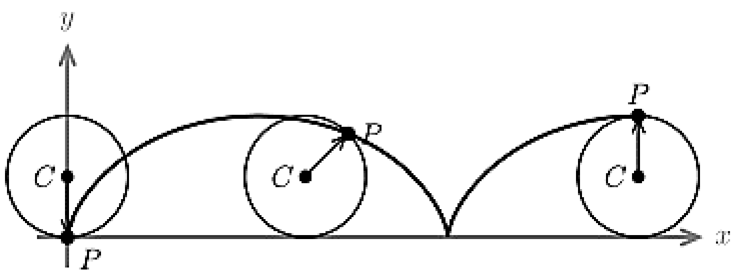
$$x(t) = x_0 + tb_1, \qquad y(t) = y_0 + tb_2$$

$$\Leftrightarrow r(t) = \langle x, y\rangle = \langle x_0 + tb_1, y_0 + tb_2\rangle = \langle x_0, y_0\rangle + t\langle b_1, b_2\rangle$$

Sikloid

Cycloid memiliki sejarah panjang dan secara mengejutkan sering muncul dalam masalah fisika. Bagi kita ini adalah kurva yang tidak memiliki bentuk simetris sederhana, jadi kita hanya akan mengerjakannya dalam bentuk parametriknya.

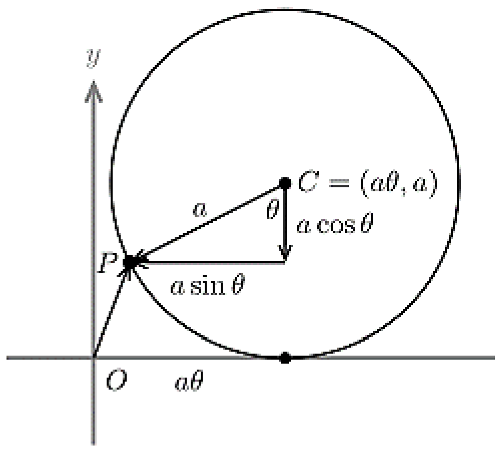
Sikloid adalah lintasan dari suatu titik pada suatu lingkaran yang bergulung tanpa tergelincir sepanjang sumbu x. Untuk lebih spesifik, kita akan mengikuti titik P yang dimulai dari asalnya atau titik pusatnya.



Gambar 3. 4. Lintasan Sikloid

Parameter alami yang digunakan adalah sudut θ bahwa roda telah berputar. Kita akan menggunakan metode vektor untuk menemukan vektor posisi P sebagai fungsi dari θ.

Strategi kita adalah memecah gerakan menjadi translasi dari pusat dan rotasi di sekitar pusat atau titikasal. Gambar berikut menunjukkan roda setelah diputar sepanjang sudut θ. Kita melihat vektor posisi:



Gambar 3. 5. Vektor Posisi pada Sikloid

Gambar 3.5 menunjukkan hubungan vektor posisi pada sikloid, yaitu:

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} + \overrightarrow{\mathbf{CP}}$$

Kita akan menghitung setiap bagian secara terpisah. Setelah berputar θ radian roda telah bergulir jauh $a\theta$, jadi pusat lingkaran berada di $(a\theta, a)$, yaitu,

$$\overrightarrow{\mathbf{OC}} = \langle a\theta, a \rangle$$

Gambar tersebut juga menunjukkan bahwa:

$$\overrightarrow{\mathbf{CP}} = \langle -a \sin\theta \, , -a \cos\theta \rangle$$

Menyatukan potongan-potongan itu kita mendapatkan persamaan parametrik untuk sikloid yaitu:

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \langle a\theta - a \sin\theta \, , a - a \cos\theta \rangle$$

$$\Leftrightarrow x(\theta) = a\theta - a \sin\theta \, , \qquad y(\theta) = a - a \cos\theta$$

Contoh 7:

Tentukan bentuk simetris untuk $x = 3\cos^2 t, \; y = 3\sin^2 t$.

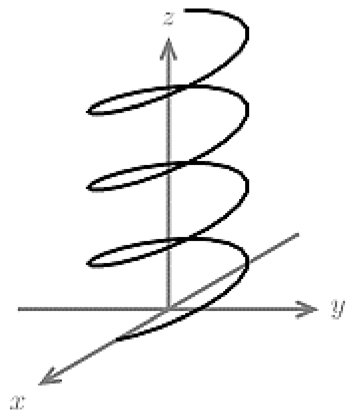
Jawab:

Dengan mudah kita mendapatkan: $x + y = 3$, dengan x, y non-negatif. Bentuk simetris memperlihatkan sebuah garis, tetapi lintasan parametrik hanya menelusuri sebagian dari garis tersebut. Nyatanya, ini bolak-balik di atas bagian garis di kuadran pertama.

Contoh 8:

Gambarkan kurva $r(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j} + at\, \mathbf{k}$.

Jawab:



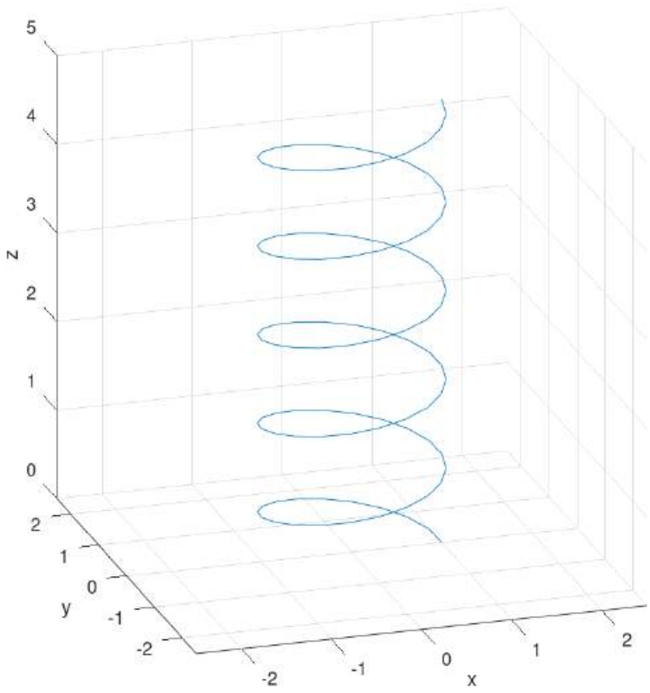
Gambar 3. 6. Heliks

Kurva $r(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j} + at\, \mathbf{k}$ adalah heliks yang berkelok-kelok di sekitar sumbu z.

Jika z antara 0 sampai 5, dan $a = 1$ maka perintah dalam Octave adalah:

```
>> z=[0:0.05:5];

>> plot3(cos(2*pi*z), sin(2*pi*z), z);

>> axis equal

>> xlabel("x");

>> ylabel("y");

>> zlabel("z");
```

Grafiknya adalah:



Gambar 3. 7. Helix pada Octave

Cusp pada Sikloid

Sebelumnya, kita sudah mendapatkan gambaran terkait sikloid yaitu lintasan dari suatu titik pada suatu lingkaran yang bergulung tanpa tergelincir sepanjang sumbu x. Untuk lebih spesifik, kita akan mengikuti titik P yang dimulai dari asalnya atau titik pusatnya.

Parameter alami yang digunakan adalah sudut θ bahwa roda telah berputar. Kita akan menggunakan metode vektor untuk menemukan vektor posisi P sebagai fungsi dari θ.

Strategi kita adalah memecah gerakan menjadi translasi dari pusat dan rotasi di sekitar pusat. Gambar berikut menunjukkan roda setelah diputar sepanjang sudut θ. Kita melihat vektor posisi pada Gmabr 3.5 di mana:

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OC}} + \overrightarrow{\mathbf{CP}}$$

Kita akan menghitung setiap bagian secara terpisah.

Setelah berputar θ radian roda telah bergulir jauh $a\theta$, jadi pusat lingkaran berada di $(a\theta, a)$, yaitu,

$$\overrightarrow{\mathbf{OC}} = \langle a\theta, a \rangle$$

Gambar tersebut juga menunjukkan bahwa:

$$\overrightarrow{\mathbf{CP}} = \langle -a\sin\theta\,, -a\cos\theta \rangle$$

Menyatukan potongan-potongan itu kita mendapatkan persamaan parametrik untuk sikloid yaitu:

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \langle a\theta - a\sin\theta\,, a - a\cos\theta \rangle$$

$$\Leftrightarrow x(\theta) = a\theta - a\sin\theta\,, \qquad y(\theta) = a - a\cos\theta$$

Kali ini, kita akan tinjau kembali sikloid di mana grafik sikloid memiliki titik di mana grafik tersebut menyentuh sumbu x. Poin-poin ini biasanya disebut **cusp** (katup).

Apa yang Anda lihat pada Gambar 3.4 di atas adalah lintasan titik P dari perputaran roda sepanjang sumbu x yang disebut **sikloid** di mana **cusp** adalah titik P saat menyentuh sumbu x.

Kita perhatikan titik $P(x, y)$ bergerak mengikuti sudut putar roda sebesar θ, artinya kita punya dua fungsi θ yaitu $x(\theta)$ dan $y(\theta)$. Dengan menggunakan koordinat polar dan panjang busur θ kita peroleh persamaan paramterik sikloid, yaitu:

$$x(\theta) = r\theta - r\sin\theta \text{ dan } y(\theta) = r - r\cos\theta$$

$$x(\theta) = r(\theta - \sin\theta) \text{ dan } y(\theta) = r(1 - \cos\theta)$$

Jika jari-jari roda $r = 1$, maka diperoleh persamaan parametrik sikloidnya yaitu:

$$x(\theta) = (\theta - \sin\theta) \text{ dan } y(\theta) = (1 - \cos\theta)$$

Untuk mengecek kebenaran persamaan tersebut, kita uji misalnya $\theta = 0$, maka:

$$x(0) = 0 - \sin 0 = 0 \text{ dan } y(0) = 1 - \cos 0 = 0$$

Jelas hasil tersebut menunjukkan roda dalam posisi awal pada titik $P(0,0)$.

Jika $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka kita peroleh $P(\frac{\pi}{2} - 1, 1)$.

Turunan Vektor

Jika kita ambil derivatif/turunan dari $x(\theta) = (\theta - \sin\theta)$ dan $y(\theta) = (1 - \cos\theta)$ terhadap θ kita peroleh:

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta \text{ dan } \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$$

Dari sini kita peroleh kemiringan/gradien/slope dari kurva, yaitu:

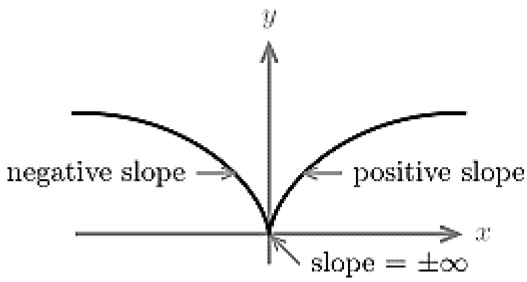
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

Tentu saja, jika $\theta \to 0$ didapati bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Namun jika kita gunakan aturan L'Hospital diperoleh:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Untuk $\cos\theta$ mendekati 1 dan $\sin\theta$ mendekati 0, tentu saja limit tidak eksis.

Namun, jika kita perhatikan lebih teliti lagi jika $\theta \to 0^-$ kita dapati limit mendekati $-\infty$ dan jika $\theta \to 0^+$ limit mendekati $+\infty$. Hal ini menunjukkan bahwa cusp tegak lurus dengan kemiringan kurva $-\infty$ dari sebelah kiri dan $+\infty$ dari sebelah kanan, seperti terlihat pada gambar berikut.



Gambar 3. 8. Cusp Tegak Lurus

Nanti, ketika kita belajar tentang kecepatan kita akan melihat situasi itu, pada:

$$\theta = 0, \qquad \frac{dx}{d\theta} = 0, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 0$$

Kecepatan dan Percepatan

Sekarang kita akan melihat salah satu keuntungan menggunakan vektor posisi. Mari kita asumsikan kita memiliki titikyang bergerak dengan vektor posisi:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

(Kita berasumsi bahwa titik bergerak di bidang. Titik yang bergerak di ruang tiga dimensi prinsipnya sama/serupa.)

Kecepatan

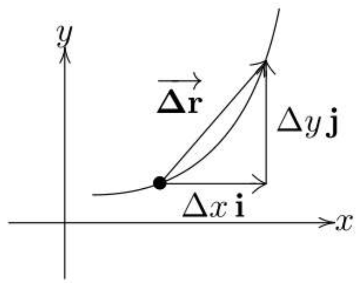
Dalam waktu singkat Δt posisinya berubah oleh $\Delta\mathbf{r}$. Kecepatan rata-rata pada waktu ini secara sederhana dapat dituliskan:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

yaitu perpindahan / waktu.

Gambar 3.9 berikut menunjukkan $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}$. Dengan membagi kedua ruas dengan Δt kita mendapatkan kecepatan rata-rata sebagai:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j}$$



Gambar 3. 9. Vektor Perubahan r

Sekarang, seperti yang biasa kita lakukan dalam kalkulus, kita misalkan $\Delta t \to 0$. Kecepatan rata-rata menjadi kecepatan (instantaneous) dan rasio dalam rumus di atas menjadi turunan. Untuk kelengkapan kita tulis vektor kecepatan dalam beberapa bentuk yang berbeda, yaitu:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} = \langle x', y'\rangle$$

Vektor Tangen/Garis Singgung

Pada gambar di atas, kita melihatnya sebagai Δt yang menyusut menjadi 0 dan vektor $\frac{\Delta \mathrm{r}}{\Delta t}$ menjadi bersinggungan dengan kurva. Ketika parameternya adalah waktu, maka kita rujuk $\mathbf{r}'(t)$ sebagai kecepatan. Secara umum, kita akan menyalahgunakan bahasa dan mengacu pada turunan posisi sehubungan dengan sebarang parameter sebagai kecepatan. Jika kita berpikir secara geometris atau ingin lebih presisi, kita akan memanggil turunannya dengan nama geometrisnya yaitu vektor tangen.

Seperti biasa, kita dianjurkan untuk mengingat tampilan geometris dari vektor kecepatan. Mengetahui bahwa itu tangen pada kurva (bersinggungan dengan kurva) akan menjadi penting saat kita mengembangkan subjek dan memecahkan masalah.

Percepatan

Tidak ada alasan untuk berhenti mengambil derivatif/turunan setelah turunan pertama. Karena percepatan adalah perubahan kecepatan per satuan waktu, kita dapatkan:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = x(\mathrm{t})\mathbf{i}+\mathrm{y}(t)\mathbf{j} = \langle x", y" \rangle$$

Contoh 9:

Sebuah roket mengikuti lintasan sebagai berikut:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \mathbf{v}_{\mathbf{0},x}t\mathbf{i} + (-\frac{g}{2}t^2 + \mathbf{v}_{\mathbf{0},y}t)\mathbf{j}$$

Tentukan vektor kecepatan dan percepatannya.

Jawab:

$$\text{kecepatan} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{0,x}\mathbf{i} + (-gt + v_{0,y})\mathbf{j}$$

$$\text{percepatan} = \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{j}$$

Contoh 10:

Tentukan vektor kecepatan dan percepatan dari sikloid.

$$x = \theta - \sin\theta\,,\;\; y = 1 - \cos\theta$$

Jawab:

Seperti catatan yang sebelumnya, diperoleh:

$$\text{kecepatan} = \mathbf{v}(\theta) = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \langle x'(\theta), y'(\theta) \rangle = \langle 1 - \cos\theta\,, \sin\theta \rangle$$

$$\text{percepatan} = \mathbf{a}(\theta) = \frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = \langle \sin\theta\,, \cos\theta \rangle$$

Contoh 11:

Dalam sikloid di atas, misalkan roda berputar dengan kecepatan 3 putaran per detik. Tulis persamaan parametrik dalam variabel waktu, dan hitung kecepatannya.

Jawab:

Karena 3 putaran / detik = 6π radian / detik, kita peroleh $\theta = 6\pi t$. Karena itu,

$$x(t) = 6\pi t - \sin(6\pi t)\,, \quad y(t) = 1 - \cos(6\pi t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \langle 6\pi - 6\pi\cos(6\pi t)\,, 6\pi\sin(6\pi t) \rangle$$

Aturan Dot Product untuk Turunan Vektor

Contoh 12:

Jika $\mathbf{r_1}(t)$ dan $\mathbf{r}_2(t)$ adalah dua persamaan parametrik kurva, tunjukkan bahwa aturan perkalian untuk turunannya terpenuhi menggunakan perkalian titik.

Jawab:

Jawaban ini akan mengikuti aturan perkalian seperti halnya dalam kalkulus satu variabel. Misalkan kita asumsikan kurva berada di suatu bidang (2 dimensi). Pembuktiannya akan sama dengan kurva di ruang (3 dimensi), yaitu akan dibuktikan bahwa:

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2'$$

Misal $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ dan $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$ maka diperoleh:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Kemudian kita ambil turunannya menggunakan aturan perkalian, diperoleh:

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = \frac{d(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = x_1' x_2 + x_1 x_2' + y_1' y_2 + y_1 y_2'$$

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = (x_1'x_2 + y_1'y_2) + (x_1x_2' + y_1y_2')$$

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = \langle x_1', y_1' \rangle \cdot \langle x_2, y_2 \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle \cdot \langle x_2', y_2' \rangle$$

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2' \quad \blacksquare$$

Aturan Cross Product untuk Turunan Vektor

Contoh 13:

Jika $\mathbf{r_1}(t)$ dan $\mathbf{r}_2(t)$ adalah dua persamaan parametrik kurva, tunjukkan bahwa aturan perkalian untuk turunannya terpenuhi menggunakan perkalian silang.

Jawab:

Seperti dalam dot product, kita ingin menunjukkan bahwa:

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{dt} = \mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2'$$

Misalkan $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ dan $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ maka:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \langle y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2 \rangle$$

Turunkan hasil cross product di atas, sehingga diperoleh:

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{dt} = \langle x_1', y_1', z_1' \rangle \times \langle x_2, y_2, z_2 \rangle + \langle x_1, y_1, z_1 \rangle \times \langle x_2', y_2', z_2' \rangle$$

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)}{dt} = \boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2' \quad \blacksquare$$

Kecepatan, Kelajuan dan Panjang Busur

Kecepatan adalah besaran vektor yang memiliki besaran dan arah di mana arahnya adalah tangen (bersinggungan dengan) kurva sepanjang $\mathbf{r}(t)$. Sementara besaran dari kecepatan adalah kelajuan.

Kelajuan adalah besaran skalar yaitu:

$$\text{kelajuan} = |\mathbf{v}| = \left|\frac{dx}{dt}\right|$$

Kelajuan berada dalam satuan jarak per satuan waktu. Ini mencerminkan seberapa cepat titik bergerak.

Contoh 14:

Sebuah titik melewati satu kali lingkaran dengan radius 1 unit dalam 3 detik. Berapa kecepatan rata-rata dan kelajuan rata-rata.

Jawab:

Jarak yang ditempuh titik sama dengan keliling lingkaran yaitu 2π. Perpindahan bersihnya adalah $\mathbf{0}$, karena perpindahannya berakhir di mana titik itu mulai bergerak. Jadi, kelajuan rata-rata = jarak / waktu = 2π/3 dan kecepatan rata-ratanya = perpindahan /

waktu = $\mathbf{0}$.

Jika Anda perhatikan dengan cermat, kita menggunakan huruf tebal **0** karena kecepatan adalah vektor.

Simbol yang biasa kita gunakan untuk jarak tempuh adalah s. Untuk titik yang bergerak di sepanjang kurva, jarak yang ditempuh adalah panjang kurva. Karena ini kita juga merujuk s sebagai panjang busur.

Ringkasan notasi dan nomenklatur:

Karena kita akan menggunakan berbagai macam notasi, kita akan mengumpulkannya di sini. Vektor tangen satuan akan dijelaskan di bawah ini. Seperti yang Anda harapkan, kita juga dapat melihat semuanya dari perspektif geometris.

$\mathbf{r}(t)$ = posisi.

Di bidang: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \langle x, y \rangle$

Di ruang: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\boldsymbol{k} = \langle x, y, z \rangle$.

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = \text{kecepatan} = \text{vektor tangen}.$

Di bidang: $\mathbf{v} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \langle x', y' \rangle$

Di ruang: $\mathbf{v} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} = \langle x', y', z' \rangle$

$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = v\text{ektor tangen satuan}$

$s =$ panjang busur

kelajuan $= \dfrac{ds}{dt} = |\mathbf{v}|$

Di bidang: $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

Di ruang: $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$

$\mathbf{v} = \dfrac{ds}{dt}\mathbf{T}$; $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{v}}{ds/dt}$

$\mathbf{a}(t) = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} =$ percepatan

Di bidang: $\mathbf{a}(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} = \langle x'', y''\rangle$

Di ruang: $\mathbf{a}(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k} = \langle x'', y'', z''\rangle$

Vektor Tangen Satuan

Sesuai dengan namanya, vektor tangen satuan adalah vektor satuan dalam arah yang sama dengan vektor tangen. Kita biasanya menotasikannya dengan **T**. Kita menghitungnya dengan membagi vektor tangen dengan panjangnya. Berikut ini beberapa cara untuk menuliskannya.

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{v}}{ds/dt}$$

Mengalikan **T** dengan ds/dt memberikan rumus:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

yang menyatakan kecepatan sebagai magnitute/besaran, ds/dt dan arah **T**.

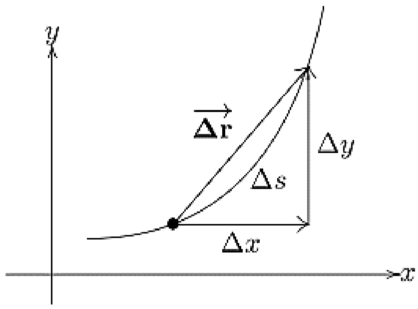
Pertimbangan Geometris

Di sini kita akan menawarkan pembenaran matematis untuk pernyataan kita bahwa:

$$\text{kelajuan} = \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}|$$

Kita akan bekerja dalam dua dimensi. Perluasan ke 3D mirip/serupa.

Gambar di bawah ini menunjukkan kurva, dan perpindahan kecil $\Delta\mathbf{r}$. Panjang sepanjang kurva dari awal sampai akhir dari perpindahan tersebut adalah Δs.



Gambar 3. 10. Vektor Perubahan s

Perhatikan pada gambar di atas:

$$\Delta s \approx \left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Untuk limit dengan $\Delta t \to 0$ diperoleh:

$$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Contoh 15:

Sebuah roket mengikuti lintasan sebagai berikut:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = 10t\mathbf{i} + (-5t^2 + 10t)\mathbf{j}$$

Tentukan kelajuan roket dan panjang busur yang dilaluinya dari $t = 0$ sampai $t = 1$.

Jawab:

$$\text{kelajuan} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 10\mathbf{i} + (-10t + 10)\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{10^2 + (-10t + 10)^2} = 10\sqrt{1 + (1 - t)^2}$$

$$\text{Panjang busur } L = \int_0^1 \frac{ds}{dt}dt = 10\int_0^1 \sqrt{1 + (1 - t)^2}\,dt$$

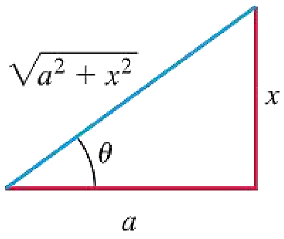
Misalkan $u = 1 - t$

$\Rightarrow du = -dt,\ \ t = 0 \Rightarrow u = 1,\ \ t = 1 \Rightarrow u = 0$

$$\Rightarrow L = 10\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$$

Perhatikan karena panjang busur bernilai positif, kita bisa abaikan tanda $(-)$.

Bentuk $\sqrt{1+u^2}$ mengingatkan kita pada kalkulus dasar dengan segitiga khusus yaitu:



$x = a\tan\theta$

Mak kita bisa lakukan substitusi $u = \tan\theta$ di mana $a = 1$ sehingga:

$$du = \sec^2\theta \ d\theta$$

$$\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+(\sec^2\theta - 1)} = \sec\theta$$

$$u = 0 \Rightarrow 0 = \tan\theta \Rightarrow \theta = 0;\ \ u = 1 \Rightarrow 1 = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow L = 10\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du = 10\int_0^{\pi/4} \sec\theta\sec^2\theta \ d\theta = 10\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta \ d\theta$$

Kita ingat kembali:

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow L = 10\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta \ d\theta = 10\int_0^{\pi/4} \sec\theta\sec^2\theta \ d\theta$$

Dimana:

$u = \sec\theta \Rightarrow du = \sec\theta\tan\theta \ d\theta$

$$dv = \sec^2\theta\, d\theta \Rightarrow v = \int \sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta$$

$$\Rightarrow L = 10\left[[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan\theta\sec\theta\tan\theta\ d\theta\right]$$

$$\Rightarrow L = 10\left[[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta\right]$$

$$\Rightarrow L = 10\left[[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta\right]$$

$$\Rightarrow L = 10\left[[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\sec^3\theta - \sec\theta)\, d\theta\right]$$

$$\Rightarrow L = 10\left[[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta\right]$$

$$\Rightarrow L = 10\sec\theta\tan\theta - 10\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\, d\theta + 10\int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta$$

Karena $10\int \sec^3\theta\, d\theta = L$, maka:

$$\Rightarrow L = 10[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} - L + 10\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow 2L = 10[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} + 10\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow L = 5[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} + 5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow L = 5[\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta)]_0^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow L = 5\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$$

Cara lain untuk menentukan L yaitu:

$$\Rightarrow L = 10\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta \, d\theta$$

Menggunakan rumus reduksi:

$$\int \sec^{n} x\, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$$

$$\Rightarrow L = 10\left(\left[\frac{\sec^{3-2}\theta\tan\theta}{3-1}\right]_0^{\pi/4} + \frac{3-2}{3-1}\int_0^{\pi/4} \sec^{3-2}\theta\, d\theta\right)$$

$$\Rightarrow L = 10\left(\left[\frac{\sec\theta\tan\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta\right)$$

$$\Rightarrow L = 5[\sec\theta\tan\theta]_0^{\pi/4} + 5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow L = 5[\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta)]_0^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow L = 5\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

Hukum Kepler

Dengan mempelajari data astronom Denmark Tycho Brahe tentang pergerakan planet, Kepler merumuskan tiga hukum empiris; dua di antaranya dapat dinyatakan sebagai berikut:

Hukum Kedua Sebuah planet bergerak dalam sebuah bidang, dan vektor radius (dari matahari ke planet) menyapu area yang sama dalam waktu yang sama.

Hukum Pertama Orbit planet pada bidang itu berbentuk elips, dengan matahari sebagai salah satu fokusnya.

Dari hukum-hukum ini, Newton menyimpulkan bahwa gaya yang menjaga planet-planet dalam orbitnya memiliki magnitudo $1/d^2$, dimana d adalah jarak planet ke matahari; terlebih lagi, planet itu diarahkan ke matahari, atau seperti yang dikatakan, *pusat*, ketika matahari ditempatkan di asalnya.

Menggunakan sedikit analisis vektor (tanpa koordinat), bagian ini ditujukan untuk menunjukkannya Hukum Kedua ekuivalen dengan gaya yang menjadi pusat.

Sulit untuk menunjukkan bahwa orbit elips menyiratkan besarnya gaya dalam bentuk K/d^2, dan sebaliknya; oleh karenanya digunakan analisis vektor dalam koordinat kutub untuk penyelesaian persamaan diferensial non-linier.

1. Diferensiasi/Turunan Produk Vektor

Misalkan $\mathbf{r}(t)$ dan $\mathbf{s}(t)$ merupakan dua fungsi vektor yang dapat dibedakan dalam 2 atau 3 dimensi, maka:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt};\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\mathbf{s} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{1}$$

Aturan-aturan ini seperti aturan hasil kali untuk diferensiasi. Berhati-hatilah pada aturan kedua untuk mendapatkan urutan perkalian yang benar di sebelah kanan, karena secara umum $\mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Kedua aturan tersebut dapat dibuktikan dengan menuliskan semuanya dalam komponen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dan menurunkannya. Mereka juga dapat dibuktikan langsung dari definisi turunan, tanpa menggunakan komponen, sebagai berikut:

Misalkan t meningkat oleh Δt kemudian $\mathbf{r}$ meningkat oleh $\Delta\mathbf{r}$, dan s oleh $\Delta\mathbf{s}$, dan perubahan yang sesuai dalam $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ diberikan oleh:

$$\Delta(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = (\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\cdot(\mathbf{s}+\Delta\mathbf{s}) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$$

jadi jika kita memperluas sisi kanan dan membagi semua suku dengan Δt, kita mendapatkan:

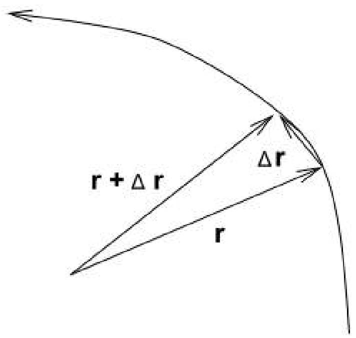
$$\frac{\Delta(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{r}\cdot\frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\cdot\Delta\mathbf{s}$$

Jika $\Delta t \to 0$; maka $\Delta\mathbf{s} \to 0$ karena $\mathbf{s}(t)$ kontinu, dan kita mendapatkan persamaan pertama seperti pada (1). Persamaan kedua dalam (1) dibuktikan dengan cara yang sama, dengan menggantikan $\cdot$ oleh $\times$.

2. Hukum Kedua Kepler dan Gaya Pusat.

Untuk menunjukkan bahwa gaya yang menjadi pusat (yaitu, diarahkan ke matahari) ekuivalen dengan hukum kedua Kepler, kita perlu menerjemahkan hukum itu ke dalam kalkulus. "Menyapu area yang sama dalam waktu yang sama" berarti:

vektor radius menyapu area dengan kecepatan konstan.



Gambar 3. 11. Ilustrasi Hukum Kepler Kedua

Oleh karena itu, hal pertama yang perlu dilakukan adalah mendapatkan ekspresi matematika untuk kecepatan ini. Mengacu pada gambar, kita melihat bahwa seiring bertambahnya waktu t ke $t + \Delta t$, perubahan yang sesuai di area A diberikan oleh:

$$\Delta A \approx \text{area segitiga} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}|$$

karena segitiga memiliki setengah luas jajaran genjang yang dibentuk oleh $\mathbf{r}$ dan $\Delta\mathbf{r}$, maka:

$$2\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \left|\mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right|$$

dan untuk $\Delta t \to 0$, kita peroleh:

$$2\frac{dA}{dt} \approx \left|\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \;\; \text{dimana } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2}$$

Dengan menggunakan (2), kita dapat menafsirkan hukum kedua Kepler secara matematis. Karena luasnya menyapu pada kecepatan yang konstan, dA/dt konstan, jadi menurut (2) diperoleh:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \text{ adalah konstan} \tag{3}$$

Lebih lanjut, karena hukum Kepler mengatakan $\mathbf{r}$ terletak pada sebuah bidang, vektor kecepatan $\mathbf{v}$ juga terletak di bidang yang sama, dan karenanya diperoleh:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} \text{ memiliki arah konstan (tegak lurus pada bidang pergerakan)} \quad (4)$$

Karena arah dan besarnya $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ keduanya konstan, maka:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{K} \text{ adalah sebuah vektor konstan} \quad (5)$$

Dan dari sini kita peroleh:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\,) = \mathbf{0} \quad (6)$$

Tetapi menurut aturan (1) untuk menurunkan perkalian vektor:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\,) &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}, \quad \text{dimana } a = \frac{dv}{dt} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{a}, \quad\quad \text{karena } \mathbf{s} \times \mathbf{s} = \mathbf{0} \text{ untuk sebarang vektor } \mathbf{s} \end{aligned} \quad (7)$$

Dari (6) dan (7) bersama-sama menyiratkan:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (8)$$

yang menunjukkan bahwa vektor percepatan $\mathbf{a}$ sejajar dengan $\mathbf{r}$, tetapi ke arah yang berlawanan, karena planet-planet memang mengelilingi matahari, tidak melesat sampai ke titik tak terhingga.

Jadi $\mathbf{a}$ diarahkan ke pusat (yaitu, matahari), dan karena $\mathbf{F} = \mathrm{m}\mathbf{a}$, gaya $\mathbf{F}$ juga diarahkan ke matahari. (Perhatikan bahwa "pusat" tidak berarti pusat orbit elips, tetapi asal matematisnya, yaitu ekor vektor jari-jari r, yang kita anggap sebagai posisi matahari.)

Penalarannya dapat dibalik, jadi untuk gerakan di bawah semua jenis gaya pusat, jalur/lintasan gerakan akan terletak pada bidang dan luas akan tersapu oleh vektor jari-jari dengan kecepatan konstan.

Contoh 16:

Misalkan $\mathbf{r}(t)$ adalah sebuah fungsi vektor. Buktikan dengan menggunakan komponen bahwa:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{K}, \quad\quad \text{dimana } \mathbf{K} \text{ adalah vektor konstan}$$

Jawab:

Dalam dua dimensi $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$, $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$

Oleh karena itu,

$\mathbf{r}'(t) = 0 \qquad \Rightarrow x'(t) = 0$ dan $y'(t) = 0$

$\Rightarrow x(t) = k_1$ dan $y(t) = k_2$

$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \langle k_1, k_2\rangle$ di mana k_1 dan k_2 adalah konstan.

Latihan 3

1. Tentukan persamaan parametrik untuk x, y, z pada garis yang melalui (1,1,2) searah dan sejajar dengan $\langle 2, -3, -1\rangle$.
2. Tentukan persamaan parametrik yang memotong bidang $x + y + z = 1$ dan $x + 2y + 3z = 2$.
3. Tentukan perpotongan garis melalui titik (1,3,0) dan (1,2,4) dengan bidang yang melalui titik $(0,0,0), (1,1,0)$ dan $(0,1,1)$.
4. Sebuah cakram dengan radius 2 cm meluncur dengan kecepatan $12\sqrt{2}$ cm/detik searah $\langle 1, 1\rangle$. Saat meluncur, ia berputar berlawanan arah jarum jam dengan 3 putaran per detik. Ukuran waktu dalam hitungan detik, pada waktu $t = 0$ pusat cakram berada di titik pusat (0,0). Tentukan persamaan parametrik untuk lintasan titik P di tepi cakram, yang awalnya di titik $(2, 0)$.
5. Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor satuan yang tidak saling sejajar di mana $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Dan misalkan $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t$.
   a) Tunjukkan bahwa kurva $\mathbf{r}(t)$ menyapu lingkaran satuan dengan pusat O pada bidang $\mathcal{P}$ yang terdefinisi oleh $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ (yaitu bidang yang melalui titik pusat dan mengandung $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$).
   b) Gunakan hasil pada bagian a) untuk menentukan persamaan parametrik dari C = lingkaran dengan jari-jari 1 dan berpusat di O di mana C terletak pada bidang $\mathcal{P}: x + 2y + z = 0$.

Jawaban 3

1. Diketahui titik (1,1,2) dan vektor $\langle 2, -3, -1\rangle$, maka:

$$x - 1 = 2t$$
$$y - 1 = -3t$$

$$z - 2 = -t$$

atau

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 1 + 2t, 1 - 3t, 2 - t\rangle$$

Sehingga:

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 1 - 3t$$

$$z = 2 - t$$

2. Untuk menentukan persamaan parametrik yang memotong kedua bidang, kita memerlukan data dasar tambahan yaitu sebuah titik yang memenuhi kedua bidang.

   Misalkan ambil $z = 0$ maka diperoleh:

   $$P_0 = (0,1,0)$$

   Selanjutnya, kita memerlukan vektor **v** yang tegak lurus dengan vektor normal kedua bidang, di mana:

   $$\mathbf{N}_1 = \langle 1,1,1\rangle \text{ dan } \mathbf{N}_2 = \langle 1,2,3\rangle$$

   Sehingga:

   $$\mathbf{v} = \langle 1,1,1\rangle \times \langle 1,2,3\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \langle 1, -2, 1\rangle$$

   Dengan cara yang sama seperti pada nomor 1, diperoleh:

   $$x = t$$

   $$y = 1 - 2t$$

   $$z = t$$

3. Misalkan $P_0 = (1,3,0)$ → bolehkan kita tentukan $P_0 = (1,2,4)$?

   Maka $\mathbf{v} = \langle 0, -1, 4\rangle$ → $\mathbf{v} = \langle 0, 1 - , 4\rangle$

   Persamaan parametriknya: $x = 1, y = -t + 3, z = 4t$ → $x = 1, y = t + 2, z = 4 - 4t$

   Vektor normal = $\langle 1,1,0\rangle \times \langle 0,1,1\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle 1, -1, 1\rangle$

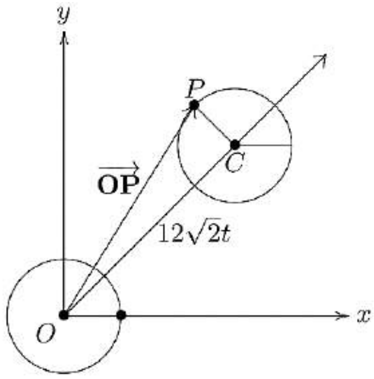
   Vektor normal = persamaan bidang = $x - y + z = 0$

   $$1 - (-t + 3) + 4t = 0 \to 1 + t - 3 + 4t = 0 \to t = \frac{2}{5}$$

   $$1 - (t + 2) + 4 - 4t = 0 \to 1 - t - 2 + 4 - 4t = 0 \to t = \frac{3}{5}$$

$$(x, y, z) = \left(1, \frac{13}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

4. Kita gunakan parameter t dalam detik pada kurva. Caranya adalah dengan membagi dua pergerakan ke dalam translasi dari titik pusat dan rotasi terhadap titik pusat dan menggunakan vektor untuk menganalisisnya, seperti pada gambar berikut.



Gambar di atas menunjukkan pada waktu t O bergeser ke C sehingga:

$$\overrightarrow{OC} = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = 12\sqrt{2}t\frac{\langle 1,1\rangle}{\sqrt{1^2+1^2}} = 12\sqrt{2}t\frac{\langle 1,1\rangle}{\sqrt{2}} = \langle 12t, 12t\rangle$$

Kita tahu bahwa titik P di tepi cakram dalam polar adalah $P = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, di mana radius cakram adalah $r = 2$ dan 3 putaran perdetik sama dengan $6\pi t$.

Maka:

$$\overrightarrow{CP} = \langle 2\cos(6\pi t), 2\sin(6\pi t)\rangle$$

Sehingga:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \langle 12t + 2\cos(6\pi t), 12t + 2\sin(6\pi t)\rangle$$

Jadi persamaan parametrik untuk lintasan titik P di tepi cakram, yang awalnya di titik $(2, 0)$ adalah:

$$x = 12t + 2\cos(6\pi t)$$
$$y = 12t + 2\sin(6\pi t)$$

5. (a) $\mathbf{r}(t)$ jelas ada pada bidang yang didefinisikan dengan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di mana:

$|\mathbf{r}(t)|^2 = (\mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t)\cdot(\mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t)$

$|\boldsymbol{r}(t)|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\, cos^2\, t + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\, sin\, t\, cos\, t + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\, sin\, t\, cos\, t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, sin^2\, t$

Karena $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1$ dan $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ maka:

$|\boldsymbol{r}(t)|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Sehingga:

Kurva $\mathbf{r}(t)$ menyapu lingkaran satuan dengan pusat O pada bidang $\mathcal{P}$.

(b) Untuk menentukan persamaan parametrik, kita membutuhkan dua vektor satuan **u** dan **v** yang saling tegak lurus dan terletak pada $x + 2y + z = 0$.

Vektor normal pada bidang adalah $\mathbf{n} = \langle 1,2,1\rangle$. Misalkan $\mathbf{u}_1 = \langle p,q,r\rangle$ dan terletak pada bidang memenuhi $p + 2q + r = 0$. Salah satu vektor yang memenuhi bidang adalah $\mathbf{u}_1 = \langle 1,-1,1\rangle$, sehingga:

$$\mathbf{u} = \frac{\langle 1,-1,1\rangle}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,-1,1\rangle$$

Untuk mendapatkan vektor satuan **v**, kita ambil cross product $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}$, sehingga:

$$\mathbf{v}_1 = \langle 1,-1,1\rangle \times \langle 1,2,1\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = 3\langle -1,0,1\rangle$$

Maka:

$$\mathbf{v} = \frac{\langle -1,0,1\rangle}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1,0,1\rangle$$

Sehingga persamaan parametriknya adalah:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,-1,1\rangle \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1,0,1\rangle \sin t$$

Atau:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$$

Rangkuman 3

1. Persamaan parametrik kurva:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

2. Persamaan vektor posisi adalah:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$$

3. Persamaan parametrik lingkaran:

$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = a\sin t$$

4. Persamaan parametrik elips:

$$x(t) = a\cos t\,, \qquad y(t) = b\sin t$$

5. Persamaan parametrik garis melalui (x_0, y_0) sejajar dengan $\langle b_1, b_2\rangle$:

$$x(t) = x_0 + tb_1, \qquad y(t) = y_0 + tb_2$$

6. Persamaan parametrik sikloid:

$$x(\theta) = a\theta - a\sin\theta\,, \qquad y(\theta) = a - a\cos\theta$$

7. Cusp pada sikloid:

$$P = (x(\theta), y(\theta))$$

8. Jika kita ambil derivatif/turunan dari $x(\theta) = (\theta - \sin\theta)$ dan $y(\theta) = (1 - \cos\theta)$ terhadap θ kita peroleh:

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta \text{ dan } \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$$

Dari sini kita peroleh kemiringan/gradien/slope dari kurva, yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

9. Kecepatan rata-rata:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j}$$

10. Vektor tangensial atau garis singgung adalah ketika Δt yang menyusut menjadi 0 dan vektor $\frac{\Delta \mathrm{r}}{\Delta t}$ menjadi bersinggungan dengan kurva.

11. Percepatan:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = x(\mathrm{t})\mathbf{i} + \mathrm{y}(t)\mathbf{j} = \langle x", y"\rangle$$

12. Turunan vektor dengan cot product:

Misal $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ dan $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2\rangle$ maka diperoleh:

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{dt} = \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2'$$

13. Turunan vektor dengan cross product:

Misalkan $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$ dan $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2, z_2\rangle$ maka:

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)}{dt} = \boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2'$$

14. **Kelajuan** adalah besaran skalar yaitu:

$$\text{kelajuan} = |\mathbf{v}| = \left|\frac{dx}{dt}\right|$$

15. Vektor tangen satuan:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{v}}{ds/dt}$$

16. Hukum kedua Kepler menyatakan bahwa:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \text{ adalah konstan}$$

Tes Formatif 3

1. Persamaan vektor posisi dari garis yang melalui titik $P(1,3,-2)$ dan $Q(2,-1,2)$ adalah …
   A. $\mathbf{r}(t) = \langle t, -4t, 5t\rangle$
   B. $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 3-4t, -2+4t\rangle$
   C. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2-2t, t+1, t-2\rangle$
   D. $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 2+5t, -1+6t\rangle$
   E. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2-t, 2t\rangle$
2. Turunan dari $\mathbf{r}(t) = (1+t^3)\mathbf{i} + te^{-r}\mathbf{j} + \sin 2t\,\mathbf{k}$ adalah …
   A. $\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, -rte^{-r}, \cos 2t\rangle$
   B. $\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, -rte^{-r}, 2\cos 2t\rangle$
   C. $\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, 1-rte^{-r}, \cos 2t\rangle$
   D. $\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, (1-t)e^{-r}, 2\cos 2t\rangle$
   E. $\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, (1-t)rte^{-r}, \cos 2t\rangle$
3. Vektor normal satuan dari $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$ adalah …
   A. $\langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$
   B. $\langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$
   C. $\langle -\sin t, \cos t, 0\rangle$
   D. $1/\sqrt{2}\langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$
   E. $\langle -\cos t, -\sin t, 1\rangle$
4. Percepatan suatu partikel dengan vektor posisi $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t\rangle$ adalah …
   A. $\mathbf{a}(t) = \langle 2t, e^t, (1+t)e^t\rangle$
   B. $\mathbf{a}(t) = \langle 2, e^t, (1+t)e^t\rangle$
   C. $\mathbf{a}(t) = \langle 2, e^t, (2+t)e^t\rangle$
   D. $\mathbf{a}(t) = \langle 2t, e^t, t^2e^t\rangle$
   E. $\mathbf{a}(t) = \langle 2t, e^t, (2+t)t^2e^t\rangle$

5. Vektor tangen suatu partikel dengan vektor posisi $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$ adalah …

   A. $\dfrac{6\sqrt{2}t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$

   B. $\dfrac{6t^2 - 6t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$

   C. $\dfrac{8t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$

   D. $\dfrac{8t^2 - 6t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$

   E. $\dfrac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$

Jawaban Tes Formatif 3

1. B

   Kita memerlukan vektor yang sejajar dengan garis melalui P_0. Kita buat vektor $\overrightarrow{PQ}$ yang sejajar garis yaitu:

   $$\mathbf{v} = \langle 2 - 1, -1 - 3, 2 + 2 \rangle = \langle 1, -4, 4 \rangle$$

   Ambil P_0 adalah $(1,3,-2)$ maka:

   $$x - 1 = t$$
   $$y - 3 = -4t$$
   $$z + 2 = 4t$$

   Maka persamaan parametrik dari garis yang melalui titik $P(1,3,-2)$ dan $Q(2,-1,2)$ adalah:

   $$x = 1 + t$$
   $$y = 3 - 4t$$
   $$z = -2 + 4t$$

   Sehingga persamaan vektor posisi dari garis yang melalui titik $P(1,3,-2)$ dan $Q(2,-1,2)$ adalah:

   $$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 4t \rangle$$

2. D

   $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-r}\mathbf{j} + \sin 2t\,\mathbf{k}$

   $\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, (1 - t)e^{-r}, 2\cos 2t \rangle$

3. A

$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$

$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$

$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$

$\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$

$\mathbf{T}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle$

$|\mathbf{T}'(t)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle$

4. C

$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$

$\mathbf{v}(t) = \langle 2t, e^t, (1+t)e^t \rangle$

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2+t)e^t \rangle$

5. E

$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$

$\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, 2t, 3t^2 \rangle$

$\mathbf{r}''(t) = \langle 2{,}2{,}6t \rangle$

$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$

$a_T = \dfrac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \dfrac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 3.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 4. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 4

FUNGSI DUA PEUBAH, TURUNAN PARSIAL DAN PERSAMAAN BIDANG

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep fungsi dua variabel, turunan parsial, aproksimasi tangen dan optimasi.

Materi 4

Fungsi Dua Variabel

Fungsi dua variabel adalah fungsi yang memuat sebanyak dua variabel. Untuk memahami fungsi dua variabel atau lebih, perhatikan contoh berikut:

Contoh 1:

$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(1,2) = 5$ dll.

$f(x,y) = xy^2e^{x+y}$

$f(x,y,z) = xy \log z$

Hukum gas ideal: $P = kT/V$.

Variabel dependen dan independen

Pada $z = f(x,y)$ kita sebut x, y sebagai variabel independen dan z adalah variabel dependen. Hal ini menunjukkan bahwa x dan y bebas untuk mengambil sebarang nilai dan kemudian z bergantung pada nilai-nilai ini. Untuk saat ini situasinya jelas yang mana independen dan yang mana dependen, namun nanti kita harus lebih hati-hati [6].

Grafik

Untuk fungsi $y = f(x)$: terdapat satu variabel bebas dan satu variabel terikat, artinya kita membutuhkan 2 dimensi untuk menggambarnya.

Teknik Menggambar 1:

Mulai dari x lalu hitung $y = f(x)$ kemudian ke y.

Untuk $z = f(x, y)$ kita memiliki dua variabel independen dan satu variabel dependen, jadi kita membutuhkan 3 dimensi untuk membuat grafiknya.

Teknik Menggambar 2:

Mulai dari x dan y secara bersamaan lalu hitung $z = f(x, y)$ kemudian ke z.

Contoh 2:

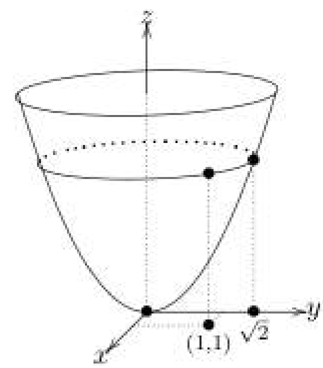
Buatlah grafik dari $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Jawab:

Untuk membuat grafiknya secara manual:

Mulai dari (x, y) lalu hitung $z = f(x, y)$ kemudian ke z.

Kita ambil tiga titik: $f(0{,}0) = 0,\ f(1{,}1) = 2$ dan $f\left(0, \sqrt{2}\right) = 2$.



Gambar di atas menunjukkan sekedar grafik dari tiga titik.

Berikut ini adalah langkah-langkah yang kita gunakan untuk menggambar grafik. Ingat, ini hanya sketsa, namun setidaknya sketsa memberikan bentuk grafik dan beberapa fiturnya.

1. Pertama kita gambar sumbu x, y, z. Sumbu z mengarah ke atas, Sumbu y ke kanan dan sumbu x mengarah ke pembaca, dan gambarnya seperti

pada gambar di atas. Situasi ini memberikan perspektif mata pembaca pada oktan pertama.

2. Penelusuran pada sumbu y dan z ditemukan kurva dengan mengatur x = konstanta. Kita mulai dengan penelusuran ketika $x = 0$ dan diperoleh parabola mengarah ke atas pada bidang yz.
3. Selanjutnya kita membuat sketsa penelusuran dengan $z = 3$ dan diperoleh lingkaran dengan radius 3 pada ketinggian $z = 3$. Perhatikan, penelusuran ketika z = konstanta umumnya disebut level kurva

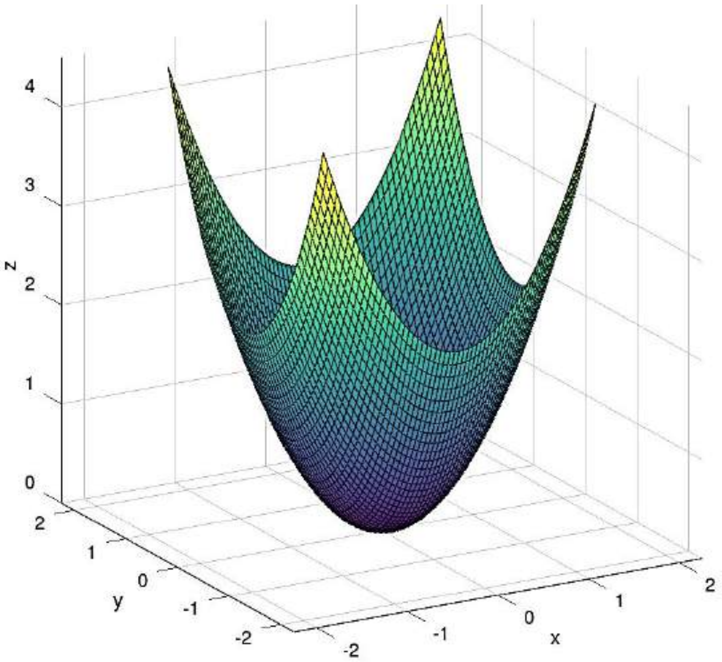
Sampai di sini, cukup untuk menggambar grafik yang diinginkan. Grafik yang berbeda mengambil jejak/penelusuran yang berbeda pula. Anda harus melakukan sejumlah trial and error sebelum angka yang Anda peroleh terlihat benar.

Cara lain untuk membuat grafiknya adalah menggunakan Octave:

Sintaks:

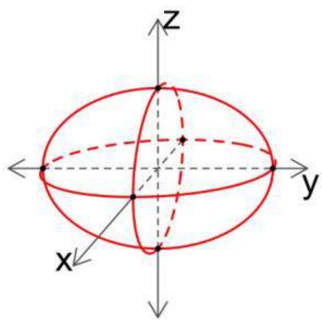
```
>> [x,y] = meshgrid(-1.5:0.05:1.5);
>> z = x.^2 + y.^2;
>> surf(x,y,z)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```

Hasil Gambarnya adalah:

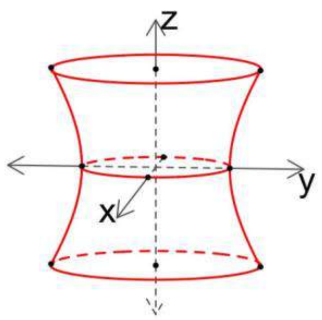


Gambar 4. 1. Paraboloid $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$

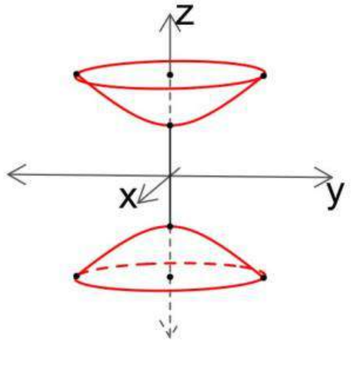
Berikut ini adalah macam-macam permukaan atau galeri grafik.

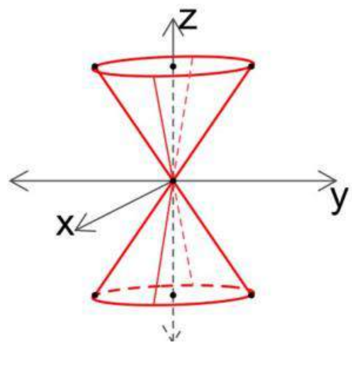


Elipsoida: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

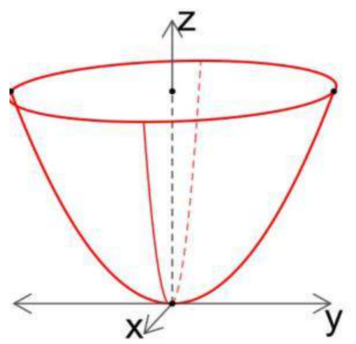


Hiperboloid satu lembar: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

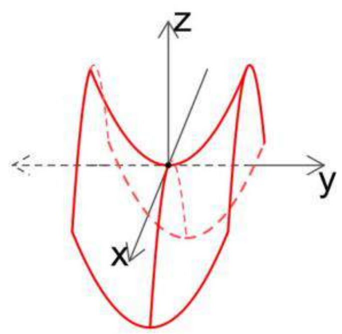




Hiperboloid dua lembar: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Kerucut eliptik: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$



Eliptic paraboloid: $z = ax^2 + by^2$



Hiperbolik paraboloid: $z = by^2 - ax^2$

Level Kurva dan Kontur

Level kurva dan kontur adalah cara lain untuk memvisualisasikan fungsi dua variabel. Jika Anda telah melihat peta topografi maka Anda telah melihat plot kontur.

Definisi:

Level kurva dari f dua variabel adalah kurva dengan persamaan $f(x, y) = k$ di mana k adalah konstanta.

Contoh 3:

Gambarkan kontur dari paraboloid $z = x^2 + y^2$.

Jawab:

Untuk mengilustrasikan hal ini pertama-tama kita menggambar grafik $z = x^2 + y^2$. Pada grafik ini kita menggambar kontur, yang merupakan kurva pada ketinggian tetap z = konstan. Untuk mempermudah, kita gunakan Octave untuk menggambarnya.

Gambar 4. 2. Contour dan Level Kurva Paraboloid $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$

Sintaks contour pada Octave:

>> [x,y] = meshgrid(-1.5:0.05:1.5);

>> z = x.^2 + y.^2;

```
>> contour(x,y,z)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```

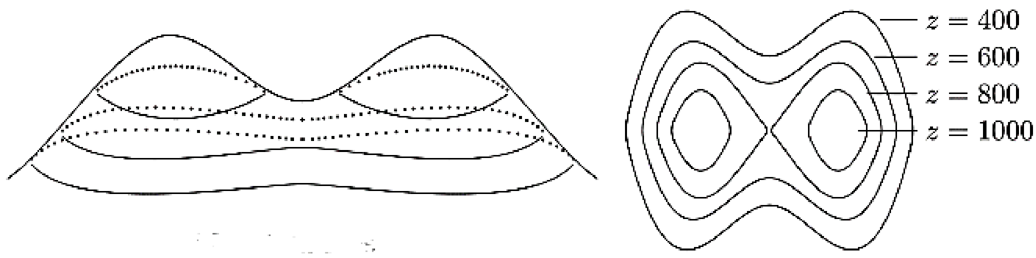
Sintaks paraboloid, contour dan bidang z pada Octave:

```
>> [x,y] = meshgrid(-1.5:0.05:1.5);
>> z = x.^2 + y.^2;
>> surfc(x,y,z);
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> hold on
>> z=1-0.*x-0.*y;
>> mesh(x,y,z)
>> z=2-0.*x-0.*y;
>> mesh(x,y,z)
>> z=3-0.*x-0.*y;
>> mesh(x,y,z)
>> z=4-0.*x-0.*y;
>> mesh(x,y,z)
```

Gambar 4.2 menunjukkan level kurva di ketinggian $z = 1$ adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$. Pada grafik kita harus menggambar ini pada ketinggian yang benar. Cara lain untuk menunjukkan ini adalah dengan menggambar kurva pada bidang xy dan beri label dengan nilai z. Kita menyebut kurva ini sebagai level kurva dan secara keseluruhan disebut kontur.

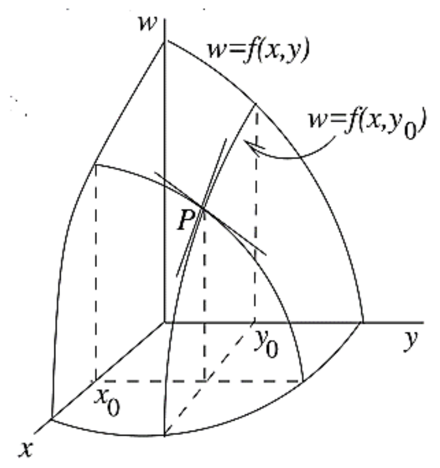
Pada contoh ini, kontur terlihat pada plot di sebelah kanan pada Gambar 4.2. Perhatikan bahwa grafik 3D hanyalah kurva level yang 'ditarik' oleh masing-masing ke ketinggian yang sesuai.

Berikut ini adalah plot lain dari 'jalur gunung'. Perhatikan bahwa dalam kontur jalur gunung direpresentasikan oleh level kurva yang memotong dirinya sendiri. Bergerak ke atas atau ke bawah ketika ketinggian level kurva menurun dan bergerak ke kanan atau ke kiri saat ketinggian level kurva meningkat.



Turunan Parsial

Misalkan $w = f(x, y)$ adalah sebuah fungsi dua variabel. Gambar grafiknya merupakan sebuah permukaan pada ruang xyz seperti gambar berikut.



Gambar 4. 3. Permukaan di Tiga Dimensi

Ketika $y = y_0$ tetap dan x sebarang, kita akan mendapatkan fungsi satu variabel, yaitu:

$$w = f(x, y_0) \text{ adalah } \textbf{fungsi parsial} \text{ untuk } y = y_0 \qquad (1)$$

Gambar grafiknya adalah kurva pada bidang $y = y_0$ di mana kemiringannya ada di titik P ketika $x = x_0$ dengan melakukan turunan,

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x_0} \text{ atau } \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \tag{2}$$

Bentuk (2) kita sebut sebagai turunan parsial dari f terhadap x di titik (x_0, y_0), sementara bentuk (2) bagian kanan merupakan notasi standar turunan parsial. Turunan parsial adalah turunan biasa dari fungsi parsial, diperoleh dengan menentapkan satu variabel tetap dan menurunkannya terhadap variabel lain. Notasi lain untuk turunan parsial adalah:

$$f_x(x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$$

Bentuk yang pertama cocok untuk turunan pada titik spesifik; yang kedua adalah bentuk umum turunana dalam sains dan teknik, di mana Anda hanya berurusan dengan hubungan antar variabel dan tidak menyebutkan fungsinya secara eksplisit; yang ketiga dan keempat menunjukkan turunan pada titik hanya dengan menggunakan satu subskrip.

Secara analogi, menetapkan $x = x_0$ dan y sebarang, kita mendapatkan fungsi parsial $w = f(x_0, y)$, yang grafiknya terletak pada bidang vertikal $x = x_0$, di mana kemiringannya di P adalah turunan parsial dari f terhadap y yang dinotasikan:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \qquad f_y(x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$$

Turunan parsial $\partial f/\partial x$ dan $\partial f/\partial x$ bergantung pada (x_0, y_0) dan karena itu merupakan fungsi dari x dan y.

Ditulis sebagai $\partial w/\partial x$, turunan parsial memberikan tingkat perubahan w terhadap x pada titik (x_0, y_0). Hal ini memberitahu kita seberapa cepat w meningkat ketika x meningkat, dan ketika y dianggap konstan.

Notasi Turunan Parsial

Jika $z = f(x, y)$ maka:

$$f_x = f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y = f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Untuk fungsi dari tiga variabel atau lebih, $w = f(x,y,z,\dots)$, kita tidak dapat menggambar grafiknya, tetapi gagasan di balik diferensiasi parsial tetap sama: untuk mendefinisikan turunan parsial terhadap x, misalnya, anggap semua variabel lain konstan dan ambil turunan biasa terhadap x; notasinya adalah sama saja seperti di atas:

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0, z_0, \dots) = f_x(x_0, y_0, z_0, \dots), \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$$

Contoh 4:

Misalkan $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + x^2 + y^2 + xy + 2y + 3$.

(a) Tentukan $\partial f/\partial x$ dan $\partial f/\partial y$.

(b) Tunjukkan bahwa turunan parsial kedua dapat dihitung dengan sebarang urutan, yaitu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(c) Hitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)$$

Jawab:

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} + 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + 2y + x + 2$$

(b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2ye^{x^2+y^2} + 2y + x + 2\right) = 4xye^{x^2+y^2} + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xye^{x^2+y^2} + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \blacksquare$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(1)e^{(1)^2+(3)^2} + 2(1) + 3 = 2e^{10} + 5$$

Aproksimasi Tangen

Bidang Tangen

Untuk fungsi satu variabel, $w = f(x)$, garis tangen ke grafik fungsi pada titik (x_0, w_0) adalah garis yang melewati (x_0, w_0) dan memiliki kemiringan:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_0$$

Untuk fungsi dua variabel, $w = f(x, y)$, analog secara alami adalah bidang tangen ke grafik fungsi pada titik (x_0, y_0, w_0). Apa persamaan dari bidang tangen ini?

Mengacu pada Gambar 4.3 di atas, kita melihat bahwa bidang tangen:

(i) harus melewati (x_0, y_0, w_0), dimana $w_0 = f(x_0, y_0)$;

(ii) harus mengandung garis tangen ke grafik dari dua fungsi parsial - ini akan berlaku jika bidang memiliki kemiringan yang sama di **i** dan **j** searah dengan permukaan.

Dengan menggunakan dua kondisi ini, persamaan bidang tangen dapat dengan mudah ditemukan. Persamaan umum bidang melalui (x_0, y_0, w_0) adalah:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(w - w_0) = 0$$

Asumsikan bidang tidak vertikal; kemudian $C \neq 0$, jadi kita bisa membaginya dengan C dan menyelesaikan $w - w_0$, dan kita dapatkan:

$$w - w_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0), \qquad a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C} \tag{3}$$

Bidang yang melewati (x_0, y_0, w_o). Berapakah nilai koefisien a dan b sehingga tangen ada pada grafik fungsi?

$a =$ kemiringan pada bidang (3)pada arah $\mathbf{i}$ $\big($dengan $y = y_0$ pada (3)$\big)$;

$a =$ kemiringan pada grafik pada arah $\mathbf{i}$ (dengan(ii));

$a = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$ (berdasarkan definisi turunan parsial)

Koefisien b diperoleh dengan cara yang serupa:

$b = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$

Sehingga persamaan bidang tangen pada $w = f(x, y)$ di titik (x_0, y_0) adalah:

$$w - w_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{4}$$

Rumus Aproksimasi

Penggunaan yang paling penting dari bidang tangen adalah untuk memberikan aproksimasi yang merupakan rumus dasar dalam mempelajari fungsi beberapa variabel - hampir semuanya mengikuti dalam satu cara atau bentuk lain darinya.

Ide intuitifnya adalah jika kita tetap dekat dengan (x_0, y_0, w_0), grafik bidang tangen (4) akan menjadi aproksimasi yang baik untuk grafik fungsi $w = f(x, y)$. Oleh karena itu jika titik (x, y) dekat dengan (x_0, y_0) maka:

$$f(x, y) \approx w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{5}$$

tinggi grafik $f \approx$ tinggi bidang tangen

Fungsi pada bagian kanan (5) di mana grafiknya adalah bidang tangen seringkali disebut **linierisasi** dari $f(x, y)$ di (x_0, y_0). Fungsi linier ini memberikan aproksimasi terbaik pada $f(x, y)$ untuk nilai (x, y) dekat dengan (x_0, y_0).

Bentuk lain yang ekuivalen dengan (5) diperoleh dengan menggunakan notasi Δ, yaitu:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta w = w - w_0$$

Sehingga (5) menjadi:

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y \qquad \text{jika } \Delta x \approx 0, \Delta y \approx 0 \tag{6}$$

Rumus ini memberikan aproksimasi perubahan dalam w ketika kita melakukan perubahan pada x dan y. Nanti kita akan sering menggunakannya.

Analogi serupa dapat kita lakukan pada fungsi $w = f(x, y, z)$ yaitu:

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \Delta z \qquad \text{jika } \Delta x, \Delta y, \Delta z \approx 0 \tag{7}$$

Contoh 5:

Berikan aproksimasi persegi dari $w = x^3y^4$ yang berpusat di $(1, 1)$, di mana nilainya tidak akan berbeda lebih dari $\pm$ 0,01.

Jawab:

Kita menggunakan (6) dan menghitung dua turunan parsial dari w.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x = 3x^2y^4 \text{ dan } w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 4x^3y^3$$

Kemudian uji turunan parsial pada titik (1,1) menggunakan (6) diperoleh:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3(1)^2(1)^4 = 3 \text{ dan } \frac{\partial w}{\partial y} = 4$$

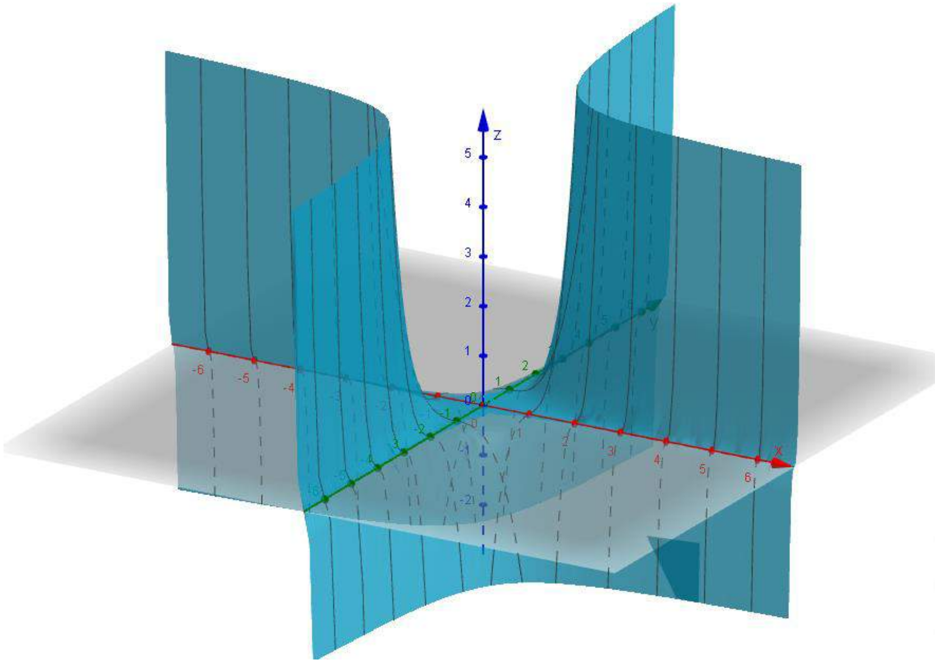
$$\Delta w \approx 3\Delta x + 4\Delta y$$

Jika $|\Delta x| \leq 0{,}01$ dan $|\Delta y| \leq 0{,}01$ maka kita peroleh:

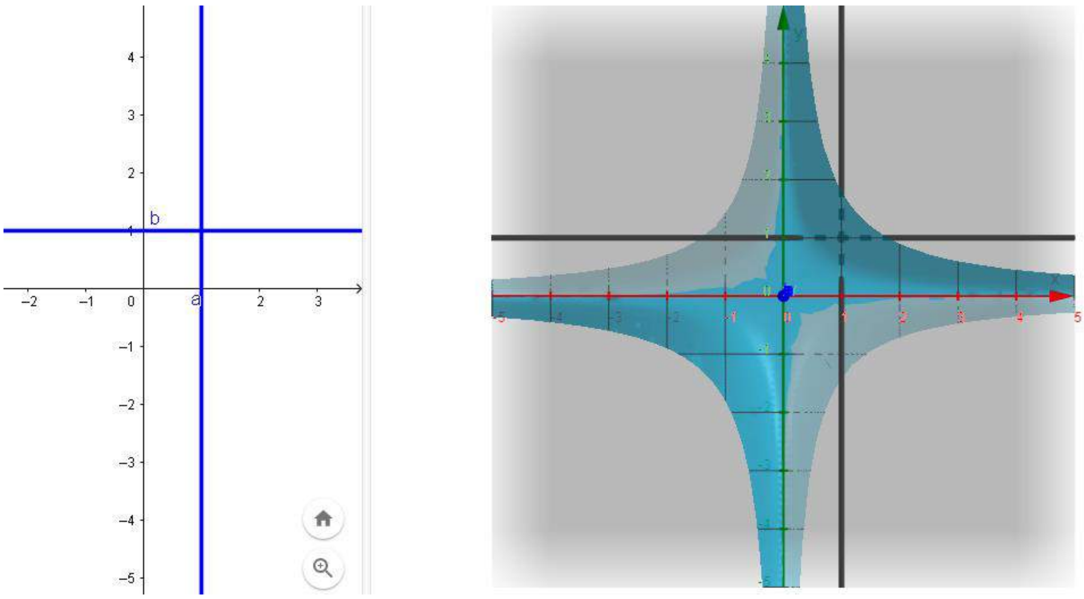
$$|\Delta w| \leq 3|\Delta x| + 4|\Delta y| \leq 0{,}07$$

Sehingga jawabannya adalah persegi dengan pusat di (1,1) diberikan oleh:

$$|x - 1| \leq 0{,}01, \quad \text{dan} \quad |y - 1| \leq 0{,}01$$



Gambar 4. 4. Permukaan $\boldsymbol{w = x^3 y^4}$



Gambar 4. 5. Bayangan Permukaan $\boldsymbol{w = x^3 y^4}$ *di Bidang* $\boldsymbol{xy}$

Contoh 6:

Sisi-sisi a, b, c dari sebuah kotak persegi panjang memiliki panjang masing-masing 1, 2, dan 3. Yang mana dari pengukuran ini menghasilkan volume V yang paling sensitif?

Jawab:

$V = abc$, dan oleh karena itu dengan rumus aproksimasi (7), diperoleh:

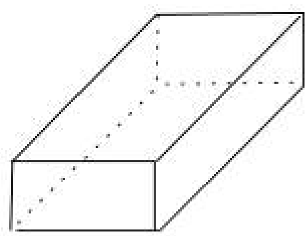
$$\Delta V \approx \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 \Delta a + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0 \Delta b + \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_0 \Delta \mathrm{c}$$

$$\Delta V \approx bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c$$

$$\Delta V \approx 6\Delta a + 3\Delta b + 2\Delta c \quad \mathrm{di}(1,2,3)$$

Jadi yang paling sensitif terhadap perubahan kecil di sisi a, karena Δa terjadi dengan koefisien terbesar. (Artinya, jika satu per satu pengukuran setiap sisi diubah dengan katakanlah 0,01, maka perubahan pada a yang akan menghasilkan perubahan terbesar V, yaitu 0,06.)

Hasilnya mungkin tampak paradoks ketika nilai V paling sensitif terhadap panjang terpendek tetapi sebenarnya intuitif, seperti yang Anda lihat dengan memikirkan tentang tampilan kotak.



Gambar 4. 6. Kotak

Prinsip Sensitivitas

Nilai numerik $w = f(x, y, \dots)$, dihitung di beberapa titik $(x_0, y_0, \dots)$, akan paling sensitif terhadap perubahan kecil dalam variabel yang turunan parsial terkait $w_x, w_y, \dots$ memiliki nilai absolut terbesar pada titik tersebut.

Kritik terhadap Rumus Aproksimasi

Pertama, rumus aproksimasi dari fungsi dua atau tiga variabel adalah:

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y \qquad \text{jika } \Delta x \approx 0, \Delta y \approx 0 \tag{6}$$

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \Delta z \qquad \text{jika } \Delta x, \Delta y, \Delta z \approx 0 \tag{7}$$

Kedua pernyataan di atas (6) dan (7) bukan pernyataan matematis yang tepat karena simbol $\approx$ tidak memberikan nilai secara pasti seberapa dekat kuantitas pada kedua ruas. Untuk memperbaikinya, salah satunya caranya adalah dengan menentukan kesalahan dalam aproksimasi. (Ini bisa dilakukan, tapi jarang digunakan.)

Keberatan yang lebih mendasar adalah bahwa pembahasan kita tentang aproksimasi didasarkan pada asumsi bahwa bidang tangen adalah pendekatan yang baik ke permukaan di (x_0, y_0, w_0).

Benarkah demikian?

Lihat seperti ini. Bidang tangen ditentukan sebagai bidang yang memiliki kemiringan yang sama dengan permukaan pada arah $\mathbf{i}$ dan $\mathbf{j}$. Ini berarti aproksimasi pada (6) akan baik jika Anda menjauh dari (x_0, y_0) dalam arah **I** (dengan mengambil $\Delta y = 0$), atau di arah **j** (menempatkan $\Delta x = 0$). Tetapi apakah bidang tangen memiliki kemiringan yang sama dengan permukaan ke semua arah lainnya juga?

Secara intuitif, kita harus berharap bahwa ini akan terjadi jika grafik f (x, y) adalah permukaan "mulus" di (x_0, y_0) yang tidak ada ujung yang tajam, lipatan, atau terlihat aneh. Inilah hipotesis matematika yang menjamin hal ini.

Hipotesis Kemulusan

Kita nyatakan $f(x, y)$ adalah mulus di (x_0, y_0) jika:

f_x dan f_y kontinu dalam beberapa persegi panjang yang berpusat di (x_0, y_0) (8)

Jika (8) berlaku, rumus aproksimasi (6) akan valid.

Meskipun contoh patologis dapat dibangun, secara umum cara normal suatu fungsi gagal menjadi mulus (dan pada gilirannya (6) gagal dipertahankan) adalah salah satu atau kedua turunan parsial gagal untuk ada di (x_0, y_0). Ini tentu saja berarti Anda bahkan tidak dapat menulis rumusnya (6), kecuali Anda mengantuk.

Ini contoh sederhananya.

Contoh 7.

Dimana permukaan $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ yang mulus/halus? Diskusikan.

Jawab:

Dengan menghitung secara formal, kita dapatkan:

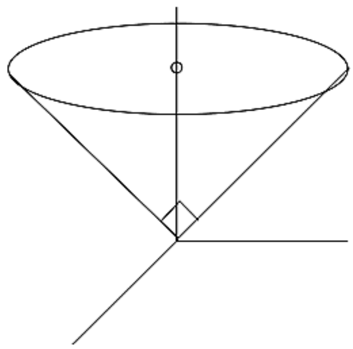
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Turunan ini kontinu di semua titik kecuali di (0,0), di mana hasilnya bentuk tak tentu. Jadi fungsinya mulus kecuali di pusatnya; rumus aproksimasi (6) harusnya valid di semua tempat kecuali di pusatnya.

Memang, karena $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ hasil peyelidikan grafik fungsi ini, mengatakan bahwa:

Tinggi grafik di atas (x, y) = jarak (x, y) dari sumbu w,

grafiknya adalah kerucut lingkaran siku-siku, dengan puncak pada $(0, 0)$, sumbunya sepanjang sumbu w, dan sudut simpulnya sudut siku-siku. Secara geometris grafik memiliki titik tajam di titik awal, jadi tidak boleh ada bidang singgung di sana, dan tidak ada rumus aproksimasi yang valid (6) dan tidak ada fungsi linier yang mendekati kerucut di puncaknya.



Gambar 4. 7. Kerucut Siku-Siku

Argumen non-geometris untuk rumus aproksimasi

Pendekatan non-geometris untuk rumus aproksimasi (6) akan menggeneralisasi ke dimensi yang lebih tinggi, khususnya ke rumus 3-variabel (7). Aproksimasi ini juga akan menunjukkan mengapa hipotesis (8) dibutuhkan "kemulusan". Argumennya masih kurang tepat, karena menggunakan simbol ≈, tetapi dapat diperjelas menjadi bukti (yang akan Anda temukan dalam buku referensi, meskipun tidak mudah dibaca).

Bukti menggunakan rumus aproksimasi satu variabel untuk turunan fungsi $w = f(u)$:

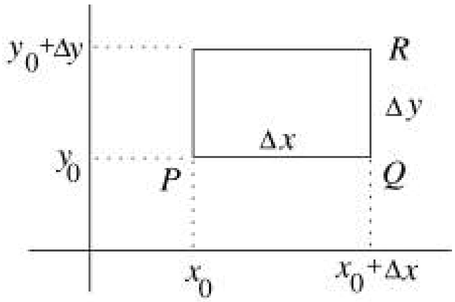
$$\Delta w \approx f'(u_0)\Delta u, \quad \text{jika } \Delta u \approx 0 \tag{9}$$

Kita lakukan justifikasi tanpa menggunakan penalaran berdasarkan dimensi 3, rumus aproksimasinya adalah:

$$\Delta w \approx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \Delta y \qquad \text{jika } \Delta x \approx 0, \Delta y \approx 0 \tag{6}$$

Kita mencoba menghitung perubahan w dari P ke R seperti tampak pada Gambar 4.8 dimana:

$$P = (x_0, y_0), \qquad R = (x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$$



*Gambar 4. 8. Perubahan **w** dari **P** ke **R***

Perubahan ini dapat dianggap terjadi dalam dua langkah:

$$\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 \tag{10}$$

yang pertama adalah perubahan w saat kita pindah dari P ke Q, yang kedua berubah ketika kita pindah dari Q ke R. Menggunakan rumus aproksimasi satu variabel (9):

$$\Delta w_1 \approx \frac{d}{dx} f(x, y_0)\bigg|_{x_0} \Delta x = f_x(x_0, y_0)\Delta x \tag{11}$$

demikian pula,

$$\Delta w_2 \approx \frac{d}{dx} f(x_0 + \Delta x, y)\bigg|_{y_0} \Delta \mathrm{y} = f_x(x_0 + \Delta x, y_0)\Delta y \approx f_y(x_0, y_0)\Delta y \tag{12}$$

jika kita berasumsi bahwa f_y kontinu (yaitu, f mulus), karena perbedaan antara dua suku di kanan pada dua baris terakhir akan sama $\epsilon\Delta y$, yang dapat diabaikan dibandingkan dengan salah satu istilah itu sendiri. Substitusi dua nilai aproksimasi (11) dan (12) menjadi (10) memberi kita rumus aproksimasi (6).

Untuk membuat ini menjadi bukti, istilah kesalahan dalam aproksimasi harus dianalisis, atau lebih sederhana, salah satunya mengganti simbol ≈ dengan persamaan berdasarkan Teorema Nilai Rata-Rata dari kalkulus satu variabel.

Argumen ini mudah digeneralisasikan ke rumus pendekatan dimensi yang lebih tinggi, seperti (7); sekali lagi hipotesis penting adalah kemulusan: tiga turunan parsial w_x, w_y, w_z harus kontinu di sekitar titik (x_0, y_0, z_0).

Titik Kritis

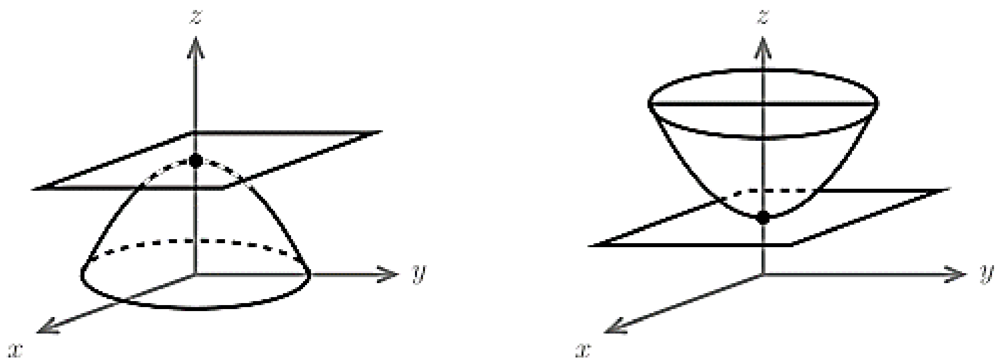
Sebuah pertanyaan standar dalam kalkulus, dengan aplikasi untuk banyak bidang, adalah untuk menemukan titik di mana suatu fungsi mencapai maksimum dan minimum relatifnya.

Seperti halnya dalam kalkulus variabel tunggal, kita akan mencari nilai maksimum dan minimum (secara kolektif disebut ***extrema***) di titik (x_0, y_0) di mana turunan pertamanya adalah 0. Oleh karena itu, kita mendefinisikan titik kritis sebagai titik sebarang (x_0, y_0) dimana:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Seringkali kita akan menyingkatnya menjadi $f_x = 0$ dan $f_y = 0$.

Tugas pertama kita adalah memverifikasi bahwa relatif maksimum dan minimum terjadi pada titik kritis. Gambar di bawah mengilustrasikan bahwa mereka terjadi di tempat-tempat di mana bidang tangen horizontal.



Karena bidang horizontal berbentuk z = konstan maka persamaan bidang tangen di (x_0, y_0, z_0) adalah:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Kita lihat bidang tangen horizontal ketika:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \ \ dan \ \ f_y(x_0, y_0) = 0$$

Dengan demikian, ekstrema terjadi pada titik kritis. Namun, seperti halnya dalam kalkulus variabel tunggal, tidak semua titik kritis bersifat ekstrema.

Contoh 8:

Temukan titik kritis dari $z = x^2 + y^2 + 5$.

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ \text{ dan } \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Jelas satu-satunya titik di mana kedua turunannya 0 adalah titik $(0, 0)$. Jadi, ada satu titik kritis di (0, 0). Gambar di atas menunjukkan dengan jelas titik di mana z mencapai nilai minimum. (Lihat gambar di kanan atas.)

Contoh 9:

Temukan titik kritis dari $z = 1 - x^2 - y^2$.

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \text{ dan } \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Jelas satu-satunya titik di mana kedua turunan tersebut berada 0 adalah $(0, 0)$. Jadi, ada satu titik kritis di $(0, 0)$. Gambar di atas menunjukkan dengan jelas titik di mana z mencapai nilai maksimum. (Lihat gambar di kiri atas.)

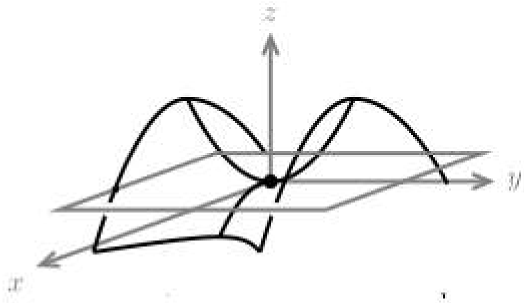
Contoh 10:

Temukan titik kritis dari $z = -x^2 + y^2$.

Jawab:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Jelas satu-satunya titik di mana kedua turunan tersebut berada 0 adalah $(0,0)$. Jadi, ada satu titik kritis di $(0,0)$. Gambar berikut menunjukkan bahwa titik itu bukan minimum atau maksimum.



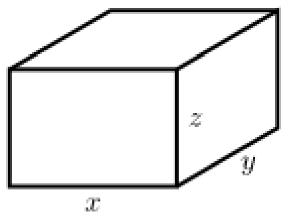
Contoh 11:

Membuat kotak dengan bahan yang minimum.

Kotak terbuat dari karton dengan tebal sisi dua kali lipat, tebal bagian bawah tiga kali lipat, tebal depan dan belakang tunggal dan tanpa bagian atas. Volume = 3.

Dimensi apa yang menggunakan karton paling sedikit?

Jawab:



Misalkan kotak yang akan dibuat memiliki dimensi x, y, z seperti pada gambar.

Luas satu sisi = yz. Ada dua sisi tebal ganda ⇒ karton yang digunakan = $4yz$.

Luas bagian depan dan belakang = xz. Sisi tebal tunggal ⇒ karton yang digunakan = $2xz$.

Luas bagian bawah = xy. Tebal tiga kali lipat ⇒ karton yang digunakan = $3xy$.

Jadi, total kardus yang digunakan adalah:

$$w = 4yz + 2xz + 3xy$$

Volume $= 3 = xyz \Rightarrow z = \dfrac{3}{xy}$

Substitusi z ke dalam w diperoleh:

$$w = \frac{12}{x} + \frac{6}{y} + 3xy$$

Selanjutnya kita tentukan titik kritis dari w.

$$w_x = -\frac{12}{x^2} + 3y = 0, \quad w_y = -\frac{6}{y^2} + 3x = 0$$

Persamaan pertama menyiratkan:

$$y = \frac{4}{x^2}$$

Substitusi ke dalam persamaan kedua memberikan:

$$-\frac{6}{16}x^4 + 3x = 0$$

Diperoleh, $x = 0$ atau $x = 2$.

Kita tolak 0 karena membuat y menjadi tak tentu. Gunakan $x = 2$ kita peroleh $y = 1$. Dengan demikian, terdapat satu titik kritis di $(2,1)$ dan pada titik ini kita peroleh $z = 3/2$.

Titik ini memberikan kotak dengan karton minimum yang digunakan karena secara fisik kita tahu pasti ada minimum di suatu tempat. Nanti kita akan belajar mengeceknya dengan tes turunan kedua.

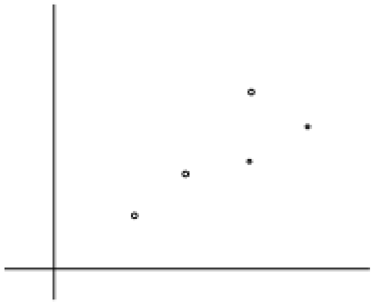
Kuadrat Terkecil

Garis Kuadrat Terkecil

Misalkan kita memiliki jumlah n yang besar dari titik-titik yang ditentukan secara eksperimental, di mana kita ingin melewati sebuah kurva. Ada rumus (rumus interpolasi Lagrange) yang menghasilkan kurva polinomial derajat $n-1$ yang melewati titik-titik dengan tepat. Tetapi biasanya orang ingin menemukan kurva sederhana, seperti garis, parabola, atau eksponensial, yang kira-kira melewati titik-titik, bukan polinomial tingkat tinggi yang persis melewatinya. Alasannya adalah bahwa lokasi titik sampai batas tertentu ditentukan oleh kesalahan eksperimental, jadi salah satu keinginannya adalah melihat kurva yang tampak mulus dimana rata-ratanya muncul dari kesalahan ini, bukan polinomial bergelombang yang dianggap serius.

Pada bagian ini, kita mempertimbangkan kasus yang paling umum - menemukan garis yang

kira-kira melewati sekumpulan titik data.



Misalkan titik datanya adalah:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n y_n)$$

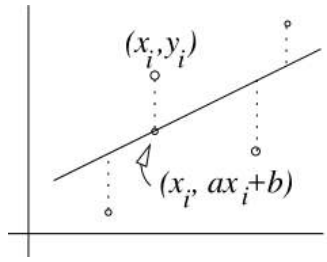
dan kita ingin menentukan garisnya:

$$y = ax + b \tag{1}$$

yang "terbaik" melewati titik-titik tersebut. Dengan asumsi kesalahan kita dalam pengukuran didistribusikan secara acak sesuai dengan kurva berbentuk lonceng normal (yang disebut "distribusi Gaussian"), dapat ditunjukkan bahwa pilihan yang tepat dari a dan b dimana jumlah kuadrat penyimpangan dari D adalah:

$$D = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \tag{2}$$

adalah minimum. Dalam rumus (2), kuantitas dalam tanda kurung (diperlihatkan dengan garis putus-putus pada gambar) adalah penyimpangan antara nilai y_i dan $ax_i + b$ yang diamati yang akan diprediksi menggunakan garis (1).



Penyimpangan dikuadratkan untuk alasan teoretis yang terkait dengan distribusi kesalahan Gaussian yang diasumsikan; Namun perlu dicatat bahwa pengaruhnya adalah untuk memastikan bahwa kita hanya menjumlahkan jumlah positif; ini penting, karena kita tidak

ingin penyimpangan dari tanda yang berlawanan saling meniadakan. Ini juga membebani lebih banyak penyimpangan yang lebih besar, menjaga peneliti tetap jujur, karena mereka cenderung mengabaikan penyimpangan besar ("Saya sakit kepala hari itu").

Resep untuk menemukan garis (1) ini disebut metode kuadrat terkecil, dan garis yang dihasilkan (1) disebut garis kuadrat terkecil atau garis regresi.

Untuk menghitung nilai a dan b yang membuat D minimal, kita melihat di mana dua turunan parsialnya adalah nol:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ini memberi kita sepasang persamaan linier untuk menentukan a dan b, seperti yang kita lihat dengan mengumpulkan persyaratan dan membatalkan (2) diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum x_i y_i &= \left(\sum x_i^2\right)^2 a + \left(\sum x_i\right) b \\ \sum y_i &= \left(\sum x_i\right) a + nb \end{aligned} \tag{4}$$

(Perhatikan bahwa ini menghemat banyak pekerjaan dengan menurunkan (2) menggunakan aturan rantai, daripada terlebih dahulu memperluas kuadrat).

Persamaan (4) biasanya dibagi dengan n untuk mendapatkan bentuk yang lebih ekspresif, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum x_i y_i &= \bar{s}a + \bar{x}b \\ \bar{y} &= \bar{x}a + b \end{aligned} \tag{5}$$

Dimana $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ adalah rata-rata dari x_i dan y_i dan $\bar{s}$ adalah rata-rata kuadrat.

Dari titik ini gunakan aljabar linier untuk menentukan a dan b. Ini adalah latihan yang bagus untuk dilihat bahwa persamaan selalu dapat dipecahkan kecuali semua x_i sama (dalam hal ini garis terbaik adalah vertikal dan tidak dapat ditulis dalam bentuk (1)).

Dalam praktiknya, garis kuadrat terkecil ditemukan dengan menekan tombol kalkulator, atau memberikan perintah MatLab. Contoh penghitungan garis kuadrat-terkecil ada pada latihan yang menyertai perkuliahan. Lakukan dari awal, mulai dari (2), karena tujuannya di sini adalah untuk berlatih dengan masalah max-min dalam beberapa variabel; jangan hubungkan ke persamaan (5). Ingatlah untuk membedakan (2) menggunakan aturan rantai; jangan memperluas kuadrat, yang menyebabkan aljabar berantakan dan kemungkinan besar kesalahan.

Menyesuaikan kurva dengan kuadrat terkecil

Jika titik-titik percobaan tampaknya mengikuti kurva daripada garis, mungkin lebih masuk akal untuk mencoba menyesuaikan polinomial derajat kedua ke dalam bentuk:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{6}$$

Jika hanya ada tiga titik, kita dapat melakukan ini dengan tepat (dengan rumus interpolasi Lagrange). Untuk lebih banyak titik, bagaimanapun, kita sekali lagi mencari nilai a_0, a_1, a_2 di mana jumlah dari kuadrat deviasinya adalah minimal, yaitu:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) \right)^2 \tag{7}$$

Sekarang ada tiga kuantitas yang tidak diketahui, a_0, a_1, a_2. Menghitung (ingat untuk menggunakan aturan rantai!) tiga turunan parsial $\partial D/\partial a_i$, i = 0, 1, 2, dan mengaturnya sama dengan nol mengarah ke sistem kuadrat dari tiga persamaan linier; yaitu a_i tiga hal yang tidak diketahui, dan koefisien bergantung pada titik data (x_i, y_i). Mereka dapat diselesaikan dengan menemukan matriks invers, eliminasi, atau menggunakan kalkulator atau MatLab.

Jika titik-titik tampaknya semakin banyak di sepanjang garis seperti $x \to \infty$, tetapi terletak di satu sisi garis untuk nilai x yang rendah, mungkin masuk akal untuk mencoba fungsi yang memiliki perilaku serupa, seperti:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{1}{x} \tag{8}$$

dan sekali lagi meminimalkan jumlah kuadrat penyimpangan, seperti dalam (7). Secara umum, metode kuadrat terkecil ini berlaku untuk ekspresi percobaan bentuk:

$$y = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_r f_r(x) \tag{9}$$

Dimana $f_i(x)$ adalah fungsi (biasanya yang sederhana seperti $1, x, x^2, \frac{1}{x}, e^{kx}$, dll. Ekspresi seperti (9) disebut kombinasi linear dari fungsi $f_i(x)$. Metode yang menghasilkan sistem persamaan linear persegi tidak homogen dengan $a_0, \ldots, a_r$ yang dapat diselesaikan dengan

menemukan matriks invers ke sistem, atau dengan eliminasi.

Metode ini juga berlaku untuk menemukan fungsi linier:

$$z = a_1 + a_2 x + a_3 y \tag{10}$$

untuk menyesuaikan dengan satu set titik data:

$$(x_1, y_1, z_1), \ldots (x_n, y_n, z_n) \tag{11}$$

dimana terdapat dua variabel independen x dan y dan variabel dependen z (ini adalah kuantitas yang diukur secara eksperimental, untuk nilai yang berbeda dari (x, y)). Kali ini setelah melakukan diferensiasi kita mendapatkan sistem persamaan linier 3×3 untuk menentukan (a_1, a_2, a_3).

Poin penting dalam semua ini adalah bahwa koefisien yang tidak diketahui a_i harus terjadi linier dalam fungsi uji coba. Coba paskan fungsi seperti ce^{kx} ke titik data dengan menggunakan kuadrat terkecil, dan Anda akan segera melihat kesulitannya. (Karena ini adalah masalah penting - memasangkan eksponensial ke titik data - salah satu Latihan menjelaskan cara menyesuaikan metode dengan jenis masalah ini.)

Contoh 12:

Gunakan metode kuadrat terkecil untuk mendapatkan garis terbaik dari titik-titik:

$$(0,0), (1,2), (2,1), (3,4)$$

Jawab:

Kita akan menyusun garis $y = ax + b$ yang merupakan model terbaik dari data. Deviasi data titik (x_i, y_i) dari model adalah:

$$y_i - (ax_i + b)$$

Jumlah kuadrat deviasi adalah:

$$D = \big(0 - (a.0 + b)\big)^2 + \big(2 - (a.1 + b)\big)^2 + \big(1 - (a.2 + b)\big)^2 + \big(4 - (a.3 + b)\big)^2$$

$$D = b^2 + (2 - a - b)^2 + (1 - 2a - b)^2 + (4 - 3a - b)^2$$

Ambil turunan dari D dan buat sama dengan 0.

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2(2 - a - b) - 4(1 - 2a - b) - 6(4 - 3a - b) = 0$$

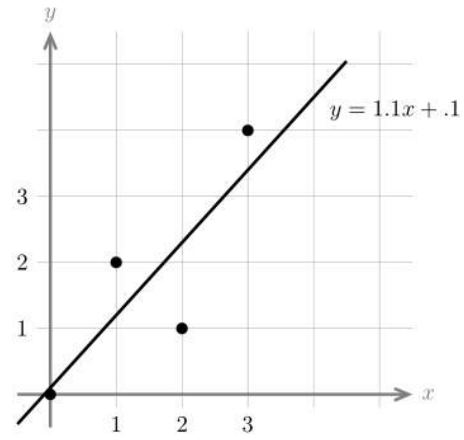
$28a + 12b = 32$ atau $14a + 6b = 16$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 2b - 2(2 - a - b) - 2(1 - 2a - b) - 2(4 - 3a - b) = 0$$

$12a + 8b = 14$ atau $6a + 4b = 7$

Sehingga diperoleh:

$$a = \frac{11}{10}, \; b = \frac{1}{10}$$



Uji Turunan Kedua

Kita mulai dengan mengingat situasi untuk dua kali turunan dari fungsi $f(x)$ satu variabel. Untuk menemukan maxima dan minima lokal (atau "relatif"), kita mulai dari:

a) temukan titik kritis, yaitu solusi dari $f'(x) = 0$;

b) menerapkan uji turunan kedua untuk setiap titik kritis x_0, diperoleh:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ adalah titik minimum lokal;}$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ adalah titik maksimum lokal.}$$

Ide di balik uji turunan kedua ini adalah: di x_0 kemiringan $f'(x) = 0$; jika $f''(x) > 0$, maka $f'(x)$ meningkat secara ketat untuk x dekat x_0, sehingga gradiennya negatif ke kiri dari x_0 dan positif ke kanan, yang menunjukkan bahwa x_0 adalah titik minimum. Alasan untuk titik maksimum serupa.

Jika $f''(x) = 0$, pengujian gagal dan harus diselidiki lebih lanjut, dengan mengambil lebih banyak turunan, atau mendapatkan lebih banyak informasi tentang grafik. Selain maksimal atau minimal seperti itu, sebuah titik juga bisa menjadi titik refleksi horizontal.

Uji analog untuk fungsi maksimal dan minimum dari dua variabel $f(x, y)$ sedikit lebih rumit, karena ada beberapa persamaan yang harus dipenuhi, beberapa turunan yang harus diperhitungkan, dan kemungkinan geometris penting lainnya untuk titik kritis, yaitu titik pelana atau sadel. Ini adalah titik minimum lokal; sekitar titik grafik $f(x, y)$ terlihat seperti bagian tengah pelana, atau wilayah di sekitar titik tertinggi lintasan gunung. Di sekitar titik sadel, grafik fungsi terletak di atas dan di bawah bidang tangen horizontal pada titik tersebut.

Uji turunan kedua untuk maxima, minima, dan saddle point memiliki dua langkah.

1. Temukan titik kritis dengan menyelesaikan persamaan simultan berikut ini:

$$f_x(x, y) = 0$$

$$f_y(x, y) = 0$$

   Karena titik kritis (x_0, y_0) adalah solusi untuk kedua persamaan, kedua turunan parsial adalah nol, sehingga bidang tangen pada grafik $f(x, y)$ horizontal.

2. Untuk menguji titik seperti itu untuk melihat apakah itu titik maksimum atau minimum lokal, kita menghitung tiga turunan kedua pada titik (kita menggunakan subskrip 0 untuk menunjukkan evaluasi di (x_0, y_0), sebagai contoh $(f)_0 = f(x_0, y_0)$), dan menotasikan nilai-nilainya dengan $A, B,$ dan C:

$$A = (f_{xx})_0, \quad B = \left(f_{xy}\right)_0 = \left(f_{yx}\right)_0, \quad C = \left(f_{yy}\right)_0 \tag{1}$$

   (kita mengasumsikan turunannya ada dan berkelanjutan).

Definisi Uji Turunan Kedua

Misalkan (x_0, y_0) adalah titik kritis dari $f(x, y)$ dan $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$, dan $C = f_{yy}(x_0, y_0)$, maka:

$AC - B^2 > 0, A > 0$, atau $C > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ adalah titik minimum;

$AC - B^2 > 0, A < 0$, atau $C < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ adalah titik maksimum;

$AC - B^2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ adalah titik pelana atau titik sadel.

Jika $AC - B^2 = 0$, pengujian gagal dan diperlukan penyelidikan lebih lanjut.

Perhatikan bahwa jika $AC - B^2 > 0$, maka $AC > 0$, maka A dan C harus memiliki tanda yang sama.

Contoh 13.

Tentukan titik kritis dari $w = 12x^2 + y^3 - 12xy$ dan tentukan tipenya.

Jawab.

Kita hitung turunan parsial dari w yaitu:

$$\begin{array}{ll} w_x = 24x - 12y & A = w_{xx} = 24 \\ w_y = 3y^2 - 12x & B = w_{xy} = -12 \\ & C = w_{yy} = 6y \end{array} \quad (2)$$

Untuk menemukan titik kritis kita selesaikan persamaan $w_x = 0$ dan $w_y = 0$ secara bersamaan, diperoleh:

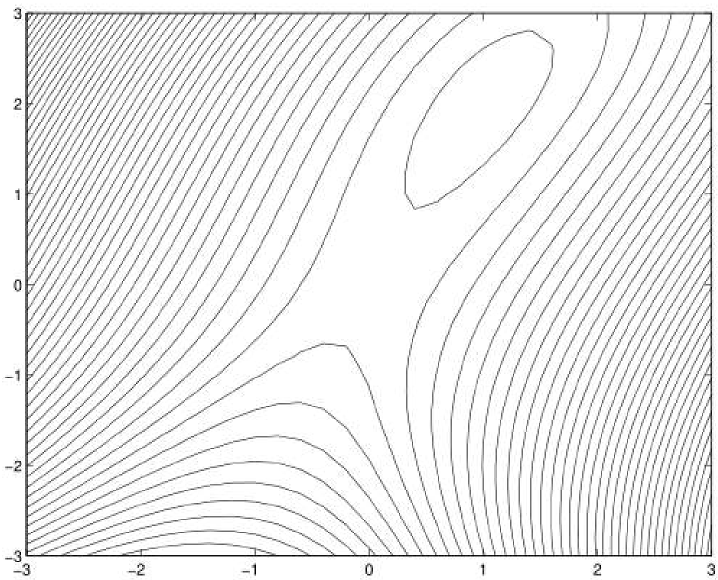
$$\begin{array}{l} w_x = 0 \\ w_y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 2x \\ y^2 = 4x \end{array} \Rightarrow 4x^2 = 4x \Rightarrow x = 0 \wedge 1 \Rightarrow \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = (1,2) \end{array}$$

Jadi ada dua titik kritis: (0, 0) dan (1, 2). Untuk menentukan jenisnya, kita menggunakan uji turunan kedua, di mana kita punya $AC - B^2 = 144y - 144$, sehingga:

di (0, 0), kita punya $AC - B^2 = -144$, dan ini adalah titik pelana;

di (1, 2), kita punya $AC - B^2 = 144$ dan $A > 0$, dan ini adalah titik minimum.

Plot level kurva seperti terlihat pada gambar berikut, yang menegaskan hal di atas.



Gambar 4. 9. Level Kurva dari $\boldsymbol{w = 12x^2 + y^3 - 12xy}$

Perhatikan bahwa perilaku level kurva dekat titik pusat dapat ditentukan dengan menggunakan aproksimasi:

$$w \approx 12x^2 - 12xy$$

ini menunjukkan level kurva di dekat (0, 0) terlihat seperti fungsi $x(x-y)$: keluarga hiperbola $x(x-y)=c$, dengan asimtot yang diberikan oleh hiperbola menurun menjadi $x(x-y)=0$, yaitu pasangan garis $x=0$ (sumbu y) dan $x-y=0$ (garis diagonal $y=x$).

Justifikasi untuk Uji Turunan Kedua

Uji turunan kedua melibatkan kuantitas $AC-B^2$. Secara umum, setiap kali kita melihat ekspresi B^2-4AC atau B^2-AC atau negatifnya, itu berarti rumus kuadrat terlibat, dalam salah satu dari dua bentuknya yaitu:

$$Ax^2+Bx+C=0 \Rightarrow x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{3}$$

$$Ax^2+2Bx+C=0 \Rightarrow x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A} \tag{4}$$

Inilah yang terjadi di sini. Kita ingin tahu apakah, mendekati titik kritis P_0, grafik fungsi $w=f(x,y)$ selalu berada di satu sisi bidang tangen horizontal (P_0 adalah titik maksimum atau minimum), atau apakah terletak sebagian di atas dan sebagian di bawah bidang tangen (P_0 kemudian menjadi titik sadel). Seperti yang akan kita lihat, ini ditentukan oleh bagaimana grafik fungsi kuadrat $f(x)$ berada terhadap sumbu x. Inilah lemma dasarnya.

Lemma. Untuk fungsi kuadrat $Ax^2+2Bx+C$, berlaku:

$$AC-B^2>0, A>\ 0 \text{ atau } C>\ 0\ \Rightarrow\ Ax^2+2Bx+C>0 \text{ untuk semua } x \tag{5}$$

$$AC-B^2>0, A<\ 0 \text{ atau } C<\ 0\ \Rightarrow\ Ax^2+2Bx+C<0 \text{ untuk semua } x \tag{6}$$

$$AC-B^2<0 \Rightarrow \begin{cases} Ax^2+2Bx+C>0 \text{ untuk semua } x \\ Ax^2+2Bx+C<0 \text{ untuk semua } x \end{cases} \tag{7}$$

Bukti Lemma.

Untuk membuktikan (5), kita perhatikan bahwa rumus kuadrat pada bentuk (4) menunjukkan angka nol pada $Ax^2+2Bx+C$ adalah imajiner, yaitu tidak memiliki angka nol yang nyata. Oleh karena itu grafiknya harus seluruhnya terletak pada satu sisi dari sumbu x; sisi mana yang dapat ditentukan dari salah satu A atau C, karena:

$$A>0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} Ax^2+2Bx+C=\infty;\ C>0 \Rightarrow Ax^2+2Bx+C \text{ ketika } x=0.$$

Jika A < 0 atau C < 0, penalarannya analog dan membuktikan (6).

Jika di sisi lain $AC - B^2 < 0$, rumus (4) menunjukkan fungsi kuadrat memiliki dua akar real, sehingga grafik parabola melintasi sumbu x dua kali, dan karenanya terletak sebagian di atas dan sebagian di bawahnya. Kondisi ini membuktikan (7).

Bukti Uji Turunan Kedua dalam Kasus Khusus.

Fungsi paling sederhana adalah fungsi linier, $w == w_0 + ax + by$, tetapi secara umum tidak memiliki titik maksimum atau minimum dan turunan keduanya semuanya nol. Fungsi yang paling sederhana untuk memiliki titik kritis adalah fungsi kuadrat, yang kita tulis dalam bentuk:

$$w = w_0 + ax + by + \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \tag{8}$$

Fungsi seperti itu secara umum memiliki titik kritis unik, yang akan kita asumsikan titik kritisnya adalah (0, 0); ini memberi fungsi bentuk khusus, yang dapat kita tentukan dengan mengevaluasi turunan parsial di (0, 0):

$$\begin{matrix} (w_x)_0 = a \\ (w_y)_0 = b \end{matrix} \quad \begin{matrix} w_{xx} = A \\ w_{xy} = B \\ w_{yy} = C \end{matrix} \tag{9}$$

(Tampilan rapi di atas menjelaskan 1/2 dan $2B$ dalam (8).) Karena (0, 0) adalah titik kritis,

(9) menunjukkan bahwa $a = 0$ dan $b = 0$, maka fungsi kuadrat akan berbentuk:

$$w - w_0 = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \tag{10}$$

Kita pindahkan w_0 ke ruas kiri karena bidang tangen di (0, 0) adalah bidang horizontal $w = w_0$, dan kita tertarik pada apakah grafik fungsi kuadrat terletak di atas atau di bawah

bidang tangen ini, yaitu apakah $w - w_0 > 0$ atau $w - w_0 < 0$ di titik selain titik pusat.

Jika $(x, y) \neq (0,0)$, maka salah satu dari $x \neq 0$ atau $y \neq 0$. Misalkan $y \neq 0$, maka. (10) dapat ditulis sebagai berikut:

$$w - w_0 = \frac{y^2}{2}\left[A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\frac{x}{y}\right) + C\right] \tag{11}$$

Kita tahu bahwa $y^2 > 0$ jika $y \neq 0$; menerapkan lemma kita sebelumnya ke faktor di sebelah kanan (11), (atau jika y = 0, tukar x dan y di (11) dan menerapkan lemma), kita dapatkan:

$AC - B^2 > 0, A > 0$ atau $C > 0 \Rightarrow w - w_0 > 0$ untuk semua $(x, y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ (0,0) adalah titik minimum.

$AC - B^2 > 0, A < 0$ atau $C < 0 \Rightarrow w - w_0 < 0$ untuk semua $(x, y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ (0,0) adalah titik maksimum.

$$AC - B^2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} w - w_0 > 0 \text{ untuk beberapa } (x, y) \\ w - w_0 < 0 \text{ untuk beberapa } (x, y) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (0,0) adalah titik sadel.

Argumen untuk Uji Turunan Kedua untuk Fungsi Umum

Bagian ini tidak kaku, hanya sugestif, tetapi akan memberikan ide yang tepat. Kita perhatikan fungsi umum $w = f(x, y)$, dan anggap memiliki titik kritis di (x_0, y_0), dan turunan kedua kontinu di sekitar titik kritis. Kemudian dengan generalisasi rumus Taylor untuk fungsi beberapa variabel, fungsi tersebut memiliki aproksimasi kuadrat terbaik pada titik kritis. Untuk menyederhanakan notasi, kita akan memindahkan titik kritis ke titik asal dengan melakukan perubahan variabel, yaitu:

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0$$

Maka aproksimasi kuadrat terbaiknya adalah:

$$w = f(x, y) \approx w_0 + \frac{1}{2}(Au^2 2Buv + Cv^2) \tag{13}$$

di sini koefisien *A, B, C* diberikan seperti dalam (1) oleh turunan parsial kedua terhadap u dan v di (0, 0), atau apa yang sama (menurut aturan rantai — lihat catatan kaki di bawah),

oleh turunan parsial kedua terhadap x dan y di (x_0, y_0).

(Secara intuitif, orang dapat melihat koefisien memiliki nilai-nilai ini dengan menurunkan kedua sisi (13) dan menganggap aproksimasi adalah persamaan. Tidak ada suku linier di u dan v di sebelah kanan karena (0,0) adalah titik kritis.)

Karena fungsi kuadrat di sebelah kanan (13) adalah aproksimasi terbaik pada $w = f(x, y)$

untuk (x, y) dekat dengan (x_0, y_0), masuk akal untuk menganggap bahwa grafik yang terbentuk pada dasarnya adalah sama dekat dengan (x_0, y_0). Sehingga jika fungsi kuadrat memiliki titik maksimum, minimum atau saddle di sana, begitu juga $f(x, y)$.

Dengan demikian, hasil yang kita peroleh untuk kasus khusus dari fungsi kuadrat memiliki titik pusat sebagai titik kritis yang dibawa ke fungsi umum $f(x, y)$ di titik kritis (x_0, y_0), jika kita menafsirkan *A, B, C* sebagai turunan parsial kedua di (x_0, y_0), maka inilah yang dikatakan oleh tes turunan kedua.

Catatan kaki:

Menggunakan $u = x - x_0$ dan $v = y - y_0$, kita bisa menerapkan aturan rantai untuk turunan parsial, yang memberitahu kita bahwa untuk semua x, y dan u, v yang sesuai, kita peroleh:

$$w_x = w_u \frac{\partial u}{\partial x} + w_v \frac{\partial v}{\partial x} = w_u, \qquad \text{karena } u_x = 1 \text{ dan } v_x = 0$$

Dan dengan cara yang serupa diperoleh, $w_y = w_v$. Oleh karena itu pada titik yang sesuai, diperoleh:

$$(w_x)_{(x_0,y_0)} = (w_u)_{(0,0)}, \qquad (w_y)_{(x_0,y_0)} = (w_v)_{(0,0)}$$

dan melakukan turunan sekali lagi dan menggunakan alasan yang sama, diperoleh:

$$(w_{xx})_{(x_0,y_0)} = (w_{u,v})_{(0,0)}, \qquad (w_{xy})_{(x_0,y_0)} = (w_{uv})_{(0,0)}, \qquad (w_{yy})_{(x_0,y_0)} = (w_{vv})_{(0,0)}$$

Latihan 4

1. Gambarkan grafik dari $z = y^2 - x^2$.
2. Buatlah gambar level kurva dari $z = xy$.
3. Misalkan $z = x^2 + y^2$.
   (a) Tentukan persamaan bidang tangen pada $z = x^2 + y^2$ di titik (2,1,5).
   (b) Tentukan aproksimasi tangen untuk z dekat dengan titik $(x_0, y_0) =$ (2,1).

4. Tentukan semua titik kritis dari:

$$f(x, y) = x^6 + y^3 + 6x - 12y + 7$$

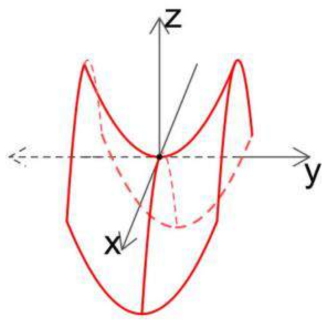
5. Tentukan dan klasifikasikan semua titik kritis dari:

$$w = (x^3 + 1)(y^3 + 1)$$

Jawaban 4

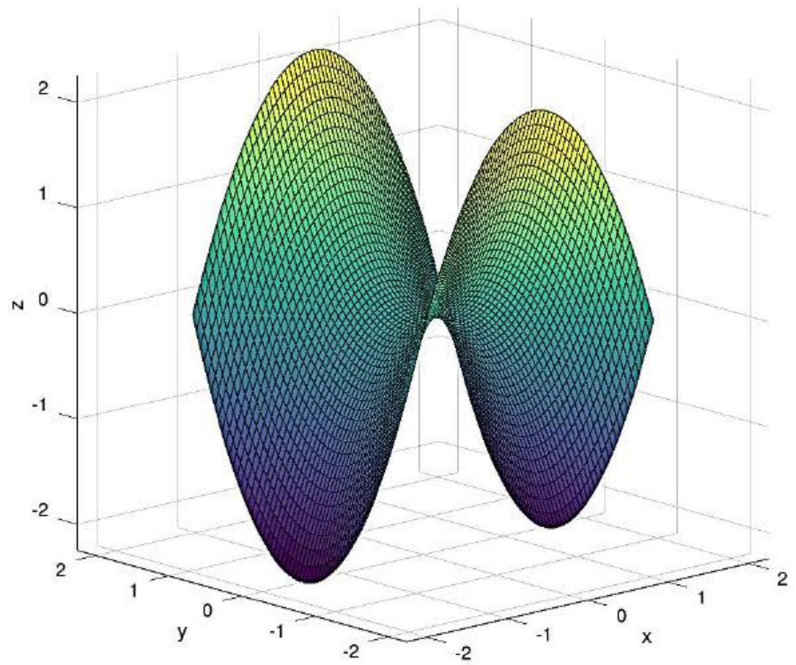
1. Langkah:
    a. Gambarkan jejak pada bidang yz di mana lintasan berupa parabola terbuka ke atas.
    b. Kemudian gambarkan jejak pada bidang xz dengan $y = 0, y = 1$ dan $y = -1$.
    c. Akhirnya gambarkan jejak pada bidang yz dengan $x = 1$ dan $x = -1$.
    d. Gambarkan garis tampilan belakang dengan garis putus-putus.

    Gambar permukaan ini disebut **sadel** atau hiperbolik paraboloid.



Gambar 4. 10. Sketsa $\boldsymbol{z = y^2 - x^2}$

Dengan menggunakan Octave diperoleh:



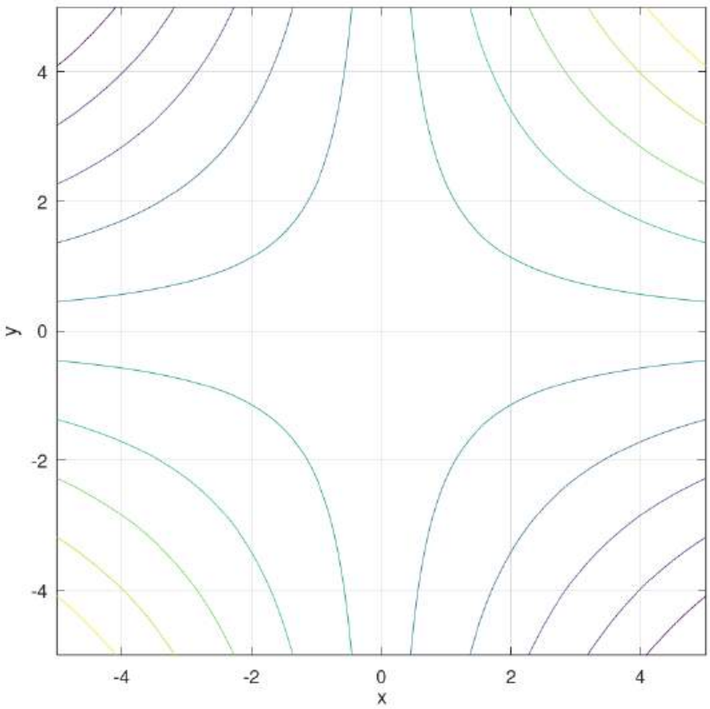
Gambar 4. 11. Permukaan Paraboloid $\boldsymbol{z = y^2 - x^2}$

Sintaks:

```
>> [x,y] = meshgrid(-1.5:0.05:1.5);
>> z = y.^2 - x.^2;
>> surf(x,y,z);
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```

2. Gunakan Octave untuk membuat level kurva pada kontur $y = xy$. Level kurva adalah hiperbola pada bidang xy = konstan. Kita berikan label setiap level kurva dengan nilai-nilai konstannya.

   Gambar level kurva menggunakan Octave:



Gambar 4. 12. Level Kurva pada Kontur $\boldsymbol{z = xy}$

Sintaks:

```
>> [x,y] = meshgrid(-5:0.05:5);
>> z=x.*y;
>> contour(x,y,z)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
```

3.

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{ dan} \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 4 \quad dan \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(2,1) = 2.$

Bidang tangen di (2,1,5) adalah:

$$(z-5) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_0 (x-2) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_0 (y-1) = 4(x-2) + 2(y-1)$$

(b) Aproksimasi tangen dalam formula yang sama dengan interpretasi untuk nilai tetap (x_0, y_0) nilai z pada grafik fungsi dekat dengan bidang tangen.

Maka, untuk $(x_0, y_0) \approx (2,1)$ diperoleh:

$$\Delta z \approx 4\Delta x + 2\Delta y$$

4. Turunan parsial pertama:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^5 + 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 12$$

Atur turunan parsial pertama sama dengan 0, maka $x = 1$ dan $y = \pm 2$. Maka titik kritisnya adalah: $(-1,2)$ dan $(-1,-2)$.

5. Ambil turunan parsial pertama dan atur turunan parsial sama dengan 0.

$$w_z = 3x^2(y^3 + 1) = 0$$

$$w_y = 3y^2(x^3 + 1) = 0$$

Dari persamaan satu berimplikasi $x = 0$ atau $y = -1$. Selanjutnya, hasil tadi kita terapkan pada persamaan kedua, diperoleh:

Jika $x = 0$ maka $w_y = 0$ dan $y = 0$. Akibatnya, titik kritisnya adalah $(0,0)$.

Jika $y = -1$ maka $w_y = 0$ dan $x = -1$. Akibatnya, titik kritisnya adalah $(-1,-1)$.

Selanjutnya ambil turunan parsial kedua, diperoleh:

$$w_{xx} = 6x(y^3 + 1)$$

$$w_{xy} = 9x^2y^2$$

$$w_{yy} = 6y(x^3 + 1)$$

Kemudian, kita uji titik kritis ke dalam turunan parsial kedua, diperoleh:

Pada $(-1,-1)$, $A = w_{xx}(-1,-1) = 0$, $B = w_{xy}(-1,-1) = 9$, $C = w_{yy}(-1,-1) = 0$.

Maka $AC - B^2 = -81 < 0$, artinya titik kritis adalah sadel atau titik pelana.

Pada $(0,0)$, $A = w_{xx}(0,0) = 0$, $B = w_{xy}(0,0) = 0$, $C = w_{yy}(0,0) = 0$.

Maka $AC - B^2 = 0$, artinya uji turunan kedua tidak memenuhi.

Rangkuman 4

1. Level kurva dari f dua variabel adalah kurva dengan persamaan $f(x, y) = k$ di mana k adalah konstanta.
2. Notasi Turunan Parsial

   Jika $z = f(x, y)$ maka:

   $$f_x = f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

   $$f_y = f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

3. Persamaan bidang tangen pada $w = f(x, y)$ di titik (x_0, y_0) adalah:

   $$w - w_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

   Atau

   $$w - w_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

4. Titik kritis adalah titik sebarang (x_0, y_0) dimana:

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

   Seringkali kita akan menyingkatnya menjadi $f_x = 0$ dan $f_y = 0$
5. Misalkan (x_0, y_0) adalah titik kritis dari $f(x, y)$ dan $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$, dan $C = f_{yy}(x_0, y_0)$, maka:

   $AC - B^2 > 0, A > 0$, atau $C > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ adalah titik minimum;

   $AC - B^2 > 0, A < 0$, atau $C < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ adalah titik maksimum;

   $AC - B^2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ adalah titik pelana atau titik sadel.

Tes Formatif 4

1. Turunan parsial kedua yang tepat dari $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ adalah …
   A. $f_{xx} = 6xy^2$
   B. $f_{yx} = 6x + 2y^3$
   C. $f_{xy} = 6xy^2 + 2y^3$
   D. $f_{xx} = 6x^2y^2 - 4$
   E. $f_{yy} = 6x^2y - 4$

2. Bidang tangen dari paraboloid eliptik $z = 2x^2 + y^2$ di titik (1,1,3) adalah …
   A. $z = 2x + 4y - 3$
   B. $z = 4x - 2y + 3$
   C. $z = 4x + 2y - 3$
   D. $z = 2x - 4y - 3$
   E. $z = 2x + 2y + 3$
3. Bentuk linier dari $f(x, y) = (x + y + 2)^2$ di titik (1,2) adalah …
   A. $L(x, y) = 10x + 10y - 5$
   B. $L(x, y) = 4x + 4y + 4$
   C. $L(x, y) = 10x + 4y - 5$
   D. $L(x, y) = 4x + 10y + 4$
   E. $L(x, y) = 4x + 4y - 5$
4. Bentuk aproksimasi volume silinder dengan $r = 2$ dan tinggi $h = 3$ adalah …
   A. $\Delta V \approx \pi r^2 h$
   B. $\Delta V \approx 4\pi\Delta r + 12\pi\Delta h$
   C. $\Delta V \approx \pi\Delta r^2\Delta h$
   D. $\Delta V \approx 12\pi\Delta r + 4\pi\Delta h$
   E. $\Delta V \approx 12\pi\Delta r^2\Delta h$
5. Titik kritis dan jenis titik dari $f(x, y) = x^6 + y^3 + 6x - 12y + 7$ yang tepat adalah …
   A. $(-1, -2)$ titik minimum
   B. $(-1, -2)$ titik pelana
   C. $(-1,2)$ titik maksimum
   D. $(-1,2)$ titik pelana
   E. $(-1, -2)$ titik maksimum

Jawaban Tes Formatif 4

1. E

   $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

   $f_x = 3x^2 + 2xy^3$

   $f_y = 3x^2y^2 - 4y$

   $f_{xx} = 6x + 2y^3$

   $f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2$

$f_{yy} = 6x^2y - 4$

2. C

Jika f memiliki turunan parsial kontinu, maka persamaan bidang tangen pada $z = f(x, y)$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0 y_0)(y - y_0)$$

$z = 2x^2 + y^2$

$z_x = 4x$

$z_y = 2y$

$z_x(1,1) = 4$

$z_y(1,1) = 2$

Maka persamaan bidang tangen di titik (1,1,3) adalah:

$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$

$z = 4x + 2y - 3$

3. A

$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

$f(x, y) = (x + y + 2)^2$ dan titik (1,2)

$f(1,2) = 25$

$f_x = 2(x + y + 2)$ maka $f_x(1,2) = 10$

$f_y = 2(x + y + 2)$ maka $f_y(1,2) = 10$

Maka:

$L(x, y) = 25 + 10(x - 1) + 10(y - 2)$

$L(x, y) = 10x + 10y - 5$

4. D

Kita tahu bahwa $V = \pi r^2 h$ dan $r = 2, h = 3$

$\frac{\partial V}{\partial r} = V_r = 2\pi rh$

$\frac{\partial V}{\partial h} = V_h = \pi r^2$

$\Delta V \approx V_r(2,3)\Delta r + V_h(2,3)\Delta h$

$\Delta V \approx 12\pi\Delta r + 4\pi\Delta h$

5. B

Ambil turunan parsial pertama dan buat sama dengan 0, diperoleh:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 6x^5 + 6 = 0$$

$$x = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 3y^2 - 12 = 0$$

$$y = \pm 2$$

Maka titik kritisnya adalah $(-1{,}2)$ dan $(-1, -2)$.

Ambil turunan parsial kedua, diperoleh:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = 30x^4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = z_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = 6y$$

Selanjutnya uji titik kritis ke dalam turunan kedua, diperoleh:

Pada $(-1, -2)$, diperoleh:

$A = z_{xx}(-1, -2) = 30$, $B = z_{xy}(-1, -2) = 0$, $C = z_{yy}(-1, -2) = -12$.

Sehingga $AC - B^2 = -360 < 0$, artinya titik kritis adalah titik pelana.

Pada $(-1{,}2)$, diperoleh:

$A = z_{xx}(-1{,}2) = 30$, $B = z_{xy}(-1{,}2) = 0$, $C = z_{yy}(-1{,}2) = 12$.

Sehingga $AC - B^2 = 360 > 0$, artinya titik kritis adalah titik minimum.

Jadi, titik kritis dan jenis titik yang tepat adalah:

$(-1, -2)$ titik pelana

$(-1{,}2)$ titik minimum

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 4 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 4.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 5. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 4, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 5

ATURAN RANTAI, TURUNAN TOTAL & BERARAH, PENGALI LAGRANGE

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep aturan rantai, gradien, turunan berarah, pengali Lagrange dan turunan dengan constrain.

Materi 5

Turunan Total

Turunan total dari fungsi $w = f(x, y, z)$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ didefinisikan dengan:

$$dw = w_x(x_0, y_0, z_0)dx + w_y(x_0, y_0, z_0)dy + w_z(x_0, y_0, z_0)dz$$

Aturan rantai adalah aturan melakukan turunan dari suatu fungsi yang saling bersambung seperti rantai [5]. Tedapat dua kasus pada aturan rantai, yaitu:

Kasus 1:

Misalkan $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan terhadap x dan y di mana $x = g(t)$ dan $y = h(t)$, keduanya dapat diturunkan terhadap t, maka:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Kasus 2:

Misalkan $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan terhadap x dan y di mana $x = g(s, t)$ dan $y = h(s, t)$, dan keduanya dapat diturunkan terhadap s dan t, maka:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Untuk memahami turunan total dan aturan rantai, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan turunan total dari $w = x^3yz + xy + z + 3$ di $(1,2,3)$.

Jawab:

Total turunan di titik (x_0, y_0, z_0) adalah:

$$dw = w_x(x_0, y_0, z_0)dx + w_y(x_0, y_0, z_0)dy + w_z(x_0, y_0, z_0)dz$$

$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ dibaca parsial w parsial x dimana variabel selain x dianggap konstanta

$w_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ dibaca parsial w parsial y dimana variabel selain y dianggap konstanta

$w_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ dibaca parsial w parsial z dimana variabel selain z dianggap konstanta

Pada kasus ini diperoleh:

$$w_x = 3x^2yz + y$$

$$w_y = x^3z + x$$

$$w_z = x^3y + 1$$

Substitusi titik $(1,2,3)$ ke w_x, w_y, w_z diperoleh:

$$w_x(1,2,3) = 20, \qquad w_y(1,2,3) = 4, \qquad w_z(1,2,3) = 3$$

Maka turunan total dari $w = x^3yz + xy + z + 3$ di $(1,2,3)$ adalah:

$$dw = 20dx + 4dy + 3dz$$

Contoh 2:

Misalkan $w = x^3yz + xy + z + 3$ dan $x = 3\cos t, y = 3\sin t,\ z = 2t$.

Hitunglah $\frac{dw}{dt}$ dan tentukan nilai $\frac{dw}{dt}$ di $t = \frac{\pi}{2}$

Jawab:

Pada kasus ini, kita tidak melakukan substitusi x, y, z sebelum melakukan penurunan, namun kita kita gunakan aturan rantai.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = (3x^2yz + y)(-3\sin t) + (x^3z + x)(3\cos t) + (x^3y + 1)(2)$$

Nilai x, y, z di $t = \pi/2$ adalah:

$$x = 0, \qquad y = 3, \qquad z = \pi$$

Maka:

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{\pi/2} = (3)(-3) + (0)(0) + (1)(2) = -7$$

Contoh 3:

Tunjukkan bagaimana rumus aproksimasi tangen menghantarkan kita pada aturan rantai.

Jawab:

Rumus aproksimasi tangen:

$$\Delta w \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0 \Delta \mathrm{z}$$

Jika x, y, z adalah fungsi waktu maka membagi aproksimasi dengan Δt diperoleh:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0 \frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Ambil limit pada kedua ruas di mana $\Delta t \to 0$, maka kita dapat aturan rantai.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Aturan Rantai

Sekarang kita akan memformulasikan aturan rantai ketika terdapat lebih dari satu variabel independen. Misalkan w adalah fungsi dari x, y dan x, y merupakan fungsi dari u, v, sebagai berikut:

$$w = f(x, y) \text{ dan } x = x(u, v), y = y(u, v)$$

Penggunaan terminologi rantai dikarenakan untuk menghitung w kita membutuhkan perhitungan rantai sebagai berikut:

$$(u, v) \to (x, y) \to w$$

Di mana w adalah variabel dependen, u, v variabel independen, dan x, y adalah variabel intermediate.

Karena w adalah fungsi dari x dan y, maka w memiliki turunan parsial yaitu:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ dan } \frac{\partial w}{\partial y}$$

Namun, karena w juga pada akhirnya fungsi dari u dan v, maka perlu dihitung juga turunan parsial dari:

$$\frac{\partial w}{\partial u} \text{ dan } \frac{\partial w}{\partial v}$$

Kombinasi dari keduanya, diperoleh:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Contoh 4:

Diberikan:

$$w = x^2 y + y^2 + x$$

$$x = u^2 v$$

$$y = uv^2$$

Tentukan $\frac{\partial w}{\partial u}$ dan $\frac{\partial w}{\partial v}$

Jawab:

Pertama, kita hitung dulu:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy + 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 + 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2uv$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 2uv$$

Menggunakan aturan rantai, diperoleh:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = (2xy + 1)2uv + (x^2 + 2y)v^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = (2xy + 1)u^2 + (x^2 + 2y)2uv$$

Definisi Gradien

Misalkan $w = f(x, y)$ maka $\partial w/\partial x$ dan $\partial w/\partial y$ adalah laju perubahan w dalam arah **i** dan **j**. Maka vektor dari $\partial w/\partial x$ dan $\partial w/\partial y$ disebut gradien w, dinotasikan dengan:

$$\text{grad}\, w = \nabla w = \langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \rangle$$

Untuk $w = f(x, y, z)$ maka gradiennya adalah:

$$\text{grad}\, w = \nabla w = \langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \rangle$$

Jika kita tentukan sebuah titik $P_0 = (x_0, y_0)$, kita dapat menentukan gradien di titik tersebut, dengan notasi:

$$\text{grad } w(x_0, y_0) = \nabla w|_{P_0} = \nabla w|_0 = \langle \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_0, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_0 \rangle$$

Sifat-Sifat Gradien

1. Gradien diambil dari fungsi skalar $f(x, y)$ dan menghasilkan ∇f.
2. Vektor $\nabla f(x, y)$ terletak pada bidang.
3. Gradien dari $w = f(x, y)$ tegak lurus dengan level kurva $f(x, y) = c$.

Contoh 5:

Hitunglah gradien dari $w = (x^2 + y^2)/3$ dan tunjukkan bahwa gradien di $(x_0, y_0) = (1,2)$ tegak lurus dengan level kurva di titik tersebut.

Jawab:

$$\nabla w = \langle \frac{2x}{3}, \frac{2y}{3} \rangle = \frac{2}{3}\langle x, y \rangle$$

Di titik (1,2) kita peroleh:

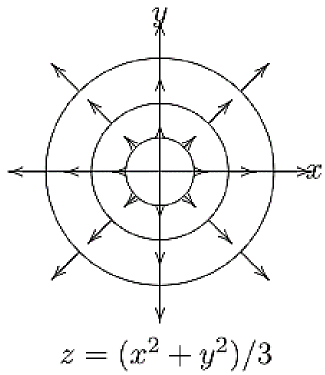
$$\nabla w(1,2) = \frac{2}{3}\langle 1,2 \rangle$$

Level kurva di titik (1,2) adalah:

$$w = (x^2 + y^2)/3 = 5/3$$

Yang identik dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$ dengan jari-jari $\sqrt{5}$ dan berpusat di titik (0,0).

Karena gradien pada (1,2) adalah kelipatan dari $\langle 1,2 \rangle$, maka titik-titiknya menunjuk secara radial ke luar dan karenanya tegak lurus dengan lingkaran. Di bawah ini adalah gambar yang menunjukkan bidang gradien dan level kurva.



Gambar 5. 1. Bidang Gradien dan Level Kurva

Contoh 6:

Perhatikan grafik $y = e^x$. Tentukan vektor yang tegak lurus dengan garis tangen ke $y = e^x$ di titik $(1, e)$.

Jawab:

Grafik menunjukkan level kurva dari $w = y - e^x = 0$, maka:

$$\nabla w = \langle -e^x, 1 \rangle$$

Di titik $(1, e)$ diperoleh gradien:

$$\nabla w(1, e) = \langle -e, 1 \rangle$$

Maka vektor yang tegak lurus dengan $\langle -e, 1 \rangle$ adalah vektor $\mathbf{v} = \langle 1, e \rangle$.

Dimensi Lebih Tinggi

Serupa dengan dimensi dua dan tiga, untuk $w = f(x, y, z)$ kita akan peroleh permukaan $f(x, y, z) = c$ di mana gradiennya akan tegak lurus dengan level permukaannya.

Contoh 7:

Tentukan bidang tangen pada permukaan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ di titik $P = (1,1,1)$.

Jawab:

Misalkan $w = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ maka $w = 6$ level permukaan.

$$\nabla w = \langle 2x, 4y, 6z \rangle$$

Di titik $P = (1,1,1)$ diperoleh gradien:

$$\nabla w|_P = \langle 2,4,6 \rangle$$

Gunakan titik normal untuk mendapatkan persamaan bidang tangen, yaitu:

$$2(x-1) + 4(y-1) + 6(z-1) = 0$$

$$2x + 4y + 6z = 0$$

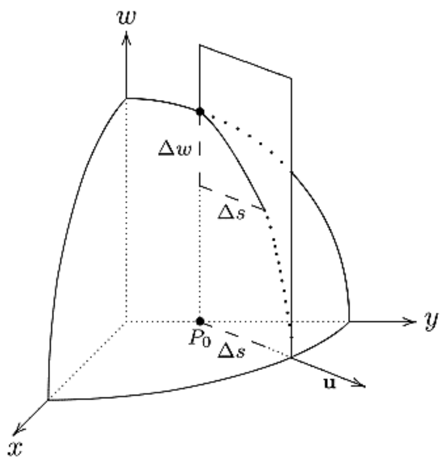
Turunan Berarah

Seperti halnya pada semua turunan, turunan berarah dapat dipandang sebagai rasio atau perbandingan. Misalkan $w = f(x, y)$, tetapkan sebuah vektor satuan $\mathbf{u}$ dan sebuah titik P_0 pada bidang, maka turunan berarah dari w di P_0 dalam arah $\mathbf{u}$ dinotasikan oleh:

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{P_0,\mathbf{u}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta s}$$

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{P_0,\mathbf{u}} = \boldsymbol{\nabla} w(P_0) \cdot \mathbf{u}$$

Di mana Δw adalah perubahan pada w dikarenakan pergeseran panjang Δs dalam arah $\mathbf{u}$. Sementara Δs adalah suatu ukuran pada bidang.



Gambar 5. 2. Turunan Berarah $\mathbf{w}$

Contoh 8:

Misalkan $w = x^3 + 3y^2$.

Hitunglah $\frac{dw}{ds}$ di titik $P_0 = (1,2)$ yang searah dengan $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Jawab:

Pertama, kita tentukan gradien w.

$$\nabla \mathrm{w} = \langle 3x^2, 6y \rangle$$

Di titik $P_0 = (1,2)$ diperoleh gradien w:

$$\nabla w = \langle 3,12 \rangle$$

Kedua, tentukan vektor satuan **u** dari vektor **v**, diperoleh:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$$

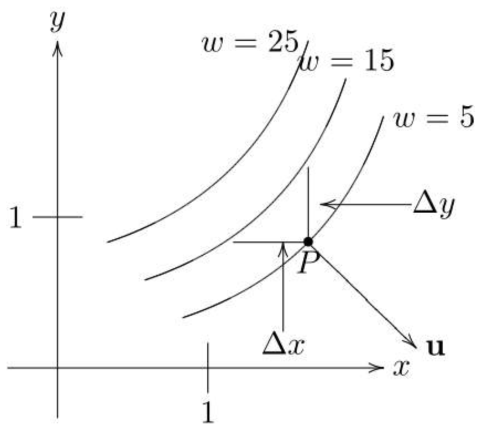
Ketiga, hitung:

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{P_0,\mathbf{u}} = \nabla w|_{(1,2)} \cdot \mathbf{u} = \langle 3,12 \rangle \cdot \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle = \frac{57}{7}$$

Contoh 9:

Misalkan **u** vektor arah dari $\langle 1, -1 \rangle$.

Dengan menggunakan gambar berikut:



Tentukan:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_P, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_P, \left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{P,\mathbf{u}}$$

Jawab:

Dengan mengukur dari P ke level kurva berikutnya dalam arah x, kita peroleh $\Delta x \approx -0{,}5$.

Maka:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_P \approx \frac{\Delta w}{\Delta x} \approx \frac{10}{-0{,}5} = -20$$

Dengan mengukur dari P ke level kurva berikutnya dalam arah y, kita peroleh $\Delta y \approx 0{,}5$.

Maka:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_P \approx \frac{\Delta w}{\Delta \mathrm{y}} \approx \frac{10}{0{,}5} = 20$$

Dengan mengukur dari P searah vektor $\mathbf{u}$, kita peroleh $\Delta s \approx -0{,}3$.

Maka:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{P,\mathbf{u}} \approx \frac{\Delta w}{\Delta \mathrm{s}} \approx \frac{10}{-0{,}3} = -33{,}3$$

Pengali Lagrange

Kita akan belajar memberikan argumen mengapa pengali Lagrange berfungsi. Di sini, kita akan melihat di mana dan bagaimana menggunakannya. Pengali Lagrange digunakan untuk memecahkan masalah pengoptimalan yang dibatasi. Artinya, misalkan kita memiliki fungsi, katakanlah $f(x,y)$, yang ingin kita temukan nilai maksimum atau minimumnya. Tapi, kita tidak diperbolehkan untuk mempertimbangkan semua (x,y) saat kita mencari nilai ini. Sebaliknya, (x,y) yang dapat dipertimbangkan adalah dibatasi terletak di beberapa kurva atau permukaan. Ada banyak contoh di bidang sains, teknik dan ekonomi, misalnya, mengoptimalkan beberapa fungsi utilitas di bawah anggaran terbatas.

Masalah Pengali Lagrange:

Minimalkan (atau maksimalkan) $w = f(x,y,z)$ dibatasi oleh $g(x,y,z) = c$.

Solusi Pengali Lagrange:

Minimum lokal (atau maksimum) harus terjadi pada sebuah titik kritis. Ini adalah titik dimana:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Contoh 10:

Membuat kotak menggunakan bahan yang minimum.

Kotak terbuat dari karton dengan tebal sisi dua kali lipat, tebal bagian bawah tiga kali lipat, tebal depan dan belakang tunggal dan tanpa bagian atas. Volume = 3.

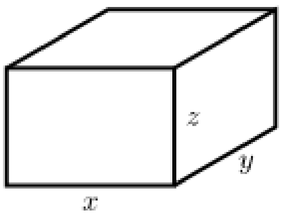
Dimensi apa yang menggunakan karton paling sedikit?

Jawab:

Kita sudah menjawab masalah ini sebelumnya dengan mensubstitusikan x dan y dan menyelesaikan z. Namun, hal ini menyebabkan masalah pengoptimalan yang tidak dibatasi pada x dan y. Di sini kita akan melakukannya sebagai masalah yang dibatasi.

Penting untuk dapat melakukan ini karena menghilangkan satu variabel tidak selalu mudah.

Kotak yang ditampilkan memiliki dimensi x, y, dan z.



Luas satu sisi = yz. Ada dua sisi tebal ganda ⇒ karton yang digunakan = $4yz$.

Luas bagian depan dan belakang = xz. Sisi tebal tunggal ⇒ karton yang digunakan = $2xz$.

Luas bagian bawah = xy. Tebal tiga kali lipat ⇒ karton yang digunakan = $3xy$.

Jadi, total kardus yang digunakan adalah:

$$w = f(x, y, z) = 4yz + 2xz + 3xy$$

Pada kasus ini, volume bertindak sebagai pembatas. Ini memaksa hubungan antara x, y dan z sehingga mereka tidak dapat divariasikan secara mandiri. Batasnya adalah:

$$V = xyz = 3$$

Tugas pertama kita adalah menyiapkan persamaan untuk mencari titik kritis, yaitu:

$$\nabla f = \langle 2z + 3y, 4z + 3x, 4y + 2x \rangle$$

$$\nabla V = \langle yz, xz, xy \rangle$$

Kemudian tentukan persamaan pengali Lagrange, yaitu:

$$\nabla f = \lambda \nabla V \text{ dan } V = 3$$

$$\Leftrightarrow \langle 2z + 3y, 4z + 3x, 4y + 2x \rangle = \lambda \langle yz, xz, xy \rangle, \text{dan } xyz = 3$$

Selanjutnya, kita selesaikan persamaan di atas untuk mendapatkan titik kritis, dengan cara menyelesaikan λ untuk tiap persamaan.

$$2z + 3y = \lambda yz \Longrightarrow \lambda = \frac{2z + 3y}{yz} \Longrightarrow \lambda = \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$$

Dengan cara serupa, diperoleh:

$$\lambda = \frac{4}{x} + \frac{3}{z} \text{ dan } \lambda = \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$$

Karena $\lambda = \lambda = \lambda$ maka:

$$\frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{4}{x} + \frac{3}{z} = \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$$

Sehingga:

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{x} \Longrightarrow x = 2y$$

$$\frac{3}{z} = \frac{2}{y} \Longrightarrow z = \frac{3}{2}y$$

Karena $V = xyz = 3 \Longrightarrow 3y^3 = 3 \Longrightarrow y = 1$

Dengan demikian, kotak menggunakan karton paling sedikit ketika:

$$x = 2, y = 1, z = \frac{3}{2}$$

Contoh 11:

Minimalkan $w = y$ yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Jawab:

Dari soal kita peroleh $\nabla f = \langle 0,1,0 \rangle$ dan $\nabla g = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$

Menggunakan persamaan pengali Lagrange, diperoleh:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \langle 0,1,0 \rangle = \lambda \langle 2x, 2y, 2z \rangle$$

Dari sini kita peroleh $x = z = 0$.

Karena dibatasi oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ maka diperoleh $y = \pm 1$ dimana w akan bernilai maksimum pada $y = -1$ dan minimum pada $y = 1$.

Contoh 12:

Sebuah persegi panjang pada bidang ditempatkan di kuadran pertama sehingga salah satu sudutnya berada di titik pusat O dan dua sisi lainnya berada di sumbu. Sudut P berlawanan dengan O dan berada pada kurva $x + 2y = 1$. Dengan menggunakan pengali Lagrange, tentukan titik P pada persegi panjang sehingga memiliki luas maksimum. Jelaskan bagaimana Anda tahu bahwa titik ini memberikan hasil maksimal.

Jawab:

Pertama, kita mesti tentukan fungsi dan batasnya terlebih dahulu.

Misalkan fungsinya adalah $f(x, y) = xy$ dan batasnya $g(x, y) = x + 2y = 1$.

Tentu saja kita perlu menentukan $\boldsymbol{\nabla} f$ dan $\boldsymbol{\nabla} g$ di mana:

$\boldsymbol{\nabla} f = y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,\hat{\mathbf{j}} = \langle y, x \rangle$ dan $\boldsymbol{\nabla} g = \hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} = \langle 1,2 \rangle$.

Dari persamaan pengali Lagrange diperoleh:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \lambda \boldsymbol{\nabla} g \Rightarrow \langle y, x \rangle = \lambda \langle 1,2 \rangle \Rightarrow \lambda = y, \lambda = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 2y$$

Substitusi x ke batas $x + 2y = 1$, diperoleh:

$$y = \frac{1}{4}$$

Substitusi $y = 1/4$ ke $x = 2y$ diperoleh $x = 1/2$.

Dengan demikian, titik P pada persegi panjang sehingga memiliki luas maksimum adalah

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Kita tahu bahwa titik P akan memberikan hasil maksimum karena nilai maksimum terjadi di titik kritis atau pada batas disekelilingnya. Dalam kasus ini, ketika titik-titik batasnya adalah (1,0) dan (0,1/2) maka luas persegi panjang = 0.

Turunan Parsial dengan Variabel Non-Independen

Sampai saat ini, pada saat kita menghitung turunan parsial seperti fungsi $w = f(x, y)$ atau $w = f(x, y, z)$, kita berasumsi bahwa variabel x, y atau x, y, z adalah variabel independen. Namun dalam aplikasi dunia nyata, seringkali tidak demikian. Sebagai contoh dalam termodinamika, tiga variabel yang saling terkait dengan kandungan gas, adalah:

$$p = \text{tekanan}, \;\; v = \text{volume}, \; T = \text{temperatur}$$

Pada kasus "gas ideal" tiga variabel p, v, T menjadi variabel non independen yang diberikan dalam persamaan:

$$pv = nRT \quad (n, R \text{ konstan}) \tag{1}$$

Untuk melihat prosedurnya, kita gunakan contoh dalam matematika murni.

Contoh 13.

Misalkan $w = x^2 + y^2 + z^2$ di mana $z = x^2 + y^2$. Hitunglah $\partial w/\partial x$.

Jawab:

(a) Jika kita berpikir x dan y sebagai variabel independen maka kita dapat menghitung $\partial w/\partial x$ dalam dua cara, yaitu:

(1) Gunakan $z = x^2 + y^2$ untuk menghilangkan z, sehingga diperoleh:

$$w = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2$$

$$w = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$$

(2) Gunakan aturan rantai, dengan mengingat bahwa z adalah fungsi dalam x dan y, diperoleh:

$$w = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z.2x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2(x^2 + y^2).2x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$$

(b) Di sisi lain, jika kita berpikir x dan y sebagai variabel independen, dengan menggunakan metode (1), kita dapat menghilangkan y menggunakan relasi $y^2 = z - x^2$, sehingga diperoleh:

$$w = x^2 + (z - x^2) + z^2$$

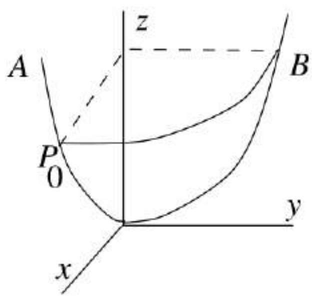
$$w = z + z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Jawaban (b) tentu saja sangat berbeda dengan cara (a) di mana kita tidak dapat merubah satu variabel ke dalam variabel lainnya dengan menggunakan relasi $z = x^2 + y^2$. Adakah $\partial w/\partial x$ yang benar?

Jawabannya adalah tidak ada jawaban yang benar karena permasalahan tidak dinyatakan secara baik. Ketika variabel tidak independen, ekspresi $\partial w/\partial x$ tidak memiliki makna.

Untuk melihat mengapa ini terjadi, kita interpretasikan secara geometris. Katakanlah x, y, z memenuhi relasi $z = x^2 + y^2$ yang artinya titik (x, y, z) terletak pada permukaan paraboloid dengan memutar $z = y^2$ terhadap sumbu z.



Fungsi $w = x^2 + y^2 + z^2$ mengukur kuadrat jarak dari asal/ titik pusat. Untuk memastikan, misalkan kita berada di titik awal $P = P_0 = (1,0,1)$, dan kita ingin menghitung $\partial w/\partial x$ pada titik ini.

Kasus (a) Jika kita ambil x dan y sebagai variabel independen maka untuk mendapatkan $\partial w/\partial x$, kita menetapkan y sebagai kontanta dan x bebas. Sehingga P bergerak pada bidang xz menuju A.

Ketika P bergerak di sepanjang jalur ini, jelas w, kuadrat jaraknya dari titik asal, terus meningkat: $\partial w/\partial x > 0$ dan sebenarnya perhitungan untuk (a) pada halaman sebelumnya menunjukkan bahwa $\partial w/\partial x = 6$.

Kasus (b) Jika kita ambil x dan z sebagai variabel independen maka untuk mendapatkan $\partial w/\partial x$, kita menetapkan z sebagai kontanta dan x bebas. Sehingga P bergerak pada bidang $z = 1$ sepanjang lintasan lingkaran menuju B.

Ketika P bergerak di sepanjang jalur ini, jelas w, kuadrat jaraknya dari titik asal, tidak berubah: $\partial w/\partial x = 0$ dan sebenarnya perhitungan untuk (b) pada halaman sebelumnya menunjukkan bahwa $\partial w/\partial x = 0$.

Singkatnya, nilai $\partial w/\partial x$ bergantung pada variabel mana yang kita anggap independen, karena kita mengukur tingkat perubahan yang berbeda, saat P bergerak di sepanjang jalur yang berbeda.

Hanya ada satu jalan keluar dari kesulitan ini, yaitu ketika kita meminta $\partial w/\partial x$, kita harus pada saat yang sama menentukan variabel mana yang akan diambil sebagai variabel independen. Ini dilakukan dengan menggunakan notasi berikut:

Kasus (a): x dan y adalah variabel independen, ditulis:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \text{ dibaca parsial } w \text{ terhadap } x, \text{dimana } y \text{ konstan}$$

Kasus (b): x dan z adalah variabel independen, ditulis:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_z \text{ dibaca parsial } w \text{ terhadap } x, \text{dimana } z \text{ konstan}$$

Sebagai catatan, jika kita memiliki fungsi:

$$w = f(x, y, z, t) \text{ di mana } xy = zt \tag{2}$$

Maka hanya ada tiga variabel yang dapat menjadi variabel independen, sementara variabel keempatnya ditentukan oleh persamaan (2) bagian kanan. Serupa pada kasus yang sudah dibahas sebelumnya, kita dapat menuliskan beberapa turunan parsialnya seperti:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,t} \text{ dibaca parsial } w \text{ terhadap } x, \text{dimana } y \text{ dan } t \text{ konstan.}$$

Di sini, x, y, t sebagai variabel independen.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z} \text{ dibaca parsial } w \text{ terhadap } y, \text{dimana } x \text{ dan } z \text{ konstan.}$$

Di sini, x, y, z sebagai variabel independen.

Turunan vs Aturan Rantai

Cara alternatif untuk menghitung turunan parsial adalah menggunakan total turunan. Sebagai contoh $w = f(x, y, z)$ turunannya adalah:

$$dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz \tag{3}$$

Di mana f_x, f_y, f_z adalah turunan parsial formal, yaitu turunan yang dihitung dengan menganggap x, y, z variabel independen.

Contoh 14.

Tentukan $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t}$ di mana $w = x^3 y - z^2 t$ dan $xy = zt$

Jawab:

Cara 1.

Dengan menggunakan aturan rantai, kita peroleh:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t} = x^3 - 2zt\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,t}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t} = x^3 - 2zt\frac{x}{t} = x^3 - 2zx$$

Cara 2.

Dengan melakukan turunan pada kedua ruas dari kedua persamaan, diperoleh:

$$\begin{gathered} dw = 3x^2 y\, dx + x^3 dy - 2zt\, dz - z^2 dt \\ y\, dx + x\, dy = z\, dt + t\, dz \end{gathered} \tag{4}$$

Karena soal mengindikasikan x, y, t sebagai variabel independen, kita eliminasi dz dari persamaan (4) dengan mengalikan persamaan kedua oleh $2z$ kemudian tambahkan ke persamaan pertama, sehingga diperoleh:

$$dw = (3x^2 y - 2zy)dx + (x^3 - 2zx)dy + z^2 dt$$

Substitusi $z = t$ ke dalam (3), kita peroleh:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,t} = 3x^2y - 2zy$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t} = x^3 - 2zx$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,y} = z^2$$

di mana turunan parsial yang sebenarnya sama dengan turunan parsial formal yaitu:

$$w_x, w_y, w_t$$

Karena x, y, t adalah variabel independen.

Perhatikan bahwa metode turunan ini mengambil lebih banyak perhitungan, namun memberikan kita tiga macam turunan, yaitu:

D1. Turunan dapat ditambah, dikurang dan dikalikan oleh fungsi skalar.

D2. Jika variabel $x, y, \ldots$ adalah variabel independen, dua buah turunan akan sama jika dan hanya jika koefisien dari kedua turunan tersebut sama, yaitu:

$$A\,dx + B\,dy + \cdots = A_1dx + B_1dy + \cdots \Leftrightarrow A = A_1, B = B_1, \ldots \qquad (5)$$

D3. Sebuah turunan dapat disubstitusikan ke dalam turunan lainnya.

Contoh 15.

Misalkan $w = x^2 - yz + t^2$ di mana x, y, z, t memenuhi persamaan:

$$z^2 = x + y^2 \text{ dan } xy = zt$$

Tanpa menentukan $w(x, y)$ secara eksplisit, tentukan gradien vektor $\nabla w(x, y)$.

Jawab:

Pertama, kita memerlukan turunan $(\partial w/\partial x)_y$ dan $(\partial w/\partial y)_x$ dengan mengambil turunan dari w dan kedua persamaan, sehingga diperoleh:

$$\begin{gathered} dw = 2x\,dx - z\,dy - y\,dz + 2t\,dt \\ 2z\,dz = dx + 2y\,dy \\ x\,dy + y\,dx = z\,dt + t\,dz \end{gathered} \qquad (6)$$

Kita menginginkan x dan y sebagai variabel independen, maka gunakan **D1**. Pertama eliminir dt dengan menyelesaikannya pada persamaan ketiga dan substitusi hasilnya ke dalam persamaan pertama. Kemudian eliminasi dz dengan menyelesaikan persamaan ketiga dan substitusikan hasilnya ke dalam persamaan pertama, sehingga diperoleh:

$$dw = 2x\,dx - z\,dy - y\left(\frac{1}{2z}dx + \frac{y}{z}dy\right) + 2t\left(\frac{x}{z}dy + \frac{y}{z}dx - \frac{t}{z}\left(\frac{1}{2z}dx + \frac{y}{z}dy\right)\right)$$

$$dw = 2x\,dx - z\,dy - \frac{y}{2z}dx - \frac{y^2}{z}dy + \frac{2xt}{z}dy + \frac{2ty}{z}dx - \frac{t^2}{z^2}dx - \frac{2t^2y}{z^2}dy$$

$$dw = \left(2x - \frac{y}{2z} + \frac{2ty}{z} - \frac{t^2}{z^2}\right)dx + \left(-z - \frac{y^2}{z} + \frac{2xt}{z} - \frac{2t^2y}{z}\right)dy \qquad (7)$$

Karena x dan y independen, dan membandingkan bentuk (3) dan (7) serta menggunakan **D2**, menunjukkan bahwa koefisien dalam (7) adalah dua turunan parsial dari w_x dan w_y dimana keduanya merupakan komponen dari ∇w.

Dengan demikian,

$$\nabla w(x,y) = \langle w_x, w_y \rangle$$

$$\nabla w(x,y) = \left\langle \left(2x - \frac{y}{2z} + \frac{2ty}{z} - \frac{t^2}{z^2}\right), \left(-z - \frac{y^2}{z} + \frac{2xt}{z} - \frac{2t^2y}{z}\right) \right\rangle$$

Contoh 16.

Misalkan variabel x, y, z memenuhi persamaan $g(x,y,z) = 0$. Asumsikan titik $P = (1,1,1)$ terletak pada permukaan $g = 0$ dan $(\nabla g)_P = \langle -1,1,2 \rangle$. Misalkan $f(x,y,z)$ adalah fungsi lain dan asumsikan $(\nabla f)_P = \langle 1,2,1 \rangle$. Tentukan gradien fungsi $w = f(x,y,z(x,y))$ dari dua variabel independen x dan y di titik $x = 1, y = 1$.

Jawab:

Gunakan turunan, (3) dan hipotesis, diperoleh:

$$(dw)_P = dx + 2dy + dz$$

$$(dg)_P = -dx + dy + 2dz = 0 \text{ karena } dg = 0\ \forall x, y, z$$

Eliminasi dz dari persamaan kedua dan substitusikan hasilnya ke dalam persamaan pertama, diperoleh:

$$(dw)_P = dx + 2dy + \frac{1}{2}(dx - dy)$$

$$(dw)_P = \frac{3}{2}dx + \frac{3}{2}dy$$

Maka gradien fungsi $w = f(x, y, z(x, y))$ dari dua variabel independen x dan y di titik $x = 1, y = 1$ adalah:

$$(\nabla w)_P = \frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$$

Turunan Parsial Abstrak & Aturan Relasi Turunan Parsial

Seringkali dalam aplikainya, fungsi w tidak diberikan secara eksplisit dan atau persamaan menghubungkan antar varaibel. Jadi, kita harus bisa bekerja dengan fungsi dan persamaan yang diberikan secara abstrak. Ide-ide sebelumnya bekerja dengan baik, seperti yang akan kita gambarkan. Namun, kita perlu untuk membedakannya, yaitu:

Turunan parsial formal ditulis $f_x, f_y, \ldots$

Turunan parsial aktual ditulis $\partial f / \partial x, \ \ldots$

Contoh 17.

Jika $f(x, y, z) = xy^2z^4$ di mana $z = 2x + 3y$, tentukan tiga turunan parsial formalnya.

Jawab:

$$f_x = y^2z^4, \ \ f_y = 2xyz^4, \ \ f_z = 4xy^2z^3$$

Sementara turunan parsial aktualnya yang mungkin antara lain:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = f_x + f_z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = y^2z^4 + 8xy^2z^3$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = f_y + f_z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 2xyz^4 + 12xy^2z^3$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_x = f_z + f_y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 4xy^2z^3 + \frac{2}{3}xyz^4$$

Aturan Relasi Turunan Parsial

1. Aturan Reciprocal

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \text{ atau } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \tag{8}$$

2. Aturan Rantai

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_z \text{ atau } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_z}{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_z} \tag{9}$$

3. Aturan Siklis

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \text{ atau } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x} \tag{10}$$

Contoh 18.

Misalkan $w = w(x, r)$ di mana $r = r(x, \theta)$. Tentukan ekspresi $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\theta$ dalam bentuk turunan parsial formal dari w dan r.

Jawab:

Dari pertanyaan diperoleh informasi bahwa variabel independennya adalah r dan θ, karena ini adalah variabel yang terjadi di bagian bawah turunan parsial, dengan x bergantung padanya. Karena θ dipandang sebagai konstanta, aturan rantai memberikan hasil:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\theta = w_x \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta + w_r$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \frac{1}{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_\theta}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_\theta = \frac{w_x}{r_x} + w_r$$

Latihan 5

1. Tentukan turunan total dari $w = ze^{x+y}$ di titik (0,0,1).
2. Misalkan $w = ze^{x+y}$ dan $x = t, y = t^2, z = t^3$.

   Hitunglah $\frac{dw}{dt}$ dan nilai $\frac{dw}{dt}$ ketika $t = 2$.
3. Misalkan $w = xyz,\ x = u^2v,\ y = uv^2,\ z = u^2 + v^2$
   (a) Gunakan aturan rantai untuk menentukan $\partial w/\partial u$.
   (b) Tentukan turunan total dw dalam variabel du dan dv.

(c) Tentukan $\partial w/\partial u$ di titik $(u, v) = (1,2)$.

4. Misalkan $w = x^2 + 5y^2$.
   (a) Hitunglah gradien dari w.
   (b) Tunjukkan bahwa ∇w tegak lurus dengan level kurva w di titik $(x_0, 0)$.
5. Suatu fungsi $T = x^2 + 2y^2 + 2z^2$ memberikan nilai temperatur di setiap titik pada sutau ruang. Di titik $P = (1,1,1)$, untuk mendapatkan penurunan T yang paling cepat ke arah manakah kita harus pergi? Apa turunan berarah pada arah ini?
6. Tentukan nilai maksmimum dan minimum dari $f(x, y) = x^2 + x + 2y^2$ pada lingkaran satuan.
7. Misalkan $w = x^3y^2 + x^2y^3 + y$ dan asumsikan x, y memenuhi $x^2 + y^2 = 1$. Hitung dw/dx menggunakan turunan implisit.
8. Misalkan $w = u^3 - uv^2$, $u = xy$ dan $v = u + x$.
   Tentukan $\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_x$ dan $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_u$ menggunakan turunan.

Jawaban 5

1. $dw = w_x dx + w_y dy + w_z dz$

   Ingat $y = e^x \rightarrow dy = e^x dx$

   $w_x = ze^{x+y}$

   $w_y = ze^{x+y}$

   $w_z = e^{x+y}$

   Substitusi (0,0,1) diperoleh:

   $w_x = 1$

   $w_y = 1$

   $w_z = 1$

   Maka:

   $dw = dx + dy + dz$

2.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = (ze^{x+y})(1) + (ze^{x+y})(2t) + (e^{x+y})(3t^2)$$

$t = 2,$ maka $x = 2, y = 4, z = 8$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_2 = 8e^6 + 32e^6 + 12e^6 = 52e^6$$

3.

(a) Aturan rantai mengatakan kepada kita bahwa:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{du}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = yz(2uv) + xz(v^2) + xy(2u)$$

(b) Turunan total dw dalam variabel du dan dv adalah:

$$dw = yzdx + xzdy + xydz$$

$$dx = 2uv\,du + u^2 dv$$

$$dy = v^2 du + 2uv\,dv$$

$$dz = 2u\,du + 2v\,dv$$

Maka:

$$dw = yz(2uv\,du + u^2 dv) + xz(v^2 du + 2uv\,dv) + xy(2u\,du + 2v\,dv)$$

$$dw = (2yzuv + xzv^2 + 2xyu)du + (yzu^2 + 2xzuv + 2xyv)dv$$

(c) Substitusi $(u, v) = (1,2)$, diperoleh:

$x = 2, y = 4, z = 5$

Maka:

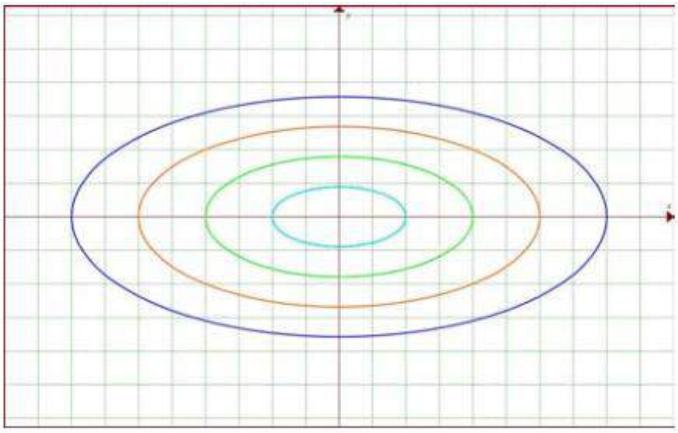
$$\frac{\partial w}{\partial u} = (20)(4) + (10)(4) + (8)(2) = 136$$

4.

(a) $\nabla w = \langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \rangle = \langle 2x, 10y \rangle$

(b) Pada $(x_0, 0)$ gradien vektor dari w adalah $\nabla w = \langle 2x_0, 0 \rangle$.

Gambar level kurva dari $w = x^2 + 5y^2$ adalah:



Secara umum, level kurva dari w memiliki persamaan $x^2 + 5y^2 = k$. Tiap level kurva adalah sebuah elips di mana sumbu mayornya berpotongan dengan sumbu x. Dengan demikian, vektor horisontal $\nabla w = \langle 2x_0, 0\rangle$ adalah vektor normal terhadap level kurva di titik $(x_0, 0)$.

5. Kita tahu bahwa peningkatan temperatur T yang paling cepat ada pada arah:

$$\boldsymbol{\nabla} T = \langle 2x, 4y, 4z\rangle$$

Pada titik P, penurunan temperatur$T$ yang paling cepat ada pada arah:

$$-\boldsymbol{\nabla} T|_{(1,1,1)} = -\langle 1,2,2\rangle$$

Untuk menentukan turunan berarah pada arah $-\boldsymbol{\nabla} T|_{(1,1,1)}$, kita perlu tentukan vektor satuan dalam arah ini yaitu:

$$\hat{\mathbf{u}} = -\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\rangle$$

Maka:

$$\left.\frac{dT}{ds}\right|_{P,\hat{\mathbf{u}}} = \boldsymbol{\nabla} T|_P \cdot \hat{\mathbf{u}} = -3$$

6. Fungsi objektifnya adalah $f(x, y)$. Batasannya adalah $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$.

Persamaan Lagrange:

$f_x = \lambda g_x$

$f_y = \lambda g_y$

Dari persamaan pertama diperoleh:

$2x + 1 = \lambda 2x$

$\lambda = \dfrac{2x + 1}{2x}$

Atau

$1 = \lambda 2x - 2x$

$1 = 2x(\lambda - 1)$

$2x = \dfrac{1}{(\lambda - 1)}$

$x = \dfrac{1}{2(\lambda - 1)}$

Dari persamaan kedua diperoleh:

$4y = \lambda 2y$

$\lambda = \dfrac{4y}{2y} = 2$

Atau $y = 0$

Konstrain: $x^2 + y^2 = 1$

Persamaan kedua menunjukkan bahwa $y = 0$ atau $\lambda = 2$.

Untuk $\lambda = 2$ maka:

$x = \dfrac{1}{2(\lambda - 1)}$

$x = 1/2$

Dan substitusi $x = 1/2$ ke dalam $g(x, y)$ diperoleh:

$(1/2\,)^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - 1/4 = 3/4$

$y = \pm\sqrt{3}/2.$

Untuk $y = 0$ substitusikan ke dalam $g(x, y)$ maka:

$x^2 + 0 = 1$

$x = \pm 1$

Maka titik kritisnya adalah:

$(1/2, \sqrt{3}/2), \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right), (1,0), (-1,0)$

$f\left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}/2\right) = 9/4$ bernilai maksimum

$f(1,0) = 2$ tidak bernilai maksimum atau minimum

$f(-1,0) = 0$ bernilai minimum

7. Turunan bentuk implisit artinya kita mengingat bentuk y sebagai fungsi x.

   Karena $w = x^3y^2 + x^2y^3 + y$

   Maka:

   $$\frac{dw}{dx} = 3x^2y^2 + 2x^3y\frac{dy}{dx} + 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}$$

   Karena konstrain $x^2 + y^2 = 1$ maka turunan dari konstrain adalah:

   $$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

   $$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

   $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

   Substitusi dy/dx ke dalam dw/dx diperoleh:

   $$\frac{dw}{dx} = 3x^2y^2 + 2x^3y\left(-\frac{x}{y}\right) + 2xy^3 + 3x^2y^2\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{x}{y}\right)$$

   $$\frac{dw}{dx} = 3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^3 - 3x^3y - \frac{x}{y}$$

8. Dengan turunan kita gunakan:

   $dw = (3u^2 - v^2)du - 2uv\,dv$

   $du = x\,dy + y\,dx$

   $dv = du + dx$

   Karena w akan diturunkan terhadap u dan x maka substitusikan $dv = du + dx$ diperoleh:

   $dw = (3u^2 - v^2)du - 2uv(du + dx)$

$dw = (3u^2 - v^2 - 2uv)du - 2uv\,dx$

Karena:

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_x du + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_u dx$$

Maka:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_x = (3u^2 - v^2 - 2uv)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_u = -2uv$$

Rangkuman 5

1. Turunan total dari fungsi $w = f(x,y,z)$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ didefinisikan dengan:
$$dw = w_x(x_0,y_0,z_0)dx + w_y(x_0,y_0,z_0)dy + w_z(x_0,y_0,z_0)dz$$
2. Cara alternatif untuk menghitung turunan parsial adalah menggunakan total turunan. Sebagai contoh $w = f(x,y,z)$ turunannya adalah:
$$dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$
3. Misalkan $z = f(x,y)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan terhadap x dan y di mana $x = g(t)$ dan $y = h(t)$, keduanya dapat diturunkan terhadap t, maka:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
4. Misalkan $z = f(x,y)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan terhadap x dan y di mana $x = g(s,t)$ dan $y = h(s,t)$, dan keduanya dapat diturunkan terhadap s dan t, maka:
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$
5. Misalkan $w = f(x,y)$ maka $\partial w/\partial x$ dan $\partial w/\partial y$ adalah laju perubahan w dalam arah **i** dan **j**. Maka vektor dari $\partial w/\partial x$ dan $\partial w/\partial y$ disebut gradien w, dinotasikan dengan:
$$\text{grad}\, w = \nabla w = \langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \rangle$$

Untuk $w = f(x, y, z)$ maka gradiennya adalah:

$$\text{grad}\, w = \nabla w = \langle \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \rangle$$

6. Misalkan $w = f(x, y)$, tetapkan sebuah vektor satuan **u** dan sebuah titik P_0 pada bidang, maka turunan berarah dari w di P_0 dalam arah **u** dinotasikan oleh:

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{P_0,\mathbf{u}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta s}$$

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{P_0,\mathbf{u}} = \boldsymbol{\nabla} w(P_0) \cdot \mathbf{u}$$

7. Misalkan $w = f(x, y, z)$ dibatasi oleh $g(x, y, z) = c$, maka lokal minimum atau maksimum terjadi pada titik kritis, dimana:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \lambda \boldsymbol{\nabla} g$$

8. Aturan Relasi Turunan Parsial

Aturan Reciprocal

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \text{ atau } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$$

Aturan Rantai

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_z \text{ atau } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_z}{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_z}$$

Aturan Siklis

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \text{ atau } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x}$$

Tes Formatif 5

1. Turunan total dari $w = zxe^y + xe^z + ye^z$ adalah …

   A. $dw = (ze^y + e^z)dx + 2y(zxe^y + e^z)dy + 3z^2(xe^y + xe^z + ye^z)dz$

   B. $dw = (ze^y + e^z)dx + (zxe^y + e^z)dy + (xe^y + xe^z + ye^z)dz$

   C. $dw = (ze^y + e^z)dx + (zxe^y + e^z)dy + (xe^y + xe^z)dz$

   D. $dw = (ze^y + e^z)dx + (zxe^y + e^z)dy + (xe^y)dz$

   E. $dw = (ze^y + e^z)dx + (zxe^y)dy + (xe^y)dz$

2. Turunan berarah dari $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ di titik $(2, -1)$ yang searah dengan $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ adalah …
   A. $32/\sqrt{29}$
   B. $32/\sqrt{10}$
   C. $56/\sqrt{7}$
   D. $56/\sqrt{10}$
   E. $56/\sqrt{29}$
3. Titik kritis dari $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ pada seperempat lingkaran $x^2 + y^2 = 1,\ x, y \geq 0$ sehingga bernilai minimum adalah …
   A. $(1,0)$
   B. $(0,1)$
   C. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
   D. $(1/2, 1/2)$
   E. $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$
4. Nilai $\partial w/\partial x$ dari $w = zxe^y + xe6z + ye^z$ dan $x^2y + y^2x = 1$ dengan asumsi x variabel independen adalah …
   A. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}$
   B. $\frac{\partial w}{\partial x} = xe^y + xe^z + ye^z$
   C. $\frac{\partial w}{\partial x} = ze^y + e^z$
   D. $\frac{\partial w}{\partial x} = zxe^y + e^z$
   E. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x^2+4xy+y^2}{x^2+2xy}$
5. Nilai $(\partial w/\partial x)_u$ dari $w = u^3 - uv^2$, $u = xy$ dan $v = u + x$ adalah …
   A. $3u^2 - v^2$
   B. $-v^2 - 2uv$
   C. $v^2 - 2uv$
   D. $-2uv$
   E. $3u^2 - 2uv$

Jawaban Tes Formatif 5

1. B

   $dw = ze^y dx + zxe^y dy + xe^y dz + e^z dx + xe^z dz + e^z dy + ye^z dz$

   $dw = (ze^y + e^z)dx + (zxe^y + e^z)dy + (xe^y + xe^z + ye^z)dz$

2. A

Pertama, kita tentukan gradien w.

$$\nabla f = \langle 2xy^3, 3x^2y^2 - 4\rangle$$

Di titik $P_0 = (2, -1)$ diperoleh gradien f:

$$\nabla f = \langle -4{,}8\rangle$$

Kedua, tentukan vektor satuan **u** dari vektor **v**, diperoleh:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}\langle 2{,}5\rangle$$

Ketiga, hitung:

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{P_0,\mathbf{u}} = \nabla f|_{(2,-1)} \cdot \mathbf{u} = \langle -4{,}8\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}\langle 2{,}5\rangle = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

3. C

Diketahui fungsi konstrain $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Nilai maksimum dan minimum dari $f(x, y)$ terjadi ketika $\nabla f = \lambda \nabla g$ atau di titik akhir dari seperempat lingkaran.

$\nabla f = \langle 2x - y, -x + 2y\rangle$ dan $\nabla g = \langle 2x, 2y\rangle$

Substitusi ke dalam $\nabla f = \lambda \nabla g$ diperoleh:

$$2x - y = \lambda 2x$$

$$-x + 2y = \lambda 2y$$

Karena $\lambda = \lambda$, maka:

$$\frac{2x - y}{2x} = \frac{-x + 2y}{2y}$$

$$x^2 = y^2$$

Karena $x, y \geq 0$ dengan konstrain $x^2 + y^2 = 1$ maka:

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sehingga titik kritis pada $f(x, y)$ adalah $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1{,}0), (0{,}1)$.

Substitusi titik kritis ke dalam $f(x, y)$ diperoleh:

$f\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) = 1/2$ artinya f bernilai minimum pada seperempat lingkaran.

$f(1,0) = f(0,1) = 1$ artinya f bernilai maksimum pada seperempat lingkaran.

4. E

Karena $w = zxe^y + xe^z + ye^z$ maka turunannya adalah:

$dw = (ze^y + e^z)dx + (zxe^y + e^z)dy + (xe^y + xe^z + ye^z)dz$

Karena konstrain $x^2y + y^2x = 1$ maka turunannya adalah:

$2xydx + x^2dy + y^2dx + 2xydy = 0$

$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

$$dy = \frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}dx$$

Substitusikan dy ke dalam dw dengan $z = 0$ diperoleh:

$$dw = (0 + e^0)dx + (0 + e^0)\left(\frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}dx\right) + (xe^y + xe^z + ye^z)dz$$

$$dw = dx + \frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}dx + (xe^y + xe^z + ye^z)dz$$

$$dw = \frac{x^2 + 4xy + y^2}{x^2 + 2xy}dx + (xe^y + xe^z + ye^z)dz$$

Maka:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x^2 + 4xy + y^2}{x^2 + 2xy}$$

5. D

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_u = 0 - u2v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_u$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_u = -2uv$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 5 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 5.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 6. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 5, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 6

INTEGRAL RANGKAP DUA

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep integral rangkap dua.

Materi 6

Pada sesi ini, kita akan memahami integral rangkap dua secara abstrak, mendefinisikan integral rangkap dua sebagai penjumlahan secara teknis merupakan limit dari jumlah Riemann. Ini merupakan cara terbaik untuk mempelajari integral rangkap dua untuk pertama kalinya sebelum masuk ke dalam perhitungan nilai dari integral rangkap dua secara detail.

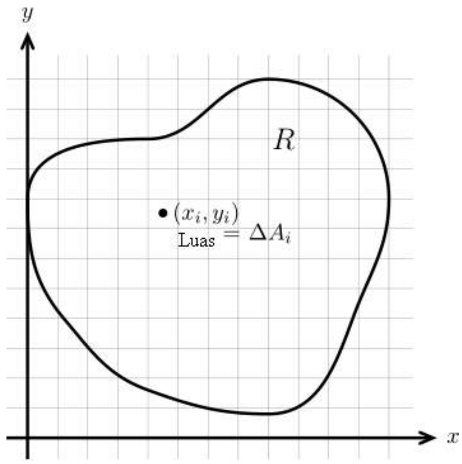
Definisi Integral Rangkap Dua

Misalkan terdapat suatu daerah pada bidang R dan sebuah fungsi $f(x,y)$. Maka integral rangkap dua dinotasikan dengan [1]:

$$\int\int_R f(x,y)\, dA$$

Didefinisikan sebagai berikut:

Bagi daerah pada R menjadi beberapa bagian dari 1 sampai n. Misalkan ΔA_i adalah luas daerah ke i dan ambil titik (x_i, y_i) pada bagian tersebut, seperti terlihat pada gambar berikut.



*Gambar 6. 1. Daerah **R** pada Bidang **xy***

Kemudian bentuk penjumlahan sebagai berikut:

$$f(x_1, y_1)\Delta A_1 + f(x_2, y_2)\Delta A_2 + \cdots + f(x_n, y_n)\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

Selanjutnya ambil n sampai tak hingga, akibatnya ΔA menuju 0, atau dengan kata lain limitnya adalah:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i = \int\int_R f(x, y)\, dA$$

Atau:

$$\int\int_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$$

Tentu saja, jika limitnya eksis.

Interpretasi Integral Rangkap Dua

Sebagaimana yang kita ketahui pada kalkulus satu variabel, bahwa penjumlahan partisi dari suatu daerah dapat digunakan untuk menghitung luas daerah, volume, massa, gaya, momen inersia dan lain sebagainya. Untuk itu, kita coba dari situasi yang paling sederhana.

Contoh 1:

Dari gambar di atas, buatlah integral rangkap dua untuk menghitung luas satu daerah dari R pada bidang.

Jawab:

Luas satu daerah dari R artinya luas daerah pada bagian itu saja tanpa melihat z, yaitu :

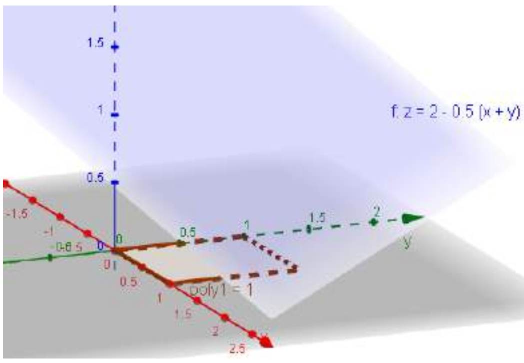
$$\text{Luas} = \int\int_R dA$$

Contoh 2:

Buatlah integral rangkap dua untuk menghitung volume dibawah $z = f(x,y) = 2 - 0{,}5(x+y)$ dan di atas persegi satuan pada bidang xy.

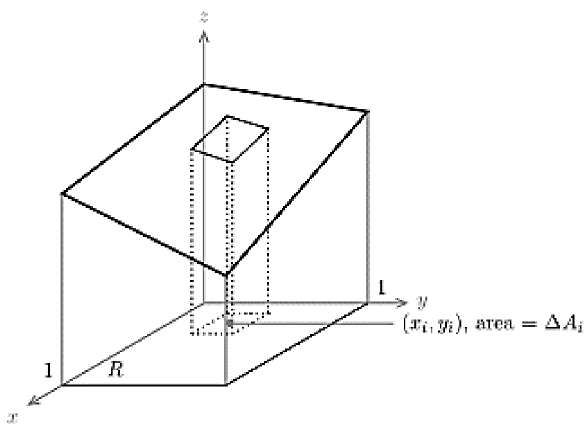
Jawab:

Pertama, kita gambarkan dahulu situasi soalnya.



Gambar 6. 2. $\boldsymbol{z = f(x,y) = 2 - 0{,}5(x+y)}$ *dengan Geogebra*

Kemudian coba kita spesifikkan.



Pada gambar kedua, persegi satuan kita namakan R dan kita buat bagian kecil dari R sehingga membentuk bagian kecil dari volume. Sekarang kita bayangkan R dibagi menjadi n bagian dan pada gambar kedua kita buat salah satu bagian yaitu bagian ke$-i$ yang mengandung titik (x_i, y_i) dan luas daerah ΔA_i.

Bagian kecil volume ke $-i$ tersebut jelas sebuah volume yaitu ΔV_i yang merupakan perkalian luas alas ΔA_i dengan tingginya yaitu $f(x_i, y_i)$, sehingga dapat dituliskan:

$$\Delta V_i \approx \Delta A_i \times f(x_i, y_i)$$

Total volume dari situasi di atas adalah jumlah semua bagian kecil volume, yaitu:

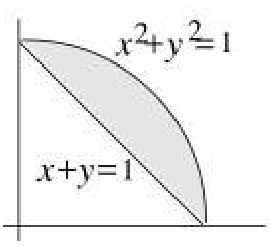
$$\text{Volume} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \times f(x_i, y_i)$$

Jika kita ambil n menuju tak hingga maka ΔA menuju 0, maka:

$$\text{Volume} = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta A_i = \int\int_R f(x, y)\, dA$$

Integral Rangkap Dua dalam Koordinat Persegi Panjang

Misalkan kita ingin menghitung daerah R seperti pada gambar berikut.



Integralnya adalah:

$$\int\int_R f(x, y)\, dydx$$

Di mana R adalah daerah di antara $x^2 + y^2 = 1$ dan $x + y = 1$.

Pertama, kita integralkan terhadap y, dengan cara:

1. Rubah $x + y = 1$ menjadi $y = 1 - x$, yang merupakan batas bawah.
2. Rubah $x^2 + y^2 = 1$ menjadi $y = \sqrt{1 - x^2}$, yang merupakan batas atas.
3. Sehingga kita peroleh batas atas dan bawah untuk variabel y.

Kedua, kita integralkan terhadap x, dengan cara:

1. Selesaikan persamaan untuk x di mana $1 - x = \sqrt{1 - x^2}$.
2. $(1 - x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x(x - 1) = 0$.
3. Sehingga kita peroleh batas bawah $x = 0$ dan $x = 1$.

Secara keseluruhan kita peroleh:

$$\int\int_R f(x, y)\, dydx = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dydx$$

Untuk menghitung integral rangkap duanya dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu:

Pertama:

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dydx = \int_0^1 \left[\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx$$

Kedua:

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dydx = \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy$$

Koordinat Polar

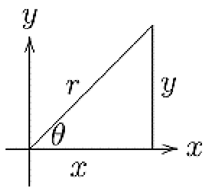
Koordinat polar (r, θ) merupakan transformasi dari koordinat (x, y) di mana:

$$x = r\cos\theta \quad \text{dan} \quad y = r\sin\theta$$

Sebaliknya,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{dan} \quad \theta = \arctan(y/x)$$

Dengan menggunakan segitiga siku-siku standar, yaitu:



Karena sinus dan cosinus merupakan fungsi periodik, maka (r, θ) yang berbeda-beda dapat merepresentasikan titik yang sama pada bidang, sebagai contoh:

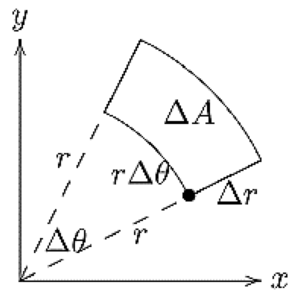
(x, y)	(r, θ)	(r, θ)
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,2\pi)$
$(1,1)$	$(\sqrt{2}, \pi/4)$	$(\sqrt{2}, 9\pi/4)$

Elemen Luas dalam Koordinat Polar

Dalam koordinat polar, elemen luas daerah diberikan oleh:

$$dA = r\ dr\ d\theta$$

Tampilan geometris dari situasi ini adalah sebagai berikut:



Perhatikan persegi panjang bersisi kurva memiliki sisi-sisi Δr dan $r\Delta\theta$ di mana:

$$\Delta A \approx (\Delta r)(r\Delta\theta)$$

Dengan menggunakan konsep limit diperoleh:

$$dA = r\ dr\ d\theta$$

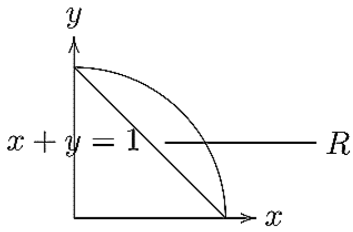
Integral Rangkap Dua dalam Koordinat Polar

Prosedur penentuan batas dalam koordinat polar serupa dengan koodinat persegi panjang.

Misalkan kita hendak menghitung:

$$\int\int_R dr\ d\theta$$

Di atas daerah R seperti pada gambar berikut.



Di mana R adalah daerah di antara 1/4 lingkaran dan $x + y = 1$.

Pertama, kita integralkan terhadap r, dengan cara:

1. Rubah $x + y = 1$ menjadi $r\cos\theta + r\sin\theta = 1 \Rightarrow r = 1/(\cos\theta + \sin\theta)$, yang merupakan batas bawah.
2. Sementara, dari ¼ lingkaran diketahui $r = 1$, yang merupakan batas atas.
3. Sehingga kita peroleh batas atas dan bawah untuk variabel r.

Kedua, kita integralkan terhadap θ, dengan cara:

1. Dari gambar diketahui bahwa θ berada di kuadran I.
2. Sehingga kita peroleh batas bawah $\theta = 0$ dan $\theta = \pi/2$.

Secara keseluruhan kita peroleh:

$$\int\int_R dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_{1/(\cos\theta+\sin\theta)}^{1} dr\, d\theta$$

Atau secara umum:

Jika $f(x, y)$ kontinu pada persegi panjang R di mana $a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, dan $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ maka integral rangkap dua dalam polar:

$$\int\int_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

Contoh 3:

Misalkan:

$$I = \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy\, dx$$

Hitunglah I menggunakan koordinat polar.

Jawab:

Langkahnya adalah:

1. Tuliskan batas yang diketahui.

   Dari batas yang ada pada soal diketahui:

$$1 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq x$$

2. Tentukan batas dalam koordinat polar.

   Karena:

$$x = r\cos\theta$$

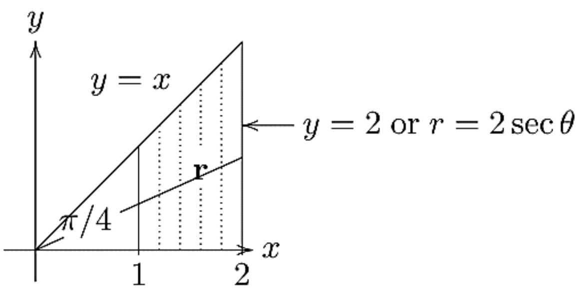
   Maka batas untuk r adalah:

$$1 \leq x \leq 2$$
$$1 \leq r\cos\theta \leq 2$$
$$\frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta}$$
$$\sec\theta \leq r \leq 2\sec\theta$$

   Selanjutnya, karena $0 \leq y \leq x$ maka $y = x$, akibatnya batas untuk θ adalah:

$$0 \leq \theta \leq \pi/4$$

3. Gambarkan daerahnya.



4. Buat integral rangkap duanya.

   Karena:

$$(x^2 + y^2)^{3/2} = (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^{3/2} = (r^2)^{3/2} = r^3$$

   Untuk transformasi dari $dydx$ ke $drd\theta$, gunakan determinan Jacobian:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Maka:

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = r\, dr\, d\theta$$

Dengan demikian, integral menjadi:

$$I = \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} \frac{1}{r^3} r\, dr\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} \frac{1}{r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} r^{-2}\, dr\, d\theta$$

5. Hitung integralnya.

$$I = \int_0^{\pi/4} \left[\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} r^{-2}\, dr\right] d\theta$$

Integral bagian dalam:

$$\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} r^{-2}\, dr = \left[-\frac{1}{r}\right]_{\sec\theta}^{2\sec\theta} = -\frac{1}{2\sec\theta} + \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{2}\sec\theta = \frac{1}{2}\cos\theta$$

Integral bagian luar:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

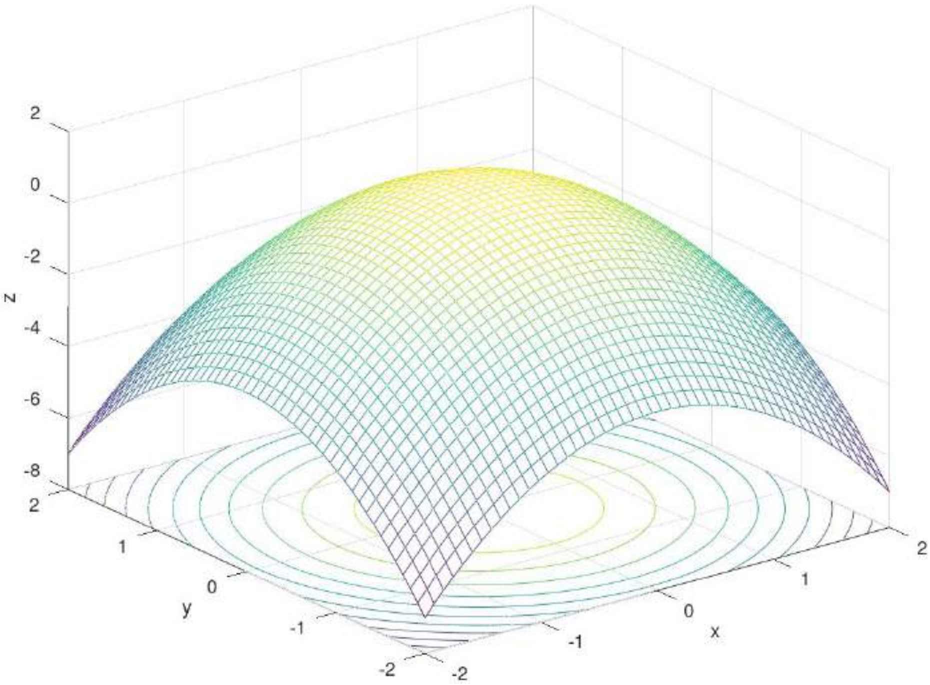
Contoh 4:

Tentukan volume dari daerah di atas bidang xy dan di bawah grafik:

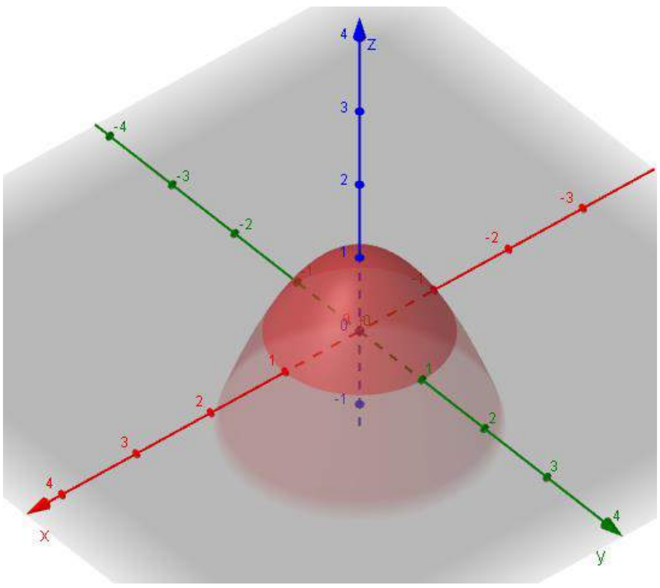
$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Jawab:

Pertama, kita gambar permukaan $z = 1 - x^2 - y^2$.



Gambar di atas menggunakan GNU Octave.



Gambar ini dibuat menggunakan Geogebra.

Kedua, tentukan batas-batasnya.

Pada kasus ini $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - (x^2 + y^2)$. Pada kedua gambar khususnya gambar pertama terlihat bahwa permukaan z memiliki kontur berbentuk lingkaran yang memenuhi persamaan $x^2 + y^2 = r^2$. Maka z menjadi $z = 1 - r^2$. Dengan mengambil nilai $z = 0$ maka diperoleh batas r yaitu:

$$-1 \leq r \leq 1$$

Namun, karena yang ditanyakan volume di atas bidang xy maka batas r menjadi:

$$0 \leq r \leq 1$$

Untuk batas θ, karena permukaan z memenuhi lingkaran maka batas θ adalah:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ketiga, tuliskan integralnya.

$$\text{Volume } V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr\, d\theta$$

Keempat, hitung integralnya.

$$\text{Volume } V = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - r^2) r dr \right] d\theta$$

Integral bagian dalam:

$$\int_0^1 (1 - r^2) r dr = \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Integral bagian luar:

$$\text{Volume } V = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta = \left[\frac{1}{4} \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \pi$$

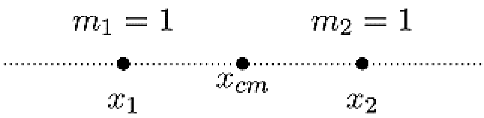
Massa dan Rata-Rata

Pusat Massa

Dua massa yang sama, pusat massanya adalah titik tengah di antara keduanya.

Contoh 5:

Misalkan:



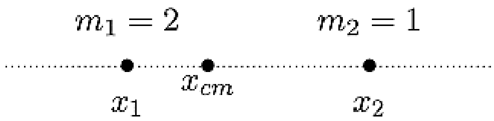
Tentukan pusat massa dari dua massa di atas.

Jawab:

$$x_{cm} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Dua massa yang tidak sama, pusat massanya adalah rata-rata bobot dari posisi keduanya.

Contoh 6:



Tentukan pusat massa dari dua massa di atas.

Jawab:

$$x_{cm} = \frac{2x_1 + x_2}{3}$$

Secara umum,

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

Massa dengan Kerapatan Kontinu

Untuk satu massa dengan kerapatan kontinu $\delta(x)$ pada segmen $[a, b]$, jumlahnya akan sama dengan:

$$M = \int_a^b \delta(x)dx$$

Sementara, pusat massanya menjadi:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_a^b x\delta(x)dx$$

Untuk dua massa dengan kerapatan kontinu $\delta(x, y)$ dengan pusat massa (x_{cm}, y_{cm}), diperoleh:

$$M = \int\int_R \delta(x, y)dA$$

Atau:

$$m = \int\int_D \rho(x, y)dA$$

Sementara, pusat massanya menjadi:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int\int_R x\delta(x, y)dA$$

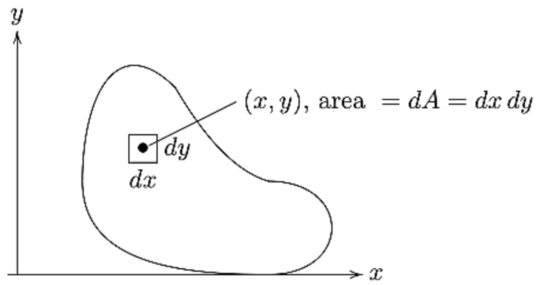
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int\int_R y\delta(x, y)dA$$

Atau:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x, y)dA$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x, y)dA$$

Untuk memahaminya lebih dalam lagi, perhatikan gambar berikut yang merupakan potongan atau bagian kecil daerah dari sebuah massa.



Gambar 6. 3. Partisi Sebuah Massa

Gambar di atas menunjukkan massa $\delta(x, y)dA$ dan tentu saja total massa merupakan jumlah semua bagian-bagian dari massa yang dinotasikan dengan:

$$M = \int\int_R \delta dA$$

Contoh 7:

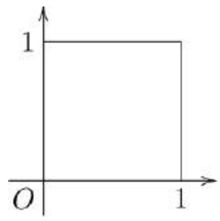
Misalkan persegi satuan memiliki kerapatan $\delta = xy$. Tentukan massa dan pusat massanya.

Jawab:

Karena daerah berbentuk persegi satuan, maka batas-batas untuk x dan y adalah:

$$0 \leq x \leq 1 \text{ dan } 0 \leq y \leq 1$$

Gambar dari daerahnya adalah:



Maka massanya adalah:

$$M = \int\int_R \delta dA = \int_0^1 \int_0^1 xydx\, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} ydy = \frac{1}{4}$$

Pusat massanya adalah:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int\int_R x\delta(x,y)dA = 4\int_0^1 \int_0^1 x^2ydx\, dy = 4\int_0^1 \frac{1}{3} ydy = \frac{2}{3}$$

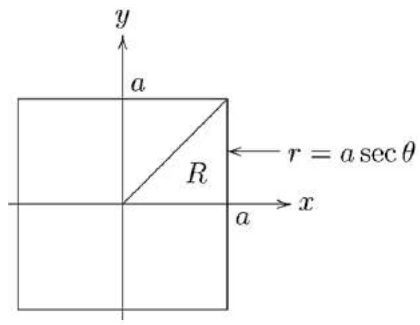
$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int\int_R y\delta(x,y)dA = 4\int_0^1 \int_0^1 xy^2dx\, dy = 4\int_0^1 \frac{1}{2} y^2dy = \frac{2}{3}$$

Contoh 8:

Tentukan rata-rata jarak satu titik pada persegi dari titik pusat.

Jawab:

Gambar dari permasalahan kira-kira seperti ini.



Perhatikan gambar di atas, panjang sisi-sisi dari persegi adalah $2a$ dan luas persegi $4a^2$. Jarak titik pada persegi dapat kita ambil dari mana saja, tetapi kita ambil rata-ratanya yang mewakili, yaitu titik-titik yang berpotongan dengan sumbu x dan y serta titik-titik pada ujung persegi.

Dari titik-titik pada ujung persegi, jika kita tarik garis dari pusatnya, kita peroleh dua segitiga sama kaki dengan $\theta = \frac{\pi}{4}$ dan $r = a\sec\theta$. Sehingga kita memiliki dua lingkaran yaitu 1/4 lingkaran kecil dengan jari-jari a dan 1/4 lingkaran besar dengan jari-jari r.

Sebagaimana yang kita ketahui, persamaan lingkaran secara umum adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Maka:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dengan menggunakan kesimetrian bahwa daerah yang akan diintegralkan adalah 8 kali daerah segitiga, maka:

$$\text{Rata} - \text{rata jarak} = \frac{8}{4a^2}\int\int_{\text{persegi}} \sqrt{x^2 + y^2}dx\,dy$$

$$\text{Rata} - \text{rata jarak} = \frac{2}{a^2}\int\int_R r\,rdr\,d\theta$$

Batas-batas untuk r tentunya ada pada interval $0 \le r \le a\sec\theta$, sedangkan batas-batas untuk θ ada pada kuadran I dengan interval $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

Maka integral menjadi:

$$\text{Rata} - \text{rata jarak} = \frac{2}{a^2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sec\theta} r^2\,dr\,d\theta$$

$$\text{Rata}-\text{rata jarak}=\frac{2}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}a^3\sec^3\theta\,d\theta=\frac{2}{3}a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta$$

Bentuk:

$$\int\sec^3\theta\,d\theta$$

dapat diselesaikan menggunakan integral parsial,yaitu:

$$\int\sec^{\mathrm{n}}\theta\,d\theta=\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{\mathrm{n}-2}\theta\,d\theta+\frac{\sec^{\mathrm{n}-2}\theta\tan\theta}{n-1}$$

Maka:

$$\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int\sec\theta\,d\theta+\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta$$

$$\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\ln(\sec\theta+\tan\theta)+\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta$$

$$\int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}(\ln(\sec\theta+\tan\theta)+\sec\theta\tan\theta)$$

Dengan demikian,

$$\text{Rata}-\text{rata jarak}=\frac{2}{3}a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta\frac{2}{3}a\left[\frac{1}{2}(\ln(\sec\theta+\tan\theta)+\sec\theta\tan\theta)\right]_0^{\pi/4}$$

$$\text{Rata}-\text{rata jarak}=\frac{2}{3}a\left[\frac{1}{2}\left(\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\right)\right]=\frac{1}{3}a\left(\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\right)$$

Momen Inersia

Untuk lebih jelas mengenai momen inersia, silahkan Anda pergi ke kelas Fisika. Secara sederhana, momen inersia adalah ukuran kelembaman/kecenderungan suatu benda untuk berotasi pada porosnya. Karena momen inersia berkaitan dengan rotasi maka terdapat kaitan dengan garis tertentu pada saat berotasi.

Untuk sebuah titik massa, momen inersia pada sebuah garis didefinisikan:

$$I=md^2$$

Di mana d adalah jarak dari massa ke garis.

Sementara momen inersia dari fungsi kerapatan $\delta(x,y)$ dihitung dengan rumus:

Pada sumbu x:

$$I_x = \int\int_R y\delta(x,y)dA$$

Pada sumbu y:

$$I_x = \int\int_R x\delta(x,y)dA$$

Pada titik pusat:

$$I_O = \int\int_R (x^2+y^2)\delta(x,y)dA$$

Contoh 9:

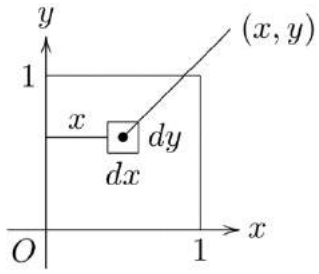
Misalkan persegi satuan R memiliki kerapatan $\delta = xy$. Tentukan momen inersia pada sumbu y.

Jawab:

Misalkan situasi pada soal adalah sebagai berikut:

Perhatikan gambar, jarak dari bagian kecil pada persegi ke sumbu y adalah x. Jika bagian kecil itu memiliki massa dm maka momen inersianya adalah:

$$dI = x^2dm = x^2\delta(x,y)dA = x^3y\ dxdy$$



Penggunaan notasi dI menunjukkan bagian kecil dari momen inersia. Sehingga jumlah semua bagian kecil dari momen inersia dinotasikan dengan:

$$I = \int\int_R dI$$

Batas-batas untuk x dan y cukup jelas yaitu $0 \le x \le 1$ dan $0 \le y \le 1$. Sehingga momen inersianya adalah:

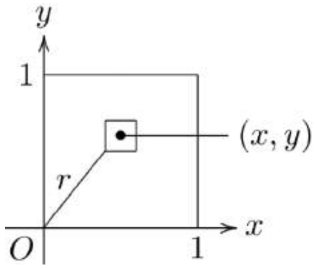
$$I = \int\int_R dI = \int_0^1 \int_0^1 x^3 y \, dx \, dy = \frac{1}{8} \text{ (silahkan cek)}$$

Contoh 10:

Misalkan persegi satuan R memiliki kerapatan $\delta = xy$. Tentukan momen inersia dalam bentuk polar.

Jawab:

Misalkan situasi digambarkan sebagai berikut:



Perhatikan gambar, momen inersia bentuk polar pada bidang xy adalah momen inersia terhadap titik pusat yaitu sumbu z dengan jarak r.

Sehingga kita peroleh:

$$dI = r^2 dm = (x^2 + y^2)\delta(x, y)dA = (x^3 y + xy^3)dxdy$$

Untuk batas-batas x dan y serupa dengan Contoh 1, maka total dari momen inersianya adalah:

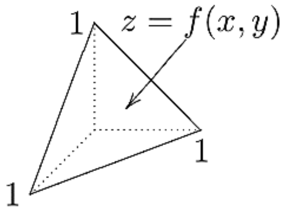
$$I = \int\int_R dI = \int_0^1 \int_0^1 (x^3 y + xy^3) \, dx \, dy = \frac{1}{4} \text{ (silahkan dicek)}$$

Latihan 6

1. Tentukan massa dari daerah R jika kerapatannya $\delta(x, y) = xy$ yang dibatasi oleh:

$$y = x + 1; \; y = x^2; \; x = 1$$

2. Tentukan volume tetrahedron seperti pada gambar berikut.



3. Hitunglah:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy\, dx$$

Dengan merubah urutan integrasinya.

4. Hitunglah:

$$\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\, dy\, dx$$

5. Hitunglah:

$$\int\int_R f(x, y) dx\, dy$$

Di mana:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Dan R adalah daerah di dalam lingkaran dengan jari-jari 1 berpusat di (1,0).

6. Hitunglah luas daerah di dalam cardioid $r = 1 + \cos\theta$.
7. Misalkan R adalah daerah pada lingkaran satuan di kuadran I dengan kerapatan $\delta(x, y) = y$.
   (c) Tentukan massa dari R.
   (d) Tentukan pusat massa.
   (e) Tentukan jarak rata-rata dari sebuah titik di R ke sumbu x.

8. Misalkan R adalah daerah pada segitiga dengan titik-titik $(0,0), (1,0), (1, \sqrt{3})$ dengan kerapatan $\delta = 1$. Tentukan momen inersia bentuk polar.

Jawaban 6

1. Massa didefinsikan dengan:

$$\int\int_R \delta(x, y) dA$$

Batas variabel y dari x^2 ke $x+1$.

Batas variabel x dari 0 sampai 1.

Maka:

$$\int\int_R \delta(x,y)dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x+1} xy\, dy\right] dx$$

Integral dalam:

$$\int_{x^2}^{x+1} xy\, dy = \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^{x+1} = \frac{1}{2}x(x+1)^2 - \frac{1}{2}x^5 = \frac{1}{2}(x^3+2x^2+x-x^5)$$

Integral luar:

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(x^3+2x^2+x-x^5)dx = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^6\right)\right]_0^1 = \frac{5}{8}$$

2. Volume dari tetrahedron adalah:

$$V = \int\int_R zdA$$

$z = f(x,y) = 1-x-y$

Batas variabel x dari 0 sampai 1.

Batas variabel y dari 0 sampai $1-x$.

Maka:

$$V = \int\int_R zdA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)dy\, dx$$

Integral dalam:

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy = \left[y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} = 1-x-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2$$

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2$$

Integral luar:

$$V = \int\int_R zdA = \int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2)dx = \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

3. Urutannya dari $dxdy$ adalah:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy \right] dx \rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dx \right] dy$$

Batas y dari x sampai $\pi/2$.

Batas x dari 0 sampai $\pi/2$.

Jika dirubah urutannya maka:

Batas y dari 0 sampai $\pi/2$.

Batas x dari 0 sampai y

Penjelasan:

Batas y dari x sampai $\pi/2$ menjadi batas x dari 0 sampai y.

Kita lihat x dan y ada di kuadran I.

Jadi, berdasarkan koordinat polar dan fungsi sinus, maka:

Batas y dari 0 sampai $\pi/2$.

Batas x dari 0 sampai y

Maka:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy$$

Integral dalam:

$$\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\, dx = \left[\frac{x \sin y}{y} \right]_0^y = \sin y$$

Integral luar:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy = [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

4. Hasil perhitungan:

$$\int_0^{2} \int_0^{y} e^{-y^2}\, dx\, dy$$

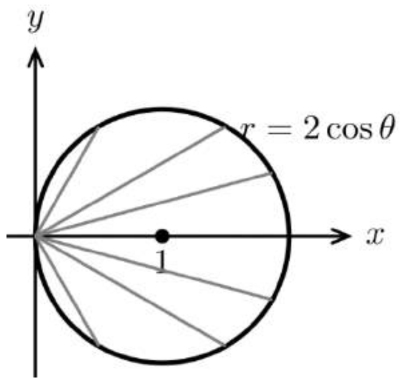
Integral dalam:

$$\int_0^y e^{-y^2}\,dx = \left[xe^{-y^2}\right]_0^y = ye^{-y^2}$$

Integral luar:

$$\int_0^2 ye^{-y^2}\,dy = \left[-\frac{y}{2y}e^{-y^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) \approx \frac{1}{2}$$

5. Pertama kita gambarkan daerah R di dalam lingkaran dengan $r = 1$ di pusat (1,0).



Perhatikan bahwa persamaan lingkaran dengan $r = 1$ dan berpusat di (1,0) dalam polar adalah:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

Dalam polar:

$$x = r\cos\theta = \cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \sin\theta$$

Maka:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2\cos\theta$$

$$1 = 2\cos\theta$$

$$r = 2\cos\theta$$

Dari gambar jelas bahwa:

Batas r (batas dalam) adalah $0 < r < 2\cos\theta$

Batas θ (batas luar) adalah $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ artinya sudut terbentuk tegak lurus dari sudut -90^o sampai 90^o.

Maka:

$$\int\int_R f(x,y)dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{r}rdr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}dr\,d\theta$$

Integral dalam:

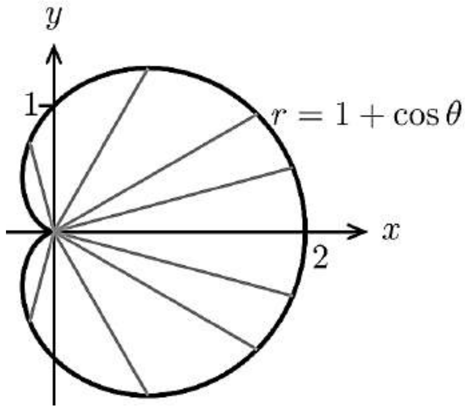
$$\int_0^{2\cos\theta}dr = 2\cos\theta$$

Integral luar:

$$\int\int_R f(x,y)dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\cos\theta\,d\theta$$

$$\int\int_R f(x,y)dx\,dy = (2\sin\pi/2) + (2\sin\pi/2) = 4$$

6. Kardioid adalah bentuk geometri menyerupai hati, seperti gambar berikut:



Dengan menggunakan garis radial maka batas integrasinya adalah:

Batasnya adalah:

Batas dalam yaitu batas r dari 0 sampai $1 + \cos\theta$.

Batas luar yaitu batar θ dari 0 sampai 2π.

Maka luas area adalah:

$$\int\int_R dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{1+\cos\theta} = \frac{(1+\cos\theta)^2}{2}$$

Integral luar:

$$\int\int_R dA = \int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos\theta)^2}{2}d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos\theta+\frac{\cos^2\theta}{2}\right)d\theta$$

Perhatikan:

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} cos^2\,\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+cos\ 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{sin\ 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Maka:

Integral luar:

$$\int\int_R dA = \left[\frac{1}{2}\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \pi + 0 + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

7. (a) Karena R adalah bagian dari lingkaran satuan maka kita gunakan koordinat polar. Dari soal diketahui bahwa R terletak pada kuadran pertama maka batas dari integral adalah:

$$0 \le r \le 1 \text{ dan } 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\delta(x,y) = y \text{ menjadi } \delta(x,y) = r\sin\theta$$

Sehingga:

$$M = \int\int_R \delta dA$$

$$M = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r\sin\theta) r dr\, d\theta$$

$$M = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^1 r^2\sin\theta\, dr = \frac{1}{3}\sin\theta$$

Integral luar:

$$M = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\sin\theta\, d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

(b) Koordinat pusat massa adalah (x_{cm}, y_{cm}) yang dinyatakan dengan:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int\int_R x\delta dA$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int\int_R y\delta dA$$

Karena:

$$M = \frac{1}{3}$$

Untuk x_{cm}:

$$x_{cm} = 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r\cos\theta)(r\sin\theta)r dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 3r^3\cos\theta\sin\theta\, dr\, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^1 3r^3\cos\theta\sin\theta\, dr = \left[\frac{3}{4}r^4\cos\theta\sin\theta\right]_0^1 = \frac{3}{4}\cos\theta\sin\theta$$

Integral luar:

$$x_{cm} = \int_0^{\pi/2}\frac{3}{4}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}$$

Untuk y_{cm}:

$$y_{cm} = 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r\sin\theta)(r\sin\theta)r dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 3r^3\sin^2\theta\, dr\, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^1 3r^3\sin^2\theta\, dr = \frac{3}{4}\sin^2\theta$$

Integral luar:

$$y_{cm} = \int_0^{\pi/2}\frac{3}{4}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$y_{cm} = \int_0^{\pi/2}\frac{3}{4}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$y_{cm} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\pi - 0\right) = \frac{3}{16}\pi$$

Maka pusat massanya adalah:

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{16}\pi\right)$$

(c) Jarak rata-rata (J_R) fungsi $f(x,y)$ pada area R adalah:

$$J_R = \frac{1}{\pi/4}\int\int_R f(x,y)dA = \frac{4}{\pi}\int\int_R y\, dA$$

$$J_R = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (r\sin\theta)r\, dr\, d\theta$$

$$J_R = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta\ dr\, d\theta$$

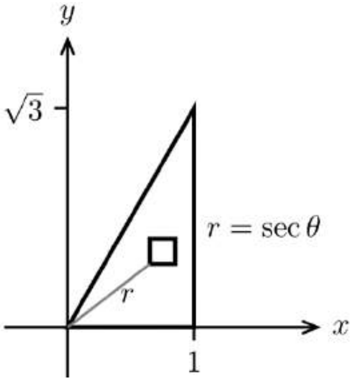
Integral dalam:

$$\int_0^1 r^2\sin\theta\ dr = \frac{1}{3}\sin\theta$$

Integral luar:

$$J_R = \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{3}\sin\theta\, d\theta = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{4}{3\pi}$$

8. Daerah R adalah segitiga dengan sudut $30^o, 60^o, 90^o$ seperti gambar berikut:



Perhatikan pada gambar menunjukkan segitiga dan potongan persegi kecil dalam R. Jika potongan persegi memiliki luas dA maka momen inersia dalam polar $dI = r^2\delta dA$. Karena $\delta = 1$, $dA = r\, dr d\theta$ maka total momen inersia adalah:

$$I = \int\int_R r^2\delta dA = \int\int_R r^2(1)r\, dr\, d\theta = \int\int_R r^3\, dr\, d\theta$$

Karena $x = 1$ dan x dalam polar $x = r\cos\theta$ maka $r\cos\theta = 1$ atau:

$$r = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

Batas integral $0 \le r \le \sec\theta$ dan $0 \le \theta \le \pi/3$.

Maka:

$$I = \int_0^{\pi/3}\int_0^{\sec\theta} r^3 dr\, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^{\sec\theta} r^3 dr = \frac{1}{4}\sec^4\theta$$

Integral luar:

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{4}\sec^4\theta\, d\theta$$

Gunakan:

$$\sec^4\theta = \sec^2\theta\sec^2\theta = (1+\tan^2\theta)d(\tan\theta)$$

Maka:

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{4}\sec^4\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\left[\tan\theta + \frac{1}{3}\tan^3\theta\right]_0^{\pi/3}$$

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{4} \sec^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Jadi, momen inersia dalam bentuk polar adalah $\sqrt{3}/2$.

Rangkuman 6

1. Integral rangkap dua dari f di atas persegi panjang R adalah:

$$\int\int_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A$$

Tentu saja, jika limitnya eksis.

2. Jika $f(x,y)$ kontinu pada persegi panjang R di mana $a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, dan $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ maka integral rangkap dua dalam polar:

$$\int\int_R f(x,y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta\, , r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

3. Massa dengan kerapatan kontiny $\delta(x,y)$ dihitung dengan rumus:

$$M = \int\int_R \delta(x,y) dA$$

Atau

$$m = \int\int_D \rho(x,y) dA$$

4. Momen inersia dari fungsi kerapatan $\delta(x,y)$ dihitung dengan rumus:

Pada sumbu x:

$$I_x = \int\int_R y\delta(x,y) dA$$

Pada sumbu y:

$$I_x = \int\int_R x\delta(x,y) dA$$

Pada titik pusat:

$$I_O = \int\int_R (x^2 + y^2)\delta(x,y) dA$$

5. Untuk dua massa dengan kerapatan kontinu $\delta(x,y)$ dengan pusat massa (x_{cm}, y_{cm}), dihitung dengan rumus:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int\int_R x\delta(x,y) dA$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int\int_R y\delta(x,y)dA$$

Atau:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)dA$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x,y)dA$$

Tes Formatif 6

1. Volume benda solid pada oktan pertama yang dibatasi oleh bidang xy, yz, xz, $x + y = 4$ dan permukaan $z = \sqrt{4 - x}$ adalah …
   A. 18/5
   B. 27/5
   C. 32/5
   D. 64/5
   E. 72/5
2. Volume tetrahedron yang dibatasi bidang $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, dan $z = 0$ adalah …
   A. 36
   B. 216/35
   C. 15/2
   D. 3/2
   E. 1/3
3. Nilai dari:

$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA$$

   Di mana R daerah setengah bidang bagian atas yang dibatasi lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$ adalah …
   A. $17\pi/2$
   B. $15\pi/2$
   C. $9\pi/2$
   D. $7\pi/2$
   E. $\pi/2$

4. Massa dari segitiga dengan titik-titik $(0,0), (1,0), (0,2)$ dan fungsi kerapatan $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$ adalah …
   A. $8/3$
   B. $3/8$
   C. $11/16$
   D. $6/11$
   E. $5/24$
5. Momen inersia dalam polar dari satu loop lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ sekitar pusatnya di mana $\delta = 1$ adalah …
   A. $\pi a^4/4$
   B. $\pi a^4/8$
   C. $\pi a^4/16$
   D. $\pi a^4/32$
   E. $\pi a^4/64$

Jawaban Tes Formatif 6

1. D

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-x} \sqrt{4-x}\, dy\, dx$$

Integral dalam:

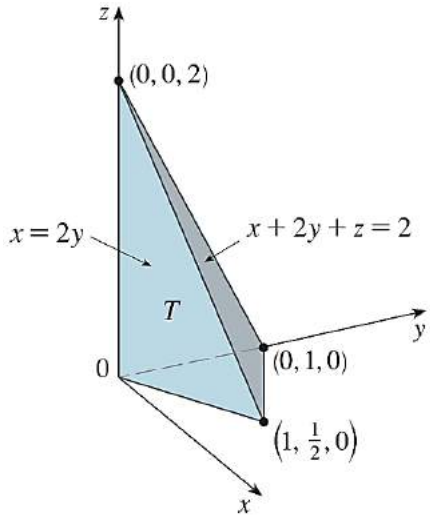
$$\int_0^{4-x} \sqrt{4-x}\, dy = (4-x)\sqrt{4-x} = (4-x)^{3/2}$$

Integral luar:

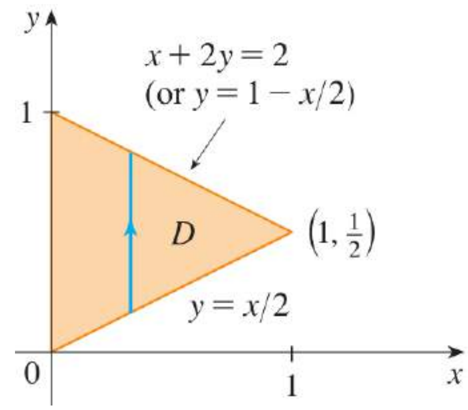
$$V = \int_0^4 (4-x)^{3/2} dx = \left[-\frac{2}{5}(4-x)^{5/2}\right]_0^4 = \frac{64}{5}$$

2. E

Karena $x + 2y + z = 2$ maka $z = 2 - x - 2y$ dan gambar permasalahan seperti gambar berikut:



Sementara area D pada bidang xy seperti gambar berikut:



Dari gambar diatas jelas bahwa:

Batas x antara 0 sampai 1.

Batas y antara $x/2$ sampai $1 - x/2$.

Maka:

$$V = \int\int_D (2 - x - 2y)dA$$

$$V = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)dy\,dx$$

Integral dalam:

$$\int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)dy = x^2 - 2x + 1$$

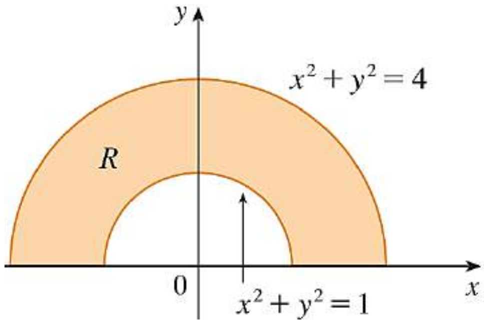
Integral luar:

$$V = \int_0^1 x^2 - 2x + 1dx = \frac{1}{3}$$

3. B

Daerah R dapat digambarkan sebagai:

$$R = \{(x, y)|y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$



Dari gambar jelas bahwa:

Batas r antara 0 sampai 2.

Batas θ antara 0 sampai π

Variabel x dan y dalam polar adalah:

$3x = 3r\cos\theta$ dan $4y^2 = 4(r\sin\theta)^2 = 4r^2\sin^2\theta$

Maka:

$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)\,dr\,d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)\,dr = 7\cos\theta + 15\sin^2\theta$$

Integral luar:

$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA = \int_0^\pi (7\cos\theta + 15\sin^2\theta)d\theta$$

$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA = \int_0^\pi \left(7\cos\theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA = \int_0^\pi \left(7\cos\theta + \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA = \left[7\sin\theta + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi$$

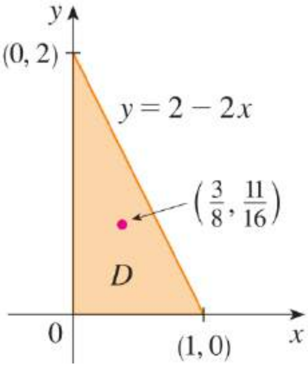
$$\int\int_R (3x + 4y^2)dA = \frac{15}{2}\pi$$

4. A

Ingat bahwa rumus massa adalah:

$$m = \int\int_D \rho(x, y)dA$$

Karena segitiga memiliki titik-titik $(0,0), (1,0), (0,2)$ maka diperoleh gambar:



Dari gambar di atas jelas bahwa:

Batas x antara 0 sampai 1, dan batas y antara 0 sampai $2 - 2x$.

Maka:

$$m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)dy\,dx$$

Integral dalam:

$$\int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)dy = \left[y + 3xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{2-2x}$$

$$\int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)dy = 2 - 2x + 6x - 6x^2 + 2(1 - 2x + x^2)$$

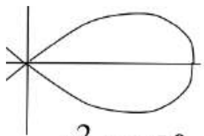
$$\int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)dy = 4 - 4x^2$$

Integral luar:

$$m = \int_0^1 (4 - 4x^2)dx = \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

5. C

Karena lemniscate berbentuk simetri, untuk menghitung momen inersia, kita hanya menggunakan loop bagian atas saja dan dikalikan 2, seperti pada gambar berikut:



$r^2 = \cos 2\theta$

Gambar menunjukkan bahwa

Sudut bagian atas terletak antara $0 \le \theta \le \pi/4$.

Dan r terletak antara $0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Maka:

$$I_O = 2\int\int_D (x^2+y^2)\delta dA = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^2(1)r\,dr\,d\theta$$

$$I_O = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\,dr\,d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\,dr = \frac{1}{4}a^4\cos^2 2\theta$$

Integral luar:

$$I_O = 2\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\theta\,d\theta = \frac{\pi a^4}{16}$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 6 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 6.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 7. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 6, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 7

MEDAN VEKTOR DUA DIMENSI, INTEGRAL GARIS DAN CURL

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep medan vektor dan integral garis.

Materi 7

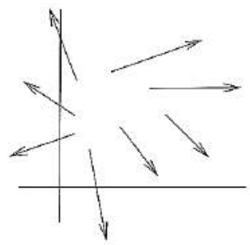
Medan Vektor pada Bidang

Perhatikan fungsi berikut ini:

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = \langle M, N \rangle \qquad (1)$$

Di mana M dan N keduanya fungsi dua variabel. Untuk tiap pasangan (x_0, y_0) sehingga M dan N terdefinisi, fungsi seperti ini menetapkan vektor $\mathbf{F}(x_0, y_0)$ ada dalam bidang. Oleh karena itu $\mathbf{F}$ disebut vektor fungsi dua variabel. Himpunan titik-titik (x, y) yang membuat $\mathbf{F}$ terdefinisi disebut domain $\mathbf{F}$ [5].

Bentuk visual secara umum dari fungsi $\mathbf{F}(x, y)$ di tiap titik (x_0, y_0) dalam domain $\mathbf{F}$, kita tempatkan $\mathbf{F}(x_0, y_0)$ sehingga ujung vektornya ada di (x_0, y_0). Dengan demikian tiap titik dalam domain adalah ujung dari sebuah vektor, sehingga menghasilkan **medan vektor**. Medan vektor ini memberikan gambaran dari fungsi vektor $\mathbf{F}(x, y)$sebagai berikut:



Gambar 7. 1. Medan Vektor

Sebaliknya, jika diberikan medan vektor dari daerah di bidang xy, medan vektor tersebut akan menghasilkan sebuah fungsi vektor seperti (1) dengan mengekspresikan setiap medan vektor dalam komponen **i** dan **j**. Sebagai catatan, **fungsi vektor** bermakna sama dengan **medan vektor**.

Contoh 1:

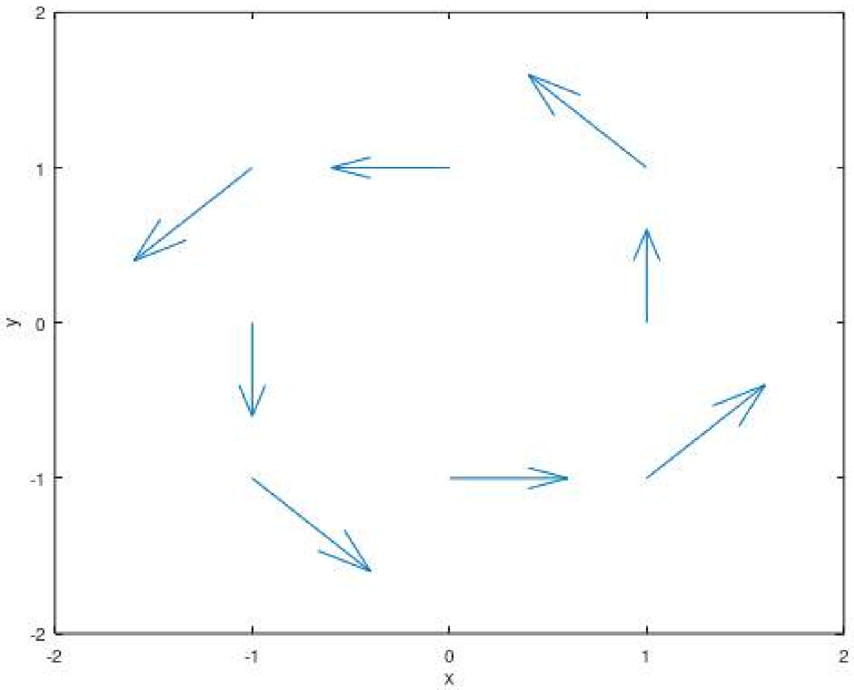
Sebuah medan vektor di $\mathbb{R}^2$ didefinsikan oleh:

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Gambarkan $\mathbf{F}$ dengan domain $[-1,\ 1]$.

Jawab:

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(-1,-1)$	$\langle 1,-1\rangle$
$(-1,0)$	$\langle 0,-1\rangle$
$(-1,1)$	$\langle -1,-1\rangle$
$(0,-1)$	$\langle 1,0\rangle$
$(0,0)$	$\langle 0,0\rangle$
$(0,1)$	$\langle -1,0\rangle$
$(1,-1)$	$\langle 1,1\rangle$
$(1,0)$	$\langle 0,1\rangle$
$(1,1)$	$\langle -1,1\rangle$



Gambar 7. 2. Medan Vektor $\boldsymbol{F} = \langle -\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$

Perhatikan, gambar di atas menunjukkan bahwa tiap vektor adalah tangen pada sebuah lingkaran berpusat di (0,0). Untuk menunjukkannya kita gunakan dot product antara vektor posisi $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ dengan $\mathbf{F}(x, y)$, yaitu:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(x, y) = \langle x, y \rangle \cdot \langle -y, x \rangle = 0$$

Medan Vektor pada Ruang

Perhatikan fungsi berikut ini:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + O(x, y, z)\mathbf{k} \quad (2)$$

Penjelasannya analog dengan medan vektor pada bidang.

Contoh 2:

Sebuah medan vektor di $\mathbb{R}^3$ didefinsikan oleh:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\boldsymbol{k}$$

Gambarkan $\mathbf{F}$ dengan domain $[-3,\ 3]$.

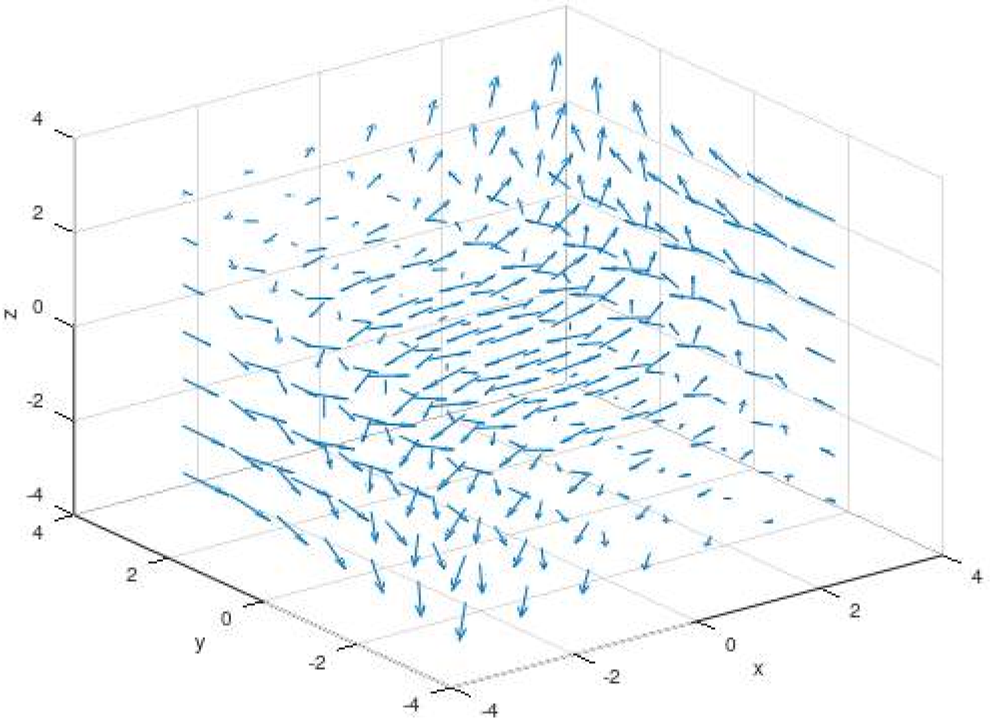
Jawab:

Kita gambarkan F menggunakan Octave dengan sintaks:

```
>> [x,y,z] = meshgrid(-3:3, -3:3, -3:3);
```

```
>> M = y;
>> N = z;
>> O = x;
>> quiver3(x, y, z, M, N, O);
>> xlabel("x")
>> ylabel("y")
>> zlabel("z")
```

Diperoleh gambar:



Gambar 7. 3. Medan Vektor $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle$

Sebagai tambahan, **F** kontinu di beberapa daerah pada bidang jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ adalah fungsi kontinu di daerah tersebut. Dengan cara yang sama, kita mengatakan bahwa **F** dapat diturunkan di beberapa daerah jika M dan N juga dapat diturunkan yang artinya semua turunan parsial dari M dan N eksis.

$$\frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y}$$

Selain itu, $\mathbf{F}$ dapat diturunkan secara kontinu di daerah tersebut jika semua turunan parsial kontinu di daerah tersebut. Secara umum, medan vektor dapat diturunkan secara kontinu kecuali pada titik-titik tertentu atau pada daerah tertentu pada kurva. Namun demikian, titik-titik atau kurva tersebut berpengaruh pada sifat-sifat penting medan vektor.

Gradien Medan Vektor

Perhatikan fungsi berikut ini:

$$w = f(x, y) \tag{3}$$

Jika (3) adalah fungsi yang dapat diturunkan maka gradien dari w adalah:

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} \tag{4}$$

Perhatikan, ∇w adalah medan vektor karena turunan parsialnya adalah fungsi dari x dan y.

Sekarang kita ingat kembali interpretasi geometris dari gradien, yaitu:

$$|\nabla w| = \text{nilai terbesar dari } \left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}} \tag{5}$$

Di mana:

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{\mathbf{u}} = \nabla w \cdot \mathbf{u}$$

Adalah turunan berarah dari w searah $\mathbf{u}$.

Fakta penting lainnya dari gradien adalah jika salah satu gradien diambil dari kontur kurva $f(x, y)$, berdasarkan definisi kurva:

$$f(x, y) = c, \qquad c \text{ konstan}$$

Maka di tiap titik (x_0, y_0), gradien vektor ∇w di titik tersebut tegak lurus dengan garis kontur, dengan kata lain:

Gradien medan f tegak lurus dengan kontur kurva f (6)

Contoh 3:

Tentukan gradien medan vektor dari $w = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Jawab:

Dengan menggunakan definisi (4), diperoleh:

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j}$$

Sekarang kita tentukan turunan parsial masing-masing. Untuk turunan parsial terhadap x diperoleh:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Untuk turunan parsial terhadap y dengan cara yang sama diperoleh:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

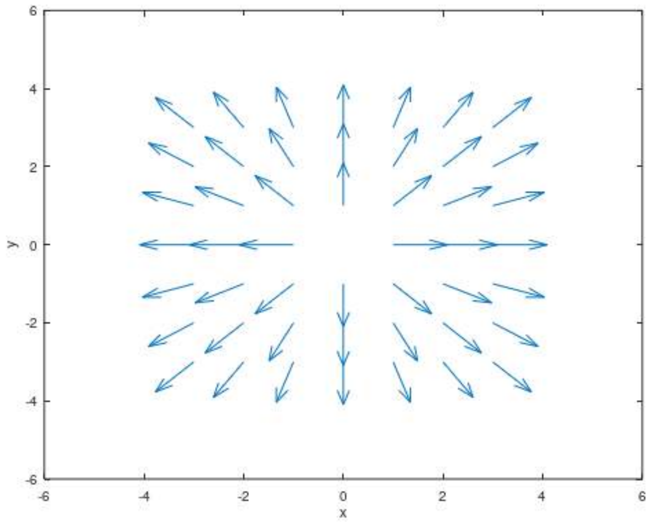
Dengan demikian gradien medan vektor dari w adalah:

$$\nabla w = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

Kita bisa gambarkan gradien medan vektor w menggunakan Octave, dengan sintaks:

```
>> [x, y] = meshgrid(-3:3, -3:3);
>> M = x./(sqrt(x.^2+y.^2));
>> N = y./(sqrt(x.^2+y.^2));
>> quiver(x, y, M, N);
```

Diperoleh gambar:



Gambar 7. 4. Medan Vektor $\boldsymbol{\nabla w}$

Perhatikan, titik (0,0) pada bidang xy dihapus dari domain ∇w dan akibatnya ∇w dapat diturunkan secara kontinu di daerah pada bidang xy. Karena $|xi + yj| = r$ maka akibatnya $|\nabla w| = 1$. Dengan demikian semua vektor dari medan vektor ∇w adalah vektor satuan dan mengarah keluar dari titik (0,0). Hal ini sangat masuk akal dengan (5) karena definisi dari w menunjukkan bahwa dw/ds harus bernilai paling besar pada arah luar radial, dan memiliki nilai 1 pada arah itu.

Sehingga kontur kurva w merupakan lingkaran yang berpusat di (0,0) yang tegak lurus dengan ∇w di mana-mana seperti yang diprediksi (6).

Medan Gaya dan Kecepatan

Pencarian terkait penggunaan medan vektor, berikut ini adalah dua situasi fisika yang dijelaskan secara matematis oleh bidang vektor.

Medan Gaya

Dari fisika, kita memiliki medan gaya elektrostatis dua dimensi yang muncul dari sebuah distribusi muatan statis (yaitu, tidak bergerak) di dalam bidang. Di setiap titik (x_0, y_0) pada bidang, kita menempatkan vektor yang mewakili gaya yang akan bekerja pada muatan satuan positif yang ditempatkan di titik tersebut.

Dengan cara yang sama, kita mendapatkan medan vektor yang muncul dari distribusi massa pada bidang xy, mewakili gaya gravitasi yang bekerja pada setiap titik pada satuan massa. Ada juga medan elektromagnetik yang timbul dari muatan listrik yang bergerak dan / atau sebaran magnet, yang mewakili gaya magnet di setiap titik.

Semua ini akan kita sebut sebagai **medan gaya**.

Contoh 4:

Ekspresikan dalam $\mathbf{i}$ dan $\mathbf{j}$ dari medan gaya elektrostatis $\mathbf{F}$ pada bidang xy yang timbul dari muatan positif satuan yang ditempatkan di titik asal, mengingat vektor gaya pada (x, y) diarahkan secara radial menjauh dari asalnya dan memiliki besaran c/r^2, c konstan.

Jawab:

Karena vektor $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ dengan ujung vektor di (x, y) diarahkan secara radial ke luar dan memiliki besaran r, maka vektor itu memiliki arah ke kanan, dan kita hanya perlu mengubah besarnya menjadi c/r^2.

Caranya kita kalikan $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ dengan c/r^3, sehingga diperoleh:

$$\mathbf{F} = \frac{cx}{r^3}\mathbf{i} + \frac{cy}{r^3}\mathbf{j}$$

Karena $r^2 = x^2 + y^2$ maka:

$$\mathbf{F} = \frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$$

Medan Alir dan Medan Kecepatan

Medan vektor yang kedua muncul sebagai medan alir dan medan kecepatan. Bayangkan sebuah fluida mengalir di tangki dangkal horizontal dengan kedalaman seragam, dan asumsikan bahwa pola aliran pada titik mana pun murni horizontal dan tidak berubah seiring waktu. Kita akan menyebutnya sebagai aliran kondisi-mapan dua dimensi atau singkatnya, cukup aliran. Fluida dapat dimampatkan (seperti gas), atau tidak dapat dimampatkan (seperti air).

Kita juga mengizinkan kemungkinan bahwa pada berbagai titik, fluida ditambahkan atau dikurangi dari aliran; misalnya, seseorang mungkin berdiri di atas tangki yang menuangkan air pada titik tertentu, atau di area tertentu. Kita juga mengizinkan kepadatan bervariasi dari satu titik ke titik lain, seperti halnya pada gas yang dipanaskan secara tidak merata.

Dengan aliran seperti itu kita dapat mengasosiasikan dua medan vektor.

Ada **medan kecepatan** $\mathbf{v}(x, y)$ dimana vektor $\mathbf{v}(x, y)$ pada titik (x, y) melambangkan vektor kecepatan aliran pada titik itu - yaitu, arahnya memberikan arah aliran, dan besarnya memberikan kecepatan aliran.

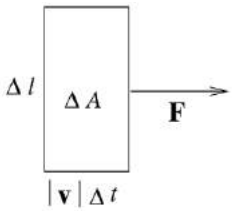
Lalu ada **medan alir**, didefinisikan oleh:

$$\mathbf{F} = \delta(x, y)\mathbf{v}(x, y) \tag{7}$$

dimana $\delta(x, y)$ memberikan massa jenis fluida pada titik (x, y), dalam variabel massa per satuan luas. Dengan asumsi massa jenis tidak 0 pada titik (x, y), kita bisa menafsirkan $\mathbf{F}(x, y)$ sebagai berikut:

$$\text{dir } \mathbf{F} = \text{arah aliran fluida di } (x, y) \tag{8}$$

$$|\mathbf{F}| = \begin{cases} \text{laju transportasi massa (per satuan panjang per detik)} \\ \text{melintasi garis tegak lurus terhadap arah aliran di (x, y)} \end{cases}$$



Dari (8) dan kemudian dengan gambar di atas, diperoleh:

$$|\mathbf{F}|\Delta l \Delta t = \delta|\mathbf{v}|\Delta t \Delta l = \text{massa pada } \Delta A$$

Jika kedua ruas kita bagi dengan $\Delta l \Delta t$ dan $\Delta l m \Delta t \to 0$ maka diperoleh (8).

Jika massa jenis δ_0 konstan, dan akan terjadi pada fluida yang tidak dapat dimampatkan pada suhu yang seragam, maka medan aliran dan medan kecepatan pada dasarnya sama, dengan (7) di mana salah satu vektornya hanyalah kelipatan skalar konstan dari vektor lainnya.

Contoh 5:

Deskripsikan dan interpretasikan:

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Sebagai medan alir dan medan gaya.

Jawab:

Sebagaimana pada Contoh 4, medan $\mathbf{F}$ terdefinisi di mana-mana kecuali di (0,0) dan arahnya keluar secara radial, dan besarnya $|\mathbf{F}| = r/r^2$ atau $|\mathbf{F}| = 1/r$.

$\mathbf{F}$ adalah **medan alir** untuk sumber berkekuatan 2π dari titik (0,0). Untuk melihat ini, lihat lingkaran dengan jari-jari a berpusat pada (0,0). Pada setiap titik P dalam lingkaran ini, alirannya keluar secara radial dan dengan (8), diperoleh:

$$\text{Laju transportasi massa di P } = \frac{1}{a}$$

$$\text{Laju transportasi massa melintasi lingkaran } = \frac{1}{a} \cdot 2\pi a = 2\pi$$

Ini menunjukkan bahwa dalam satu detik, 2π massa mengalir keluar melalui setiap lingkaran yang berpusat di titik asal. Ini adalah medan alir untuk sumber berkekuatan 2π di asalnya, semisal, orang bisa membayangkan pipa sempit ditempatkan di atas tangki, memperkenalkan 2π satuan massa per detik pada titik (0,0).

Kita tahu bahwa $|\mathbf{F}| = \delta|\mathbf{v}| = 1/r$ maka terdapat dua kasus penting yaitu:

• jika fluida tidak dapat dimampatkan, seperti air, maka massa jenisnya konstan, sehingga kecepatan aliran berkurang sebesar $1/r$ dan akibatnya aliran ke luar semakin lambat semakin jauh dari asalnya;

• jika dapat dimampatkan seperti gas, dan kecepatan alirannya tetap, maka densitasnya berkurang sebesar $1/r$.

Sekarang kita dapat menafsirkan medan yang sama sebagai **medan gaya**.

Misalkan kita pikirkan sumbu z di ruang 3 dimensi sebagai kawat lurus panjang, membawa muatan elektrostatis positif yang seragam. Ini memberi kita medan vektor di ruang 3 dimensi, mewakili medan gaya elektrostatis. Karena satu bagian kawat tampak seperti bagian lainnya, simetri radial pertama-tama menunjukkan bahwa vektor pada medan gaya memiliki 0 sebagai $\mathbf{k}$ - komponen, yang diarahkan secara radial ke luar dari kabel, dan kedua bahwa besarnya hanya bergantung pada jaraknya r dari kabel. Hal ini dapat ditunjukkan pada kenyataan bahwa medan gaya yang dihasilkan adalah $\mathbf{F}$, hingga faktor konstan.

Medan seperti itu disebut "berdimensi dua", meskipun itu adalah medan vektor dalam ruang, karena z dan $\mathbf{k}$ tidak dimasukkan ke dalam deskripsinya. Jika kita mengetahui tampilannya di bidang xy, maka kita tahu bagaimana tampilannya di ruang 3 dimensi. dengan kabel.

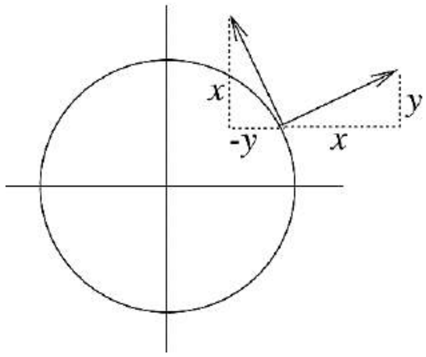
Contoh 6:

Tentukan medan kecepatan fluida dengan massa jenis 1 di tangki dangkal, berputar dengan kecepatan sudut ω konstan berlawanan arah jarum jam di sekitar titik (0,0).

Jawab:

Pertama kita tentukan arah medan di setiap titik (x, y).

Kita tahu vektor $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ diarahkan ke luar secara radial. Oleh karena itu sebuah vektor akan tegak lurus dengan arah jarum jam (lihat gambar) yaitu $-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ karena produk skalar dengan $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ adalah 0 dan tandanya benar.



Vektor sebelumnya memiliki besaran r. Jika kecepatan sudutnya adalah ω, maka kecepatan linier diberikan oleh:

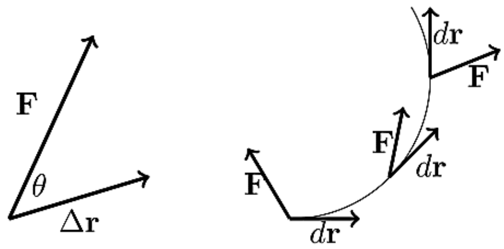
$$|\mathbf{v}| = \omega r$$

Untuk mendapatkan medan kecepatan fluida, kalikan medan di atas dengan ω sehingga diperoleh:

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

Integral Garis dan Usaha

Perhatikan dua gambar berikut ini:



Gambar di sebelah kiri menunjukkan gaya **F** yang diterapkan pada perpindahan **Δr**. Sebagaimana yang kita tahu bahwa usaha adalah gaya dikalikan jarak, tetapi hanya komponen gaya yang searah dengan perpindahan yang melakukan usaha. Dengan kata lain,

$$\text{Usaha} = |\mathbf{F}| \cos\theta\, |\mathbf{\Delta r}| = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Delta r}$$

Sementara, gambar di sebelah kanan menunjukkan jika usaha dilakukan dalam potongan-potongan kecil, maka variabel gaya variabel yang diterapkan pada kurva akan menghasilkan usaha total yang ditentukan dengan 'menjumlahkan' potongan yang sangat kecil. Kita menyebutnya sebagai integral garis dan dilambangkan dengan:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Di mana:

$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} = \langle M, N \rangle$ adalah medan vektor pada bidang atau

$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + O\mathbf{k} = \langle M, N, O \rangle$ adalah medan vektor pada ruang

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \langle x, y \rangle$ adalah kurva C pada bidang di mana $d\mathbf{r} = \langle dx, dy \rangle$ atau

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \langle x, y, z \rangle$ adalah kurva C pada ruang di mana $d\mathbf{r} = \langle dx, dy, dz \rangle$

Menghitung integral garis

Perhatikan contoh berikut:

Contoh 7:

Evaluasi,

$$I = \int_C x^2 y\, dx + (x - 2y) dy$$

Dimana:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \langle M, N\rangle \cdot \langle dx, dy\rangle = \int_C Mdx + Ndy$$

$$\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j}$$

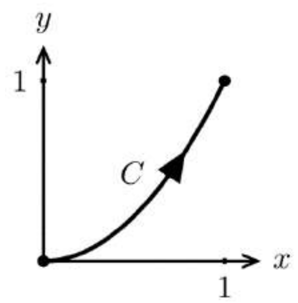
Di atas bagian parabola $y = x^2$ dari (0,0) sampai (1,1).

Jawab:

Pertama, tentukan persamaan parametrik kurva terlebih dahulu. Karena $y = x^2$ maka:

$x(t) = t$ dan $y(t) = t^2$ di mana $0 \leq t \leq 1$.

Seperti pada gambar berikut:



Selanjutnya kita tentukan turunan dari x dan y, yaitu:

$dx = dt$ dan $dy = 2t\ dt$

Sehingga integral menjadi:

$$I = \int_C x^2y\ dx + (x - 2y)dy$$

$$I = \int_0^1 t^2t^2\ dt + (t - 2t^2)2tdt$$

$$I = \int_0^1 t^4 + 2t^2 - 4t^3dt = -\frac{2}{15}$$

Contoh 8:

Evaluasi,

$$I = \int_C x^2y\ dx + (x - 2y)dy$$

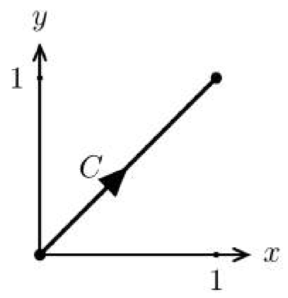
Di atas bagian garis $y = x$ dari (0,0) sampai (1,1).

Jawab:

Pertama, tentukan persamaan parametrik kurva terlebih dahulu. Karena $y = x$ maka:

$x(t) = t$ dan $y(t) = t$ di mana $0 \leq t \leq 1$.

Seperti pada gambar berikut:



Selanjutnya kita tentukan turunan dari x dan y, yaitu:

$dx = dt$ dan $dy = dt$

Sehingga integral menjadi:

$$I = \int_C x^2 y\, dx + (x - 2y) dy$$

$$I = \int_0^1 t^2 t\, dt + (t - 2t) dt$$

$$I = \int_0^1 t^3 - t dt = -\frac{1}{4}$$

Contoh 9:

Evaluasi,

$$I = \int_C x^2 y\, dx + (x - 2y) dy$$

Di atas bagian kurva C dengan persamaan parametrik $x(t) = \sin t$ dan $y(t) = \sin^2 t$ di mana $0 \leq t \leq \pi/2$.

Jawab:

Karena kurva sudah dalam bentuk parametrik, maka kita tentukan turunan dari x dan y yaitu:

$dx = \cos t\ dt$ dan $dy = 2 \sin t \cos t\ dt$

Sehingga integral menjadi:

$$I = \int_C x^2 y\, dx + (x - 2y)dy$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t \; dt + (\sin t - 2\sin^2 t) 2 \sin t \cos t \; dt$$

$$I = \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t + 2\sin^2 t - 4\sin^3 t) \cos t \; dt$$

$$I = \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t + 2\sin^2 t - 4\sin^3 t) d(\sin t)$$

$$I = \left[\frac{\sin^5 t}{5} + \frac{2}{3}\sin^3 t - \sin^4 t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{15}$$

Hasil ini mengilustrasikan titik yang sangat penting bahwa integral garis tidak bergantung pada bagaimana kurva diparameterisasi.

Sifat-sifat dan Notasi Integral Garis

1) Integral garis tidak bergantung pada parameterisasi.

2) Jik arah pada kurva kebalikannya maka integral garis berubah tanda, yaitu:

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$-C$ bermakna kurva yang sama bergerak dengan arah berlawanan.

3) Jika C tertutup kita gunakan notasi:

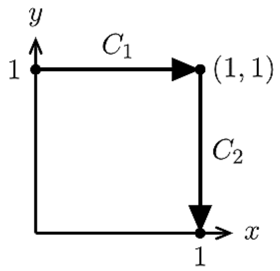
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C M\, dx + N\, dy$$

Contoh 10:

Evaluasi,

$$I = \int_C y\, dx + (x + 2y)dy$$

Di mana C seperti pada gambar berikut:



Jawab:

Pada gambar terlihat, kurva terbagi menjadi dua bagian, sehingga integral juga akan terbagi menjadi dua bagian, yaitu:

$$I = \int_{C_1} y\,dx + (x+2y)dy + \int_{C_2} y\,dx + (x+2y)dy$$

Pada kasus ini, kita tidak perlu parameter t pada kurva C.

Pada C_1 untuk $y = 1$ gunakan x sebagai parameter di mana $0 \le x \le 1$ dan $dx = dx, dy = 0$.

Sunstitusikan ke dalam integral diperoleh:

$$\int_{C_1} y\,dx + (x+2y)dy = \int_0^1 dx = 1$$

Sementara pada C_2 untuk $x = 1$ nilai y bergerak dari 1 ke 0 dan $dy = dy, dx = 0$.

Sunstitusikan ke dalam integral diperoleh:

$$\int_{C_1} y\,dx + (x+2y)dy = \int_1^0 (1+2y)dy = -\int_0^1 (1+2y)dy = -2$$

Maka:

$$I = 1 - 2 = -1$$

Integral Garis dengan Pendekatan Geometris

Integral garis pada hakekatnya merupakan bentuk geometris, jadi terkadang kita harus dapat menggunakan penalaran geometris untuk menghindari perhitungan yang membosankan yang digunakan dalam menghitung integral garis tertentu.

Geometri juga dapat memberi kita wawasan tentang situasi yang terkadang tidak jelas perhitungannya.

Kita mulai dengan integral garis yang kita hitung secara langsung, seperti contoh berikut.

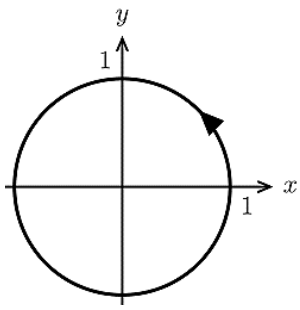
Contoh 11:

Evaluasi,

$$I = \oint_C -y\,dx + x\,dy$$

Di mana C adalah lingkaran satuan yang melintas dengan arah berlawanan jarum jam.

Jawab:



Pertama, kita buat parameter untuk lingkaran yaitu:

$$x = \cos t\,, \qquad y = \sin t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Kemudian, tentukan turunan dari x dan y diperoleh:

$$dx = -\sin t\,dt,\;\; dy = \cos t\;\,dt$$

Sehingga integral menjadi:

$$I = \oint_C -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} -\sin t\,(-\sin t)dt + \cos t\cos t\,dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt + \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Rumus Dasar

Sebagaimana yang kita ketahui:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}$$

Di mana $\mathbf{T}$ =tangen satuan dan $s =$ panjang busur. Dengan eliminir dt diperoleh:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T}\, ds$$

Sehingga kita peroleh rumus integral garis lainnya yaitu:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Definisi Integral Garis

Jika f terdefinisi pada kurva mulus C maka integral garis f sepanjang kurva C adalah:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

Jika limitnya eksis.

Contoh 12:

Evaluasi menggunakan rumus dasar dari:

$$I = \oint_C -y\, dx + x\, dy$$

Di mana C adalah lingkaran satuan yang melintas dengan arah berlawanan jarum jam.

Jawab:

Kita tahu bahwa $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ dan tangen satuan dari lingkaran C adalah $\mathbf{T} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, maka $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \langle -y, x \rangle \cdot \langle -y, x \rangle = y^2 + x^2 = 1$

Sehungga:

$$I = \oint_C -y\, dx + x\, dy$$

$$I = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C ds = 2\pi$$

Gradien Medan dan Fungsi Potensial

Sebelumnya kita sudah sedikit tahu tentang gradien dari fungsi bernilai skalar, yaitu:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle$$

Sebagai contoh:

$$\nabla x^3 y^4 = \langle 3x^{2y^4}, 4x^3 y^3 \rangle$$

Kita juga sudah mempelajari tentang medan vektor dan gradien medan vektor. Perhatikan bahwa f disebut **fungsi potensial** pada medan vektor $\mathbf{F}$.

Teorema Fundamental Integral Garis

Jika $\mathbf{F} = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$ adalah gradien medan vektor dan C adalah sebarang kurva dengan titik-titik ujung $P_0 = (x_0, y_0)$ dan $P_1 = (x_1, y_1)$ maka:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x, y)|_{P_0}^{P_1} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

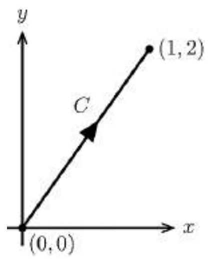
Artinya, untuk gradien medan vektor, integral garis tidak bergantung pada lintasan yang diambil, yaitu, hanya bergantung pada titik akhir C.

Contoh 13:

Misalkan $f(x, y) = xy^3 + x^2$. Hitunglah menggunakan dua cara dari:

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Di mana C seperti pada gambar berikut:



Jawab:

Cara pertama:

Tentukan bentuk parametrik dari C yaitu $x = x,\ y = 2x,\ 0 \leq x \leq 1$.

$$\mathbf{F} = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle y^3 + 2x, 3xy^2 \rangle$$

$$d\mathbf{r} = \langle dx, dy \rangle = \langle dx, 2dx \rangle$$

Maka:

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \langle y^3 + 2x, 3xy^2 \rangle \cdot \langle dx, 2dx \rangle = \int_C (y^3 + 2x)dx + 3xy^2.2dx$$

$$I = \int_0^1 (8x^3 + 2x)dx + 24x^3 dx = \int_0^1 (32x^3 + 2x)dx = 9$$

Cara kedua:

Menggunakan teorema fundamental, diperoleh:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(1,2) - f(0,0) = 9$$

Bukti teorema fundamental

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_C f_x\, dx + f_y dy$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \left[f_x\big(x(t), y(t)\big) \frac{dx}{dt} + f_y\big(x(t), y(t)\big) \frac{dy}{dt} \right] dt$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) dt$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = [f(x(t), y(t))]_{t_0}^{t_1}$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(P_1) - f(P_0)$$

Signifikansi teorema fundamental

Untuk gradient medan **F** integral dari usaha:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Bergantung hanya pada titik-titik ujung lintasan. Situasi seperti ini kita sebut integral garis lintasan independen.

Kasus khusus dari situasi ini jika kurva C tertutup adalah:

$$\mathbf{F} = \nabla f \Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Menurut ilmu fisika, gaya konservatif tidak bekerja di sekitar loop tertutup, artinya:

$$\mathbf{F} = \nabla f \text{ adalah medan konservatif}$$

Contoh 14:

Jika **F** adalah medan listrik dari suatu muatan listrik maka **F** konservatif.

Contoh 15:

Medan gravitasi dari sebuah massa adalah konservatif.

Just to remember:

$a)$ $\mathbf{F} = \nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} = \langle f_x, f_y \rangle$

b) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} = \langle x, y \rangle$

c) $d\mathbf{r} = \langle dx, dy \rangle$

d) $\nabla f \cdot d\mathbf{r} = f_x\, dx + f_y\, dy$

$e)$ $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(P_1) - f(P_0)$

Pada bagian d) kita tahu bahwa $df = f_x\, dx + f_y\, dy$. Jika $M = f_x$ dan $N = f_y$ sehingga:

$$M\, dx + N\, dy$$

Disebut turunan eksak jika $M\, dx + N\, dy = df$ untuk beberapa fungsi f.

Akibatnya bagian e) menjadi:

$$\int_C M\, dx + N\, dy = \int_C df = f(P_1) - f(P_0)$$

Bukti bahwa Lintasan Independen Ekuivalen dengan Konservatif

Kita telah menunjukkan bahwa:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ adalah lintasan independen untuk sebarang kurva } C$$

Ekuivalen dengan

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ untuk sebarang lintasan tertutup}$$

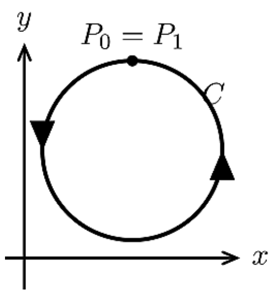
Namun, kita harus menunjukkan bahwa:

(i) Jika lintasan independen maka integral garis di sekitar sebarang lintasan tertutup adalah 0.

(ii) Jika integral garis di sekitar semua lintasan tertutup adalah 0 maka lintasan independen.

Bukti:

(i) Asumsikan lintasan independen dan perhatikan lintasan tertutup C pada gambar berikut:



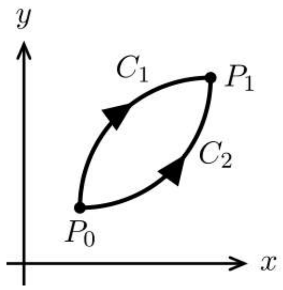
Perhatikan gambar di atas bahwa titik awal P_0 sama dengan titik akhir P_1, akibatnya:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(P_1) - f(P_0) = 0$$

(ii) Asumsikan:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Untuk sebarang kurva tertutup. Jika C_1 dan C_2 adalah dua lintasan antara P_0 dan P_1 seperti pada gambar berikut:



Maka $C_1 - C_2$ adalah lintasan tertutup. Berdasarkan hipotesis ini, maka:

$$\oint_{C_1 - C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Akibatnya:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Di mana integral garis adalah lintasan independen.

Kriteria Gradien Medan Vektor

Misalkan $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ adalah medan vektor berdimensi dua di mana M dan N adalah fungsi kontinu. Terdapat 3 cara yang ekuivalen untuk menyatakan bahwa $\mathbf{F}$ konservatif, yaitu:

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

$$\Leftrightarrow \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ adalah lintasan independen}$$

$$\Leftrightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ untuk sebarang } C \text{ tertutup}$$

Namun sayangnya, ekuivalensi ketiganya tidak memberikan cara yang efektif untuk menentukan apakah $\mathbf{F}$ medan vektor konservatif atau tidak. Jika kita asumsikan $\mathbf{F}$ tidak kontinu tetapi terdapat kejadian dapat diturunkan secara kontinu semisal M_x, M_y, N_x, N_y semuanya eksis dan kontinu, maka terdapat kriteria yang sederhana dan elegan untuk menentukan apakah $\mathbf{F}$ gradien medan vektor di beberapa daerah.

Teorema Kriteria

Misal $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ adalah fungsi yang *differentiable* secara kontinu di daerah D, maka:

$$\mathbf{F} = \nabla f \text{ untuk beberapa } f(x, y) \Rightarrow M_y = N_x$$

Bukti:

Karena $\mathbf{F} = \nabla f$ maka:

$$M = f_x \text{ dan } N = f_y$$

Sehingga:

$$M_y = f_{xy} \text{ dan } N_x = f_{yx}$$

Namun karena $f_{xy} = f_{yx}$ maka $M_y = N_x$.

Curl Dua Dimensi

Teorema ini mungkin saja diekspresikan dalam bentuk yang berbeda, jika kita mendefinisikan fungsi skalar yang disebut **curl dua dimensi** dari $\mathbf{F}$, maka:

$$\text{curl } \mathbf{F} = N_x - M_y$$

Akibatnya:

$$\mathbf{F} = \nabla f \Rightarrow \text{curl } \mathbf{F} = 0$$

Dengan kata lain,

jika $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ maka **curl dua dimensi** dari $\mathbf{F}$ adalah:

$$\text{curl } \mathbf{F} = N_x - M_y$$

Sebagai contoh, jika $\mathbf{F} = x^3y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, maka $M = x^3y^2$ dan $N = x$, sehingga:

$$\text{curl } \mathbf{F} = 1 - 2x^3y$$

Kriteria ini dapat digunakan menguji $\mathbf{F}$ untuk melihat apakah $\mathbf{F}$ suatu gradien medan vektor atau tidak. Secara natural, kita dapat menentukan konvers dari pernyataan di atas apakah benar atau tidak, yaitu: jika curl $\mathbf{F} = 0$ maka $\mathbf{F}$ adalah gradien medan vektor. Namun, konvers ini memerlukan hipotesis tambahan pada daearah D. Jika kita asumsikan D adalah bidang secara keseluruhan, maka kita dapati teorema berikut:

Teorema Kriteria Konvers

Misal $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ adalah fungsi yang *differentiable* secara kontinu untuk semua x dan y, maka:

$$M_y = N_x \text{ untuk semua } x \text{ dan } y \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f \text{ untuk beberapa } f(x, y) \text{dan semua } x, y$$

Contoh 16:

Untuk nilai a dan b berapakah sehingga $axy\mathbf{i} + (x^2 + by)\mathbf{j}$ menjadi gradien medan vektor?

Jawab:

Kita tahu bahwa:

$M = axy$ dan $N = x^2 + by$

Maka:

$M_y = ax$ dan $N_x = 2x$

Karena:

$$\mathbf{F} = \nabla f \text{ untuk beberapa } f(x,y) \Rightarrow M_y = N_x$$

Dan

$$M_y = N_x \text{ untuk semua } x \text{ dan } y \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f \text{ untuk beberapa } f(x,y) \text{dan semua } x, y$$

Maka:

$$\mathbf{F} = \nabla f \Leftrightarrow M_y = N_x$$

Akibatnya:

$$ax = 2x \text{ atau } a = 2$$

Dan b sebarang.

Contoh 17:

Jika:

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} \text{ dan } \mathbf{G} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Apakah **F** dan **G** konservatif?

Jawab:

Kita tahu bahwa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Dimana:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Persamaan ini memenuhi:

$$\mathbf{F} = \nabla f \text{ untuk beberapa } f(x,y) \Rightarrow M_y = N_x$$

Namun medan vektor tidak terdenisi pada (0,0), sehingga teorema kriteria konvers tidak berlaku.

Sementara:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Persamaan ini juga memenuhi:

$$\mathbf{G}=\boldsymbol{\nabla} g \text{ untuk beberapa } f(x,y)\Rightarrow M_y=N_x$$

Namun medan vektor tidak terdenisi pada (0,0), sehingga teorema kriteria konvers tidak berlaku.

Sehingga kita belum dapat menentukan berdasarkan teorema kriteria dan konvers, apakah **F** dan **G** konservatif.

Faktanya, ternyata **F** adalah gradien medan vektor, karena dapat diperiksa bahwa:

$$\mathbf{F}=\nabla \ln\sqrt{x^2+y^2}=\nabla \ln r$$

Karena jika:

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

Maka:

$$\frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}=M \text{ dan } \frac{d}{dy}f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}=N$$

Atau kita periksa menggunakan integral:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$$

Karena C adalah lingkaran satuan dengan $x=\cos t$ dan $y=\sin t$, di mana:

$$dx=-\sin t\,dt \text{ dan } dy=\cos t\;dt$$

Maka:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t\cos t\,dt+\sin t\cos t\,dt}{\sin^2 t+\cos^2 t}=0$$

Sementara untuk **G** ternyata bukan gradien medan vektor, karena dapat diperiksa bahwa:

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt + \cos^2 t\,dt}{\sin^2 t + \cos^2 t} = 2\pi \neq 0$$

Fungsi Potensial

Pada contoh sebelumnya, kita tahu bahwa:

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \nabla \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \nabla \ln r$$

Tentu saja hal ini menimbulkan pertanyaan, bagaimana kita mendapatkan fungsi:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

Secara umum, jika kita tahu bahwa $\mathbf{F} = \nabla f$ sebagai contoh jika curl $\mathbf{F} = 0$ pada seluruh bidang xy, maka bagaimana kita mendapatkan fungsi $f(x, y)$?

Terdapat dua metode yang mungkin kita gunakan.

Metode 1.

Misalkan $\mathbf{F} = \nabla f$, dengan teorema fundamental integral garis, maka:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Dari sini, kita dapat menentukan $f(x, y)$ di mana:

$$f(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + f(x_0, y_0)$$

Dengan $f(x_0, y_0) = c$ dan c adalah sebarang konstanta.

Catatan: $f(x, y)$ disebut sebagai **fungsi potensial**.

Contoh 18:

Misalkan $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (2xy + 3y^2)\mathbf{j}$

Verifikasi apakah $\mathbf{F}$ memenuhi teorema kriteria dan gunakan metode 1 untuk mendapatkan fungsi potensial $f(x, y)$.

Jawab:

Pertama, kita lakukan turunan parsial dari komponen $\mathbf{F}$ yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3y^2) = 2y$$

Dan kita peroleh:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3y^2)$$

Memenuhi teorema kriteria.

Metode 1.

Ambil sebarang titik (x_0, y_0), pada kasus ini kita ambil titik $(x_0, y_0) = (0,0) = c$ dengan catatan integran terdefinisi di titik tersebut. Sehingga kita peroleh:

$$f(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + f(x_0, y_0)$$

$$f(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x + y^2)dx + (2xy + 3y^2)dy + 0$$

$$f(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x + y^2)dx + (2xy + 3y^2)dy + c$$

Karena integral merupakan lintasan independen, maka kita bisa memilih sebarang lintasan dan memilih yang termudah untuk menyederhanakan perhitungan.

Misalkan kita ambil lintasan sebagai berikut:

Pada C_1, kita lihat $y = 0$, dan $dy = 0$ maka integral pada C_1 menjadi:

$$\int_0^x x\, dx = \frac{1}{2}x^2$$

Pada C_2, kita lihat $x =$ sebarang nilai, dan $dx = 0$ maka integral pada C_2 menjadi:

$$\int_0^y (2xy + 3y^2)dy = xy^2 + y^3$$

Maka integral sepanjang C_1 dan C_2 diperoleh dengan menjumlahkan integral pada C_1 dan C_2, sehingga diperoleh fungsi potensial:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + y^3 + c$$

Metode 2.

Misalkan $\mathbf{F} = \nabla f$ maka $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j}$ di mana:

$$M = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ dan } N = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Kita tahu bahwa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y^2$$

Maka jika kita integralkan kedua ruas dengan menganggap y konstanta, maka diperoleh:

$$f = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + c(y)$$

Untuk menentukan $c(y)$, kita hitung $\partial f/\partial y$ dengan dua cara, yaitu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + c'(y)$$

Dan

$$N = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3y^2$$

Maka:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$2xy + c'(y) = 2xy + 3y^2$$

Sehingga $c'(y) = 3y^2$ dan integralkan kedua ruas diperoleh $c(y) = y^3 + c$.

Jadi,

$$f = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + y^3 + c$$

Turunan Eksak

Kita sudah belajar tentang turunan total dari $f(x,y)$ yaitu df yang dinotasikan:

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Jika total turunan dari beberapa fungsi $f(x, y)$ terdefinisi dalam daerah D maka bentuk $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ yang muncul dalam integral garis disebut **turunan eksak** dalam daerah D dimana M dan N terdefinisi.

Sehingga:

$$M = f_x \text{ dan } N = f_y \text{ untuk beberapa } f(x, y)$$

Dari sini kita lihat hubungan antara turunan dengan medan vektor, yang menyatakan bahwa:

$$Mdx + Ndy \text{ adalah turunan eksak } \Leftrightarrow M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ adalah gradien medan vektor}$$

atau

$$Mdx + Ndy = df \Leftrightarrow M\mathbf{i} + N\mathbf{j} = \boldsymbol{\nabla} f$$

Dari hubungan ini, maka diperoleh:

Kriteria Eksak

Asumsikan M dan N adalah fungsi yang dapat diturunkan secara kontinu di daerah D pada suatu bidang, maka:

$$Mdx + Ndy = df \Rightarrow M_y = N_x$$

$$\text{Jika } D \text{ adalah seluruh bidang } xy,\ M_y = N_x \Rightarrow Mdx + Ndy = df$$

Jika kriteria eksak menunjukkan bahwa $Mdx + Ndy$ eksak, maka fungsi $f(x, y)$ mungkin dapat ditemukan.

Latihan 7

1. Buatlah sketsa menggunakan Octave medan-medan vektor berikut ini.
   (a) Gaya, medan gravitasi konstan $\mathbf{F}(x, y) = -g\mathbf{j}$.
   (b) Kecepatan:
   $$\mathbf{V}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$
   (c) Medan tangen satuan $\mathbf{F} = \langle -y/r, x/r \rangle$
   (d) Gradien $\mathbf{F} = \nabla f$ di mana:
   $$f(x, y) = \frac{xy}{3} \text{ dan } \nabla f = \langle \frac{y}{3}, \frac{x}{3} \rangle$$
2. Hitunglah gradien medan vektor dari $f(x, y) = xy^2$.
3. Misalkan $f = xy + e^x$

a) Hitunglah $\mathbf{F} = \nabla f$.

b) Hitunglah:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

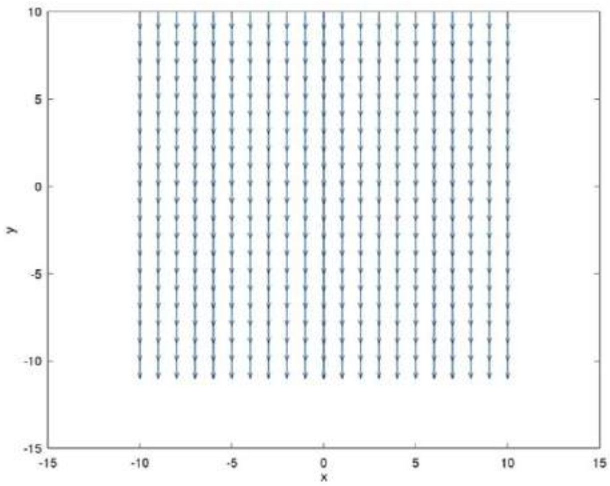
Untuk lintasan berikut ini dari (0,0) sampai (2,1) di mana lintasan terdiri dari segmen horisontal diikuti oleh segmen vertikal.

4. Tunjukkan apakah medan vektor $\mathbf{F} = \langle xe^x + y, x\rangle$ koservatif atau tidak.
5. Tunjukkan bahwa $(xe^x + y\,)dx + xdy$ adalah turunan eksak.
6. Tentukan curl $\mathbf{F}$ dari medan vektor $\mathbf{F} = \langle x, xe^x + y\rangle$.
7. Jika $\mathbf{F} = \langle 3x^2 + 6xy, 3x^2 + 6y\rangle$, Tentukan fungsi potensial f sedemikian sehingga $\mathbf{F} = \nabla f$.
8. Misalkan $\mathbf{F} = (x + xy^2)\mathbf{i} + (x^2y + 3y^2)\mathbf{j}$, tunjukkan bahwa $\mathbf{F}$ adalah gradien medan vektor.

Jawaban 7

1. (a) Sintaks Octave:

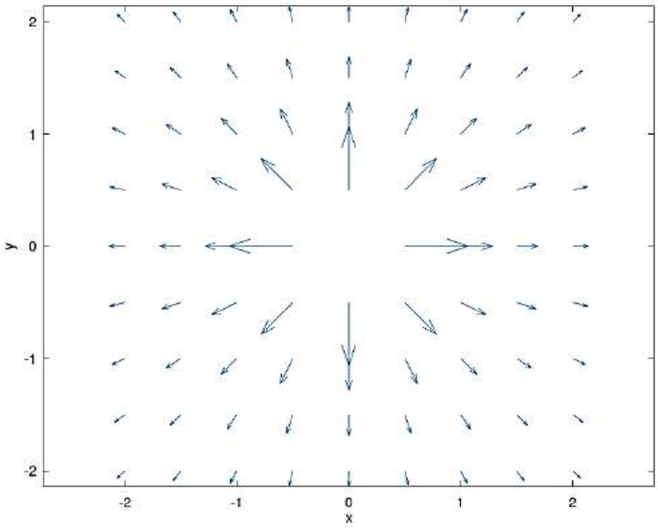
```
>> [x,y]=meshgrid(-10:10);
>> M=0;
>> N=-1;
>> quiver(x,y,M,N)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
```



(b) Sintaks:

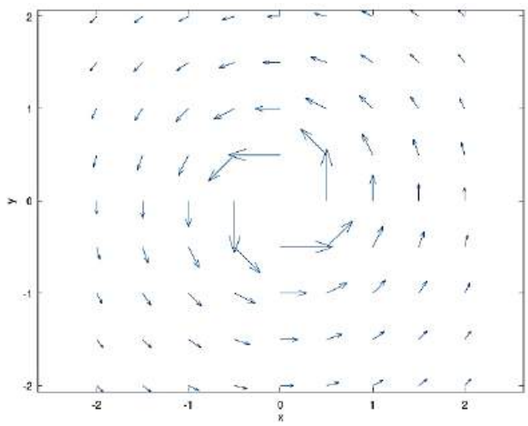
```
>> [x,y]=meshgrid(-2:0.5:2);
```

```
>> M=x./(x.^2+y.^2);
>> N=y./(x.^2+y.^2);
>> quiver(x,y,M,N)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> axis equal
```



(c) Sintaks:

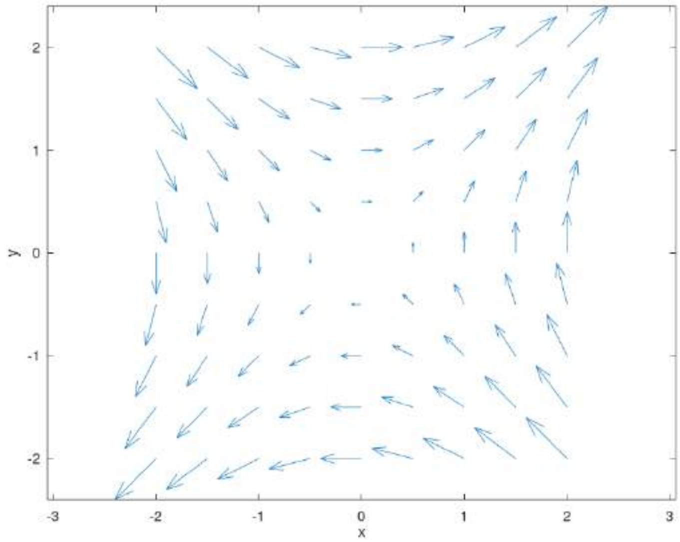
```
>> [x,y]=meshgrid(-2:0.5:2);
>> M=-y./(x.^2+y.^2);
>> N=x./(x.^2+y.^2);
>> quiver(x,y,M,N)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
```



(d) Sintaks:

```
>> [x,y]=meshgrid(-2:0.5:2);
```

```
>> M=y/3;
>> N=x/3;
>> quiver(x,y,M,N)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
```



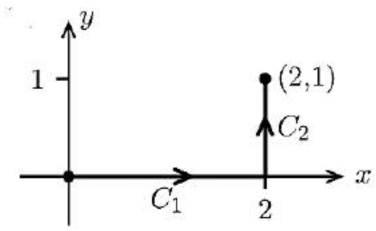
2.

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$\nabla f(x,y) = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$$

3. (a) $\mathbf{F} = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle y + e^x, x \rangle$

(b) Gambar kurva dari permasalahan adalah:



Dari gambar terlihat bahwa kurva C terdiri dari dua bagian kurva yaitu: C_1 dan C_2.

Pada C_1, nilai x bergerak dari 0 sampai 2, tetapi $y = 0$ dan $dy = 0$. Sementara pada C_2, nilai y bergerak dari 0 ke 1, dan $x = 2$, $dx = 0$.

Karena $\mathbf{F} = \langle y + e^x, x \rangle$ dan $d\mathbf{r} = \langle dx, dy \rangle$ maka:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \langle y + e^x, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (y + e^x)dx + x\,dy$$

Sehingga:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 2dy = 2$$

Maka total integral garis pada kedua kurva adalah:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = e^2 + 1$$

4. Syarat konservatif adalah jika $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ memiliki turunan kontinu di semua x dan y maka:

$$M_y = N_x$$

Dari soal diketahui:

$$M_y = 1 \text{ dan } N_x = 1$$

Karena $M_y = N_x$ maka $\mathbf{F}$ konservatif.

5. Syarat turunan eksak adalah jika dan hanya jika $\mathbf{F}$ adalah gradien vektor.

Sementara F dikatakan gradien vektor jika F memiliki turunan kontinu di semua x dan y sehingga $M_y = N_x$.

Karena $M = xe^x + y$ dan $N = x$ maka:

$$M_y = 1 \text{ dan } N_x = 1$$

Sehingga $M_y = N_x$, artinya $(xe^x + y\,)dx + xdy$ adalah turunan eksak.

6. Jika $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ maka curl$\mathbf{F} = N_x - M_y$

Karena $M = x$ dan $N = xe^x + y$ maka $M_y = 0$ dan $N_x = e^x + xe^x$.

Sehingga:

curl$\mathbf{F} = e^x + xe^x - 0 = e^x(1 + x)$

7. Dari soal diketahui $M = 3x^2 + 6xy$ dan $N = 3x^2 + 6y$ di mana:

$M = f_x$ dan $N = f_y$

Sehingga $f_x = 3x^2 + 6xy$ dan $f_y = 3x^2 + 6y$.

Dari f_x diintegralkan diperoleh:

$$f(x, y) = \int (3x^2 + 6xy)dx = x^3 + 3x^2y + g(y)$$

Selanjutnta $f(x, y)$ diturunkan terhadap y diperoleh:

$$f_y = 3x^2 + g'(y)$$

Sementara $f_y = 3x^2 + 6y$, artinya $g'(y) = 6y$.

Integralkan $g'(y)$ diperoleh:

$$g(y) = \int 6y\,dy = 3y^2 + C$$

Substitusikan hasil ini ke dalam $f(x, y)$ diperoleh:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2 + C$$

8. $\mathbf{F}$ dikatakan gradien vektor jika $\mathbf{F}$ memiliki turunan kontinu di semua x dan y sehingga $M_y = N_x$.

   Karena $M = (x + xy^2)$ dan $N = (x^2y + 3y^2)$ maka:

$$M_y = 2xy$$
$$N_x = 2xy$$

   Karena $\mathbf{F}$ memiliki turunan kontinu di semua x dan y sehingga $M_y = N_x$ maka $\mathbf{F}$ adalah gradien medan vektor.

Rangkuman 7

1. Integral garis dengan pendekatan usaha:

   Jika $\mathbf{F} = \langle M, N\rangle$ dan $d\mathbf{r} = \langle dx, dy\rangle$ maka integral garis adalah:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \langle M, N\rangle \cdot \langle dx, dy\rangle = \int_C Mdx + Ndy$$

2. Gradien medan vektor dirumuskan oleh:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x, y) = \langle f_x, f_y\rangle$$

3. Teorema fundamental integral garis:

   Jika $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f = \langle f_x, f_y\rangle$ adalah gradien medan vektor dan C adalah sebarang kurva dengan titik-titik ujung $P_0 = (x_0, y_0)$ dan $P_1 = (x_1, y_1)$ maka:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x, y)\big|_{P_0}^{P_1} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

4. Syarat $\mathbf{F}$ konservatif adalah jika $\mathbf{F} = \langle M, N\rangle$ memiliki turunan kontinu di semua x dan y maka:

$$M_y = N_x$$

5. curl dua dimensi dari $\mathbf{F}$, adalah:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = N_x - M_y$$

6. Suatu medan vektor **F** disebut turunan eksak jika dan hanya jika **F** adalah gradien medan vektor.

Tes Formatif 7

1. Gradien medan vektor ∇f dari $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ adalah …
   A. $\langle -x/\sqrt{x^2+y^2}\,, y/\sqrt{x^2+y^2}\,\rangle$
   B. $\langle y/\sqrt{x^2+y^2}\,, -x/\sqrt{x^2+y^2}\,\rangle$
   C. $\langle x/\sqrt{x^2+y^2}\,, y/\sqrt{x^2+y^2}\,\rangle$
   D. $\langle -x/\sqrt{x^2+y^2}\,, -y/\sqrt{x^2+y^2}\,\rangle$
   E. $\langle y/\sqrt{x^2+y^2}\,, x/\sqrt{x^2+y^2}\,\rangle$
2. Nilai dari:
   $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
   Di mana $\mathbf{F} = \langle xy, 3y^2\rangle$ dan C dengan fungsi $\mathbf{r}(t) = \langle 11t^4, t^3\rangle$ adalah …
   A. 45
   B. 40
   C. 36
   D. 32
   E. 27
3. Fungsi potensial dari $\mathbf{F} = \langle 2xy + y^{-2}, x^2 - 2xy^{-3}\rangle$ sehingga $\mathbf{F} = \nabla f$ adalah…
   A. $f(x, y) = xy^2 + ye^{3z} + C$
   B. $f(x, y) = x^2y + xy^{-2} + C$
   C. $f(x, y) = 3x + x^2\, y - y^3 + C$
   D. $f(x, y) = 3x + xy^{-2} + C$
   E. $f(x, y) = 3x^2y + xy^{-2} + C$
4. Pusat massa dari suatu lilitan dengan kerapatan $\delta = kz$ dan helix C dengan persamaan $x = 3\cos t\,, y = 3\sin t\,, z = 4t,\; 0 \le t \le \pi$ adalah …
   A. $(\pi/6, \pi/8, \pi/12)$
   B. $(-\pi/12, \pi/6, \pi/8)$
   C. $(12/\pi, 6/\pi, 8/\pi)$
   D. $(-12/\pi, 6/\pi, 8\pi/3)$
   E. $(-12/\pi^2, 6/\pi, 8\pi/3)$

5. Usaha yang dihasilkan oleh medan gaya $\mathbf{F} = \langle x^2, xy \rangle$ pada suatu partikel yang bergerak mengelilingi lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ berlawanan arah jarum jam adalah ...
   A. 3
   B. 2
   C. 1
   D. 0
   E. -1

Jawaban Tes Formatif 7

1. C
   $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$
   Karena $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ maka:
   $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
   $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
2. A
   Diketahui:
   $\mathbf{F} = \langle xy, 3y^2 \rangle$ dan $\mathbf{r}(t) = \langle 11t^4, t^3 \rangle$
   Turunan dari kurva adalah $\mathbf{r}'(t) = \langle 44t^3, 3t^2 \rangle$
   Integral medan vektor sepanjang kurva adalah:
   $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$
   Dari $\mathbf{r}(t)$ diperoleh $x = 11t^4$ dan $y = t^3$, maka:
   $$\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = \langle 11t^7, 3t^6 \rangle$$
   Sehingga:
   $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \langle 11t^7, 3t^6 \rangle \cdot \langle 44t^3, 3t^2 \rangle \, dt$$
   $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (484t^{10} + 9t^8) \, dt = 45$$
3. B
   Diketahui:
   $$\mathbf{F} = \langle 2xy + y^{-2}, x^2 - 2xy^{-3} \rangle$$
   $$M = 2xy + y^{-2}$$

$$N = x^2 - 2xy^{-3}$$

Karena $M = f_x$ dan $N = f_y$

Maka:

$$f_x = 2xy + y^{-2} \text{ dan } f_y = x^2 - 2xy^{-3}$$

Integralkan kedua ruas diperoleh:

$$f(x, y) = \int (2xy + y^{-2})dx$$

$$f(x, y) = x^2y + xy^{-2} + g(y)$$

Kemudian $f(x, y)$ diturunkan terhadap y adalah:

$$f_y = x^2 - 2xy^{-3} + g'(y)$$

Karena $f_y = x^2 - 2xy^{-3}$ maka $g'(y) = 0$. Sehingga $g(y) = C$

Jadi, $f(x, y) = x^2y + xy^{-2} + C$

4. E

Elemen massa dari lilitan adalah:

$$dm = \delta ds = kzds = 4kt\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2}dt = 20kt\,dt$$

Maka:

$$m = \int_C \delta ds = \int_0^\pi 20kt\,dt = 10k\pi^2$$

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_C \delta x\,ds = \frac{1}{10k\pi^2}\int_0^\pi 60kt\cos t\,dt$$

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\,dt = \frac{6}{\pi^2}[t\sin t + \cos t]_0^\pi = \frac{12}{\pi^2}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int_C \delta y\,ds = \frac{1}{10k\pi^2}\int_0^\pi 60kt\sin t\,dt$$

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\sin t\,dt = \frac{6}{\pi^2}[\sin t - t\cos t]_0^\pi = \frac{6}{\pi}$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\int_C \delta z\,ds = \frac{1}{10k\pi^2}\int_0^\pi 80kt^2\,dt$$

$$\overline{z} = \frac{8}{\pi^2}\int_0^\pi t^2\,dt = \frac{6}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{8\pi}{3}$$

Maka pusat massanya adalah:

$$\left(\frac{12}{\pi^2}, \frac{6}{\pi}, \frac{8\pi}{3}\right)$$

5. D

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t\rangle, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [4\cos^2 t\,(-2\sin t) + (2\cos t)(2\sin t)(2\cos t)]dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-8\cos^2 t \sin t + 8\cos^2 t \sin t)dt = 0$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 7 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 7.

$$\boxed{\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%}$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 8. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 7, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 8

TEOREMA GREEN

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep teorema Green.

Materi 8

Teorema Green

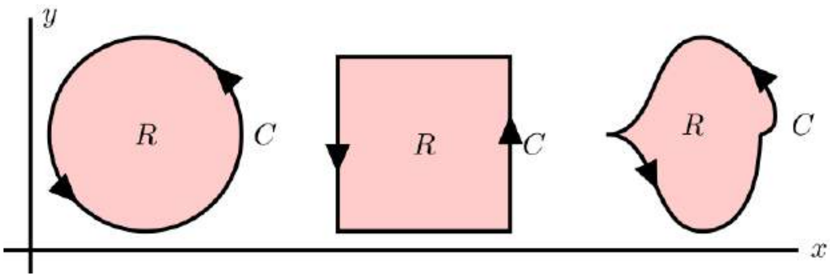
Untuk memahami teorema Green, kita memerlukan:

(a) C kurva tertutup sederhana, artinya kurva tidak memotong dirinya sendiri.

(b) R berada ada bagian dalam (interior) dari C.

(c) C berorientasi positif, artinya arah/lintasan kurva berlawanan arah jarum jam

Berikut ini beberapa contoh terkait teorema Green.



Teorema Green menyatakan bahwa untuk medan vektor $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ maka:

$$\oint_C M dx + N dy = \int\int_R N_x - M_y \, dA$$

Perhatikan, $N_x - M_y$ disebut **curl** dua dimensi dan dinotasikan dengan curl **F**.

Teorema Green dapat juga dituliskan sebagai:

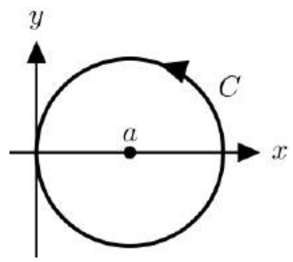
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_R \text{curl } \mathbf{F}\, dA = \oint_C M dx + N dy = \int\int_R (N_x - M_y)\, dA$$

Contoh 1:

Gunakan teorema Green untuk menghitung:

$$I = \oint_C 3x^2y^2 dx + 2x^2(1 + xy)dy$$

Di mana C seperti pada gambar berikut.



Jawab:

Kita tahu bahwa $M = 3x^2y^2$ dan $N = 2x^2 + 2x^3y$ sehingga:

$M_y = 6x^2y$ dan $N_x = 4x + 6x^2y$

Berdasarkan teorema Green:

$$\oint_C M dx + N dy = \int\int_R N_x - M_y\, dA$$

Maka:

$$I = \oint_C 3x^2y^2 dx + 2x^2(1 + xy)dy = \int\int_R 4x + 6x^2y - 6x^2y\, dA$$

$$I = \int\int_R 4x\, dA$$

Ingat bahwa $dA = r dr d\theta$ dengan batas-batas: $0 \leq r \leq a$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Dengan $x = a\cos\theta = a(1) = a$

Maka:

$$I = \int \int_R 4x \, dA = 4a \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr \, d\theta$$

$$I = 4a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \, d\theta$$

$$I = 2a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = 2a^3(2\pi) = 4\pi a^3$$

Atau kita dapat langsung menghitung, karena R adalah lingkaran dengan jari-jari a maka:

$$I = \int \int_R 4x \, dA = 4\pi a^3$$

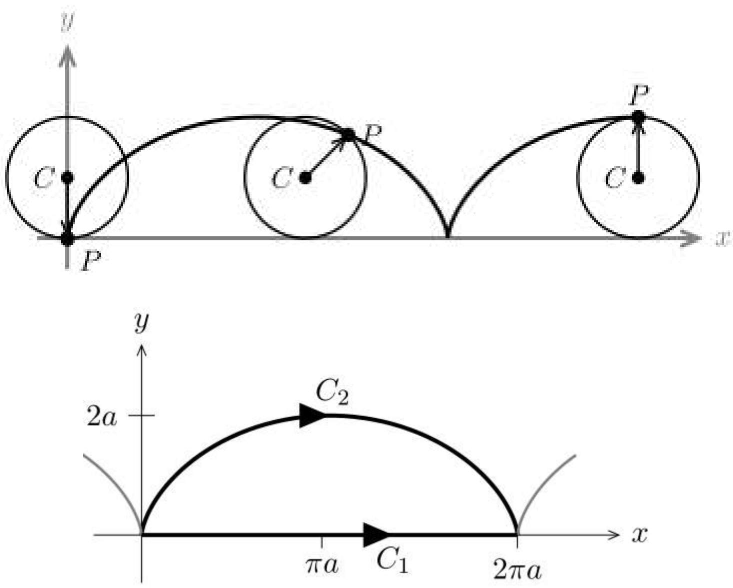
Contoh 2:

Gunakan teorema Green untuk menentukan luas daerah di bawah sikloid:

$$x = a(\theta - \sin\theta), \;\; y = a(1 - \cos\theta)$$

Jawab:

Kita ingat kembali gambar sikloid:



Perhatikan bahwa $r = a$ dan C_2 bertanda negatif karena searah jarum jam.

Maka $C = C_1 - C_2$ merupakan kurva yang mengelilingi luas daerah yang ingin kita cari di mana C_1 kurva yang berada pada sumbu x artinya $C_1 =$ sumbu x.

Berdasarkan teorema Green:

$$\oint_C -y\, dx = \int\int_R dA = \text{Luas daerah}$$

Maka:

$$\text{Luas daerah} = \oint_{C_1 - C_2} -y\, dx = \int_{C_1} 0 \cdot dx - \int_{C_2} -y\, dx = \int_{C_2} y\, dx$$

Karena $x = a(\theta - \sin\theta)$ dan $y = a(1 - \cos\theta)$ maka:

$$dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$$

Sehingga:

$$\text{Luas daerah} = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

$$\text{Luas daerah} = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$\text{Luas daerah} = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$\text{Luas daerah} = a^2 \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$\text{Luas daerah} = a^2 \left[\frac{3}{2}(2\pi) - 2(0) + \frac{1}{4}(0)\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

Teorema Green dan Medan Konservatif

Perhatikan teorema konservatif berikut:

Misalkan $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ adalah medan vektor yang terdefinisi dengan turunan parsialnya kontinu untuk semua (x, y), maka:

$$\mathbf{F} \text{ konservatif} \Leftrightarrow N_x = M_y \text{ atau } N_x - M_y = \text{curl } \mathbf{F} = 0$$

Teorema Green dapat kita gunakan untuk membuktikan teorema di atas.

Bukti:

Misalkan $\mathbf{F}$ konservatif yaitu integral usaha = 0 pada semua kurva tertutup sederhana.

Berdasarkan teorema Green diperoleh:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_R \text{curl } \mathbf{F}\, dA = 0$$

Satu-satunya solusi agar integral dari curl **F** menjadi 0 pada semua daerah R adalah curl $\mathbf{F} = 0$. Akibatnya $N_x = M_y$.

Sebaliknya, kita asumsikan $N_x = M_y$ maka untuk sebarang kurva tertutup C yang mengelilingi daerah R, maka berdasarkan teorema Green diperoleh:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_R N_x - M_y \, dA = 0$$

Dengan demikian, integral usaha **F** = 0 pada sebarang kurva tertutup yang artinya **F** konservatif.

Fluks Dua Dimensi

Pengertian Fluks

Fluks secara bahasa bermakna aliran, tetapi secara formal bermakna integral permukaan dari suatu medan vektor pada suatu kurva [5].

Kita sudah melihat bahwa **F** adalah medan gaya dan C adalah kurva berarah, di mana:

$$\text{Usaha } \mathbf{F} \text{ pada } C = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \quad (1)$$

Dengan kata lain, kita mengintegrasikan $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ di mana **T** adalah komponen tangensial dari **F** sepanjang kurva C. Secara notasi komponen, jika $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ maka :

$$\text{Usaha} = \int_C M dx + N dy = \int_{t_0}^{t_1} \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} \right) dt \quad (2)$$

Dengan analogi yang sama, kita dapat mengintegrasikan $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ di mana **n** adalah komponen vektor normal dari **F** sepanjang kurva C. Untuk menggambarkannya, kita misalkan kurva C berbentuk parametrik dalam panjang busur s, bergerak naik kearah positif pada C. Vektor posisi dan vektor tangen yang sesuai adalah:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$$

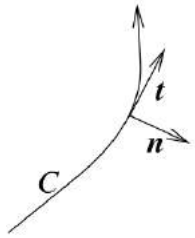
$$\mathbf{t}(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

Di mana **t** adalah vektor satuan.

Dengan membagi $\mathbf{t}(s)$ dengan ds diperoleh:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Vektor normal satuan **n** dapat diperoleh dengan merotasi **t** searah jarum jam sebesar sudut siku-siku, seperti pada gambar berikut.



Namun sayangnya, arahnya berlawanan dengan penggunaan dalam kinematika di mana **t** dan **n** dibentuk dari sistem koordinat tangan kanan untuk pergerakan sepanjang C. Pemilihan **n** bergantung pada konteks permasalahan, dan pemilihan **n** secara natural adalah dengan menerapkan teorema Green.

Formula yang biasa digunakan untuk merotasi vektor searah jarum jam sebesar 90^o menghasilkan:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j} \tag{3}$$

Integral garis pada kurva C dari komponen normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ dari medan vektor $\mathbf{F}$ disebut fluks dari $\mathbf{F}$ melintasi C, dinotasikan dengan:

$$\phi_F = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C \left(M\frac{dx}{ds} + N\frac{dy}{ds} \right) ds \tag{4}$$

Dalam notasi turunan, kita dapat tuliskan $\mathbf{n}\, ds = dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}$, sehingga:

$$\phi_F = \int_C Mdy - Ndx = \int_C \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} \right) dt \tag{5}$$

di mana $x(t), y(t)$ adalah bentuk paramterik dari C.

Contoh 3:

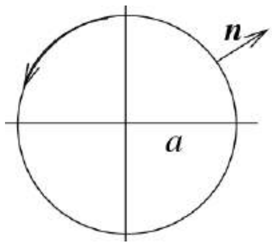
Hitunglah fluks dari medan vektor:

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

melintasi lingkaran dengan jari-jari a dan berpusat di (0,0) menggunakan (4) dan (5).

Jawab:

Perhatikan medan vektor memiliki arah menjauh secara radial, sehingga **F** dan **n** memiliki arah yang sama. Sementara lingkaran memiliki arah berlawanan dengan arah jarum jam, artinya titik-titik **n** mengarah keluar seperti pada gambar berikut.



Sehingga pada tiap titik-titik pada lingkaran diperoleh:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{F}| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{a}$$

Dengan menggunakan (4) diperoleh:

$$\phi_F = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_C \frac{1}{a} ds = 2\pi$$

Untuk menggunakan (5), kita menggunakan bentuk parametrik lingkaran yaitu:

$$x = a\cos t \text{ dan } y = a\sin t$$

Dengan menggunakan (5) diperoleh:

$$\phi_F = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Karena $dx = -a\sin t\, dt$ dan $dy = a\cos t$ serta $x^2 + y^2 = a^2$, dan $0 \le t \le 2\pi$ maka:

$$\phi_F = \int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}{a^2} dt = 2\pi$$

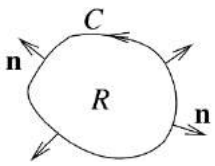
Teorema Green untuk Fluks

Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ representasi dari medan alir dua dimensi dan C adalah kurva tertutup sederhana dengan orientasi positif dengan interior R [7].

Perhatikan bahwa:

$$\phi_F = \oint_C Mdy - Ndx \tag{1}$$

Karena titik-titik vektor normal **n** mengarah keluar menjauh dari R (seperti pada gambar di bawah) maka fluks positif dengan arah lairan keluar dari R dan aliran yang masuk ke R dianggap sebagai fluks negatif.



Dengan menerapkan teorema Green pada (1) maka:

$$\oint_C Mdy - Ndx = \oint_C -Ndx + Mdy = \int\int_R \left(M_x - (-N)_y\right) dA$$

Akibatnya kita peroleh teorema Green dalam bentuk normal yaitu:

$$\oint_C Mdy - Ndx = \int\int_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \tag{2}$$

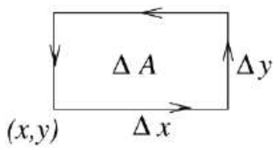
Secara matematis, bentuk ini sama dengan bentuk tangensial dari teorema Green.

Divergensi Dua Dimensi

Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ dan kita berikan nama dan notasi untuk integran pada (2) yaitu:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad \text{divergensi } \mathbf{F} \tag{3}$$

Perhatikan bahwa div **F** adalah fungsi skalar dua variabel. Untuk mendapatkan makna secara fisika, perhatikan gambar berikut.



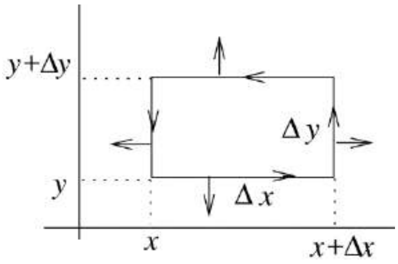
Perhatikan, jika **F** dapat diturunkan secara kontinu maka div **F** adalah fungsi kontinu di mana bernilai konstan secara aproksimasi jika persegi panjang sangat kecil. Dengan menerapkan (2) pada persegi panjang maka:

$$\text{fluks melintasi persegi panjang} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \Delta A \tag{4}$$

dimana ΔA adalah luas persegi panjang.

Karena relasi aproksimasi ini sangat penting, kita akan lakukan perhitungan fluks tanpa menggunakan teorema Green.

Perhatikan persegi panjang kecil berikut:



Perhitungan fluks secara aproksimasi pada setiap sisi pada gambar di atas menghasilkan:

$$\text{fluks melintasi sisi atas} \approx (\mathbf{F}(x, y+\Delta y)\cdot \mathbf{j})\Delta x = N(x, y+\Delta y)\Delta x$$

$$\text{fluks melintasi sisi bawah} \approx (\mathbf{F}(x, y)\cdot -\mathbf{j})\Delta x = -N(x, y)\Delta x$$

Jumlahkan hasil di atas, diperoleh:

$$\text{total fluks melintasi sisi atas dan bawah} \approx \big(N(x, y+\Delta y) - -N(x, y)\big)\Delta x$$

$$\text{total fluks melintasi sisi atas dan bawah} \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

Dengan cara serupa, kita dapatkan untuk sisi kiri dan kanan, yaitu:

$$\text{total fluks melintasi sisi kiri dan kanan} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

Melanjutkan pencarian kita untuk arti fisik dari divergensi, jika fluks total pada sisi persegi panjang kecil adalah positif, ini berarti terdapat aliran bersih keluar dari persegi panjang tersebut. Menurut kekekalan materi, satu-satunya cara, hal ini dapat terjadi jika terdapat sumber yang menambahkan fluida langsung ke persegi panjang. Jika aliran terjadi di tangki dangkal dengan kedalaman seragam, sumber seperti itu dapat divisualisasikan sebagai seseorang yang berdiri di atas tangki, menuangkan cairan langsung ke dalam persegi panjang. Demikian pula, aliran bersih ke dalam persegi panjang menyiratkan adanya wastafel yang menarik cairan dari persegi panjang. Yang terbaik adalah menganggap wastafel seperti itu sebagai "sumber negatif". Kelajuan bersih (positif atau negatif) di mana fluida ditambahkan langsung ke persegi panjang dari atas dapat disebut "sumber kecepatan" untuk persegi panjang tersebut.

Fluks pada persegi panjang = sumber kecepatan untuk persegi panjang

Dikombinasikan dengan (4) diperoleh:

$$\text{sumber kecepatan untuk persegi panjang} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta A \tag{5}$$

Kemudian bagi kedua ruas dengan ΔA dan terapkan limit diperoleh:

$$\text{sumber kecepatan di } (x, y) \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \text{div } \mathbf{F} \tag{6}$$

Definisi integral rangkap dua sebai limit jumlah menunjukkan:

$$\text{sumber kecepatan untuk } R = \int\int_R \text{div } \mathbf{F}\, dA \tag{7}$$

Kedua relasi pada (6) dan (7) menunjukkan deivergensi secara fisika pada suatu medan alir, dan juga menunjukkan teorema Green dalam bentuk normal:

Total fluks melintasi C = sumber kecepatan untuk R

$$\oint_C M dy - N dx = \int\int_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

Berikut ini diberikan dua bentuk teorema Green secara berdampingan, pertama dalam bentuk vektor, lalu dalam bentuk diferensial yang digunakan saat penghitungan akan dilakukan.

Bentuk Tangensial

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_R \text{curl } \mathbf{F}\, dA$$

$$\oint_C M dx + N dy = \int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Usaha oleh $\mathbf{F}$ disekitar C

Bentuk Normal

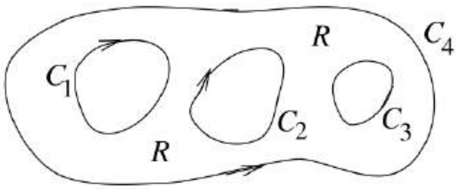
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int\int_R \text{div } \mathbf{F}\, dA$$

$$\oint_C M dy - N dx = \int\int_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

fluks $\mathbf{F}$ melintasi C = sumber kecepatan untuk R

Perluasan Teorema Green

Pada teorema Green sejauh ini, daerah R diasumsikan memiliki batas tunggal yaitu kurva tertutup sederhana. Namun, bagaimanakah jika batasnya terdiri dari komposisi beberapa kurva tertutup sederhana seperti gambar di bawah ini?



Misalkan kurva-kurva tertutup sederhana tersebut adalah $C_1, \ldots, C_m$ yang semuanya terletak/berada pada domain di mana $\mathbf{F}$ dapat diturunkan secara kontinu. Dan yang paling penting, semua kurva memiliki arah sehingga titik-titik normal $\mathbf{n}$ menjauh dari R.

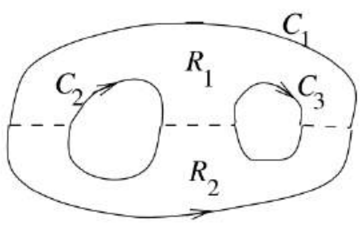
Perluasan teorema Green, secara notasi dituliskan:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_R \text{curl}\, \mathbf{F}\, dA \qquad (1)$$

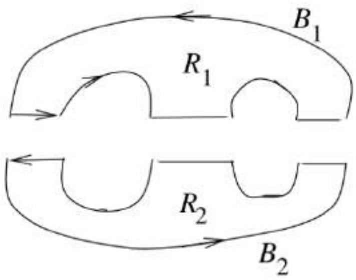
Dengan kata lain, teorema Green juga dapat diterapka pada daerah dengan beberapa kurva dengan menghitung integral garis pada semua batasan kurva dengan tiap kurva memiliki orientasi sehingga titik normal $\mathbf{n}$ keluar dari R.

Bukti:

Perhatikan daerah dengan tiga batasan kurva seperti pada gambar berikut:



Di mana daerah R dibagi menjadi dua bagian R_1 dan R_2 yang masing-masing dibatasi oleh kurva tertutup sederhana tunggal. Misalkan B_1 dan B_2 adalah kurva-kurva terbatas seperti pada gambar berikut:



Dengan menggunakan teorema Green yang biasa, diperoleh:

$$\oint_{B_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_{R_1} \text{curl } \mathbf{F}\, dA \quad \text{dan} \quad \oint_{B_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_{R_2} \text{curl } \mathbf{F}\, dA \qquad (2)$$

Jumlahkan kedua nya diperoleh:

$$\oint_{B_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{B_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_{R_1} \text{curl } \mathbf{F}\, dA + \int\int_{R_2} \text{curl } \mathbf{F}\, dA$$

$$\oint_{B_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{B_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_{R_1+R_2} \text{curl } \mathbf{F}\, dA$$

$$\oint_{B_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{B_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_{R} \text{curl } \mathbf{F}\, dA$$

Daerah Terhubung Sederhana dan Terhubung Banyak

Teorema Green tetap valid pada daerah “berlubang. Namun, perhatikan relasi berikut:

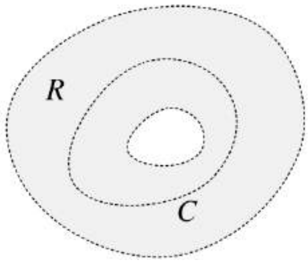
$$\text{curl } \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$$

tidak berlaku.

Alasannya adalah sebagai berikut:

$$\text{curl } \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

untuk sebarang kurva tertutup pada R. Namun teorema Green tidak dapat diterapkan jika daerah R memiliki lubang seperti pada gambar berikut karena interior pada C tidak sepenuhnya ada di R.



Ingat bahwa medan vektor $\mathbf{F}$ akan memenuhi $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$ di mana-mana kecuali di asalnya. Daerah R adalah bidang xy dengan (0,0) dihilangkan. Tetapi $\mathbf{F}$ bukanlah gradien medan vektor, karena:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

mengelilingi lingkaran C yang mengelilingi titik asal.

Hal ini lebih jelas jika kita menggunakan teorema Green dalam bentuk normal. Jika medan aliran memenuhi $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ di mana-mana kecuali pada satu titik, hal itu tidak menjamin bahwa fluks melalui setiap kurva tertutup akan menjadi 0. Untuk tempat di mana $\operatorname{div}\mathbf{F}$ tidak terdefinisi mungkin menjadi sumber yang dilalui di mana fluida ditambahkan ke aliran.

Untuk dapat membuktikan di bawah hipotesis yang masuk akal bahwa:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$$

kita definisikan masalah dengan mengasumsikan bahwa R adalah jenis daerah di mana kesulitan yang dijelaskan di atas tidak dapat terjadi — yaitu, R tidak memiliki lubang; daerah seperti itu disebut dengan terhubung sederhana.

Definisi Daerah Terhubung Sederhana

Daerah D dua dimensi pada bidang yang terdiri satu bagian terhubung disebut terhubung sederhana jika memiliki sifat-sifat:

(a) Kurva tertutup sederhanan C ada di dalam D.

(b) Interior pada C seluruhnya ada pada D.

Sebagai contoh: bidang xy, bidang setengah bagian kanan di mana $x \geq 0$, dan lingkaran satuan dengan interiornya adalah semua daerah yang terhubung secara sederhana. Tetapi bidang xy dikurangi titik asal tidak terhubung sederhana, karena setiap lingkaran yang mengelilingi titik asal terletak di D, namun bagian dalamnya tidak.

Seperti yang ditunjukkan, orang dapat menganggap daerah yang terhubung sederhana sebagai daerah tanpa "lubang". Daerah dengan lubang dikatakan terhubung banyak, atau tidak terhubung sederhana.

Teorema Daerah Terhubung Sederhana

Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ yang dapat diturunkan secara kontinu pada daerah D terhubung sederhana di bidang xy, maka:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \;\mathbf{F} = \nabla f \;\text{ untuk beberapa } f(x,y) \tag{3}$$

dalam bentuk komponen dapat dituliskan:

$$M_y = N_x \Rightarrow M\mathbf{i} + N\mathbf{j} = \nabla f \quad \text{untuk beberapa } f(x,y) \tag{4}$$

Bukti:

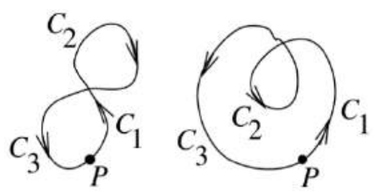
Jika integral garis disekitar sebarang kurva tertutup adalah 0 maka medan vektor adalah gradien medan vektor. Akan ditunjukkan bahwa:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \;\text{ untuk setiap kurva tertutup } C \text{ di } D \tag{5}$$

Pertama, asumsikan bahwa C adalah kurva tertutup sederhana dan misalkan R adalah interior dari C. Karena D terhubung sederhana, maka R seluruhnya terletak di dalam D. Sehingga $\mathbf{F}$ dapat diturunkan secara kontinu di R. Dengan menggunakan teorema Green diperoleh:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_R \text{curl}\,\mathbf{F}\, dxdy = 0$$

Kedua, jika C tertutup namun tidal sederhana atau terdapat irisan dengan dirinya sendiri maka C dapat diurai menjadi kurva tertutup sederhana kecil sehingga memenuhi argumen pertama. Sebagai ilustrasi, kita ambil dua kasus seperti pada gambar berikut:



Perhatikan, pada kedua kasus pada gambar, lintasan mulai dan berhenti pada titik P, sehingga:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Perhatikan, pada kedua gambar C_2 adalah kurva tertutup sederhana, begitu pula dengan $C_1 + C_3$. Karena D terhubung sederhana maka interior dari C terletak dalam D, sehingga:

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ dan } \oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

Dengan menjumlahkan keduanya diperoleh:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \blacksquare$$

Teorema Curl

Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ adalah medan vektor yang dapat diturunkan secara kontinu pada daerah D terhubung sederhana di bidang xy, maka:

1) $\int_P^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ adalah lintasan independen untuk sebarang dua titik P, Q di D.

2) $\int_P^Q Mdx + Ndy$ adalah lintasan independen untuk sebarang dua titik P, Q di D.

3) $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ untuk sebarang kurva tertutup C di D.

4) $\oint_C Mdx + Ndy$ untuk sebarang kurva tertutup C di D.

5) $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk beberapa f di D.

6) $Mdx + Ndy = df$ untuk beberapa f di D.

7) curl $\mathbf{F} = 0$ di D.

8) $M_y = N_x$ di D.

Contoh 4:

Apakah $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ suatu gradien medan vektor?

Jawab:

Karena $M = xy$ dan $N = x^2$ maka $M_y = x$ dan $N_y = 0$. Sehingga:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = x = 0$$

Jadi, $\mathbf{F}$ bukan suatu gradien medan vektor.

Contoh 5:

Apakah

$$\frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Adalah turunan eksak? Jika iya, tentukan semua fungsi $f(x, y)$ yang mungkin.

Jawab:

Karena:

$$df = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Maka:

$$M = \frac{1}{y} \text{ dan } N = -\frac{x}{y^2}$$

Dapat diturunkan secara kontinu dan keduanya terletak pada bidang setengah yaitu bagian atas dan bagian bawah sumbu x. Sehingga keduanya merupakan daerah terhubung sederhana.

Turunan dari keduanya adalah:

$$M_y = -\frac{1}{y^2} \text{ dan } N_x = -\frac{1}{y^2}$$

Perhatikan, pada masing-masing bidang setengah, turunan keduanya eksak.

Untuk menentukan $f(x, y)$ kita gunakan metode penentuan fungsi potensial, kita gunakan M dengan menetapkan y sebagai konstanta maka:

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + c(y)$$

Untuk menentukan $c(y)$ kita gunakan N, yaitu:

$$N = -\frac{x}{y^2} + c'(y) = -\frac{x}{y^2} + 0$$

Maka $c'(y) = 0$ dan $c(y) = c$

Sehingga:

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + c$$

Dimana c adalah sebarang konstanta. Namun konstanta c berbeda pada kedua daerah karena keduanya tidak bersentuhan.

Secara umum,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{y} + c, & y > 0 \\ \frac{x}{y} + c', & y < 0 \end{cases}$$

Di mana c dan c' adalah sebarang konstanta.

Latihan 8

1. Tunjukkan bahwa:

$$\oint_C -x^2 y\, dx + xy^2 dy > 0$$

   Untuk semua kurva tertutup sederhana C.

2. Misalkan $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ dan C merupakan lingkaran satuan dengan orientasi positif. Hitunglah:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

   Dengan dua cara, yaitu: secara langsung dan menggunakan Teorema Green.

3. Hitunglah curl dari medan vektor tangensial:

$$\mathbf{F} = \langle -\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2} \rangle$$

4. Tunjukkan bahwa $\mathbf{F}$ tidak konservatif dengan menghitung:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Di mana C adalah lingkaran satuan.

5. Mengapa kamu berpikir bahwa **F** adalah medan vektor tangensial?
6. Dalam koordinat polar, $\theta(x,y) = \tan^{-1} y/x$. Tunjukkan bahwa $\mathbf{F} = \nabla\theta$.
7. Hitunglah fluks dari:

$$\mathbf{F} = \langle x^2, y\rangle$$

Yang melintasi segmen garis dari (0,0) ke (1,2).

8. Gunakan metode geometri untuk menghitung fluks $\mathbf{F} = 3\langle -1,1\rangle$ yang melintasi C yaitu segmen garis dari (0,0) ke (1,1).

Jawaban 8

1. Jika R adalah daerah di dalam kurva C maka berdasar teorema Green adalah:

$$\oint_C M dx + N dy = \int\int_R \text{curl } \mathbf{F}\, dA = \int\int_R (N_x - M_y) dA$$

Karena $M = -x^2y$ dan $N = xy^2$ maka $M_y = -x^2$ dan $N_x = y^2$.

Sehingga:

$$\text{curl } \mathbf{F} = N_x - M_y = x^2 + y^2$$

Hasil ini menunjukkan bahwa curl **F** adalah persegi yang berjarak (x,y) dari titik pusat. Dan jarak persegi akan selalu positif, sehingga integral dari persegi ini akan selalu positif juga.

Dengan demikian,

$$\oint_C -x^2y\, dx + xy^2 dy = \int\int_R (x^2 + y^2) dA > 0$$

2. Dengan menggunakan teorema Green:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_R (N_x - M_y) dA = \int\int_R (1-2) dA = -\int\int_R dA = -\pi$$

Dengan cara langsung:

Persamaan kurva C adalah $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi$.

Maka:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \langle 2\sin t, \cos t\rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t\rangle dt$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t + \cos^2 t) dt$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[\cos 2t - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right] dt$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\right] dt = \left[\frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = -\pi$$

3. Curl$\mathbf{F} = N_x - M_y$, di mana:

$$M = -\frac{y}{r^2}, \qquad N = \frac{x}{r^2}$$

Karena:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Maka:

$$M_y = \frac{y^2 - x^2}{r^4}$$

$$N_x = \frac{y^2 - x^2}{r^4}$$

Jadi, curl$\mathbf{F} = 0$.

4. Karena $\mathbf{F}$ tidak terdefinisi di (0,0), maka curl$\mathbf{F} = 0$. Namun hal ini belum cukup membuktikan bahwa $\mathbf{F}$ konservatif.

Di sisi lain, persamaan kurva C adalah $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi$.

Maka:

$$dx = -\sin t \; dt, \qquad dy = \cos t \; dt$$

Sehingga:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C M\,dx + N\,dy$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{1^2}(-\sin t)dt + \frac{\cos t}{1^2}(\cos t)dt$$

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi$$

Karena hasilnya $2\pi \neq 0$ maka **F** tidak koservatif.

5. Setiap medan vektor **F** adalah tangensial untuk beberapa lingkaran berpusat di (0,0) karena **F** tegak lurus terhadap radial dari medan vektor (x, y).

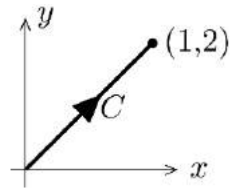
6. Kita perlu menunjukkan $M = \theta_x$ dan $N = \theta_y$.

$$\theta_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} = M$$

$$\theta_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{r^2} = N$$

7. Persamaan kurva C adalah $x = x, y = 2x, 0 \leq x \leq 1$.

   Gambar permasalahan adalah:



   Maka:

$$\phi_F = \int_C M dy - N dx = \int_0^1 x^2 dx - 2x dx = -\frac{1}{3}$$

Rangkuman 8

1. Teorema Green menyatakan bahwa:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_R \text{curl}\, \mathbf{F}\, dA = \oint_C M dx + N dy = \int\int_R \left(N_x - M_y\right) dA$$

2. Misalkan $\mathbf{F} = \langle M, N \rangle$ adalah medan vektor yang terdefinisi dengan turunan parsialnya kontinu untuk semua (x, y), maka:

$$\mathbf{F} \text{ konservatif} \Leftrightarrow N_x = M_y \text{ atau } N_x - M_y = \text{curl}\, \mathbf{F} = 0$$

3. Integral garis pada kurva C dari komponen normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ dari medan vektor **F** disebut fluks dari **F** melintasi C, dinotasikan dengan:

$$\phi_F = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C \left(M \frac{dx}{ds} + N \frac{dy}{ds} \right) ds$$

4. Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ representasi dari medan alir dua dimensi dan C adalah kurva tertutup sederhana dengan orientasi positif dengan interior R, dimana:

$$\phi_F = \oint_C M dy - N dx$$

5. Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ maka:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = M_x + N_y$$

6. Misalkan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ maka:

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = N_x - M_y$$

Tes Formatif 8

1. Curl $\mathbf{F}$ dari $\mathbf{F} = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$ adalah …
   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3
2. Div $\mathbf{F}$ dari $\mathbf{F} = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$ adalah …
   A. $x \sin y$
   B. $1 + \sin y$
   C. $x \cos y$
   D. $y - \cos y$
   E. $\sin y$
3. Jika:

$$\int_C xy^2 dx + 2x^2 y dy$$

   Dan C adalah kurva segitiga dengan titik-titik $(0,0), (2,2), (2,4)$, maka bentuk integral garis menggunakan teorema Green dari adalah …

   A. $\int_0^2 \int_0^{2x} (4xy - 2xy) dy dx$

B. $\int_0^2 \int_x^{2x} (4xy - 2xy)dydx$

C. $\int_0^{2x} \int_x^{2} (4xy - 2xy)dydx$

D. $\int_0^2 \int_x^{2x} (2xy - 4xy)dydx$

E. $\int_0^2 \int_0^{2x} (4xy - 2xy)dxdy$

4. Jika:

$$\mathbf{F} = \langle y\cos x - xy\sin x\,, xy + x\cos x \rangle$$

Dan C adalah kurva segitiga dengan titik-titik $(0,0), (0,4), (2,0)$, maka nilai dari:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

adalah …

A. 16/3

B. 8/3

C. 0

D. −8/3

E. −16/3

5. Usaha yang dihasilkan oleh $\mathbf{F} = \langle x^2 + xy, xy^2 \rangle$ pada suatu partikel yang bergerak dari titik pusat sepanjang sumbu x ke (1,0) dilanjutkan ke (0,1) dan kembali lagi ke titik asal sepanjang sumbu y adalah …

A. A

B. A

C. A

D. −1/12

E. A

Jawaban Tes Formatif 8

1. A

Karena $\mathbf{F} = \langle y - \cos y\,, x\sin y \rangle$ maka $M = y - \cos y$ dan $N = x\sin y$.

Maka:

$M_y = 1 + \sin y$ dan $N_x = \sin y$

Sehingga:

Curl $\mathbf{F} = N_x - M_y = \sin y - 1 - \sin y = -1$

2. C

div $\mathbf{F} = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y}$

Karena $\mathbf{F} = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$ maka $M = y - \cos y$ dan $N = x \sin y$.

Maka:

$M_x = 0$ dan $N_y = x \cos y$

Jadi, div $\mathbf{F} = x \cos y$

3. B

$$\oint_C M dx + N dy = \int\int_R \text{curl } \mathbf{F}\, dA = \int\int_R (N_x - M_y) dA$$

Dari soal diketahui $M = xy^2$ dan $N = 2x^2y$ maka $M_y = 2xy$ dan $N_x = 4xy$.

Sehingga:

$$\int_C xy^2 dx + 2x^2 y dy = \int\int_R (2xy - 4xy) dA$$

Karena sisi tegak segitiga pada sumbu x terletak pada (0,0) sampai (2,2) maka batas x mulai dari 0 sampai 2. Sedangkan sisi tegak segitiga pada sumbu y terletak pada $y = x$ sampai $y = 2x$.

Jadi,

$$\int_0^2 \int_x^{2x} (4xy - 2xy) dy dx$$

4. E

Dari soal diketahui:

$$M = y \cos x - xy \sin x$$

$$N = xy + x \cos x$$

Maka:

$$M_y = \cos x - x \sin x$$

$$N_x = y - x \sin x + \cos x$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = N_x - M_y = y$$

Sehingga:

$$\int_C (y \cos x - xy \sin x) dx + (xy + x \cos x) dy = \int\int_R y\, dA$$

Karena sisi tegak segitiga pada sumbu x terletak pada (0,0) sampai (2,0) maka batas x mulai dari 0 sampai 2. Sedangkan sisi tegak segitiga pada sumbu y terletak pada $y = 0$ sampai $y = -2x + 4$.

Jadi,

$$\int_0^2 \int_0^{-2x+4} y dy\, dx$$

Integral dalam:

$$\int_0^{-2x+4} y dy = \frac{1}{2}(-2x+4)^2 = 2x^2 - 8x + 8$$

Integral luar:

$$\int_0^2 (2x^2 - 8x + 8) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Karena kurva searah jarum jam maka kalikan hasilnya dengan -1.

Jadi, nilai akhirnya adalah $-16/3$.

5. D

Kurva berbentuk segitiga yang dilintasi partikel memiliki arah berlawanan jarum jam dari $(0,0), (1,0)$, dan $(0,1)$.

Dari soal diketahui bahwa $M = x^2 + xy$ dan $N = xy^2$ maka:

$M_y = x$ dan $N_x = y^2$.

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Berdasarkan teorema Green:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C M dx + N dy = \int \int_R (N_x - M_y) dA$$

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_R (y^2 - x) dA$$

Karena sisi tegak segitiga pada sumbu x dari (0,0) sampai (1,0) maka batas x mulai dari 0 sampai 1. Sedangkan sisi tegak segitiga pada sumbu y terletak pada $y = 0$ sampai $y = 1 - x$.

Jadi,

$$W = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y^2 - x) dy\, dx$$

Integral dalam:

$$\int_0^{1-x} (y^2 - x) dy = \left[\frac{1}{3}y^3 - xy\right]_0^{1-x} = \frac{1}{3}(1-x)^3 - x(1-x)$$

$$\int_0^{1-x} (y^2 - x) dy = \frac{1}{3}(1 - 3x + 3x^2 - x^3) - x + x^2$$

Integral luar:

$$W = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - 2x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right] dx = \left[\frac{1}{3}x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right]_0^1$$

$$W = \frac{1}{3} - \frac{3}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 8 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 8.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 9. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 8, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 9

INTEGRAL RANGKAP TIGA

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan terkait integral rangkap tiga.

Materi 9

Integral Rangkap Tiga

Pada sesi sebelumnya, kita sudah belajar tentang integral rangkap dua (integral pada bidang) dari $f(x, y)$ fungsi dua variabel. Untuk memahami integral rangkap tiga, kami sarankan anda untuk meninjau kembali materi integral rangkap dua.

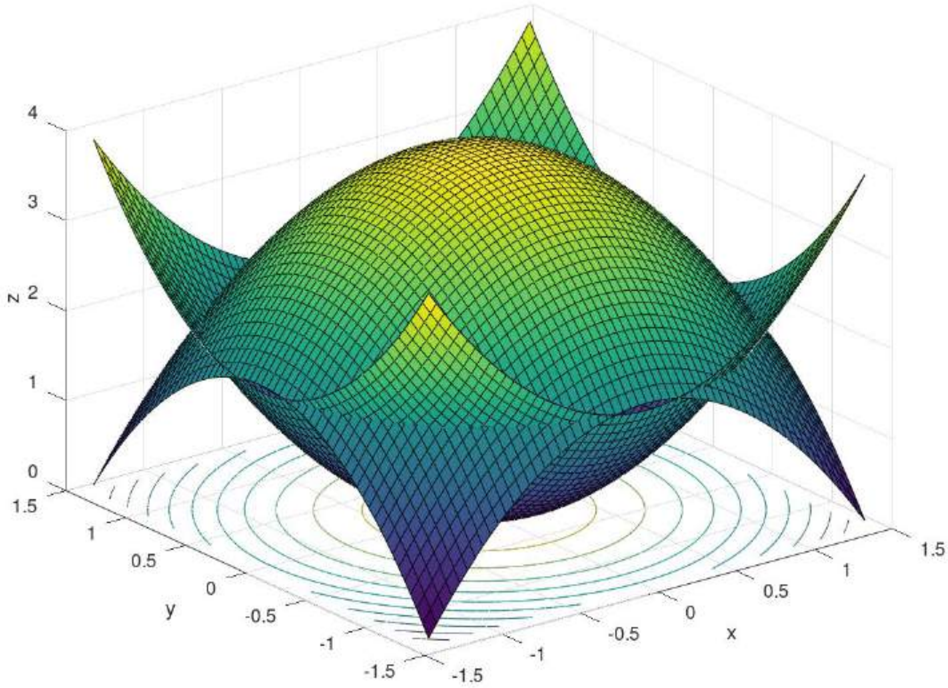
Untuk memahami integral rangkap tiga, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1:

Misalkan diberikan daerah dalam ruang tiga dimensi antara dua paraboloid yaitu $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4 - x^2 - y^2$. Tentukan volume yang terbentuk oleh kedua paraboloid tersebut.

Jawab:

Pertama, coba kita gambarkan permasalahan seperti pada gambar berikut.



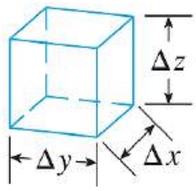
Gambar 9. 1. Daerah ***R***

Sintak pada octave:

```
>> [x,y] = meshgrid(-1.4:0.05:1.4,-1.4:0.05:1.4,50);
>> z1=x.^2+y.^2;
>> z2=4-(x.^2+y.^2);
>> surfc(x,y,z1)
>> hold on
>> surf(x,y,z2)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```

Bagaimana cara menentukan volume antara dua paraboloid tersebut?

Kedua, untuk menentukan volume yang dibatasi dua paraboloid, kita ambil bagian kecil dari dalamnya (elemen dari volume). Misalkan seperti di bawah ini:



Gambar 9. 2. Elemen dari Volume

Artinya, kita memiliki salah satu bagian kecil volume dari objek yang kita ingin ketahui volumenya secara keseluruhan [1], [2], [8], [9]. Dari gambar kecil di atas diperoleh:

$$\Delta V \approx \Delta x \Delta y \Delta z$$

Dan apabila kita buat potongan volume kecil ini sampai tak hingga banyaknya, dan kita jumlahkan semuanya akan diperoleh[1], [5], [6]:

$$V = \int\int_R\int f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V$$

Misalkan $f(x,y,z) = 1$ maka diperoleh:

$$V = \int\int_R\int dxdydz$$

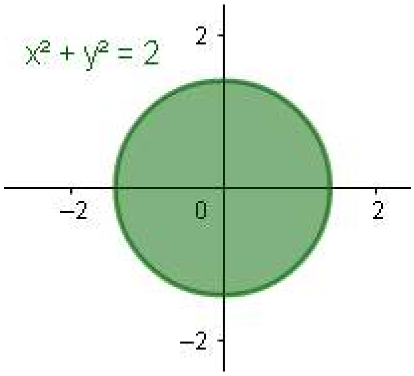
di mana $dV = dxdydz$ dengan batas x, y, z sesuai situasi dan kondisi. Urutan dari $dxdydz$ tidak mutlak, kita bisa mengurutkannya dengan $dzdxdy$ atau $dzdydx$.

Ketiga, bagian terberat dari integral lipat tiga adalah menentukan batas-batas integral dari x, y, z. Perlu ketelitian dan triks dalam menentukannya. Dalam **Contoh 1**, kita coba mengintegralkannya dari variabel z terlebih dahulu karena lebih mudah menentukannya.

Pada **Gambar 1**, sumbu z dibatasi oleh dua parabaoloid dimana bagian bawah dibatasi oleh $z = x^2 + y^2$ dan bagian atas dibatasi oleh $z = 4 - x^2 - y^2$. Sehingga kita peroleh:

$$V = \int\int\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dzdydx$$

Selanjutnya, kita lihat bayangan dari **Gambar 1**, pada bidang xy yang merupakan piringan (disc/cakram), seperti pada gambar berikut:



*Gambar 9. 3. Cakram/Bayangan di Bawah Daerah **R***

Pada Gambar 9.3, cakram diperoleh dari:

$x^2 + y^2 \leq 4 - x^2 - y^2$ atau $x^2 + y^2 \leq 2$

Dan kita tahu bahwa Gambar 3 adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari $\sqrt{2}$. Kita bisa saja mensetting batas y dari $y = -\sqrt{2 - x^2}$ sampai $y = \sqrt{2 - x^2}$.

Dan mensetting batas x dari $-\sqrt{2}$ sampai $\sqrt{2}$. Dan memperoleh intergral secara lengkap yaitu:

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dzdydx$$

Namun tentu, pada kasus ini akan sangat sulit kita melakukan integrasi dalam koordinat persegi panjang atau dalam koordinat x dan y, dimana hasil integrasi dari z adalah:

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 4 - 2x^2 - 2y^2 \, dydx$$

Di sini, jika kita perhatikan, integral ini sama halnya dengan integral rangkap dua dari fungsi $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$.

Cara yang lebih efektif adalah menggunakan koordinat polar (r, θ), namun karena masalah ini ada dalam ruang tiga dimensi, dimana terdapat sumbu z, sehingga diperoleh koordinat:

$$(r, \theta, z)$$

Yang disebut sebagai **koordinat silinder**, dimana[10], [11]:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

Ingat bahwa $dxdy = rdrd\theta$, sehingga elemen dari volume menjadi:

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

Sementara, batas r mulai dari 0 sampai $\sqrt{2}$ dan batas θ dari 0 sampai 2π.

Sehingga integral lipat tiga menjadi:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz\, r\, drd\theta$$

Integral dalam:

$$\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz = [z]_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} = 4 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2 = 4 - 2(x^2 + y2\,)$$

Integral tengah:

$$\int_0^{\sqrt{2}} 4 - 2(x^2 + y^2)r\, dr$$

Karena $x^2 + y^2 = r^2$ maka:

$$\int_0^{\sqrt{2}} [4 - 2r^2]\, r\, dr = \int_0^{\sqrt{2}} [4r - 2r^3]\ dr$$

$$= \left[2r^2 - \frac{1}{2}r^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 4 - 2 = 2$$

Integral luar:

$$V = \int_0^{2\pi} 2\, d\theta = 4\pi$$

Jadi, volume yang terbentuk dari daerah dalam ruang tiga dimensi antara dua paraboloid yaitu $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4 - x^2 - y^2$ adalah 4π.

Contoh lain dari integral lipat tiga adalah seperti pada contoh berikut ini.

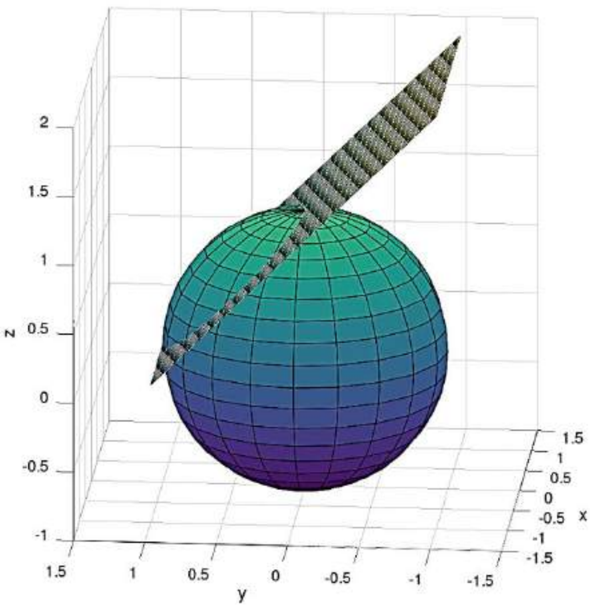
Contoh 2:

Tentukan volume dari daerah antara $z = 1 - y$ dan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (persamaan bola satuan).

Jawab:

Pertama, coba kita gambarkan permasalahan seperti pada gambar berikut dengan sintaks pada octave:

```
>> [x,y] = meshgrid(-1:0.05:1,-1:0.05:1,50);
>> z1=1-y;
>> mesh(x,y,z1)
>> hold on
>> sphere
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```



Gambar 9. 4. Daerah $\boldsymbol{R}$ *antara* $\boldsymbol{z = 1 - y}$ *dan Bola Satuan*

Misalkan $f(x, y, z) = 1$ maka diperoleh:

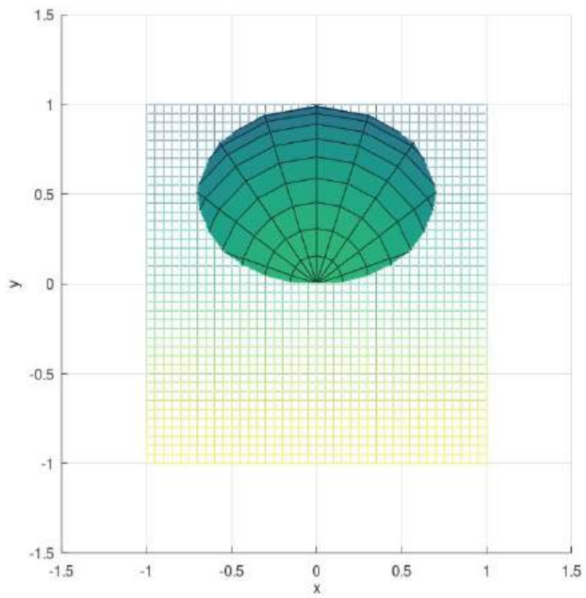
$$V = \int \int_R \int dxdydz$$

Dan pada kasus ini, lebih mudah menentukan batas z terlebih dahulu di mana pada bagian bawah dibatasi oleh $z = 1 - y$ dan pada bagian atas dibatasi oleh $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Sehingga integral menjadi:

$$V = \int \int \int_{1-y}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$$

Sementara batas untuk x dan y dapat diperoleh dengan menggambarkan bayangan di bawah daerah R pada bidang xy, seperti pada gambar berikut:



Gambar 9. 5. Bayangan di bawah daerah $\boldsymbol{R}$ *pada Bidang* $\boldsymbol{xy}$

Pada Gambar 9.5 diperoleh:

batas y mulai dari 0 sampai 1 dan

batas x mulai dari $-\sqrt{2y - 2y^2}$ sampai $\sqrt{2y - 2y^2}$.

Kita juga dapat memperoleh batas-batas x secara aljabar dengan cara:

$$1 - y = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$1 - 2y + y^2 = 1 - x^2 - y^2$$

$$-2y + 2y^2 = -x^2$$

$$x^2 = 2y - 2y^2$$

$$x = \pm\sqrt{2y - 2y^2}$$

Sementara untuk batas y:

Setting $z = 0$ kita peroleh:

Dari $z = 1 - y$ maka $0 = 1 - y$ atau $y = 1$ dan atau

Dari $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ maka $x^2 + y^2 = 1$ di mana kita tahu ini adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1. Jadi y antara 0 dan 1.

Sehingga integral lipat tiga secara lengkap adalah:

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{2y-2y^2}}^{\sqrt{2y-2y^2}} \int_{1-y}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdxdy$$

Namun, kita tidak akan melakukan integrasi dengan bentuk seperti ini.

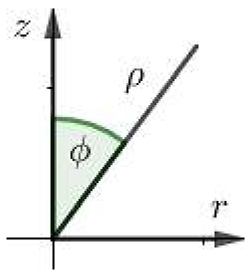
Cara lain untuk menentukan volume pada **Contoh 2** adalah menggunakan **koordinat bola**, di mana[2], [5], [12], [13]:

ρ = jarak dari titik asal ke sebuah titik $(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ϕ = sudut yang dibentuk dari sumbu z positif ke bidang xy

θ = sudut yang dibentuk dari sumbu x ke y berlawanan jarum jam

Untuk memperjelas, perhatikan gambar berikut:



Gambar 9. 6. Tampilan pada Bidang $\mathbf{rz}$

Pada Gambar 9.6, kita ingat kembali bahwa r adalah koordinat polar pada bidang xy di mana $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ [14].

Dengan trigonometri diperoleh:

$$r = \rho \sin \phi$$

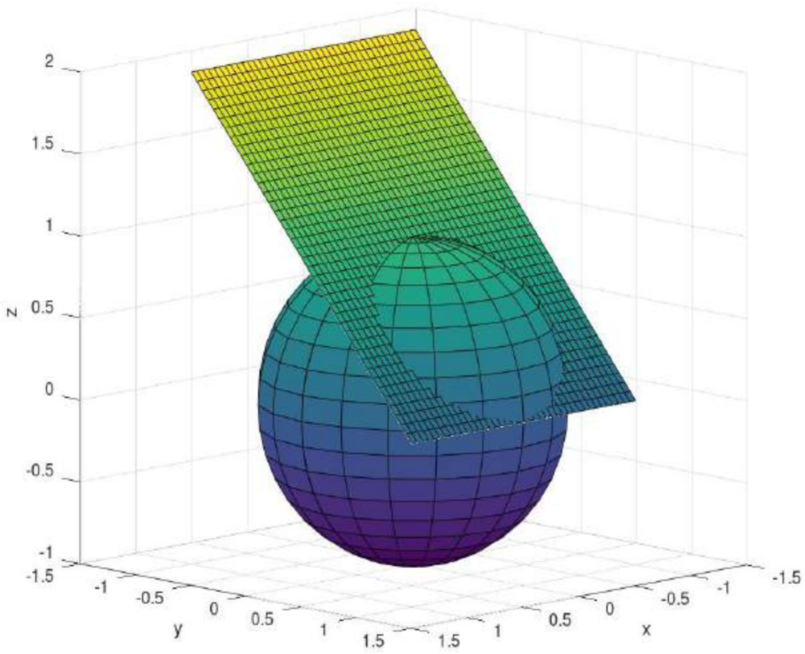
$$z = \rho \cos \phi$$

Akibatnya:

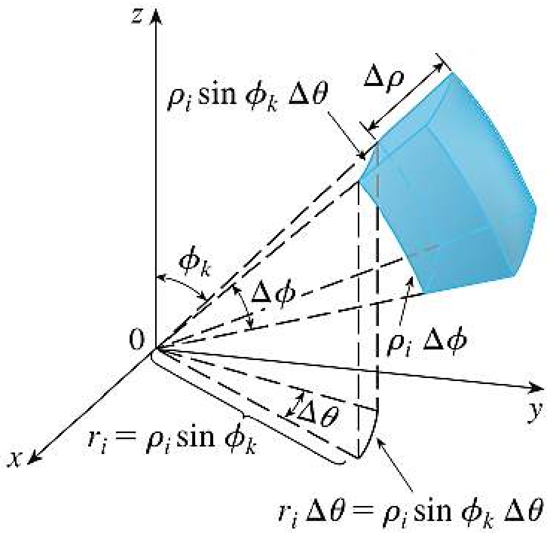
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

Selanjutnya, untuk mengetahui hubungan antara ρ, θ dan ϕ, perhatikan gambar berikut ini:



Selanjutnya kita perbesar menjadi seperti ini:



Gambar 9. 7. Aproksimasi Elemen Volume dalam Koordinat Bola

Pada Gambar 9.7, kita lihat bahwa aproksimasi dari elemen volume memiliki:

panjang = $\rho_i \Delta\phi$,

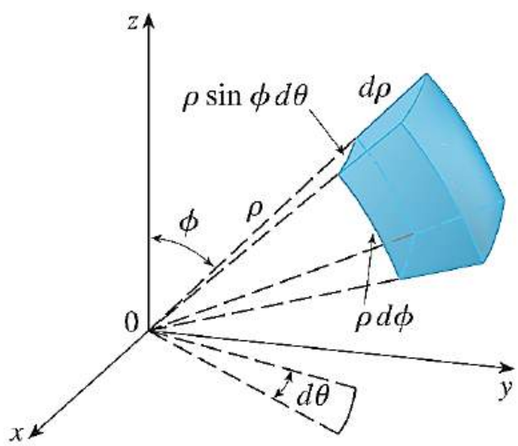
lebar = $\rho_i \sin\phi_k \, \Delta\theta$ dan

tinggi = $\Delta\rho$

maka aproksimasi dari elemen volume adalah:

$$\Delta V \approx \rho_i \Delta\phi \times \rho_i \sin\phi_k \, \Delta\theta \times \Delta\rho \approx \rho_i^2 \sin\phi_k \, \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

Dengan menggunakan limit, kita akan mendapati hasil elemen volume seperti gambar berikut:



Gambar 9. 8. Elemen Volume dalam Koordinat Bola

Dari Gambar 9.8 diperoleh elemen volume:

$$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Integral lipat tiga secara keseluruhan menjadi:

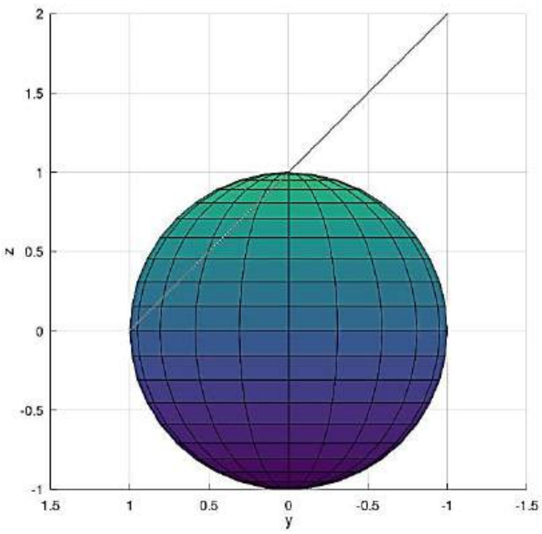
$$V = \int\int_R\int dV = \int\int_R\int \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Selanjutnya kita tentukan batas-batas untuk $\rho, \theta,$ dan ϕ.

Dari soal diketahui bahwa bola satuan memiliki $\rho = 1$, artinya ρ mulai dari 0 ke 1.

Sementara θ karena pada bayangan daerah di bawah R pada bidang xy adalah mirip lingkaran, maka θ mulai dari 0 sampai 2π.

Sedangkan untuk ϕ kita perhatikan gambar berikut:



Gambar 9. 9. Tampilan pada Bidang ***zr***

Pada Gambar 9.9, dapat diketahui bahwa ϕ mulai dari 0 sampai $\pi/4$. Atau kita dapat menentukannya dengan menggunakan $z = 1 - y$, di mana $z + y = 1$ membentuk segitiga siku-siku sama kaki dengan sudut pada kaki-kakinya pada bidang zr adalah $\pi/4$. Artinya ϕ mulai dari 0 sampai $\pi/4$.

Sehingga, integral lipat tiga secara keseluruhan menjadi:

$$V = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$V = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\rho^3 \sin\phi\right]_0^1 d\theta\, d\phi$$

$$V = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$V = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\theta}{3} \sin\phi\right]_0^{2\pi} d\phi$$

$$V = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{2\pi}{3} \sin\phi\right] d\phi$$

$$V = \left[-\frac{2\pi}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi/4} = -\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{2\pi}{3}$$

$$V = \frac{-\sqrt{2}\pi + 2\pi}{3}$$

Aplikasi Integral Rangkap Tiga

Menentukan Massa Benda Solid

Misalkan kita diberikan massa jenis δ dari sebuah benda/material biasanya dalam satuan gram/m^3atau dalam satuan lainnya di mana:

$$\delta = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Dengan pendekatan yang sama pada elemen volume, maka elemen massa benda solid tersebut adalah:

$$dm = \delta\, dV$$

dan massa dari benda solid tersebut adalah:

$$\text{Massa } (m) = \int\int\int_R \delta\, dV$$

Menentukan Pusat Massa Benda Solid

Pusat massa sebuah benda solid terletak pada $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ di mana:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int\int_R x\, \delta\, dV$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int\int_R y\, \delta\, dV$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\int\int\int_R z\,\delta\,dV$$

Menentukan Momen Inersia Benda Solid

Jika kita ingin menentukan kelembaman sebuah benda untuk berotasi pada porosnya atau disebut momen inersia, maka rotasi dapat dilakukan pada setiap sumbunya. Sehingga terdapat tiga kemungkinan yaitu:

Momen inersia pada sumbu x adalah:

$$I_x = \int\int\int_R (y^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

Momen inersia pada sumbu y adalah:

$$I_y = \int\int\int_R (x^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

Momen inersia pada sumbu z adalah:

$$I_z = \int\int\int_R (x^2 + y^2)\,\delta\,dV = \int\int\int_R r^2\,\delta\,dV$$

Menentukan Rata-Rata Nilai Sebuah Fungsi

Misalkan kita diberikan fungsi $f(x, y, z)$ pada daerah R, maka rata-rata nilai f adalah:

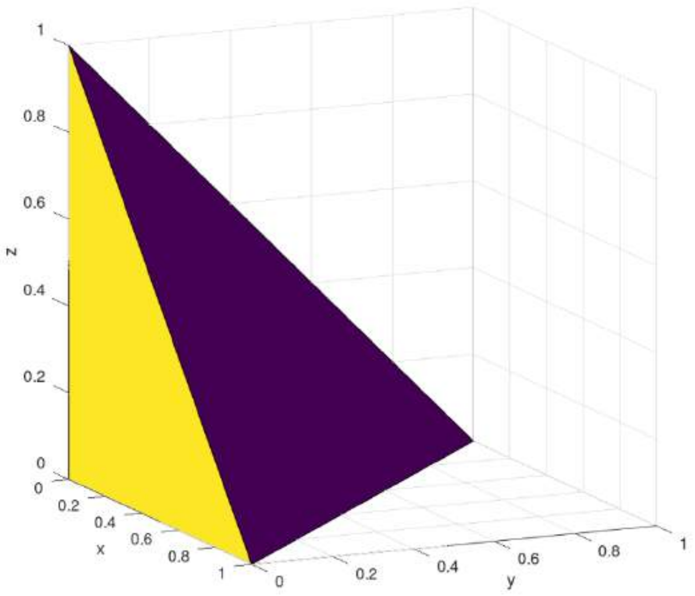
$$\overline{f} = \frac{1}{\text{Volume}(R)}\int\int\int_R f\,dV$$

Jika diberikan massa jenis dari f pada R, maka rata-rata berat benda solid pada R adalah:

$$\text{rata} - \text{rata berat} = \frac{1}{\text{Massa}(R)}\int\int\int_R f\,\delta\,dV$$

Contoh 3:

Tentukan momen inersia dari tetrahedron seperti pada gambar berikut pada sumbu z. Asumsikan massa jenis tetrahedron adalah 1.



Gambar 9. 10. Tetrahedron

Sintaks pada Octave:

```
>> X = [1 0 1; 0 0 0; 0 0 0];
>> Y = [0 0 0; 1 0 1; 0 0 0];
>> Z = [0 1 0; 0 0 0; 1 0 1];
>> surf(X, Y, Z)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> axis equal
```

Jawab:

Momen inersia dari tetrahedron dengan permukaan D pada sumbu z adalah:

$$I_z = \int\int\int_D (x^2 + y^2)\,\delta\,dV = \int\int\int_D r^2\,\delta\,dV$$

Karena $\delta = 1$ maka:

$$I_z = \int\int\int_D (x^2 + y^2)\ dV$$

Perhatikan, pada kasus ini, kita lebih baik menggunakan koordinat persegi panjang karena jika kita menggunakan koordinat silinder akan sulit menentukan batas-batas r dan θ.

Pada gambar 10, diketahui bahwa tetrahedron dibatasi oleh permukaan $x + y + z = 1$. Tetapi ini bagian tersulit untuk menentukan batas-batas $x, y,$ dan z.

Perhatikan pada Gambar 10, karena daerah R ada pada bidang xz dan tetrahedron berotasi pada sumbu z maka:

Batas y mulai dari 0 sampai $y = 1 - x - z$.

Sementara itu, karena proyeksi dari permukaan (D) ke bidang xz dibatasi oleh sumbu $x, y,$ dan garis $x + z = 1$, maka:

Batas x mulai dari 0 sampai $1 - z$.

Batas z mulai dari 0 sampai 1.

Sehingga momen inersia:

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} (x^2 + y^2)\ dy\, dx\, dz$$

Integral dalam:

$$\int_0^{1-x-z} (x^2 + y^2)\ dy = \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x-z} = x^2 - x^3 - x^2 z + \frac{1}{3}(1 - x - z)^3$$

Integral tengah:

$$\int_0^{1-z} \left[x^2 - x^3 - x^2 z + \frac{1}{3}(1 - x - z)^3\right] dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 z - \frac{1}{12}(1 - x - z)^4\right]_0^{1-z}$$

$$\int_0^{1-z} \left[x^2 - x^3 - x^2 z + \frac{1}{3}(1 - x - z)^3\right] dx = \left[\frac{1}{3}x^3(1 - z) - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1 - x - z)^4\right]_0^{1-z}$$

$$\int_0^{1-z} \left[x^2 - x^3 - x^2 z + \frac{1}{3}(1 - x - z)^3\right] dx = \frac{1}{3}(1 - z)^4 - \frac{1}{4}(1 - z)^4 + \frac{1}{12}(1 - z)^4$$

$$\int_0^{1-z} \left[x^2 - x^3 - x^2 z + \frac{1}{3}(1 - x - z)^3\right] dx = \frac{1}{6}(1 - z)^4$$

Integral luar:

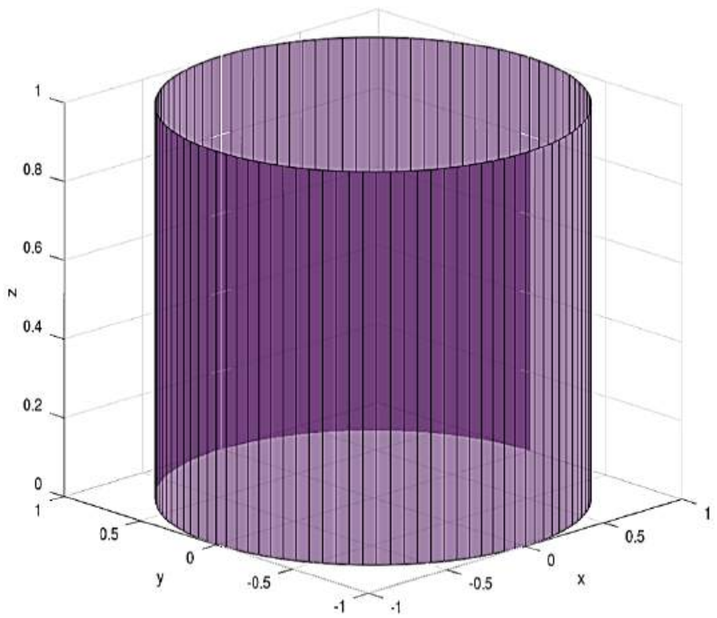
$$I_z = \int_0^1 \frac{1}{6}(1-z)^4\, dz = \left[-\frac{1}{30}(1-z)^5\right]_0^1 = \frac{1}{30}$$

Contoh 4:

Tentukan massa dari sebuah silinder dengan pusat di sumbu z, tinggi h, jari-jari a dan massa jenis $\delta = x^2 + y^2$.

Jawab:

Pertama, kita gambarkan silinder sebagai berikut:



Gambar 9. 11. Silinder

Sintaks pada Octave:

```
>> R=[1 1];

>> N=100;

>> [X,Y,Z] = cylinder(R,N);

>> testsubject = surf(X,Y,Z);

>> set(testsubject,'FaceAlpha',0.5)

>> xlabel("x");

>> ylabel("y");
```

>> zlabel("z");

Ingat, bahwa massa dari benda solid adalah:

$$\text{Massa } (m) = \int\int\int_D \delta \, dV = \int\int\int_D (x^2 + y^2) \, dV = \int\int\int_D r^2 \, dV$$

Perhatikan karena solid berbentuk silinder, maka disarankan menggunakan koordinat silinder untuk menyelesaikan permasalahan.

Pada Gambar 11 dan atau dalam soal, dapat kita tentukan batas-batas untuk $z, r,$ dan $theta$, di mana:

Batas z mulai dari 0 sampai h.

Batas r mulai dari 0 sampai a.

Batas θ mulai dari 0 sampai 2π.

Sehingga integral menjadi:

$$\text{Massa } (m) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h r^2 \, r \, dz \, dr \, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^h r^2 \, r \, dz = \int_0^h r^3 \, dz = hr^3$$

Integral tengah:

$$\int_0^a hr^3 dr = \left[\frac{hr^3}{4}\right]_0^a = \frac{ha^4}{4}$$

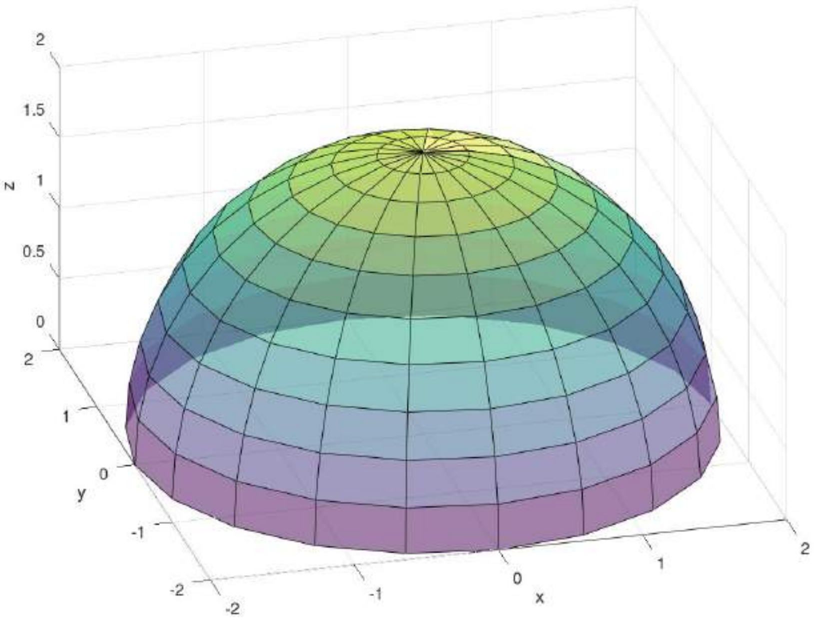
Integral luar:

$$\text{Massa } (m) = \int_0^{2\pi} \frac{ha^4}{4} d\theta = \frac{\pi ha^4}{2}$$

Latihan 9

1. Susun namun tidak perlu dihitung, integral dari volume suatu daerah di bawah bidang $z = y$ dan di atas paraboloid $z = x^2 + y^2$.
2. Tentukan momen inersia pada sumbu z dari sebuah benda solid yang dibatasi oleh paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan bidang $z = 1$. Asumsikan massa jenisnya adalah 1.

3. Gunakan koordinat silinder untuk menentukan pusat massa dari hemisphere (setengah bola) seperti gambar berikut dan asumsikan $\delta = 1$.



Sintaks pada Octave:

```
>> [x,y,z] = sphere;
>> x = x(11:end,:);
>> y = y(11:end,:);
>> z = z(11:end,:);
>> r=2;
>> hs = surf(r.*x,r.*y,r.*z);
>> hs = mesh(r.*x,r.*y,r.*z);
>> hs = surf(r.*x,r.*y,r.*z);
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> set(hs,'FaceAlpha',0.5)
```

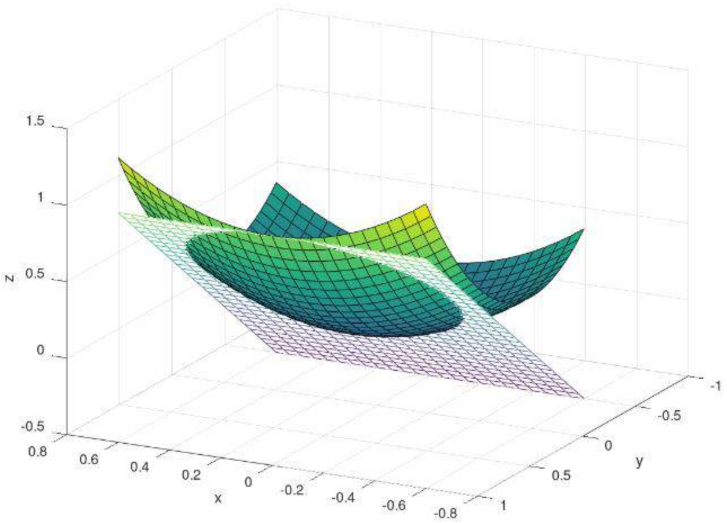
4. Gunakan koordinat bola untuk menentukan volume benda solid pada daerah R yang dibatasi oleh $z^2 = x^2 + y^2$ dan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
5. A

Jawaban 9

1. Langkah 1: Buat gambar dari permasalahan

   Sintaks Octave:

```
>> [x,y] = meshgrid(-1:0.05:1,-1:0.05:1,50);
>> z1 = y;
>> z2 = x.^2+y.^2;
>> mesh(x,y,z1)
>> hold on
>> surf(x,y,z2)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```

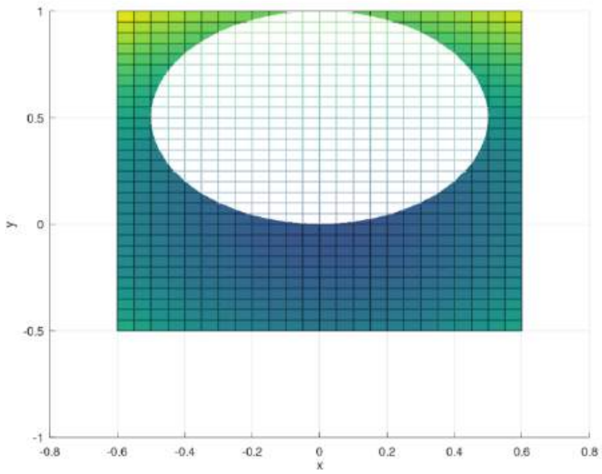


   Langkah 2: Tentukan batas pada sumbu z.

   Pada gambar dapat dilihat bahwa:

   Batas atas $z = y$ dan batas bawah $z = x^2 + y^2$.

   Langkah 3: Tentukan batas pada sumbu x dan y.



Pada gambar dapat dilihat bahwa:

Batas y mulai dari 0 sampai 1.Sementara untuk batas x, buat persamaan $z = z$, maka $y = x^2 + y^2$, $x^2 = y - y^2$, $x = \pm\sqrt{y - y^2}$.

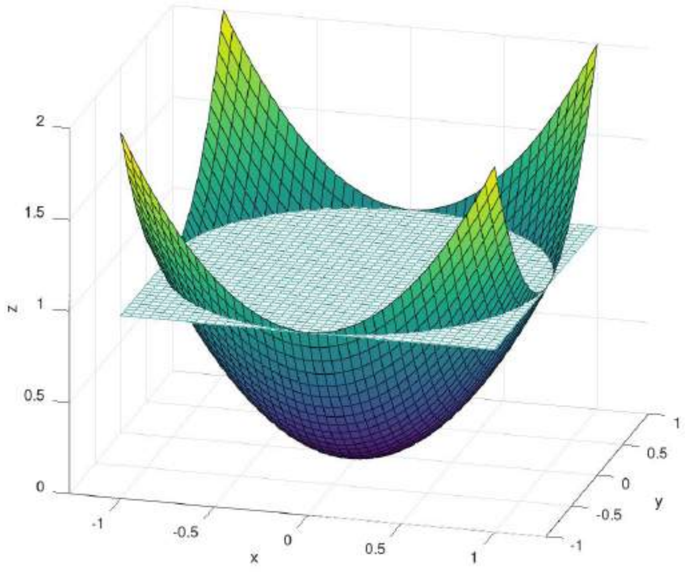
Langkah 4:Tuliskan integral secara lengkap

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{y} dz\, dx\, dy$$

2. Ingat momen inersia pada sumbu z dengan $\delta = 1$:

$$I_z = \int\int\int_R r^2\, \delta\, dV = \int\int\int_R r^2\, r\, dr\, d\theta\, dz = \int\int\int_R r^3\, dr\, d\theta\, dz$$

Langkah 1: Buat gambar dari permasalahan



Sintaks Octave:

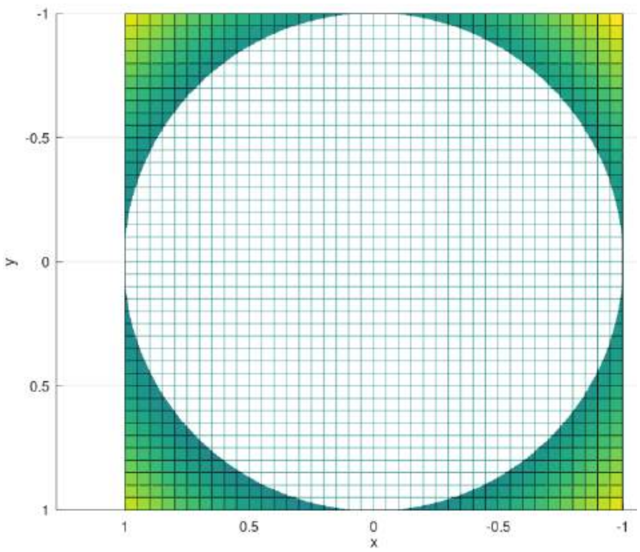
```
>> [x,y] = meshgrid(-1:0.05:1,-1:0.05:1,50);
>> z1=1-0.*x-0.*y;
>> mesh(x,y,z1)
>> hold on
>> z2 = x.^2+y.^2;
>> surf(x,y,z2)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> axis equal
```

Langkah 2: Tentukan batas pada sumbu z.

Pada gambar dapat dilihat bahwa:

Batas z mulai dari 0 sampai 1.

Langkah 3: Tentukan batas pada sumbu r dan θ.



Pada gambar dapat dilihat bahwa:

Batas θ, mulai dari 0 sampai 2π. Namun untuk batas x kita lihat $z = x^2 + y^2 = r^2$, $r = \sqrt{z}$. Maka batas r mulai dari 0 ke $\sqrt{z}$

Langkah 4: Tuliskan integral secara lengkap dan hitung.

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^3 dr\, d\theta\, dz$$

Integral dalam:

$$\int_0^{\sqrt{z}} r^3 dr = \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^{\sqrt{z}} = \frac{1}{4} z^2$$

Integral tengah:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} z^2 d\theta = \frac{1}{2} \pi z^2$$

Integral luar:

$$I_z = \int_0^1 \frac{1}{2} \pi z^2 dz = \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^1 = \frac{1}{6} \pi$$

3. Langkah 1: Ingat:

Pusat massa sebuah benda solid terletak pada $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ di mana $\delta = 1$:

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int\int\int_R x\, \delta\, dV = \frac{1}{m} \int\int\int_R x\, dV$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \int\int\int_R y\, \delta\, dV = \frac{1}{m} \int\int\int_R y\, dV$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m} \int\int\int_R z\, \delta\, dV = \frac{1}{m} \int\int\int_R z\, dV$$

Karena benda solid simetri, maka $\overline{x} = 0$ dan $\overline{y} = 0$, di mana:

$$\text{Massa } (m) = \int\int\int_R \delta\, dV$$

Karena $\delta = 1$ maka:

$$\text{Massa } (m) = \int\int\int_R dV$$

Langkah 2: Menentukan m

Karena daerah R berupa disk/cakram dengan jari-jari 2 maka

$$m = \frac{1}{2} V_{bola} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{6} \pi (2)^3 = \frac{16}{3} \pi$$

Langkah 3: Menentukan batas untuk $\overline{z}$.

Dari gambar pada soal diketahui bahwa:

Batas z mulai dari 0 sampai $\sqrt{4-x^2-y^2} = \sqrt{4-r^2}$

Batas r mulai dari 0 sampai 2.

Batas θ mulai dari 0 sampai 2π

Langkah 4: Menghitung $\overline{z}$.

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\int\int\int_R z\, dV$$

$$\overline{z} = \frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} zrdz\, dr\, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^{\sqrt{4-r^2}} zrdz = \left[\frac{1}{2}rz^2\right]_0^{\sqrt{4-r^2}} = \frac{1}{2}r(4-r^2) = \frac{1}{2}(4r-r^3)$$

Integral tengah:

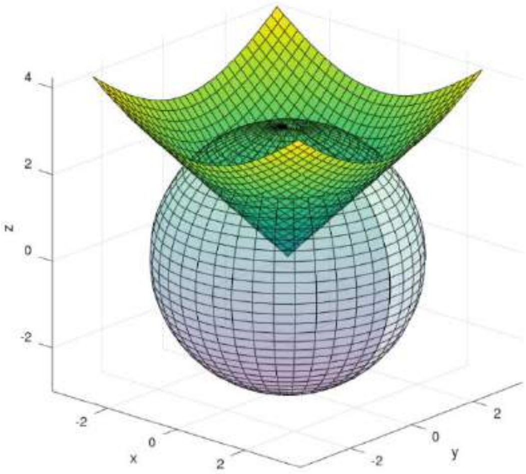
$$\int_0^{2}\frac{1}{2}(4r-r^3)dr = \frac{1}{2}\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = \frac{1}{2}(8-4) = 2$$

Integral luar:

$$\overline{z} = \frac{3}{16\pi}\int_0^{2\pi} 2d\theta = \frac{3}{16\pi}[2\theta]_0^{2\pi} = \frac{12\pi}{16\pi} = \frac{3}{4}$$

Maka pusat massa sebuah benda solid terletak pada (0,0,3/4).

4. Langkah 1: Gambarkan permasalahan



Sintaks Octave:

```
>> [x,y] = meshgrid(-3:0.2:3,-3:0.2:3,50);
>> z1=sqrt(x.^2 + y.^2);
>> surf(x,y,z1)
>> hold on
>> [x,y,z]=sphere(40);
>> hs = surf (3*x, 3*y, 3*z);
>> set(hs,'FaceAlpha',0.2)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```

Langkah 2: Mengingat integral koordinat bola.

$$V = \int \int_R \int \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Langkah 3: Menentukan batas ϕ, ρ, dan θ

Dari soal dan gambar dapat dilihat bahwa:

Batas ρ mulai dari 0 sampa1 3.

Batas θ mulai dari 0 sampai 2π

Untuk batas ϕ, karena $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dan $z^2 = x^2 + y^2$ maka $z^2 + z^2 = 9$, $2z^2 = 9,\ z = 3/\sqrt{2}$. Dan kita ketahui pada koordinat bola $z = \rho\cos\phi$ di mana $\rho = 3$ dan $z = 3/\sqrt{2}$. Sehingga $\cos\phi = 1/\sqrt{2}$ dan $\phi = \pi/4$.

Langkah 4:Tuliskan integral secara lengkap dan hitung.

$$V = \int\int_R\int \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^3 \rho^2 \sin\phi\, d\rho = \left[\frac{1}{3}\rho^3 \sin\phi\right]_0^3 = 9\sin\phi$$

Integral tengah:

$$\int_0^{\pi/4} 9\sin\phi\, d\phi = [-9\cos\phi]_0^{\pi/4} = -\frac{9}{2}\sqrt{2} + 9 = 9\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Integral luar:

$$V = \int_0^{2\pi} 9\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) d\theta = 18\pi\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Rangkuman 9

Integral rangkap tiga merupakan kelanjutan dari integral rangkap dua, di mana pada integral rangkap dua, kita mendapati bayangan daerah D dari suatu benda solid R dengan bentuk umum:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$$

Jika F eksis pada daerah R dan berlaku:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{jika } (x,y) \text{ ada di } D \\ 0, & \text{jika } (x,y) \text{ ada di } R \text{ tetapi tidak di } D \end{cases}$$

Sementara, pada integral rangkap tiga, benda solid pada daerah R dihitung volume secara keseluruhan dengan melihat sumbu z sebagai tinggi dari benda solid tersebut. Secara umum:

$$V = \int\int_R\int f(x, y, z)dV$$

Dimana $dV = dxdydz$ adalah elemen kecil dari volume yang dapat kita hitung aproksimasinya yaitu luas alas kali tinggi dengan alas $dxdy$ dan tinggi dz.

Langkah-langkah dalam menghitung integral lipat tiga yaitu:

1. Gambarkan permasalahan
2. Tentukan batas z.
3. Tentukan batas x dan y
4. Hitung intergral dalam, tengah, dan luar.

Sebagai catatan:

1. Jika integral lipat tiga menggambarkan koordinat persegi panjang maka integral dapat dihitung langsung dalam koordinat tersebut.
2. Jika integral lipat tiga menggambarkan koordinat silinder maka integral perlu dilakukan konversi dari koordinat persegi panjang ke dalam koordinat silinder.
3. Jika integral lipat tiga menggambarkan koordinat bola maka integral perlu dilakukan konversi dari koordinat persegi panjang ke dalam koordinat bola.

Tes Formatif 9

1. Jika $E = \{(x, y, z)|a \leq y \leq 4, y \leq z \leq 4, 0 \leq x \leq z\}$ maka:

   $$\int\int\int_E \frac{z}{x^2 + y^2}\, dV$$

   adalah…

   A. $\pi/8$

   B. $6\pi/8$

   C. $9\pi/8$

   D. $11\pi/8$

   E. $13\pi/8$

2. Volume tetrahedron yang dibatasi oleh sumbu koordinat dan bidang $2x + y + z = 4$ adalah …

   A. $16/3$

   B. $13/3$

   C. $10/3$

   D. $7/3$

   E. $4/3$

3. Volume benda solid yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 4$, dan bidang $y = -1$ dan $y + z = 4$ adalah …

   A. 8π

   B. 12π

   C. 16π

   D. 20π

   E. 24π

4. Massa benda solid E yang dibatasi oleh silinder parabolik $z = 1 - y^2$, bidang $x + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$ dan $\rho(x, y, z) = 2$ adalah …

   A. $2/5$

   B. $4/5$

   C. $8/5$

   D. $12/5$

   E. $16/5$

5. Momen inersia terhadap sumbu z dari silinder solid $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$ dengan $\rho = 1$ adalah …

   A. $\pi h a^3/2$

   B. $\pi h a^4/2$

   C. $\pi h a^4/4$

   D. $\pi h a^3/4$

E. $\pi h a^3$

Jawaban Tes Formatif 9

1. C

Maka integralnya adalah:

$$I = \int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2 + z^2}\, dx\, dz\, dy$$

Integral dalam:

$$\int_0^z \frac{z}{x^2 + z^2}\, dx = \left[\arctan\frac{x}{z}\right]_0^z = \frac{\pi}{4}$$

Integral tengah:

$$\int_y^4 \frac{\pi}{4} dz = \left[\frac{\pi}{4} z\right]_y^4 = \pi - \frac{\pi}{4} y$$

Integral luar:

$$I = \int_1^4 \left(\pi - \frac{\pi}{4} y\right) dy = \left[\pi y - \frac{\pi}{8} y^2\right]_1^4 = \frac{9\pi}{8}$$

2. A

Jelas, batas pada z antara $z = 0$ sampai $z = 4 - 2x - y$.

Pada bidang xy, jelas $z = 0$ dan jika $y = 0$ maka batas pada x antara $x = 0$ sampai $x = 2$.

Sementara batas y antara $y = 0$ sampai $y = 4 - 2x$.

Maka:

$$V = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} dz\, dy\, dx$$

Integral dalam:

$$\int_0^{4-2x-y} dz = 4 - 2x - y$$

Integral tengah:

$$\int_0^{4-2x} (4 - 2x - y) dy = 4(4 - 2x) - 2x(4 - 2x) - \frac{1}{2}(4 - 2x)^2$$

$$\int_0^{4-2x} (4-2x-y)dy = 2x^2 - 8x + 8$$

Integral luar:

$$V = \int_0^2 (2x^2 - 8x + 8)dx = \frac{16}{3}$$

3. D

$$V = \int\int\int_E dV$$

Karena batas y cukup jelas yaitu antara $y = -1$ sampai $y = 4 - z$, maka:

$$V = \int\int_D (\int_{-1}^{4-z} dy)\, dA = \int\int_D (5-z)dA$$

Perhatikan D adalah daerah pada bidang xz, di mana silinder $x^2 + z^2 = 4$ terdefinisi.

Karena volume terbentuk dari bagian silinder, maka kita gunakan polar untuk menghitungnya.

Jelas batas r antara 0 sampai 2, dan sudut silinder $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Maka:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (5 - r\sin\theta)r dr\, d\theta = 20\pi$$

4. E

$$M = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} 4dy\, dx\, dz = \frac{16}{5}$$

5. B

$$I_z = \int\int\int_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV$$

Dalam koordinat silinder diperoleh:

$$(r, \theta, z) \in |0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h$$

Maka:

$$I_z = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^a r^3 dr\, dz\, d\theta = \frac{\pi h a^4}{2}$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 9 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 9.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 10. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 9, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 10

MEDAN VEKTOR TIGA DIMENSI

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan terkait medan vektor tiga dimensi, dan integral permukaan.

Materi 10

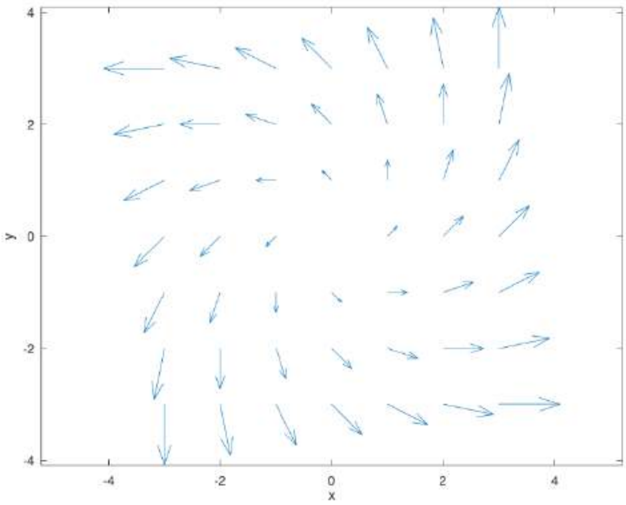
Pada sesi sebelumnya, kita sudah belajar tentang medan vektor atau fungsi bernilai vektor [1] dua dimensi dalam bentuk umum $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ [2]. Medan vektor **F** adalah suatu fungsi yang memetakan R^n ke R^n dengan visualisasi vektor [7] atau medan vektor **F** adalah suatu fungsi di mana inputnya adalah sebuah titik di R^n dan outputnya adalah sebuah vektor di R^n dari titik input ke titik output [9]. Sebagai pengingat perhatikan medan vektor dua dimensi berikut.

Contoh 1:

Misalkan $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ adalah medan vektor. Gambarkan **F** dengan domain $[-3,3] \times [-3 \times 3]$ pada Octave. Diskusikan kapan vektor vertikal dan horisontal [14]?

Jawab:

Dari soal diketahui bahwa $M = x - y$ dan $N = x + y$.



Gambar 10. 1. Medan Vektor $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle$

Sintaks Octave:

```
>> [x,y] = meshgrid(-3:3);
>> M = x-y;
>> N = x+y;
>> quiver(x, y, M, N);
>> axis equal
>> xlabel("x")
>> ylabel("y")
```

Perhatikan Gambar 10.1, pada lingkaran merah bawah, vektor akan horisontal di mana $(x, y) = (3, -3)$ dan jika disubstitusikan ke $\boldsymbol{F} = \langle x - y, x + y \rangle$ diperoleh $\boldsymbol{F} = \langle 3 - (-3), -3 + 3 \rangle = \langle 6,0 \rangle$. Secara umum, pada kasus ini vektor akan horisontal jika $x + y = 0$.

Serupa dengan analisis pada vektor horisontal, maka vektor akan vertikal jika $x - y = 0$ seperti pada lingkaran merah atas di mana $(x, y) = (3,3)$. ∎

Medan Vektor 3 Dimensi

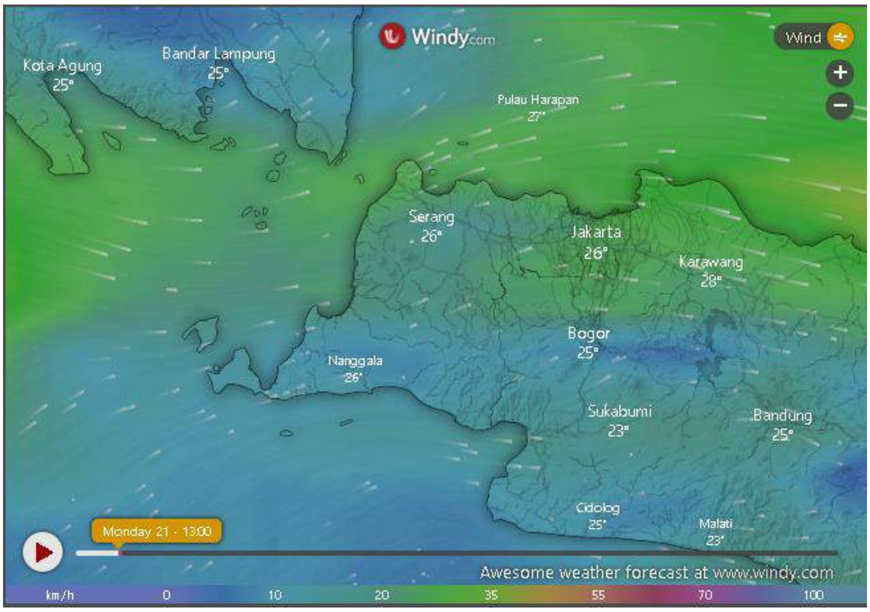
Kita sudah melihat bagaimana medan vektor dua dimensi bekerja. Prinsip serupa dapat digunakan untuk tiga dimensi, dan medan vektor secara umum berbentuk:

$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} + O(x, y)\mathbf{k}$$

Di mana, medan vektor dimensi 3 adalah fungsi **F** yang nilai-nilainya adalah vektor pada dimensi 3 [10]. Untuk memahami medan vektor 3 dimensi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2:

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 10. 2. Aliran Angin di Sekitar Pulau Jawa dan Sumatra

Gambar 10.2 menunjukkan model perkiraan (*forecast*) arah dan kecepatan angin (kita sebut dengan medan kecepatan angin/medan vektor) di atas permukaan bumi (sphere) di sekitar pulau Jawa dan Sumatra pada permukaan laut di mana arah dan kecepatan angin bervariasi di berbagai lokasi berbasis pada model European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF). Terdapat beberapa model forecasting untuk memprediksi cuaca secara numerik antara lain Canadian Model, Global Forecast System (GFS), dan ECMWF. Namun dalam website windy.com hanya digunakan dua model yaitu GFS dan ECMWF.

Model prakiraan cuaca pertama kali diajukan oleh Vilhelm Bjerknes ahli fisika dan meteorologi dari Norwegia pada awal abad 20. Ide dasar prediksi cuaca numerik (NWP = Numerical Weather Prediction) adalah mengambil sampel keadaan fluida pada waktu tertentu dan menggunakan persamaan dinamika fluida dan termodinamika untuk memperkirakan keadaan fluida pada suatu waktu di masa mendatang. Pada umumnya, Persamaan dinamika fluida dan termodinamika yang digunakan adalah persamaan primitif yang terdiri dari 3 persamaan yaitu:

1. Persamaan kontinuitas: terkait dengan representasi dari konservasi massa, fluks dan integral permukaan.
2. Persamaan konservasi momentum: terdiri dari persamaan Navier-Stokes yang menggambarkan aliran hidrodinamis pada permukaan bola dengan asumsi gerak vertikal lebih kecil dari gerak horisontal (hidrostatis).
3. Persamaan energi thermal: terkait dengan temperatur pada sebuah sistem sumber panas secara keseluruhan.

Contoh 3:

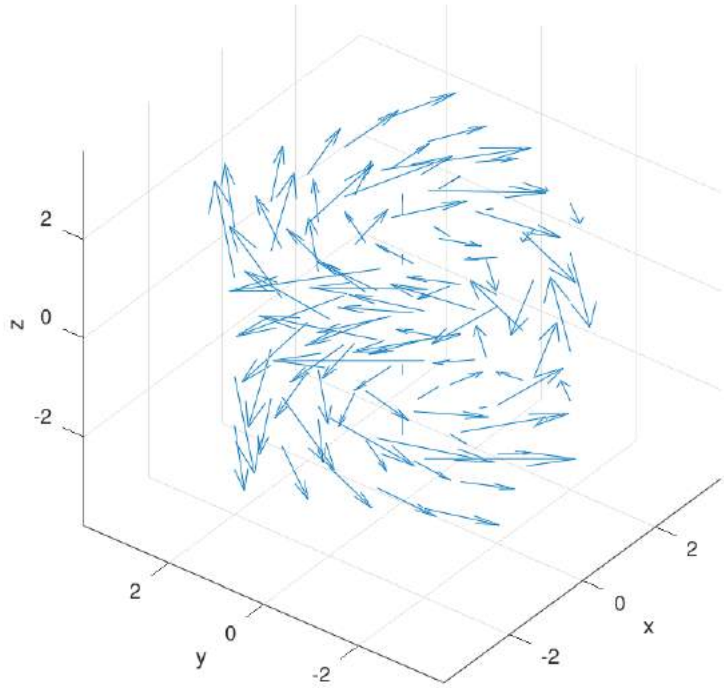
Misalkan $\mathbf{F} = \frac{y}{z}\mathbf{i} - \frac{x}{z}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$ adalah medan vektor. Gambarkan $\mathbf{F}$ dengan domain $[-2,2] \times [-2 \times 2] \times [-2 \times 2]$ pada Octave. Diskusikan hasil medan vektornya [5][14]?

Jawab:

Dari soal diketahui bahwa $M = y/z$, $N = -x/z$, dan $O = z/4$

Sintaks Octave:

```
>> [XX,YY,ZZ] = meshgrid(-2:2);
>> M = YY./ZZ;
>> N = -XX./ZZ;
>> O = ZZ./4;
>> quiver3(XX,YY,ZZ,M,N,O)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> axis equal
```



Gambar 10. 3. Medan Vektor $\boldsymbol{F} = \frac{y}{z}\boldsymbol{i} - \frac{x}{z}\boldsymbol{j} + \frac{z}{4}\boldsymbol{k}$

Perhatikan Gambar 10.3, terdapat tiga kasus pada sumbu z di mana:

1. Untuk $z = 0$, medan vektor tidak terdefinisi.
2. Untuk $z > 0$, medan vektor memiliki orientasi searah jarum jam.
3. Untuk $z < 0$, medan vektor memiliki orientasi berlawanan arah jarum jam.

Pada saat $x, y = 0$ dan $z > 0$, medan vektor memiliki arah vertikal ke atas. Sementara, saat $x, y = 0$ dan $z < 0$, medan vektor memiliki arah vertikal ke bawah■.

Integral Permukaan

Pada sesi sebelumnya, kita sudah mempelajari integral rangkap tiga yang melibatkan permukaan paraboloid untuk menghitung volume benda solid. Dalam perhitungan aproksimasi volume, terdapat elemen kecil dari luas permukaan paraboloid yang disebut ΔS.

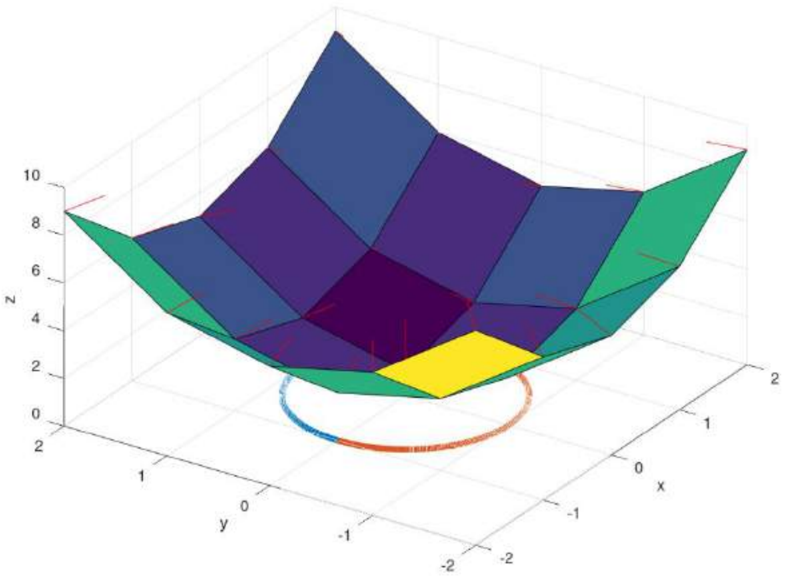
Prinsip luas permukaan dari $z = f(x, y)$ mirip dengan prinsip luas daerah di bawah kurva, integral garis atau integral lipat tiga. Namun untuk menentukan luas elemen kecil dari permukaan, akan kita gunakan *cross* *product* di mana elemen tersebut kita pandang sebagai jajaran genjang [1], [2], [5]–[7], [9]–[14]. Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut:

Contoh 4:

Tentukan luas permukaan $z = 1 + x^2 + y^2$ di atas lingkaran satuan.

Jawab:

Pertama, gambar paraboloid $z = 1 + x^2 + y^2$ dan $x^2 + y^2 = 1$ dengan Octave.

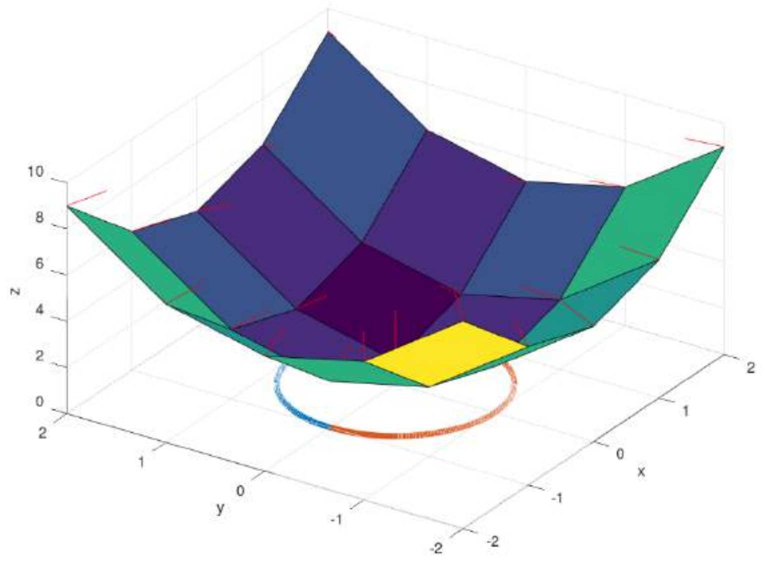


Gambar 10. 4. Permukaan $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}$ *dengan* $\boldsymbol{D} = [-\mathbf{2}, \mathbf{2}] \times [-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$

Sintaks Octave:

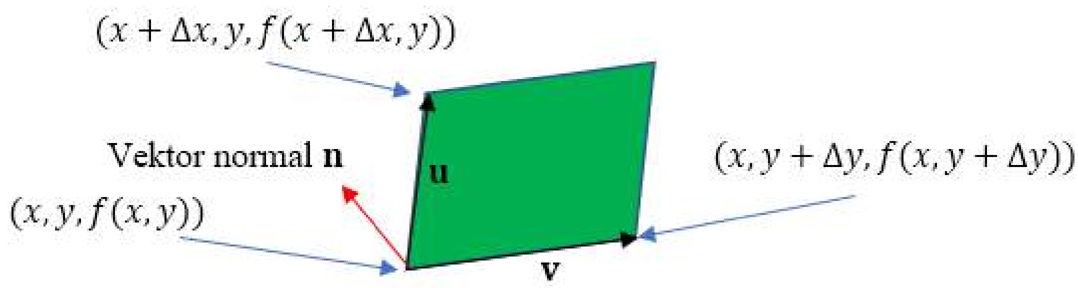
```
>> [x,y] = meshgrid(-2:2,-2:2);

>> z = 1 + x.^2 + y.^2;

>> surfnorm(x,y,z)

>> hold on

>> x = -1:0.01:1;

>> y = (1 - x .^ 2) .^ 0.5;

>> plot(x,y, "linewidth", 4, x,-y, "linewidth", 4);

>> xlabel("x");

>> ylabel("y");

>> zlabel("z");
```

Kita sudah punya Gambar 10.4 dari permukaan paraboloid $z = x^2 + y^2$, namun bagaimana kita menentukan luasnya?



Gambar 10. 5. Elemen Permukaan $\boldsymbol{z} = \mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}$

Perhatikan Gambar 10.5 menunjukkan salah satu elemen permukaan dari 16 elemen atau partisi dan vektor normal $\mathbf{n}$ pada z. Jika kita perbesar elemen tersebut adalah sebuah jajar genjang sebagai berikut:



Gambar 10. 6. Salah Satu Elemen Permukaan $\boldsymbol{z}$

Perhatikan Gambar 10.6, dengan menggunakan cross product bahwa :

luas elemen jajar genjang: $\Delta S = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{n}$

Di mana:

Komponen vektor $\mathbf{u} \approx \langle x + \Delta x - x, y - y, f(x + \Delta x, y) - f(x, y)\rangle$

Komponen vektor $\mathbf{v} \approx \langle x - x, y + \Delta y - y, f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\rangle$

Perhatikan, dengan menggunakan deret Taylor diperoleh:

$$f(x + \Delta x, y) \approx f(x, y) + f_x \Delta x$$

$$f(x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_y \Delta y$$

Akibatnya komponen vektor menjadi:

vektor $\mathbf{u} \approx \langle \Delta x, 0, f_x \Delta x \rangle = \langle 1,0, f_x \rangle \Delta x$

vektor $\mathbf{v} \approx \langle 0, \Delta y, f_y \Delta y \rangle = \langle 0,1, f_y \rangle \Delta y$

Sehingga luas elemen jajar genjang adalah:

$$\Delta S = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle 1,0, f_x \rangle \times \langle 0,1, f_y \rangle \Delta x \Delta y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} \Delta x \Delta y$$

$$\Delta S = \left| \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle \right| \Delta x \Delta y$$

$$\Delta S = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, \Delta x \Delta y$$

Jika dilakukan partisi sampai tak hingga, diperoleh:

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy$$

Kemudian ambil limit dari jumlah Riemann semua ΔS maka luas permukaan z adalah:

$$S = \int \int_R f(x, y, z)\, dS$$

Asumsikan $f(x, y, z) = 1$, maka:

$$S = \int \int_R f(x, y, z)\, dS = \int \int_R dS = \int \int_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy$$

Kita tahu bahwa:

$f_x = 2x$ dan $f_y = 2y$ maka:

$$S = \int \int_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx\, dy$$

Karena daerah R dibatasi oleh $x^2 + y^2 = r^2$ maka lebih mudah kita mengevaluasi S dalam koordinat polar dimana $0 \le r \le 1$ dan $0 \le \theta \le 2\pi$. Sehingga diperoleh:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2)^{1/2}\, r dr\, d\theta = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

Latihan 10

1. Gunakan Octave untuk menggambar medan vektor $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ dengan domain $[-3{,}3] \times [-3 \times 3]$. Diskusikan medan vektor yang dihasilkan.
2. Tentukan luas permukaan S dari hemisphere $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ di atas daerah R yang dibatasi oleh disk $x^2 + y^2 \leq 9$.

Jawaban 10

1. Langkah 1: Memahami masalah

   Integral flux atau flux medan vektor **F** yang melalui permukaan $z = f(x, y)$ di atas daerah R pada bidang xy dengan orientasi ke atas adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_R \mathbf{F}. \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle\, dx\, dy$$

   Dari soal diketahui terdapat dua permukaan yaitu S_1 dan S_2, serta diketahui $\mathbf{F} = \langle y, x, z \rangle$, $z = 1 - x^2 - y^2$, dan $z = 0$.

   Dari z kita peroleh:

$$\mathbf{N} = \langle -2x, -2y, 1 \rangle$$

   Langkah 2: Menentukan rencana

   Maka flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S_1:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D \mathbf{F}. \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D \langle y, x, z \rangle . \langle -(-2x), -(-2y), 1 \rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (2xy + 2xy + z)\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (4xy + z)\, dx\, dy$$

   Karena $z = 1 - x^2 - y^2$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (4xy + 1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

   Karena permasalahan mengandung lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang diperoleh dari:

$$z = z$$
$$0 = 1 - x^2 - y^2$$

Dan $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ serta $dxdy = rdrd\theta$, maka kita gunakan koordinat polar untuk menyelesaikannya. Sehingga:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (4r^2\cos\theta\sin\theta + 1 - r^2) r\, dr\, d\theta$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r^3\cos\theta\sin\theta + r - r^3)\, dr\, d\theta$$

Langkah 3: Melaksanakan rencana

Integral dalam:

$$\int_0^1 (4r^3\cos\theta\sin\theta + r - r^3)\, dr = \left[r^4\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1$$

$$\int_0^1 (4r^3\cos\theta\sin\theta + r - r^3)\, dr = \cos\theta\sin\theta + \frac{1}{4}$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{4}\right) d\theta$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta$$

Misal $u = \sin\theta$ maka $du = \cos\theta\ d\theta$ atau :

$$d\theta = \frac{1}{\cos\theta}du$$

Maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\cos\theta\, u\ \frac{1}{\cos\theta}du + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi} u\, du + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = 0 + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\pi$$

Jadi, flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S_1 adalah $\pi/2$.

Selanjutnya, permukaan S_2 berorientasi ke bawah, sehingga vektor normal satuannya adalah $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$. Sehingga flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melalui permukaan S_2 adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_{D} \langle y, x, z\rangle . \langle 0,0,-1\rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{D} -z\, dx\, dy$$

Karena $z = 0$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{D} 0\, dx\, dy = 0$$

Langkah 4: Menguji jawaban

Maka flux medan vektor $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah T dibatasi oleh paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ dan bidang $z = 0$ adalah $\pi/2$.

2. Langkah 1: Memahami masalah

Integral flux atau flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melalui permukaan $z = f(x, y)$ di atas daerah R pada bidang xy dengan orientasi ke atas adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_{R} \mathbf{F} . \langle -f_x, -f_y, 1\rangle\, dx\, dy$$

Dari soal diketahui $\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx\rangle$, $z = 4 - x^2 - y^2$, dan persegi $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Dari z kita peroleh:

$$\mathbf{N} = \langle -2x, -2y, 1\rangle$$

Langkah 2: Menentukan rencana

Maka flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melalui permukaan S_1:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_{D} \mathbf{F} . \langle -f_x, -f_y, 1\rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{D} \langle xy, yz, zx\rangle . \langle -(-2x), -(-2y), 1\rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{D} (2x^2y + 2y^2z + zx)\, dx\, dy$$

Karena $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 2y^2z + zx) dx\, dy$$

Karena $z = 4 - x^2 - y^2$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 2y^2(4 - x^2 - y^2) + (4 - x^2 - y^2)x)dx\,dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 8y^2 - 2y^2x^2 - 2y^4 + 4x - x^3 - xy^2)dx\,dy$$

Langkah 3: Melaksanakan Rencana

Integral dalam:

$$\int_0^1 (2x^2y + 8y^2 - 2y^2x^2 - 2y^4 + 4x - x^3 - xy^2)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3y + 8xy^2 - 2xy^4 + 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}y + 8y^2 - 2y^4 + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}y^2$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y + 8y^2 - 2y^4 + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}y^2\right)dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \left[\frac{1}{3}y^2 + \frac{8}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{7}{4}y - \frac{1}{6}y^3\right]_0^1$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2}{5} + \frac{7}{4} - \frac{1}{6} = \frac{60 + 480 - 72 + 315 - 30}{180} = \frac{713}{180}$$

Langkah 4: Menguji jawaban

Maka flux medan vektor $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah T dibatasi oleh paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ dan persegi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ adalah 713/180.

Rangkuman 10

Integral permukaan merupakan perluasan dari integral garis dan secara intuitif diambil elemen kecil ΔS dari permukaan S sehingga limit jumlah dari seluruh elemen permukaan sampai tak hingga adalah

$$S = \int \int_R f(x, y, z)\, dS$$

Di mana R adalah daerah yang membatasi permukaan S.

Tes Formatif 10

1. Gradien medan vektor dari $f(x, y, z) = x\ln(y - 2z)$ adalah …
   A. $\langle 1/(y - 2x), x/(y - 2z), 2x/(y - 2z)\rangle$
   B. $\langle \ln(y - 2x), x/(y - 2z), 2x/(y - 2z)\rangle$
   C. $\langle \ln(y), x/(y - 2z), 2x/(y - 2z)\rangle$
   D. $\langle \ln(y - 2x), x/2z, 2x/(y - 2z)\rangle$
   E. $\langle 1/-2x, x/y, 2x/(y - 2z)\rangle$
2. Jika S adalah persegi panjang dengan persamaan:
   $$x = u + v,\ y = u - v,\ z = 1 + 2u + v,\ 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 1$$
   Maka nilai dari:
   $$\int\int_S (x + y + z)dS$$
   adalah …
   A. $7\sqrt{14}$
   B. $8\sqrt{14}$
   C. $9\sqrt{14}$
   D. $10\sqrt{14}$
   E. $11\sqrt{14}$
3. Jika S adalah permukaan yang dibatasi silinder $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $x + y = 2$ dan $\mathbf{F} = \langle x, y, 5\rangle$, maka nilai dari:
   $$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$
   adalah …
   A. $\frac{1}{2}\pi$
   B. π
   C. 2π
   D. 4π
   E. 6π
4. Jika S adalah bagian dari bidang $2x + 2y + z = 4$ terletak pada oktan pertama, maka nilai dari:
   $$\int\int_S xz\, dS$$
   adalah …
   A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

E. 8

5. Jika S adalah permukaan dengan persamaan $x = y + 2z^2$, $0 \leq y \leq 1$,dan $0 \leq z \leq 1$ maka nilai dari:

$$\int\int_S z\, dS$$

adalah …

A. $17\sqrt{2}/12$

B. $15\sqrt{2}/12$

C. $13\sqrt{2}/12$

D. $11\sqrt{2}/12$

E. $9\sqrt{2}/12$

Jawaban Tes Formatif 10

1. B

$$\nabla f = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$$

$$\nabla f = \langle \ln(y - 2x)\,, \frac{x}{y - 2z}\,, \frac{2x}{y - 2z} \rangle$$

2. E

$$\int\int_S (x + y + z) dS = \int\int_D f\big(\mathbf{r}(u, v)\big) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Karena:

$$x = u + v$$

$$y = u - v$$

$$z = 1 + 2u + v$$

Maka:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1;\ \frac{\partial x}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1;\ \frac{\partial y}{\partial v} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2;\ \frac{\partial z}{\partial v} = 1$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle 3,1,-2\rangle$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{14}$$

Sehingga:

$$\int\int_S (x+y+z)dS = \sqrt{14}\int_0^1\int_0^2 (4u+v+1)du\,dv = 11\sqrt{14}$$

3. D

Permukaan S terbagi menjadi tiga bagian yaitu S_1, S_2, S_3.

S_1 adalah cakram pada bidang $y = 0$

S_2 adalah cakram eliptik pada bidang $x + y = 2$

S_3 adalah kurva pada silinder antara dua bidang.

Berdasarkan konvensi, vektor normal mengarah keluar.

Vektor normal **n** pada S_1 adalah $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ sehingga $d\mathbf{S} = -\mathbf{j}\,dS$

Maka:

$$\int\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_{S_1} \langle x, y, 5\rangle \cdot \langle 0,-1,0\rangle\, dS = 0$$

$$\int\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_{D} \langle x, y, 5\rangle \cdot \langle v, v, 0\rangle\, dA$$

Karena $u \in (0,2\pi)$ dan $v \in (0,1)$ maka:

$$\int\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^1\int_0^{2\pi} v(x+y)\,du\,dv$$

Karena $x + y = 2$ maka:

$$\int\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\int_0^1\int_0^{2\pi} v\,du\,dv = 2\pi$$

Pada S_3 persamaan parametriknya adalah $\langle \sin u, v, \cos u\rangle$ di mana:

$$u \in (0,2\pi)$$

Karena $0 < y < 2 - x$ maka $0 < u < 2 - \sin u$ maka:

$$\mathbf{r}_u = \langle \cos u, 0, -\sin u\rangle$$

$$\mathbf{r}_v = \langle 0,1,0\rangle$$

Sehingga:

$$\int\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_{D} \langle \sin u, v, 5\rangle \cdot \langle \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\rangle dA$$

$$\int\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2-\sin u} (\sin^2 u + 5\cos u)dv\,du = 2\pi$$

Maka:

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \int\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \int\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi$$

4. A

$$\int\int_S f(x,y,z)dS = \int\int_D f(x,y,g(x))\sqrt{(g_x)^2 + \left(g_y\right)^2 + 1}\, dA$$

$$\int\int_S xz\, dS = \int\int_D x(4-2x-2y)\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1}\, dA$$

$$\int\int_S xz\, dS = 3\int\int_D (4x - 2x^2 - 2xy)dA$$

Karena $2x + 2y + z = 4$ maka pada bidang xy kita dapati:

Batas x dari 0 sampai 2, dan batas y dari 0 sampai $2 - x$

Sehingga:

$$\int\int_S xz\, dS = 3\int_0^2 \int_0^{2-x} (4x - 2x^2 - 2xy)dA = 4$$

5. C

$$\int\int_S z\, dS = \int_0^1 \int_0^1 z\sqrt{16z^2 + 2}dy\, dx = \frac{13\sqrt{2}}{12}$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 10 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 10.

$$\boxed{\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%}$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 11. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 10, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 11

FLUKS TIGA DIMENSI

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan terkait fluks tiga dimensi.

Materi 11

Pada sesi sebelumnya, kita sudah belajar tentang integral permukaan untuk menentukan luas area suatu permukaan [1] tiga dimensi dalam bentuk umum:

$$S = \int \int_R dS = \int \int_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

Di mana f_x adalah turunan parsial dari z terahadap x dan f_y adalah turunan parsial dari z terhadap y [2], sedangkan dA adalah luas area pada bidang xy. Perhatikan bahwa luas permukaan S dihitung pada suatu fungsi z di mana z bukan sebuah medan vektor $\mathbf{F}$ [9]. Sebagai pengingat perhatikan integral permukaan berikut.

Contoh 1:

Evaluasi

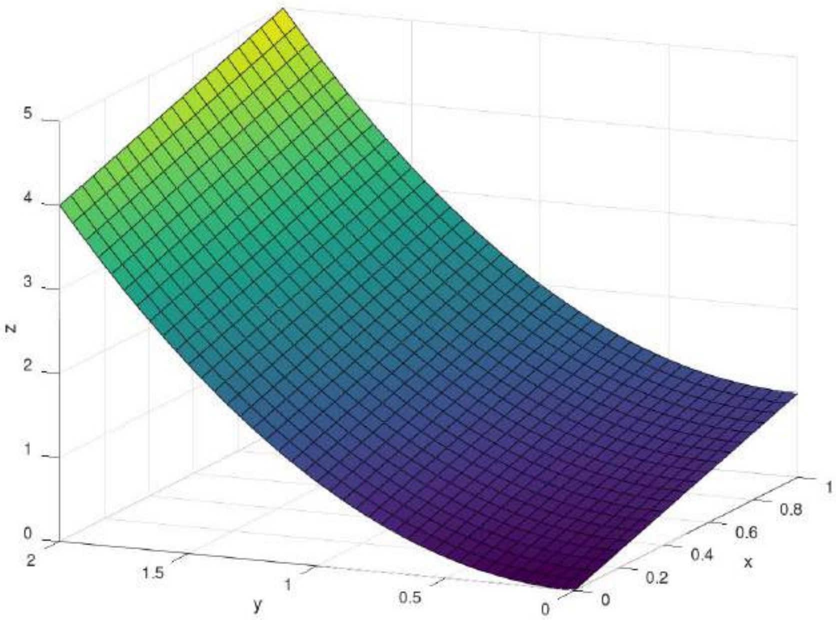
$$\int \int_S y\, dS$$

Di mana S adalah permukaan $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ [14]?

Jawab:

Pertama, kita gambarkan permukaan dengan Octave (opsional), di mana sintaksnya adalah:

```
>> [x,y]=meshgrid(0:0.05:1,0:0.05:2);
>> z=x+y.^2;
>> surf(x,y,z)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```



Gambar 11. 1. Permukaan $\boldsymbol{z = x + y^2}$

Perhatikan Gambar 11.1, memperjelas permasalahan bahwa ketika $x = 0, y = 0$ maka $z = 0$ dan ketika $x = 1, y = 2$ maka $z = 5$. Namun kondisi ini belum membantu kita sepenuhnya untuk menghitung S. Ingat bahwa:

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dA$$

Maka kita perlu menentukan f_x dan f_y, di mana:

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Sehingga:

$$\int\int_S y\,dS = \int\int_D y\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dA$$

$$\int\int_S y\,dS = \int\int_D y\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dy\,dx$$

$$\int\int_S y\,dS = \int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1 + 1^2 + (2y)^2}\,dy\,dx$$

$$\int\int_S y\,dS = \int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\,dy\,dx$$

$$\int\int_S y\,dS = \int_0^1\int_0^2 y\sqrt{2 + 4y^2}\,dy\,dx$$

$$\int\int_S y\,dS = \sqrt{2}\int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy\,dx$$

Integral dalam:

$$\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy$$

Misal: $u = 1 + 2y^2$ maka $du = 4y\,dy$, sehingga:

$$dy = \frac{1}{4y}du$$

Maka integral dalam menjadi:

$$\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy = \int_0^2 y\sqrt{u}\frac{1}{4y}\,du$$

$$\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1 + 2y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\,dy = \frac{1}{6}\left[(1 + 2y^2)\sqrt{1 + 2y^2}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}dy = \frac{1}{6}[9.3 - 1.1]$$

$$\int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}dy = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Integral luar:

$$\int\int_S y\, dS = \frac{13\sqrt{2}}{3}\int_0^1 dx$$

$$\int\int_S y\, dS = \frac{13\sqrt{2}}{3}[1-0] = \frac{13\sqrt{2}}{3}\ \blacksquare$$

Flux 3 Dimensi

Kita sudah melihat bagaimana integral permukaan tiga dimensi bekerja yaitu:

$$S = \int\int_R dS$$

dan juga integral garis yaitu:

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Gabungan dari kedua prinsip dapat digunakan untuk menghitung integral permukaan pada medan vektor **F** melalui atau di atas permukaan S (integral flux), yaitu [9],[2],[5], [6]:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, dS$$

Di mana:

$\Phi_{\mathbf{F}} =$ flux **F** melalui atau di atas permukaan S atau integral flux

F = medan vektor dimensi 3

$d\mathbf{S}$ = elemen luas area vektor **S**

n = vektor normal satuan dari permukaan S

dS = elemen luas permukaan S

Perhatikan bahwa $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ di mana:

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA = |\mathbf{N}| dA = |\mathbf{N}| dxdy$$

Perhatikan juga bahwa $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ di mana $\mathbf{N} = \langle -\boldsymbol{f_x}, -\boldsymbol{f_y}, \mathbf{1} \rangle$ adalah vektor normal yang nilainya sama dengan luas salah satu elemen permukaan S (lihat kembali materi sesi 11), yaitu:

$$\Delta S = |\mathbf{N}| = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Jika S terbentuk dari fungsi vektor $\mathbf{r}(u, v)$ atau disebut S dalam bentuk parametrik maka:

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$$

Sehingga integral flux dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \int_D \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \int_D \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA$$

Dengan kata lain, integral permukaan (integral flux) dari medan vektor **F** di atas permukaan S adalah integral permukaan dari komponen vektor normal satuan **n** di atas permukaan S [10].

Catatan: flux dapat diartikan sebagai aliran medan di atas permukaan S

Untuk memahami integral flux, perhatikan contoh-contoh berikut.

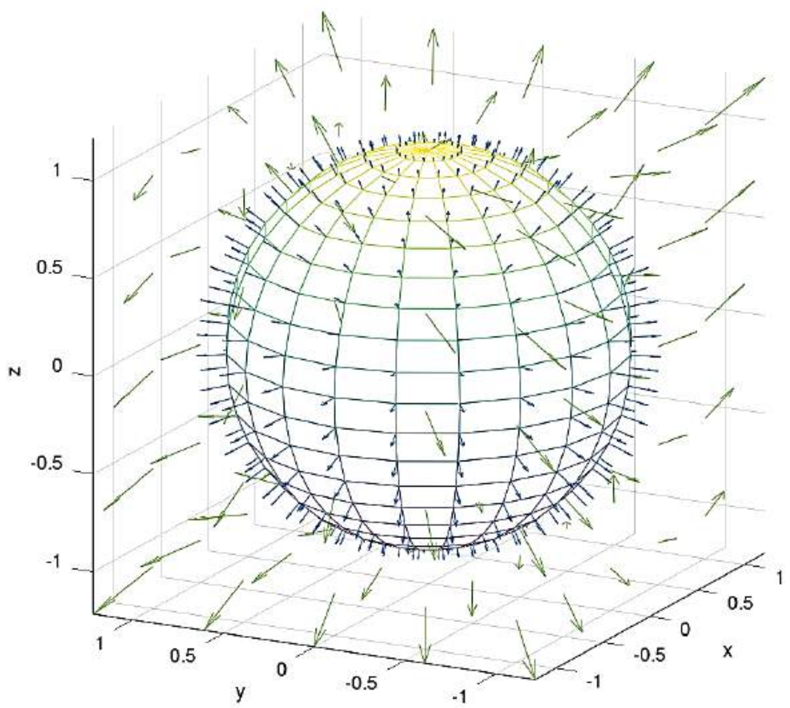
Contoh 2:

Tentukan flux dari medan vektor $\mathbf{F} = \langle z, y, x \rangle$ melalui bola satuan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Jawab:

Pertama, kita gambarkan permasalahan terlebih dahulu menggunakan Octave diperoleh:

```
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
```



*Gambar 11. 2. Medan Vektor F, Bola Satuan dan Vektor Normal **N***

Sintaks:

```
>> [x,y,z]=sphere;
>> [u,v,w]=surfnorm(x,y,z);
>> mesh(x,y,z)
>> hold on
>> quiver3(x,y,z,u,v,w)
>> [x,y,z]=meshgrid(-1:0.5:1);
>> M=z;
>> N=y;
>> O=x;
>> quiver3(x,y,z,M,N,O)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
```

```
>> zlabel("z");
```

Perhaitkan pada Gambar 2, flux **F** melalui bola satuan yang melalui elemen luas vektor **S** dalam bentuk parametrik maka terdapat:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Di mana **r** adalah persamaan parametrik kurva pada bola dan vektor x, y, z dalam koordinat bola adalah:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

Karena jari-jari bola $\rho = 1$ maka:

$$x = \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \cos\phi$$

Sehingga **r** dalam koordinat bola adalah:

$$\mathbf{r} = \sin\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin\phi \sin\theta\, \mathbf{j} + \cos\phi\, \mathbf{k}$$

Di mana:

$$0 \le \phi \le \pi, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Dan **F** menjadi:

$$\mathbf{F} = \cos\phi\, \mathbf{i} + \sin\phi \sin\theta\, \mathbf{j} + \sin\phi \cos\theta\, \mathbf{k}$$

Kemudian untuk menentukan vektor normal **N** kita gunakan cross product yaitu:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin^2\phi \sin\theta\, \mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\, \mathbf{k}$$

Maka:

$$\mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\right) = \cos\phi \sin^2\phi \cos\theta + \sin^3\phi \sin^2\theta + \sin^2\phi \cos\phi \cos\theta$$

$$\mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta\right)=2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta+\sin^3\phi\sin^2\theta$$

Sehingga:

$$\Phi_{\mathbf{F}}=\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\int\int_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta)\,dA$$

$$\Phi_{\mathbf{F}}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta+\sin^3\phi\sin^2\theta)d\phi\,d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^{\pi}(2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta+\sin^3\phi\sin^2\theta)d\phi$$

$$=2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi+\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi$$

$$=2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi+\sin^2\theta\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)\sin\phi\,d\phi$$

Untuk:

$$2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi$$

Misal $v=\sin\phi$ maka $dv/d\phi=\cos\phi$.

$$d\phi=\frac{1}{\cos\phi}dv$$

Sehingga:

$$2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi=2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\,v^2\frac{1}{\cos\phi}dv$$

$$2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi=2\cos\theta\int_0^{\pi}v^2dv$$

$$2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi=2\cos\theta\left[\frac{1}{3}v^3\right]_0^{\pi}$$

$$2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi=2\cos\theta\left[\frac{1}{3}\sin^3\phi\right]_0^{\pi}$$

$$2\cos\theta\int_0^{\pi}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi=0$$

Untuk:

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)\sin\phi\,d\phi$$

Misal $u=\cos\phi$ maka $du/d\phi=-\sin\phi$.

$$d\phi=-\frac{1}{\sin\phi}du$$

Sehingga:

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi=\sin^2\theta\int_0^{\pi}(1-u^2)\sin\phi\left(-\frac{1}{\sin\phi}\right)du$$

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi=\sin^2\theta\int_0^{\pi}(u^2-1)du$$

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi=\sin^2\theta\left[\frac{1}{3}u^3-u\right]_0^{\pi}$$

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi=\sin^2\theta\left[\frac{1}{3}\cos^3\phi-\cos\phi\right]_0^{\pi}$$

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi=\sin^2\theta\left[\left(-\frac{1}{3}-(-1)\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]$$

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi=\sin^2\theta\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]$$

$$\sin^2\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi=\sin^2\theta\left[\left(\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{4}{3}\sin^2\theta$$

Maka integral dalam:

$$\int_0^{\pi}(2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta+\sin^3\phi\sin^2\theta)d\phi=\frac{4}{3}\sin^2\theta$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}}=\int_0^{2\pi}\frac{4}{3}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)d\theta$$

$$\Phi_{\mathbf{F}}=\int_0^{2\pi}\frac{4}{3}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos2\theta)d\theta$$

$$\Phi_{\mathbf{F}}=\int_0^{2\pi}\frac{4}{3}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{4\pi}{3}$$

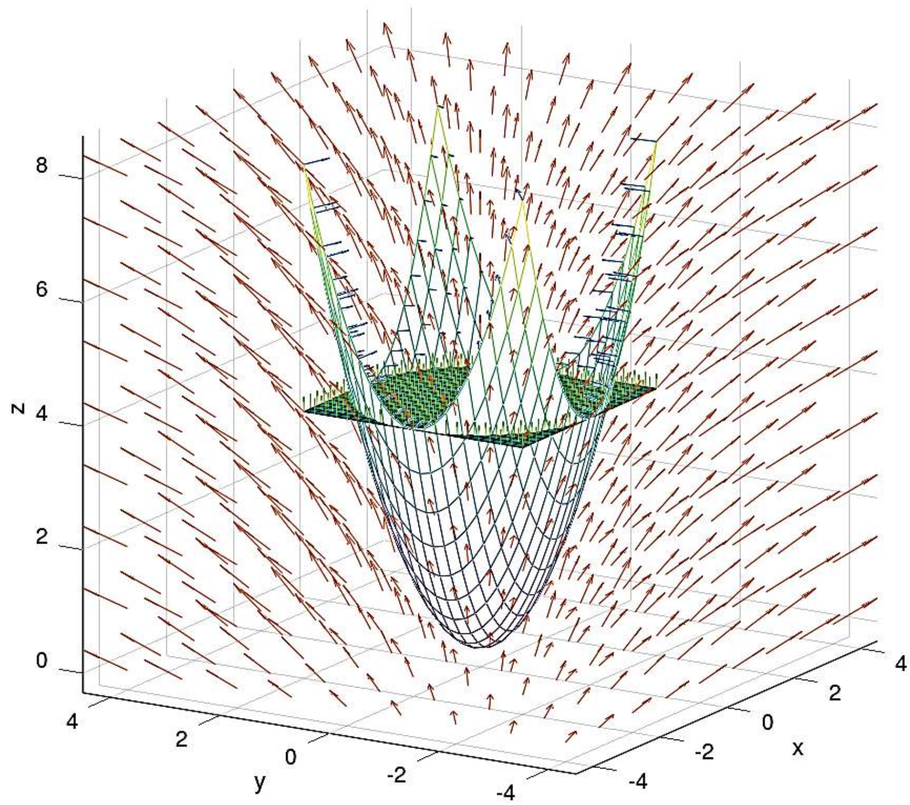
Jadi, flux medan vektor **F** melalui permukaan bola satuan adalah $4\pi/3$.

Contoh 3:

Tentukan flux medan vektor $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah T dibatasi oleh paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan bidang $z = 4$ [6].

Jawab:

Pertama, gambarkan permasalahan dengan Octave, diperoleh:



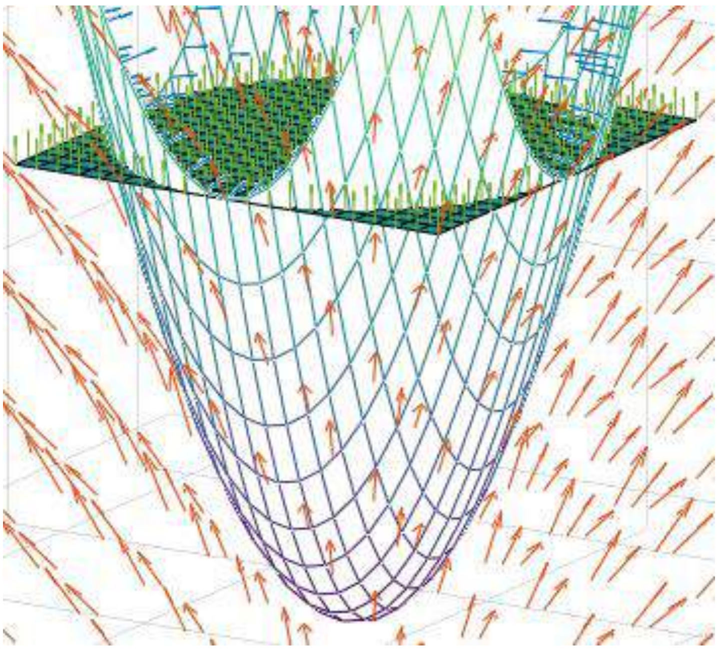
*Gambar 11. 3. Medan Vektor **F** dan Permukaan **z***

Sintaks Octave:

```
>> [x,y]=meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2);

>> z=x.^2+y.^2;

>> [u,v,w]=surfnorm(x,y,z);

>> mesh(x,y,z)

>> hold on
```

```
>> quiver3(x,y,z,u,v,w)
>> z=4-0.*x-0.*y;
>> surf(x,y,z)
>> [u,v,w]=surfnorm(x,y,z);
>> quiver3(x,y,z,u,v,w)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> [x,y,z]=meshgrid(-4:4,-4:4,0:8);
>> M=x;
>> N=y;
>> O=3;
>> quiver3(x,y,z,M,N,O)
```

Perhatikan Gambar 3, jika kita perbesar terdapat 2 flux seperti pada gambar di bawah ini:



Gambar 11. 4. . Permukaan $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$, Vektor Normal Satuan $\boldsymbol{n_1}$ dan $\boldsymbol{n_2}$

Gambar 11.4 menunjukkan terdapat dua flux, pertama pada permukaan S_1 berupa lingkaran $x^2 + y^2 = 4$, kedua pada permukaan S_2 di mana pada permukaan S_1 terdapat vektor normal satuan $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}$. Pada S_2 terdapat $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$ dimana vektor normal satuan $\mathbf{n}$ mengarah ke dalam dan $-\mathbf{n}$ mengarah keluar.

Sehingga flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melintasi S_1 adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 dS$$

Karena $\mathbf{F} = \langle x, y, 3\rangle$ dan $\mathbf{n}_1 = \langle 0,01\rangle$ maka:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 = 3$$

Sehingga:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} 3dS$$

Karena S_1 adalah disk dengan jari-jari 2, maka flux yang melintasi S_1 adalah :

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} 3dS = 12\pi$$

Selanjutnya, kita menghitung flux yang melintasi S_2 dengan menentukan vektor normal $\mathbf{N}$ pada paraboloid z. Ingat bahwa:

$$\mathbf{N} = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$$

Karena $z = x^2 + y^2$ maka:

$$\mathbf{N} = \langle -2x, -2y, 1\rangle$$

Karena vektor normal satuan $\mathbf{n}$ adalah:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

Dan elemen luas permukaan S adalah:

$$dS = |\mathbf{N}|dxdy$$

Sehingga flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melintasi S_1 adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = -\int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = -\int\int_{D} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} |\mathbf{N}| dxdy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = -\int\int_{D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dxdy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = -\int\int_{D} \langle x, y, 3\rangle \cdot \langle -2x, -2y, 1\rangle\, dxdy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = -\int\int_{D} (-2x^2 - 2y^2 + 3) dxdy$$

Karena permasalahan melibatkan lingkaran, kita akan menggunakan koordinat polar untuk menyelesaikannya di mana disk memiliki jari-jari 2 dan $dxdy = rdrd\theta$. Sehingga diperoleh:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS = -\int\int_{D} -(2(x^2 + y^2) - 3) dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^2 - 3) rdr\, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^2 (2r^3 - 3r) rdr = \left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{3}{2}r^2\right]_0^2 = 2$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \int_0^{2\pi} 2d\theta = 2(2\pi) = 4\pi$$

Maka flux total medan vektor $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah R dibatasi oleh paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan bidang $z = 4$ adalah $12\pi + 4\pi = 16\pi$.

Latihan 11

1. Tentukan flux medan vektor $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah T dibatasi oleh paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ dan bidang $z = 0$.
2. Tentukan flux medan vektor $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah T dibatasi oleh paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ dan persegi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Jawaban 11

1. Langkah 1: Memahami masalah

   Integral flux atau flux medan vektor **F** yang melalui permukaan $z = f(x, y)$ di atas daerah R pada bidang xy dengan orientasi ke atas adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_R \mathbf{F}.\langle -f_x, -f_y, 1\rangle\, dx\, dy$$

   Dari soal diketahui terdapat dua permukaan yaitu S_1 dan S_2, serta diketahui $\mathbf{F} = \langle y, x, z\rangle$, $z = 1 - x^2 - y^2$, dan $z = 0$.

   Dari z kita peroleh:

$$\mathbf{N} = \langle -(-2x), -(-2y), 1\rangle = \langle 2x, 2y, 1\rangle$$

   Langkah 2: Menentukan rencana

   Maka flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S_1:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D \mathbf{F}.\langle -f_x, -f_y, 1\rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D \langle y, x, z\rangle.\langle -(-2x), -(-2y), 1\rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (2xy + 2xy + z)\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (4xy + z)\, dx\, dy$$

   Karena $z = 1 - x^2 - y^2$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (4xy + 1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

   Karena permasalahan mengandung lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang diperoleh dari:

$$z = z$$

$$0 = 1 - x^2 - y^2$$

   Dan $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ serta $dxdy = rdrd\theta$, maka kita gunakan koordinat polar untuk menyelesaikannya. Sehingga:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (4r^2\cos\theta\sin\theta + 1 - r^2) r\, dr\, d\theta$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r^3\cos\theta\sin\theta + r - r^3)\, dr\, d\theta$$

   Langkah 3: Melaksanakan rencana

   Integral dalam:

$$\int_0^1 (4r^3\cos\theta\sin\theta + r - r^3)\,dr = \left[r^4\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1$$

$$\int_0^1 (4r^3\cos\theta\sin\theta + r - r^3)\,dr = \cos\theta\sin\theta + \frac{1}{4}$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{4}\right)d\theta$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta$$

Misal $u = \sin\theta$ maka $du = \cos\theta\ \ d\theta$ atau :

$$d\theta = \frac{1}{\cos\theta}du$$

Maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,u\ \frac{1}{\cos\theta}du + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^{2\pi}u\,du + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = 0 + \frac{1}{2}\pi$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\pi$$

Jadi, flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S_1 adalah $\pi/2$.

Selanjutnya, permukaan S_2 berorientasi ke bawah, sehingga vektor normal satuannya adalah $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$. Sehingga flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S_2 adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int_D \langle y,x,z\rangle.\langle 0,0,-1\rangle\,dx\,dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D -z\,dx\,dy$$

Karena $z = 0$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D 0\,dx\,dy = 0$$

Langkah 4: Menguji jawaban

Maka flux medan vektor $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah T dibatasi oleh paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ dan bidang $z = 0$ adalah $\pi/2$.

2. Langkah 1: Memahami masalah

Integral flux atau flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melalui permukaan $z = f(x, y)$ di atas daerah R pada bidang xy dengan orientasi ke atas adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_R \mathbf{F}. \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle\, dx\, dy$$

Dari soal diketahui $\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx \rangle$, $z = 4 - x^2 - y^2$, dan persegi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Dari z kita peroleh:

$$\mathbf{N} = \langle -2x, -2y, 1 \rangle$$

Langkah 2: Menentukan rencana

Maka flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melalui permukaan S_1:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D \mathbf{F}. \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D \langle xy, yz, zx \rangle. \langle -(-2x), -(-2y), 1 \rangle\, dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_D (2x^2y + 2y^2z + zx)\, dx\, dy$$

Karena $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 2y^2z + zx) dx\, dy$$

Karena $z = 4 - x^2 - y^2$ maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 2y^2(4 - x^2 - y^2) + (4 - x^2 - y^2)x) dx\, dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 8y^2 - 2y^2x^2 - 2y^4 + 4x - x^3 - xy^2) dx\, dy$$

Langkah 3: Melaksanakan Rencana

Integral dalam:

$$\int_0^1 (2x^2y + 8y^2 - 2y^2x^2 - 2y^4 + 4x - x^3 - xy^2) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3y + 8xy^2 - 2xy^4 + 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}y + 8y^2 - 2y^4 + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}y^2$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y + 8y^2 - 2y^4 + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}y^2\right) dy$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \left[\frac{1}{3}y^2 + \frac{8}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{7}{4}y - \frac{1}{6}y^3\right]_0^1$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2}{5} + \frac{7}{4} - \frac{1}{6} = \frac{60 + 480 - 72 + 315 - 30}{180} = \frac{713}{180}$$

Langkah 4: Menguji jawaban

Maka flux medan vektor $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ yang keluar dari daerah T dibatasi oleh paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ dan persegi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ adalah 713/180.

Rangkuman 11

Terdapat empat macam integral flux atau flux medan vektor **F** melalui permukaan S [10] yaitu:

1. Integral flux atau flux medan vektor **F** yang melalui permukaan $z = f(x, y)$ di atas daerah R pada bidang xy dengan orientasi ke atas adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_R \mathbf{F}. \langle -f_x, -f_y, 1\rangle\, dx\, dy$$

2. Integral flux atau flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S berbentuk silinder dengan jari-jari R dan berorientasi keluar dari sumbu z adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_T \mathbf{F}(R, \theta, \mathbf{z}). \langle \cos\theta, \sin\theta\rangle\, Rdz\, d\theta$$

Di mana T adalah daerah pada bidang θz yang berelasi dengan S.

3. Integral flux atau flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S berbentuk bola dengan jari-jari R dan berorientasi menjauh dari titik pusat adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_T \mathbf{F}(R,\theta,\phi).\langle \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\rangle R^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

Di mana T adalah daerah $\theta\phi$ yang berelasi dengan S.

4. Integral flux atau flux medan vektor $\mathbf{F}$ yang melalui permukaan S berbentuk parametrik di mana $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ merupakan vektor pada daerah R adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int\int_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)).(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, du\, dv$$

Tes Formatif 11

1. FLuks medan vektor $\mathbf{F} = \langle -x, -y, z^3\rangle$ melalui S di mana S merupakan bagian dari kerucut $z = \sqrt{x^2+y^2}$ antara $z = 1$ dan $z = 3$ dengan orientasi ke atas adalah …
   A. $117\pi/225$
   B. $1172\pi/15$
   C. $7\pi/25$
   D. $-1172\pi/15$
   E. $-117\pi/225$
2. FLuks medan vektor $\mathbf{F} = \langle x, -z, y\rangle$ melalui S di mana S merupakan bagian dari bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ di oktan pertama dengan orientasi ke luar dari titik pusat adalah …
   A. $8\pi/3$
   B. $10\pi/3$
   C. $13\pi/3$
   D. $16\pi/3$
   E. $19\pi/3$
3. FLuks medan vektor $\mathbf{F} = \langle xz, x, y\rangle$ melalui S di mana S merupakan hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geq 0$ dengan orientasi searah sumbu y positif adalah …
   A. 2
   B. 1
   C. 0
   D. -1
   E. -2

4. FLuks medan vektor $\mathbf{F} = \langle xy, 4x^2, yz\rangle$ melalui permukaan S $z = xe^y$, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ dengan orientasi ke atas adalah …
   A. $1 + e$
   B. 1
   C. e
   D. 0
   E. $1 - e$
5. FLuks medan vektor $\mathbf{F} = \langle x, 2y, 3z\rangle$ melalui permukaan S pada kubus dengan titik-titik$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ adalah …
   A. 54
   B. 48
   C. 36
   D. 24
   E. 20

Jawaban Tes Formatif 11

1. D

   Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ dan S dalam bentuk $z = g(x, y)$ maka:

$$\phi_F = \int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \left(-P\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) - Q\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) + R\right) dA$$

   Karena $\mathbf{F} = \langle -x, -y, z^3\rangle$ dan S dalam bentuk $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ maka:

$$\phi_F = \int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \sqrt{x^2 + y^2} + z^3\, dA$$

$$\phi_F = \int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D (x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

   Perhatikan $\{(r, \theta) \in D | 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, maka:

$$\phi_F = \int_1^3 \int_0^{2\pi} (r^2 + 1)\sqrt{r^2} r\, d\theta\, dr = \int_1^3 \int_0^{2\pi} (r^4 + r^2)\, d\theta\, dr = \frac{1712\pi}{15}$$

   Karena permukaan S mengarah ke bawah maka $\phi_F = -1712\pi/15$.

2. A

$$\phi_F = \int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

$$\phi_F = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin u\,(1 - \cos^2 u + \cos^3 u) du\, dv$$

$$\phi_F = 2\pi\left(\int_1^{-1} (1 - t^2 + t^3)(-dt)\right)$$

$$\phi_F = 2\pi \int_{-1}^{1} (1 - t^2 + t^3)(dt) = \frac{8\pi}{3}$$

3. C

$$\phi_F = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v})\, dA$$

Karena $\mathbf{F} = \langle xz, x, y \rangle$ dan $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 5\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 5\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + 5\cos\phi\,\mathbf{k}$, maka:

$$\mathbf{r}_\theta = -5\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{i} + 5\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_\phi = 5\cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 5\cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j} - 5\sin\phi\,\mathbf{k}$$

Karena $\sin\theta > 0$ maka $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$ berarah negatif searah sumbu y.

Sehingga:

$$d\mathbf{S} = -(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)dA$$

Maka:

$$\phi_F = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

4. E

$$\phi_F = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (xye^y - 4x^3e^y + xye^y)dy\,dx = 1 - e$$

5. B

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 11 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 11.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 12. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 11, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 12

TEOREMA DIVERGEN

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan terkait teorema divergen.

Materi 12

Pada sesi sebelumnya, kita sudah belajar tentang flux tiga dimensi untuk menghitung integral permukaan pada medan vektor **F** melalui atau di atas permukaan S (integral flux), yaitu [9],[2],[5],[6]:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Di mana flux dapat diartikan sebagai aliran medan vektor di atas permukaan S.

Sekarang, bayangkan flux medan vektor mengalir di atas permukaan tertutup S yang mengelilingi suatu titik dan terdapat ukuran aliran yang keluar per satuan volume di titik tersebut yang dinamakan **divergen** atau **kerapatan flux** [10].

Definisi Divergen Medan Vektor

Divergen adalah istilah untuk ukuran aliran keluar per satuan volume dari medan vektor pada suatu titik, diperoleh dari menghitung fluks yang keluar dari bola kecil yang berpusat pada titik tersebut, dibagi dengan volume yang dikelilingi bola, lalu ambil batas rasio fluks pada volume ini saat bola berkontraksi di sekitar titik [10].

Karena divergen medan vektor **F** merupakan ukuran aliran yang keluar per satuan volume medan vektor pada satu titik maka divergen **F** disebut sebagai fungsi skalar [6].

Notasi Divergen Medan Vektor

Divergen dari medan vektor **F** dinotasikan dengan:

$$\text{div } \mathbf{F}$$

yang merupakan kependekan dari divergen medan vektor **F** [6].

Rumus Divergen Medan Vektor

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

di mana $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathbf{k} = \langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \rangle$ adalah operator turunan vektor [6] atau operator gradien [2], [5]. Simbol operator ∇ kadang-kadang disebut **nabla** atau **del** [9] dalam bentuk sistem koordinat Kartesius dalam bentuk vektor satuan standar [10], dan ketika ∇ diterapkan pada fungsi skalar f menghasilkan gradien medan vektor ∇f [6].

Sementara, kita tahu bahwa **F** adalah medan vektor 3 dimensi di mana:

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} = \langle P, Q, R \rangle$$

Maka rumus divergen dari medan vektor dapat ditulikan:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \rangle \cdot \langle P, Q, R \rangle$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Definisi Formal Divergen Medan Vektor

Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} = \langle P, Q, R \rangle$ adalah medan vektor yang komponennya dapat diturunkan pada daerah D atau turunan komponennya eksis, maka divergen dari **F** adalah fungsi skalar yang didefinisikan sebagai [6], [2], [5], [9], [7]:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Untuk memahami divergen dari suatu medan vektor, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan divergen dari medan vektor $\mathbf{F} = \langle x^2, xy, zy \rangle$ [7].

Jawab:

Karena:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dan

$$P = x^2; Q = xy;\ \ R = zy$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x;\ \ \frac{\partial Q}{\partial y} = x;\ \ \frac{\partial R}{\partial z} = y$$

Maka

$$\text{div}\,\mathbf{F} = 2x + x + y = 3x + y$$

Contoh 2:

Tentukan divergen dari medan vektor $\mathbf{F} = \langle x + y, x^2yz, yz \rangle$ [9].

Jawab:

Karena:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dan

$$P = x + y; Q = x^2yz;\ \ R = yz$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1;\ \ \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2z;\ \ \frac{\partial R}{\partial z} = y$$

Maka

$$\text{div}\,\mathbf{F} = 1 + x^2z + y$$

Contoh 3:

Tentukan divergen dari medan vektor $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - \mathrm{y}^2\mathbf{k}$ [2].

Jawab:

Karena:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dan

$$P = xz; Q = xyz; \;\; R = -y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z; \;\; \frac{\partial Q}{\partial y} = xz; \;\; \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Maka

$$\text{div}\,\mathbf{F} = z + xz$$

Contoh 4:

Tentukan divergen dari medan vektor $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + z\sin y\,\mathbf{j} + xy\ln z\,\mathbf{k}$ [6].

Jawab:

Karena:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dan

$$P = xe^y; Q = z\sin y\,; \;\; R = xy\ln z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = e^y; \;\; \frac{\partial Q}{\partial y} = z\cos y\,; \;\; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{xy}{z}$$

Maka

$$\text{div}\,\mathbf{F} = e^y + z\cos y + \frac{xy}{z}$$

Teorema Divergen

Teorema Divergensi adalah analog multivariabel dari Teorema Fundamental Kalkulus ke 8 [14]; dapat dikatakan bahwa integral kerapatan fluks di atas daerah padat/solid sama dengan integral fluks yang melewati batas daerah tersebut [10]. Secara notasi dapat dituliskan:

$$\int\int\int_D \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Teorema divergen kadang disebut sebagai teorema Gauss [12] atau teorema Gauss-Ostrogradsky [11], [6].

Teorema divergen adalah untuk integral permukaan, sedangkan teorema Green adalah untuk integral garis. Ini memungkinkan kita mengubah integral permukaan di atas permukaan tertutup menjadi integral rangkap tiga di atas wilayah tertutup, atau sebaliknya [6].

Teorema Divergen Formal

Jika E adalah daerah solid yang dibatasi oleh permukaan tertutup halus S di mana $S = \partial E$ berorientasi keluar [11], dan jika $\mathbf{F}$ adalah medan vektor yang fungsi komponennya memiliki turunan parsial kontinu pada daerah solid yang mengandung E dan S, maka [2], [6], [14], [10]:

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Jadi, teorema divergen menyatakan bahwa, dalam kondisi tertentu, fluks $\mathbf{F}$ yang melintasi batas permukaan adalah sama dengan integral rangkap tiga dari divergensi $\mathbf{F}$ di atas E [2]. Dengan kata lain, teorema divergen menyatakan bahwa fluks yang keluar dari medan vektor melintasi permukaan tertutup S diberikan oleh integral rangkap tiga dari divergen medan vektor di atas daerah solid E yang dibatasi oleh S. Situasi ini memberikan alat teknis yang mudah digunakan untuk mengevaluasi fluks suatu medan vektor yang melintasi permukaan tertutup [11].

Untuk pembuktian teorema divergen, diserahkan pada Anda.

Selanjutnya untuk menguji teorema divergen, perhatikan contoh berikut:

Contoh 5:

Verifikasi teorema divergen jika $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dan S adalah permukaan bola dengan $\rho = a$.

Jawab:

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Dari ruas kiri:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Karena bola dengan jari-jari a adalah:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Maka:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{\langle x, y, z\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{a}\langle x, y, z\rangle$$

Sehingga:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \langle x, y, z\rangle \cdot \frac{1}{a}\langle x, y, z\rangle = a$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{a}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{a}(a^2) = a$$

Akibatnya:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = a\int\int_S dS$$

Karena:

$$\int\int_S dS \text{ adalah luas permukaan bola} = 4\pi a^2$$

Maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

Dari ruas kanan:

$$\int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Karena:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dan

$$P = x; Q = y;\ \ R = z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 1; \ \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

Maka

$$\text{div } \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Sehingga:

$$\int\int\int_E \text{div } \mathbf{F} \, dV = 3 \int\int\int_E dV$$

Karena:

$$\int\int\int_E dV \text{ adalah volume bola} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Maka:

$$\int\int\int_E \text{div } \mathbf{F} \, dV = 3 \int\int\int_E dV = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$$

Dengan demikian integral pada kedua ruas bernilai sama □.

Contoh 6:

Gunakan teorema divergen untuk menentukan fluks dari $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ yang melintasi permukaan bola satuan S [2].

Jawab:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \text{div } \mathbf{F} \, dV$$

Karena:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dan

$$P = z; Q = y; \ R = x$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 1; \ \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Maka

$$\text{div } \mathbf{F} = 1$$

Sehingga:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E 1\, dV = \frac{4}{3}\pi$$

Contoh 7:

Gunakan teorema divergen untuk menentukan fluks dari:

$$\mathbf{F} = (x + \cos y)\mathbf{i} + (y + \sin z)\mathbf{j} + (z + e^x)\mathbf{k}$$

yang melintasi permukaan S dari daerah solid E yang dibatasi bidang $z = 0, y = 0, y = 2$ dan paraboloid $z = 1 - x^2$ [6].

Jawab:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Karena:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dan

$$P = x + \cos y\,; Q = y + \sin z\,;\; R = z + e^x$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1;\; \frac{\partial Q}{\partial y} = 1;\; \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

Maka

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$$

Sehingga:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int\int\int_E 3\, dV = \int\int\int_E 3\, dz\, dy\, dx$$

Pada langkah ini kita memerlukan batas-batas dari x, y, z.

Dari soal diketahui:

Batas z dari 0 sampai $1 - x^2$.

Batas y dari 0 sampai 2.

Sementara batas x diperoleh dari $z = 1 - x^2$ dengan mensetting $y = 0$ dan $z = 0$, diperoleh:

$$0 = 1 - x^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Maka batas x mulai dari -1 sampai 1.

Sehingga:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1-x^2} 3dz\,dy\,dx$$

Integral dalam:

$$\int_0^{1-x^2} 3dz = [3z]_0^{1-x^2} = 3(1 - x^2) = 3 - 3x^2$$

Integral tengah:

$$\int_0^2 (3 - 3x^2)dy = (3 - 3x^2)[y]_0^2 = 2(3 - 3x^2) = 6 - 6x^2$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_{-1}^{1} (6 - 6x^2)dx = [6x - 2x^3]_{-1}^{1}$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = (6 - 2) - (-6 + 2)$$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = 4 + 4 = 8$$

Latihan 12

1. Gunakan teorema divergen untuk menentukan fluks dari:

   $$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

   yang melintasi permukaan S dari daerah solid E yang dibatasi bidang $z = 0, z = 3$ dan silinder $x^2 + y^2 = 4$.

2. Gunakan teorema divergen untuk menentukan fluks dari:

   $$\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + z^2)\mathbf{k}$$

   yang melalui kubus satuan.

3. Buktikan teorema divergen.

Jawaban 12

1. Langkah 1: Memahami masalah

   Integral flux atau flux medan vektor **F** yang melalui permukaan S dari daerah solid E yang dibatasi bidang $z = 0, z = 3$ dan silinder $x^2 + y^2 = 4$ menggunakan teorema divergen adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

   Di mana:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

   Dari soal diketahui:

$$P = (x^2 + y^2 + z^2)x = x^3 + xy^2 + xz^2$$

$$Q = (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{y} = x^2y + y^3 + yz^2$$

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)z = x^2z + y^2z + z^3$$

   Langkah 2: Menentukan rencana

   Maka turunan parsial dari P, Q, R adalah:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = x^2 + 3y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = x^2 + y^2 + 3z^2$$

   Sehungga:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 5(x^2 + y^2 + z^2)$$

   Maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E 5(x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

   Kita akan gunakan koordinat bolat untuk mengevaluasi integral di atas. Di mana:

   $0 \leq z \leq 3$

   $0 \leq r \leq 2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$x^2 + y^2 = r^2$

Langkah 3: Melaksanakan rencana

Maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 5(r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta$$

Integral dalam:

$$\int_0^3 5(r^2 + z^2) r \, dz = 5\left[r^3 z + \frac{1}{3} r z^3\right]_0^3 = 15r^3 + 45r$$

Integral tengah:

$$\int_0^2 (15r^3 + 45r) dr = \left[\frac{15}{4} r^4 + \frac{45}{2} r^2\right]_0^2 = 60 + 90 = 150$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} 150 \, d\theta = [150\theta]_0^{2\pi} = 300\pi$$

Langkah 4: Menguji jawaban

Maka flux medan vektor $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ yang melintasi permukaan S dari daerah solid E yang dibatasi bidang $z = 0, z = 3$ dan silinder $x^2 + y^2 = 4$ adalah 300π.

2. Langkah 1: Memahami masalah

   Integral flux atau flux medan vektor **F** yang melalui kubus satuan menggunakan teorema divergen adalah:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

   Di mana:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

   Dari soal diketahui:

$$P = x^2 + y^2$$

$$Q = y^2 + z^2$$

$$R = x^2 + z^2$$

Langkah 2: Menentukan rencana

Maka turunan parsial dari P, Q, R adalah:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 2z$$

Sehungga:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = 2(x + y + z)$$

Maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E 2(x + y + z)\, dV$$

Kita akan gunakan koordinat persegi panjang untuk mengevaluasi integral di atas.

Di mana:

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq 1$

$0 \leq z \leq 1$

Langkah 3: Melaksanakan rencana

Maka:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2(x + y + z)\, dx\, dy\, dz$$

Integral dalam:

$$\int_0^1 2(x + y + z)\, dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 + xy + xz\right]_0^1 = 1 + 2y + 2z$$

Integral tengah:

$$\int_0^1 (1 + 2y + 2z)\, dy = \left[y + \frac{2}{2}y^2 + 2yz\right]_0^1 = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$$

Integral luar:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 (2+2z)\,dz = \left[2z + \frac{2}{2}z^2\right]_0^1 = 2+1 = 3$$

Langkah 4: Menguji jawaban

Maka flux medan vektor $\mathbf{F} = (x^2+y^2)\mathbf{i} + (y^2+z^2)\mathbf{j} + (x^2+z^2)\mathbf{k}$ yang melintasi kubus satuan adalah 3.

3. Bukti:

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Dari ruas kanan:

Misal $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ maka:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Sehingga:

$$\int\int\int_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \int\int\int_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV + \int\int\int_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV + \int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Dari ruas kiri:

Jika $\mathbf{n}$ adalah vektor normal satuan yang mengarah keluar dari S maka:

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int_S (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S}$$

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S P\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int\int_S Q\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int\int_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$\int\int_S P\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int\int_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV$$

$$\int\int_S Q\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int\int_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV$$

$$\int\int_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Bukti untuk:

$$\int\int_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Dari ruas kiri:

Misalkan E adalah benda solid di mana $E = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$ merupakan proyeksi pada bidang xy.

Pada kasus ini, E terletak antara dua fungsi kontinu dari x dan y. Perhatikan bahwa batas atas benda solid E adalah permukaan $z = u_2(x,y)$ dan batas bawahnya adalah $z = u_1(x,y)$.

Sehingga dapat dituliskan:

$$\int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \int\int_D \left[\int_u^u \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,xz)\,dz\right] dA$$

Dengan menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus diperoleh:

$$\int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \int\int_D [R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y))]dA$$

Dari ruas kanan:

Misalkan batas permukaan S terdiri dari 3 bagian yaitu S_1 sebagai batas bawah, S_2 sebagai batas atas, dan S_3 sebagai batas vertikal. Khusus S_3, pada kasus bola mungkin saja tidak ada. Misalkan S_3 ada maka definisi dot product dari dua vektor tegak lurus maka $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$ karena **k** vertikal sementara **n** horisontal.

Sehingga:

$$\int\int_{S_3} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

Akibatnya:

$$\int\int_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int_{S_1} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int\int_{S_2} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Pada permukaan S_2 persamaannya adalah $z = u_2(x,y)$ di mana $(x,y) \in D$ dan vektor normal satuan **n** pada S_2 mengarah ke atas.

Maka:

$$\int\int_{S_2} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int_D R(x,y,u_2(x,y))dA$$

Pada permukaan S_1 persamaannya adalah $z = u_1(x, y)$ di mana $(x, y) \in D$ dan vektor normal satuan **n** pada S_1 mengarah ke atas. Tetapi pada S_1, vektor normal satuan **n** yang diperlukan adalah yang mengarah ke bawah, sehingga kita ambil $-\mathbf{n}$.

Akibatnya:

$$\int\int_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int\int_D R(x, y, u_1(x, y))dA$$

Dengan demikian:

$$\int\int_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D R(x, y, u_2(x, y))dA - \int\int_D R(x, y, u_1(x, y))dA$$

Jadi,

$$\int\int_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV \quad \square$$

Untuk:

$$\int\int_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int\int_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV$$

$$\int\int_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int\int_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV$$

Serupa cara pembuktiannya.

Rangkuman 12

1. Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} = \langle P, Q, R \rangle$ adalah medan vektor yang komponennya dapat diturunkan pada daerah D atau turunan komponennya eksis, maka divergen dari **F** adalah fungsi skalar yang didefinisikan sebagai:

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

2. Jika E adalah daerah solid yang dibatasi oleh permukaan tertutup halus S di mana $S = \partial E$ berorientasi keluar [11], dan jika **F** adalah medan vektor yang fungsi komponennya memiliki turunan parsial kontinu pada daerah solid yang mengandung E dan S, maka:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}\, dV$$

Tes Formatif 12

1. Jika $\mathbf{F} = \langle xye^z, xy^2z^3, -ye^z \rangle$ dan permukaan S yang dibatasi bidang koordinat, $x = 3, y = 2$, dan $z = 1$, maka dengan teorema Divergen nilai dari:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. $1/2$

B. $3/2$

C. $5/2$

D. $7/2$

E. $9/2$

2. Jika $\mathbf{F} = \langle 3xy^2, xe^z, z^3 \rangle$ dan permukaan S dari benda solid yang dibatasi silinder, $y^2 + z^2 = 1$ dan $x = -1, x = 2$, maka dengan teorema Divergen nilai dari:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. $11\pi/2$

B. $9\pi/2$

C. $7\pi/2$

D. $5\pi/2$

E. $3\pi/2$

3. Jika $\mathbf{F} = \langle x^3 + y^3, y^3 + z^3, z^3 + x^3 \rangle$ dan permukaan S adalah bola dengan pusat di titik O dan jari-jari 2, maka dengan teorema Divergen nilai dari:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. $384\pi/5$

B. $304\pi/5$

C. $224\pi/5$

D. $144\pi/5$

E. $64\pi/5$

4. Jika $\mathbf{F} = \langle \cos z + xy^2, xe^{-z}, \sin y + x^2 z \rangle$ dan permukaan S dari benda solid dibatasi paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan $z = 4$, maka dengan teorema Divergen nilai dari:

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. $4\pi/3$

B. $8\pi/3$

C. $16\pi/3$

D. $32\pi/3$

E. $64\pi/3$

5. Jika $\mathbf{F} = \langle x^4, -x^3 z^2, 4xy^2 z \rangle$ dan permukaan S dari benda solid dibatasi silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan $z = x + 2$, $z = 0$, maka dengan teorema Divergen nilai dari:

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. $6\pi/3$

B. $4\pi/3$

C. $2\pi/3$

D. $-2\pi/3$

E. $-4\pi/3$

Jawaban Tes Formatif 12

1. E
2. B
3. A
4. D
5. C

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 12 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 12.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 13. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 12, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 13

INTEGRAL GARIS DI DIMENSI TIGA

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan terkait integral garis di tiga dimensi.

Materi 13

Pada sesi sebelumnya, kita sudah belajar tentang integral garis dengan pendekatan usaha yaitu:

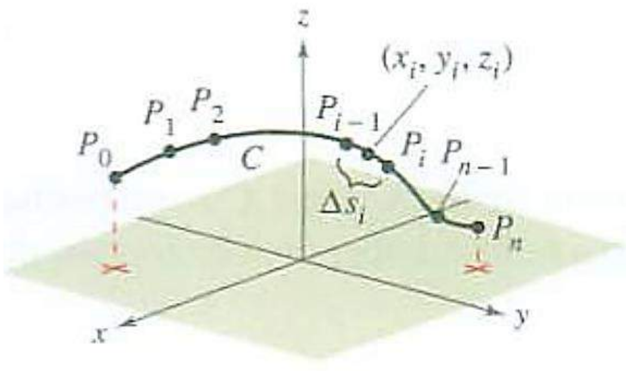
$$\text{Usaha} = |\mathbf{F}| \cos\theta \, |\mathbf{\Delta r}| = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Delta r}$$

Di mana jika rumus di atas diterapkan pada kurva akan menghasilkan usaha total yang ditentukan dengan 'menjumlahkan' potongan yang sangat kecil [14], [10], [6], [11], [5]. Kita menyebutnya sebagai integral garis dan dilambangkan dengan:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Di mana $\mathbf{F}$ adalah gaya atau medan vektor dan $\mathbf{r}(t)$ adalah persamaan parametrik vektor pada kurva C.

Cara lain untuk memahami integral garis adalah menggunakan pendekatan kerapatan atau massa jenis (density) kawat dengan panjang tertentu yang direpresentasikan dengan sebuah kurva C pada bidang (2 dimensi) atau ruang (3 dimensi) [1], [7], [2], [6], [11], [5] seperti gambar berikut:



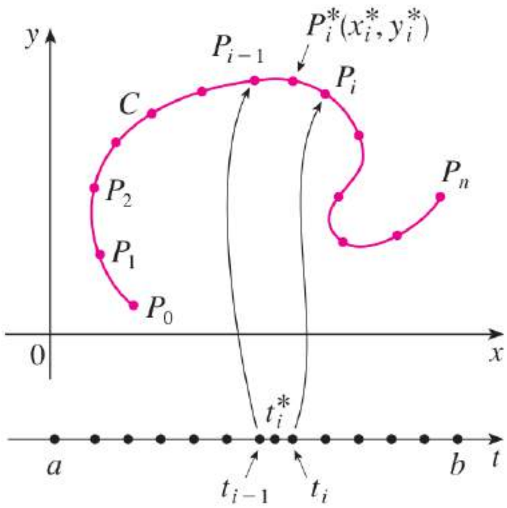
*Gambar 13. 1. Partisi Kurva **C** pada Dimensi 3*

Gambar 13.1 menunjukkan sebuah kawat yang direpresentasikan oleh kurva C yang dipartisi sebanyak n bagian oleh titik-titik $P_0, P_1, \cdots, P_n$. Misalnya massa jenis kawat per satuan panjang pada titik (x, y, z) didefinisikan oleh $f(x, y, z)$, maka massa jenis kawat total adalah [1], [7]:

$$\text{Massa jenis kawat} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Di mana $f(x_i, y_i, z_i)$ adalah massa jenis kawat pada titik (x_i, y_i, z_i) dan Δs_i adalah panjang partisi kurva. Jika $|\Delta|$ dibuat sampai mendekati 0, dan ambil jumlah limit dari massa jenis kawat total maka dapat digunakan jumlah Riemann [2] sehingga menghasilkan massa jenis kawat total atau disebut integral garis.

Jika kawat digambarkan pada 2 dimensi seperti pada gambar berikut:



*Gambar 13. 2. Partisi Kurva **C** pada Dimensi 2*

Maka:

$$\text{Massa jenis kawat} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i *, y_i *)\Delta s_i$$

Jika $|\Delta|$ dibuat sampai mendekati 0, dan ambil jumlah limit dari massa jenis kawat total maka dapat digunakan jumlah Riemann [2] sehingga menghasilkan massa jenis kawat total atau disebut integral garis, yaitu:

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i *, y_i *)\Delta s_i$$

Jika limit eksis.

Dari Gambar 2, kita tahu bahwa panjang $s(t)$ suatu kurva C antara $r(a)$ dan b adalah:

$$ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Maka integral garis dua dimensi menjadi [1]:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Integral Garis Dimensi Tiga

Definisi Integral Garis 3 Dimensi Pendekatan Massa Jenis

Misalkan fungsi $f(x, y, z)$ terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \le t \le b$, maka integral garis f sepanjang kurva C didefinisikan oleh [6], [7], [2]:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\big(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)\big)\Delta s_i$$

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$

Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1:

Evaluasi [5]:

$$\int_C y \sin z \, ds$$

Di mana C adalah *circular helix* (spiral melingkar) dengan persamaan $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, dan $0 \leq t \leq 2\pi$.

Jawab:

Karena $y = \sin t$, $z = t$, dan $0 \leq t \leq 2\pi$ maka:

$$\int_C y \sin z \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin t) \sin t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \; dt$$

Karena $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, maka:

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dz}{dt} = 1$$

Sehingga:

$$\int_C y \sin z \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin t) \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} \, dt$$

$$\int_C y \sin z \, ds = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt$$

Karena $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ dan $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ maka:

$$\int_C y \sin z \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \sqrt{1 + 1} \, dt$$

$$\int_C y \sin z \, ds = \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \; dt$$

$$\int_C y \sin z \, ds = \frac{1}{2}\sqrt{2} \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_C y \sin z \, ds = \frac{1}{2}\sqrt{2} \left[\left(2\pi - \frac{1}{2}\sin 4\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right]$$

$$\int_C y \sin z \, ds = \frac{1}{2}\sqrt{2}[(2\pi - 0) - (0)]$$

$$\int_C y \sin z \, ds = \frac{1}{2}\sqrt{2}(2\pi) = \sqrt{2}\pi$$

Contoh 2:

Evaluasi [1]:

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds$$

Di mana C adalah segmen garis dengan persamaan $x = t$, $y = 2t$, $z = t$, dan $0 \le t \le 1$.

Jawab:

Karena $x = t$, $y = 2t$, $z = t$, dan $0 \le t \le 1$ maka:

$$x'(t) = 1, y'(t) = 2, z'(t) = 1$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t)\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}\, dt$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \int_0^1 (t^2 + t)\sqrt{6}\, dt$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \sqrt{6}\int_0^1 (t^2 + t)\ dt$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \sqrt{6}\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \sqrt{6}\left[\left(\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right)\right]$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \sqrt{6}\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - (0)\right]$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

Contoh 3:

Tentukan pusat massa dari sebuah kawat dengan massa jenis $\delta = kz$ yang membentuk kurva helix C dengan persamaan parametrik [6]:

$$x = 3\cos t\,, y = 3\sin t\,, z = 4t, 0 \le t \le \pi$$

Jawab:

Formula untuk pusat massa adalah $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ di mana:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_C x\, dm$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int_C y\, dm$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\int_C z\, dm$$

$$m = \int_C dm = \int_C \delta\, ds$$

Karena $\delta = kz, x = 3\cos t\,, y = 3\sin t\,, z = 4t, 0 \leq t \leq \pi$ maka:

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t$$

$$\frac{dz}{dt} = 4$$

$$dm = \delta ds$$

$$dm = kz\, ds$$

$$dm = 4kt\, ds$$

$$dm = 4kt\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (4)^2}dt$$

$$dm = 4kt\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16}dt$$

$$dm = 4kt\sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16}dt$$

$$dm = 4kt\sqrt{9 + 16}dt$$

$$dm = 4kt\sqrt{25}dt$$

$$dm = 20kt\, dt$$

Sehingga:

$$m = \int_C \delta\, ds = \int_0^\pi 20kt\, dt = 20k\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi = 10k\pi^2$$

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_C x\, dm$$

Untuk $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10k\pi^2}\int_0^\pi (3\cos t)20kt\, dt$$

$$\overline{x} = \frac{60k}{10k\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt$$

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt$$

Gunakan integral by part:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Misalkan $u = t$ dan $dv = \cos t\ \ dt$ maka:

$$du = 1\, dt$$

$$v = \int dv = \int \cos t\, dt = \sin t$$

Maka:

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}\left([t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\, dt\right)$$

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}\left([t\sin t]_0^\pi + [\cos t]_0^\pi\right)$$

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}[t\sin t + \cos t]_0^\pi$$

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}[(\pi\sin\pi + \cos\pi) - (0\sin 0 + \cos 0)]$$

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}[(0-1) - (0+1)]$$

$$\overline{x} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}(-2) = -\frac{12}{\pi^2}$$

Untuk $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int_C y\, dm$$

$$\overline{y} = \frac{1}{10k\pi^2}\int_0^{\pi}(3\sin t)20kt\ dt$$

$$\overline{y} = \frac{60k}{10k\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt$$

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt$$

Gunakan integral by part:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Misalkan $u = t$ dan $dv = \sin t\ \ dt$ maka:

$$du = 1\ dt$$

$$v = \int dv = \int \sin t\ dt = -\cos t$$

Maka:

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}\left([-t\cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos t\ dt\right)$$

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}([-t\cos t]_0^{\pi} + [\sin t]_0^{\pi})$$

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}[\sin t - t\cos t]_0^{\pi}$$

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}[(\sin\pi - \pi\cos\pi) - (\sin 0 - 0\cos 0)]$$

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}[(0 - \pi(-1)) - (0)]$$

$$\overline{y} = \frac{6}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin t\ \ dt = \frac{6}{\pi^2}(\pi) = \frac{6}{\pi}$$

Untuk $\overline{z}$:

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\int_C z\ dm$$

$$\overline{z} = \frac{1}{10k\pi^2}\int_0^{\pi}(4t)20kt\ dt$$

$$\bar{z} = \frac{80k}{10k\pi^2}\int_0^{\pi} t^2\, dt$$

$$\bar{z} = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi} t^2\, dt$$

$$\bar{z} = \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi} = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

Maka pusat massa dari sebuah kawat dengan massa jenis $\delta = kz$ yang membentuk kurva helix C adalah:

$$\left(-\frac{12}{\pi^3}, \frac{6}{\pi}, \frac{8\pi}{3}\right)$$

Definisi Integral Garis pada Medan Vektor 3 Dimensi

Misalkan $\mathbf{F}$ adalah medan vektor yang kontinu terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \le t \le b$, maka integral garis dari $\mathbf{F}$ sepanjang kurva C didefinisikan oleh [6], [7], [2]:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Di mana:

$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

$\mathbf{T}$ = vektor tangen satuan yang didefinisikan dengan:

$\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$

$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt$

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$

Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 4:

Tentukan usaha yang dihasilkan oleh medan gaya:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{1}{2}x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$$

Pada sebuah partikel yang bergerak sepanjang *helix* (spiral) dengan persamaan:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Dari titik (1,0,0) sampai $(-1,0,3\pi)$.

Jawab:

Karena:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Dan diketahui:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Maka:

$$x(t) = \cos t$$

$$y(t) = \sin t$$

$$z(t) = t$$

Sehingga medan vektor $\mathbf{F}$ menjadi:

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{2}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t\,\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = \langle -\frac{1}{2}\cos t\,, -\frac{1}{2}\sin t\,, \frac{1}{4}\rangle$$

Karena $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = \langle -\sin t\,, \cos t\,, 1\rangle$ maka:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

$$W = \int_0^{3\pi} \langle -\frac{1}{2}\cos t\,, -\frac{1}{2}\sin t\,, \frac{1}{4}\rangle \cdot \langle -\sin t\,, \cos t\,, 1\rangle dt$$

$$W = \int_0^{3\pi} \left(\frac{1}{2}\sin t\cos t - \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{4}\right) dt$$

Perhatikan bahwa batas yang digunakan hanya batas pada sumbu z karena komponen vektor x dan y menghasilkan 0 atau tidak memberikan kontribusi pada usaha total.

Maka:

$$W = \int_0^{3\pi} \frac{1}{4} dt = \left[\frac{1}{4} t\right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

Contoh 5:

Evaluasi:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

di mana:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

Dan C adalah kubus bengkok dengan persamaan:

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Jawab:

Karena:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Dan diketahui:

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Maka:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

Sehingga medan vektor $\mathbf{F}$ menjadi:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = \langle t^3, t^5, t^4 \rangle$$

Karena $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$ maka:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \langle t^3, t^5, t^4 \rangle \cdot \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^3 + 2t^6 + 3t^6)dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^3 + 5t^6)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{7}t^7\right]_0^1$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{1}{4}(1)^4 + \frac{5}{7}(1)^7\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4 + \frac{5}{7}(0)^7\right)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{7}\right) - (0)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{7}{28} + \frac{20}{28} = \frac{27}{28}$$

Notasi Alternatif Integral Garis pada Medan Vektor 3 Dimensi

Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ adalah medan vektor yang kontinu terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \leq t \leq b$, maka integral garis dari $\mathbf{F}$ sepanjang kurva C didefinisikan oleh [6], [7], [2]:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \langle P, Q, R \rangle \cdot \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle\, dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right) dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

Bentuk terakhir di atas disebut juga integral garis bentuk turunan.

Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 6:

Tentukan usaha yang dihasilkan oleh medan gaya elektrostatis:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

Dalam membawa muatan dan bergerak sepanjang segmen garis dari (1,1,1) ke (2,4,8).

Jawab:

Dari soal diketahui:

$$P = y, Q = z, R = x$$

Dan kurva C merupakan segmen garis antara (1,1,1) ke (2,4,8) dalam bentuk parametrik adalah:

$$x - 1 = (2 - 1)t$$

$$y - 1 = (4 - 1)t$$

$$z - 1 = (8 - 1)t$$

Atau:

$$x = t + 1$$

$$y = 3t + 1$$

$$z = 7t + 1$$

Di mana $0 \leq t \leq 1$ memenuhi segmen garis antara titik (1,1,1) sampai (2,4,8).

Sehingga:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t + 1)dt + (7t + 1)3dt + (t + 1)7dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t + 1)dt + (21t + 3)dt + (7t + 7)dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (31t + 11)dt = \left[\frac{31}{2}t^2 + 11t\right]_0^1$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{31}{2} + 11 = \frac{31}{2} + \frac{22}{2} = \frac{53}{2}$$

Contoh 7:

Evaluasi:

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

Di mana C adalah kurva denga persamaan parametrik:

$$x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$$

Jawab:

Karena:

$$x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$$

Maka

$$dx = dt, \qquad dy = 2t\,dt, \qquad dz = 3t^2\,dt$$

Sehingga:

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 t^2dt + t^3(2tdt) + t\,(3t^2dt)$$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 t^2dt + 2t^4dt + 3t^3dt$$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4\right]_0^1$$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{2}{5}(1)^5 + \frac{3}{4}(1)^4$$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{20}{60} + \frac{24}{60} + \frac{45}{60} = \frac{89}{60}$$

Gradien Medan Vektor dan Fungsi Potensial di Ruang 3 Dimensi

Gradien Fungsi 3 Peubah

Misalkan fungsi $w = f(x, y, z)$ mengalami perubahan nilai dari titik $P(x, y, z)$ ke titik terdekat $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ menghasilkan:

$$\Delta w = f(Q) - f(P)$$

Dengan menggunakan teorema aproksimasi diperoleh:

$$\Delta w \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta \mathrm{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta \mathrm{z}$$

Bentuk aproksimasi di atas dapat diekspresikan secara ringkas dalam bentuk gradien vektor ∇f (dibaca sebagai "del f") dari fungsi f, yang didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \mathbf{i} f_x(x,y,z) + \mathbf{j} f_y(x,y,z) + \mathbf{k} f_z(x,y,z)$$

Atau dapat ditulis:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k} = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$$

Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 8:

Tentukan gradien vektor dari $f(x,y,z) = x^2 + yz - 2xy - z^2$ di titik $P(2,1,3)$.

Jawab:

Karena $f(x,y,z) = x^2 + yz - 2xy - z^2$ maka:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y - 2z$$

Sehingga:

$$\nabla f = (2x - 2y)\mathbf{i} + (z - 2x)\mathbf{j} + (y - 2z)\mathbf{k}$$

Maka ∇f di titik $P(2,1,3)$ adalah:

$$\nabla f(P) = \nabla f(2,1,3) = (2(2) - 2(1))\mathbf{i} + ((3) - 2(2))\mathbf{j} + ((1) - 2(3))\mathbf{k}$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(2,1,3) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Fungsi Potensial di Ruang 3 Dimensi

Misalkan $\mathbf{F}$ adalah medan vektor dalam bentuk $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk beberapa fungsi skalar f maka f disebut fungsi potensial untuk medan vektor $\mathbf{F}$ [10].

Atau dalam literatur lain didefinsikan sebagai berikut:

Medan vektor $\mathbf{F}$ dikatakan konservatif jika $\mathbf{F}$ adalah gradien dari fungsi g yang dapat diturunkan secara kontinu, ditulis:

$$\mathbf{F}(P) = \nabla g(P)$$

Untuk semua P dalam domain $\mathbf{F}$. Fungsi g disebut fungsi potensial dari $\mathbf{F}$ [8].

Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 9:

Tentukan fungsi potensial f sehingga $\nabla f = \mathbf{F}$, jika $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + (12xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k}$.

Jawab:

Jika terdapat sebuah fungsi f, maka:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^{3z} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3ye^{3z} \qquad (3)$$

Dari:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$

Diperoleh:

$$f(x, y, z) = \int y^2\, dx$$

$$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z) \qquad (4)$$

Di mana $g(y, z)$ adalah konstanta terhadap variabel x. Selanjutnya, turunkan terhadap y fungsi $f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$, diperoleh:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + g_y(y, z)$$

Karena:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^{3z}$$

Maka $g_y(y,z) = e^{3z}$, sehingga:

$$g(y,z) = \int e^{3z}\, dy = ye^{3z} + h(z)$$

Substitusikan hasil di atas ke dalam (4), diperoleh:

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Selanjutnya, turunkan fungsi $f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$ terhadap z diperoleh:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3ye^{3z} + h'(z)$$

Dan bandingkan dengan (3):

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3ye^{3z}$$

Maka $h'(z) = 0$ sehingga $h(z) = C$ atau konstantan.

Jadi fungsi potensial f adalah $f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + C$.

Curl di Ruang 3 Dimensi

Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ adalah medan vektor di R^3 dan turunan parsial dari P, Q, R semuanya eksis, maka curl $\mathbf{F}$ adalah medan vektor dalam R^3 didefinisikan oleh [5]:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

di mana:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Maka:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Sehingga:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Untuk memahami, perhatikan contoh berikut.

Contoh 10:

Tentukan curl $\mathbf{F}$, jika $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$.

Jawab:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Karena:

$$P = xz, \qquad Q = xyz, \qquad R = -y^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = x$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = yz$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Maka:

$$\text{curl } \mathbf{F} = (-2y - xy)\mathbf{i} + (x - 0)\mathbf{j} + (yz - 0)\mathbf{k}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = (-2y - xy)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \text{yz}\mathbf{k}$$

Latihan 13

1. Evaluasi:

$$\int_C xyzds$$

   Di mana C adalah kurva dengan persamaan $x = 2\sin t$, $y = t$, $z = -2\cos t$, dan $0 \leq t \leq \pi$.

2. Evaluasi:

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2)ds$$

   Di mana C adalah kurva dengan persamaan $x = t$, $y = \cos 2t$, $z = \sin 2t$, dan $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. Evaluasi:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

   di mana:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

   Dan C adalah kurva dengan persamaan:

$$\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

4. Tentukan usaha yang dihasilkan oleh medan gaya:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y^2)\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + (z - x^2)\mathbf{k}$$

   Dalam membawa muatan dan bergerak sepanjang segmen garis dari (0,0,1) ke (2,1,0) antara kedua titik tersebut.

5. Tentukan fungsi potensial f sehingga $\nabla f = \mathbf{F}$, jika $\mathbf{F} = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$.
6. Tentukan curl $\mathbf{F}$, jika $\mathbf{F} = xy^2z^3\mathbf{i} + x^3yz^2\mathbf{j} - x^2y^3z\mathbf{k}$.

Jawaban 13

1. Diberikan parametrik $x = 2\sin t\,, y = t, z = -2\cos t$. Maka:

$$x' = 2\cos t\,, y' = 1, z' = 2\sin t$$

Elemen dari permukaan:

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{5}$$

Maka:

$$\int_0^{\pi} -2\sqrt{5}\sin 2t\,dt = \pi\sqrt{5}$$

*Gunakan integrasi by part di mana $u = t, dv = \sin 2t\,dt$

2. Integral:

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2)ds$$

Di mana C adalah $x = t, y = \cos 2t\,, z = \sin 2t\,, 0 \le t \le 2\pi$ dan diperoleh:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t\,, \frac{dz}{dt} = 2\cos 2t$$

Maka:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$ds = \sqrt{(1)^2 + (-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2 dt} = \sqrt{5}dt$$

Karena $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + \cos^2 2t + \sin^2 2t = t^2 + 1$ maka:

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2)ds = \int_0^{2\pi} (t^2 + 1)\sqrt{5}dt = \sqrt{5}\left(\frac{8}{3}\pi^3 + 2\pi\right)$$

3. Karena $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, -t^2, t\rangle$ maka:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \langle 3t^2, -2t, 1\rangle$$

Karena $\mathbf{F} = \langle \sin x\,, \cos y\,, xz\rangle$ maka $\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = \langle \sin t^3\,, \cos t^2\,, t^4\rangle$.

Sehingga:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \langle \sin t^3\,, \cos t^2\,, t^4\rangle \cdot \langle 3t^2, -2t, 1\rangle dt = \frac{6}{5} - \cos 1 - \sin 1$$

4. Persamaan parametrik garis melalui titik (a,b,c) dan (l,m,n) adalah:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle a,b,c\rangle + t\langle l,m,n\rangle, \qquad t \in [0,1]$$

Maka persamaan parametrik garis melalui titik (a,b,c) dan (l,m,n) adalah:

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t, 1-t\rangle$$

Maka:

$$d\mathbf{r} = \langle 2,1,-1\rangle dt$$

Sehinga:

$$w = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2 + 8t - 2)dt = \frac{7}{3}$$

5. Diberikan:

$$f_x = y^2z^3 \qquad (1)$$

$$f_y = 2xyz^3 \qquad (2)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad (3)$$

Integrasikan (1) diperoleh:

$$f = \int y^2z^3\,dx = xy^2z^3 + g(y,z) \qquad (4)$$

Turunkan (4) terhadap y diperoleh:

$$f_y = 2xyz^3 + g'(y,z)$$

Hasilnya bandingkan dengan (2) diperoleh:

$g'(y,z) = 0$ dan $g(y,z) = C$

Hasilnya substitusikan ke (4) diperoleh:

$$f = xy^2z^3 + C$$

6. Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ adalah medan vektor di R^3 dan turunan parsial dari P, Q, R semuanya eksis, maka curl $\mathbf{F}$ adalah medan vektor dalam R^3 didefinisikan oleh:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$$

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Karena $\mathbf{F} = xy^2z^3\mathbf{i} + x^3yz^2\mathbf{j} - x^2y^3z\mathbf{k}$ maka:

$$P = xy^2z^3, \quad P_y = 2xyz^3, \qquad P_z = 3xy^2z^2$$

$$Q = x^3yz^2, \qquad Q_x = 3x^2yz^2, \qquad Q_z = 2x^3yz$$

$$R = x^2y^3z, \qquad R_x = 2xy^3z, \qquad R_y = 3x^2y^2z$$

Sehingga:

$$\text{curl } \mathbf{F} = (3x^2y^2z - 2x^3yz)\mathbf{i} + (3xy^2z^2 - 2xy^3z)\mathbf{j} + (3x^2yz^2 - 2xyz^3)\mathbf{k}$$

atau:

$$\text{curl } \mathbf{F} = xyz(x(3y - 2x)\mathbf{i} + \text{y}(3z - 2y)\mathbf{j} + \text{z}(3x - 2z)\mathbf{k})$$

Rangkuman 13

1. Misalkan fungsi $f(x, y, z)$ terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \le t \le b$, maka integral garis f sepanjang kurva C didefinisikan oleh:

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$

2. Misalkan $\mathbf{F}$ adalah medan vektor yang kontinu terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \le t \le b$, maka integral garis dari $\mathbf{F}$ sepanjang kurva C didefinisikan oleh:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

3. Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ adalah medan vektor yang kontinu terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \le t \le b$, maka integral garis dari $\mathbf{F}$ sepanjang kurva C didefinisikan oleh [6], [7], [2]:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

4. Misalkan fungsi $w = f(x, y, z)$ maka gradien dari f adalah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k} = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$$

5. Misalkan **F** adalah medan vektor dalam bentuk $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk beberapa fungsi skalar f maka f disebut fungsi potensial untuk medan vektor **F**.
6. Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ adalah medan vektor di R^3 dan turunan parsial dari P, Q, R semuanya eksis, maka curl **F** adalah medan vektor dalam R^3 didefinisikan oleh:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$$

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Tes Formatif 13

1. Jika kurva C memiliki persamaan $x = t, y = t^2, z = t^3$ dan $0 \leq t \leq 1$, maka nilai dari:

$$\int_C xye^{yz}\,dy$$

   adalah …
   A. $2(e-1)/3$
   B. $(e-1)/3$
   C. $2(e+1)/3$
   D. $(e+1)/3$
   E. $(e-1)/2$
2. Jika kurva C memiliki persamaan $x = \sqrt{t}, y = t, z = t^2$ dan $1 \leq t \leq 4$, maka nilai dari:

$$\int_C ydx + zdy + xdz$$

   adalah …
   A. $350/15$
   B. $372/15$
   C. $722/15$
   D. $910/15$
3. $922/15$
   Jika kurva C merupakan segmen garis dari (1,0,0) ke (4,1,2) maka nilai dari:

$$\int_C z^2dx + x^2dy + y^2dz$$

   adalah …

A. $23/3$
B. $25/3$
C. $29/3$
D. $31/3$
E. $35/3$

4. Jika kurva C memiliki persamaan $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \sin 5t \rangle$, $0 \le t \le \pi$ dan $\mathbf{F} = \langle y \sin z, z \sin x, x \sin y \rangle$, maka nilai dari:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

adalah …

A. $-0{,}2541$
B. $-0{,}1363$
C. 0
D. $0{,}1363$
E. $0{,}2541$

5. Jika kurva C memiliki persamaan $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 3t, -t\text{^}2 \rangle$, $-1 \le t \le 1$ dan $\mathbf{F} = \langle x, -z, y \rangle$, maka nilai dari:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

adalah …

A. 3
B. 2
C. 0
D. -2
E. -3

Jawaban Tes Formatif 13

1. A
2. C
3. E
4. B
5. D

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 13 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 13.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul 14. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 13, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

MODUL 14

TEOREMA STOKE'S

Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu	Capaian Pembelajaran
Pembelajaran Kooperatif Problem based Learning	150 menit	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan terkait teorema Stoke's.

Materi 14

Pada sesi sebelumnya, kita sudah belajar tentang teorema Green, integral garis dan curl tiga dimensi yaitu:

Teorema Green

Misalkan kurva C berorientasi positif, mulus dan tertutup sederhana pada bidang dan misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh C. Jika P dan Q memiliki turunan parsial kontinu pada daerah terbuka yang berisi D maka:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Integral Garis

Misalkan $\mathbf{F}$ adalah medan vektor yang kontinu terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \leq t \leq b$, maka integral garis dari $\mathbf{F}$ sepanjang kurva C didefinisikan oleh:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ adalah medan vektor yang kontinu terdefinisi di setiap titik dari kurva mulus C dalam bentuk parametrik $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ di mana $a \leq t \leq b$, maka integral garis dari $\mathbf{F}$ sepanjang kurva C didefinisikan oleh [6], [7], [2]:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

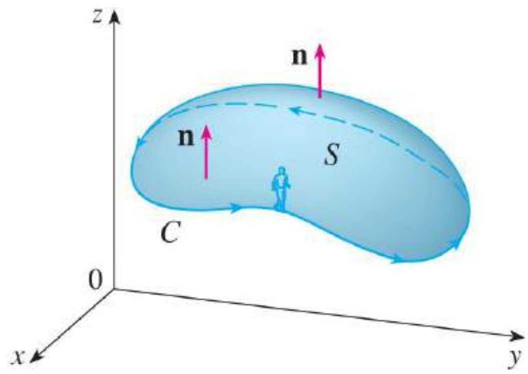
Curl 3 Dimensi

Misalkan $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ adalah medan vektor di R^3 dan turunan parsial dari P, Q, R semuanya eksis, maka curl $\mathbf{F}$ adalah medan vektor dalam R^3 didefinisikan oleh:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Teorema Stokes dapat dianggap sebagai Teorema Green versi dimensi yang lebih tinggi. Sementara Teorema Green menghubungkan integral rangkap dua pada bidang di daerah D ke integral garis di sekitar bidang yang dibatasi kurva, Teorema Stokes menghubungkan integral permukaan di atas permukaan S ke integral garis di sekitar batas kurva S (yang merupakan kurva 3 dimensi).



Gambar 14. 1. Permukaan ***S*** *dengan Vektor Normal Satuan* ***n***

Gambar 14.1 menunjukkan permukaan S berorientasi dengan vektor normal satuan $\mathbf{n}$. Orientasi tersebut menimbulkan orientasi positif dari kurva C terbatas yang ditunjukkan pada gambar. Artinya, jika Anda berjalan ke arah positif dengan kepala mengarah ke arah kiri, permukaannya akan selalu berada di sebelah kiri Anda. [14], [10], [6], [11], [5].

Teorema Stokes

Misalkan S adalah potongan permukaan mulus dan berorientasi dibatasi oleh kurva C tertutup sederhana terbatas dengan orientasi positif. Misalkan

F adalah medan vektor yang turunan parsialnya kontinu pada daerah terbuka di R^3 yang mengandung S, maka [7], [9], [2], [5]:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Karena:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Dalam beberapa referensi ditulis [6], [14], [11]:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Dan

$$\int\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Serta

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dA$$

Maka teorema Stokes menjadi:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dA$$

Catatan:

Kurva batas yang berorientasi positif dari permukaan berorientasi sering ditulis sebagai ∂S, sehingga Teorema Stokes dapat dinyatakan sebagai:

$$\int\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1:

Evaluasi menggunakan teorema Stokes [6]:

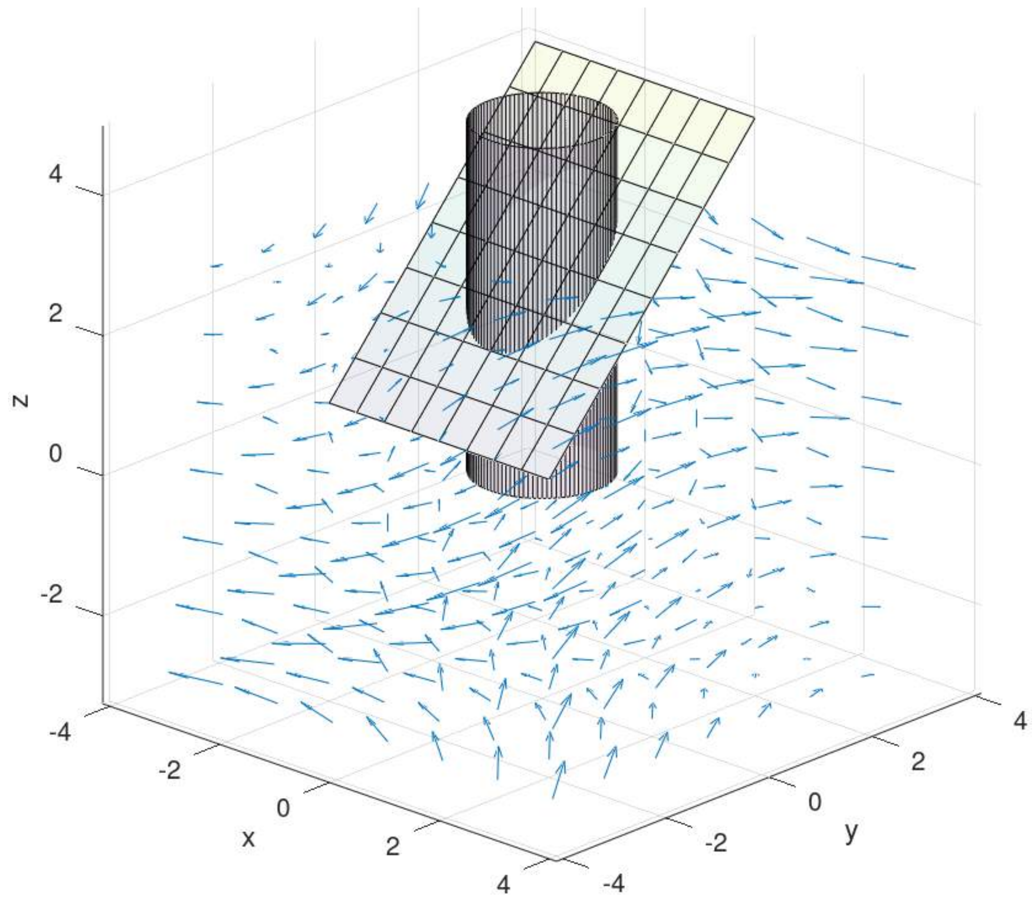
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Di mana $\mathbf{F} = \langle 3z, 5x, -2y \rangle$ dan C merupakan kurva elips dengan orientasi berlawanan jarum jam hasil irisan antara bidang $z = y + 3$ dan silinder $x^2 + y^2 = 1$.

Jawab:

Agar menambah gambaran, gunakan Octave dengan sintaks:

```
>> [x,y]=meshgrid(-2:0.5:2);
>> z=y+3;
>> bid=surf(x,y,z);
>> set(bid,'FaceAlpha',0.1)
>> hold on
>> R=[1 1];
>> N=100;
>> [X,Y,Z]=cylinder(R,N);
>> h=5;
>> Z=Z*h;
>> sil=surf(X,Y,Z);
>> set(sil,'FaceAlpha',0.1)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> axis equal
>> [x,y,z]=meshgrid(-3:3);
>> M=3*z;
>> N=5*x;
>> O=-2*y;
>> quiver3(x,y,z,M,N,O)
```



Gambar 14. 2. Bidang $\mathbf{z}$*, Silinder, Elips, dan Medan Vektor* $\boldsymbol{F}$

Perhatikan bahwa:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int\int_S \text{curl}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Karena kurva elips C berada pada bidang $z = y + 3$ maka vektor normal satuan $\mathbf{n}$ dari permukaan S yang dibatasi oleh C adalah:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

Di mana $\mathbf{N}$ adalah vektor normal dengan rumus:

$$\mathbf{N} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle = \langle 0, -1, 1 \rangle = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Dan

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Maka:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle$$

Sementara:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Karena $P = 3z, Q = 5x,\ R = -2y$, maka:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 3$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 5$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Sehingga:

$$\text{curl } \mathbf{F} = (-2 - 0)\mathbf{i} + (3 - 0)\mathbf{j} + (5 - 0)\mathbf{k}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = \langle -2, 3, 5\rangle$$

Maka:

$$\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \langle -2, 3, 5\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle = \sqrt{2}$$

Sehingga:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Ada 3 alternatif untuk menyelesaikan:

Alternatif 1:

Karena $dS = |\mathbf{N}|dA = \sqrt{2}dA$, maka:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int\int_S (\sqrt{2})\sqrt{2}dA = \int\int_S 2\, dA$$

Karena $x^2 + y^2 = 1$ maka $0 \leq r \leq 1$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Sehingga:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr\, d\theta$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 d\theta$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Alternatif 2:

Karena $dS = |\mathbf{N}|dA = \sqrt{2}dA$, maka:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int\int_S (\sqrt{2})\sqrt{2}dA = \int\int_S 2\, dA$$

Karena dA adalah luas lingkaran dengan jari-jari 1 pada bidang xy maka:

$$dA = \pi(1)^2 = \pi$$

Maka:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 2\pi$$

Alternatif 3:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int\int_S \sqrt{2}\, dS$$

Karena dS adalah luas daerah elips dengan semi axis 1 dan $\sqrt{2}$, maka:

$$dS = 1 \times \sqrt{2} \times \pi = \sqrt{2}\pi$$

Sehingga:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int \int_S \sqrt{2}\, dS = \sqrt{2} \times \sqrt{2}\pi = 2\pi$$

Catatan:

Semi minor axis 1, diperoleh dari $x^2 + y^2 = 1$, untuk $x = 0$ maka $y = 1$, untuk $x = 0$ maka $y = 1$. Sedangkan semi mayor axis $\sqrt{2}$ diperoleh dari $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Contoh 2:

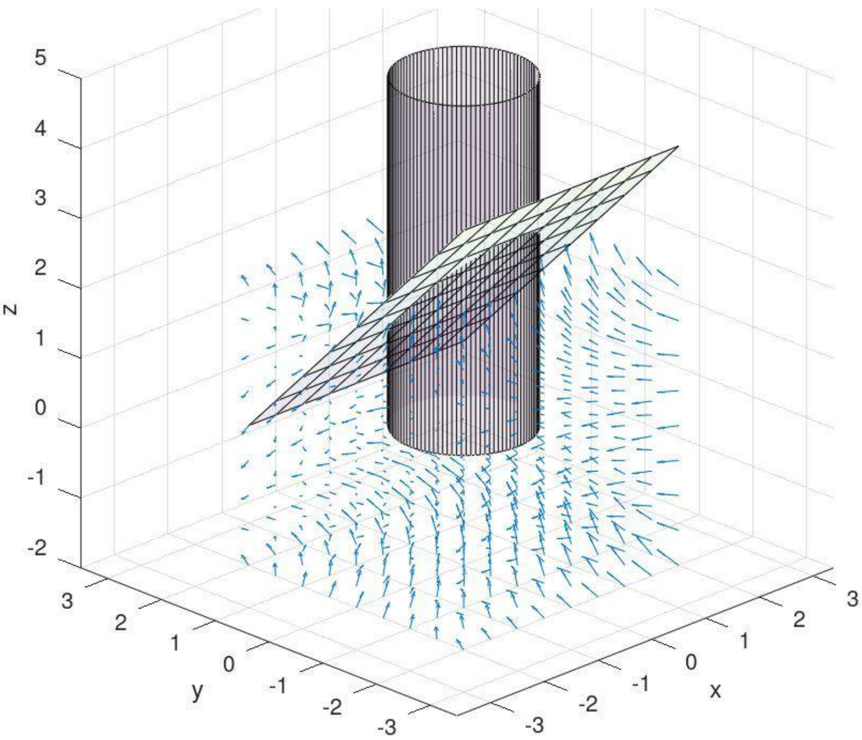
Evaluasi [2]:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Di mana $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ dan C adalah kurva elips dengan orientasi berlawanan jarum jam hasil irisan antara bidang $y + z = 2$ dan silinder $x^2 + y^2 = 1$.

Jawab:

Untuk memperjelas permasalahan, gunakan Octave diperoleh:



Gambar 14. 3. Bidang $\boldsymbol{z}$*, Silinder, Elips, dan Medan Vektor* $\boldsymbol{F}$

Sintaks:

```
>> [x,y]=meshgrid(-2:0.5:2);
>> z=2-y;
>> bid=surf(x,y,z);
>> set(bid,'FaceAlpha',0.1)
>> hold on
>> R=[1 1];
>> N=100;
>> [X,Y,Z]=cylinder(R,N);
>> h=5;
>> Z=Z*h;
>> sil=surf(X,Y,Z);
>> set(sil,'FaceAlpha',0.1)
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> axis equal
>> [x,y,z]=meshgrid(-2:0.5:2);
>> M=-y.^2;
>> N=x;
>> O=z.^2;
>> quiver3(x,y,z,M,N,O)
```

Perhatikan bahwa:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int\int_D \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dA$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Karena $P = -y^2, Q = x,\ R = z^2$, maka:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y$$

Sehingga:

$$\text{curl } \mathbf{F} = (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (1 - (-2y))\mathbf{k}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = (1 + 2y)\mathbf{k} = \langle 0,0,1 + 2y\rangle$$

Karena kurva elips C berada pada bidang $z = y + 2$ maka vektor normal satuan $\mathbf{n}$ dari permukaan S yang dibatasi oleh C adalah:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

Di mana $\mathbf{N}$ adalah vektor normal dengan rumus:

$$\mathbf{N} = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle = \langle 0, -1,1\rangle = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Dan

$$dS = |\mathbf{N}|dA = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}dA = \sqrt{2}dA$$

Maka:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle$$

Sehingga:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dA$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \langle 0,0,1 + 2y\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle\, \sqrt{2}dA$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_D (1 + 2\text{y})\, dA$$

Dimana D adalah proyeksi permukaan S pada bidang xy.

Karena proyeksi permukaan S pada bidang xy adalah cakram $x^2 + y^2 \leq 1$, maka:

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Dan rubah y menjadi $y = r\sin\theta$ serta jangan lupa $dA = rdrd\theta$.

Sehingga:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 2r\sin\theta)rdr\, d\theta$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{2}{3}r^3\sin\theta\right]_0^1 d\theta$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\theta\right) d\theta = \pi$$

Contoh 3:

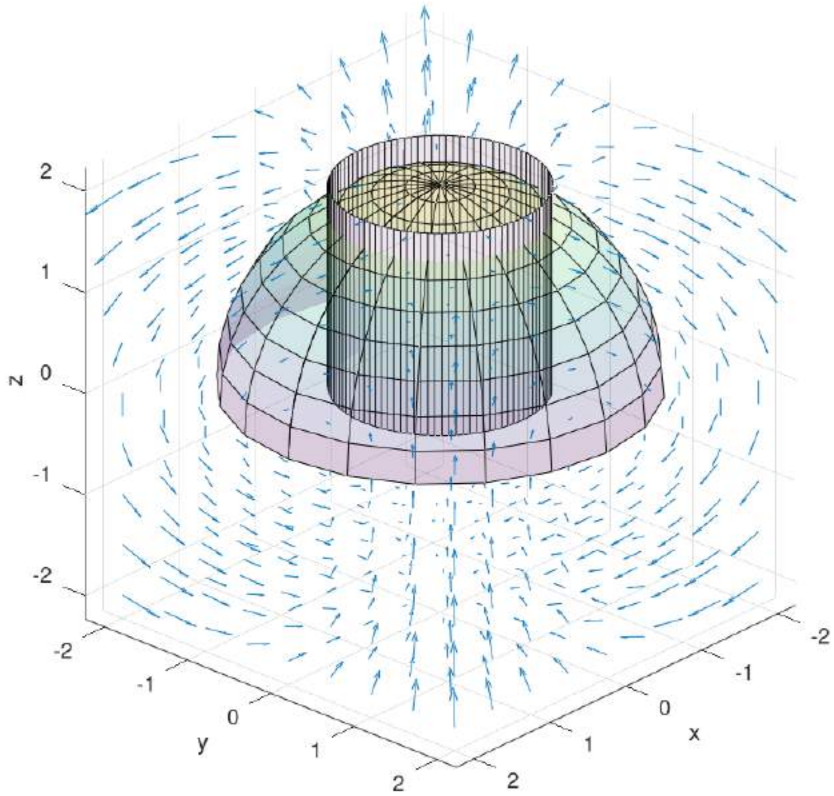
Gunakan teorema Stokes untuk mengevaluasi [2]:

$$\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Di mana $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ dan S adalah permukaan yang terletak dalam silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bagian dari bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ di atas bidang xy.

Jawab:

Untuk memperjelas permasalahan, gunakan Octave diperoleh:



Gambar 14. 4. Hemisphere, Silinder dan Tembereng

Sintaks:

```
>> R=[1 1];

>> N=100;

>> [X,Y,Z]=cylinder(R,N);

>> h=2;

>> Z=Z*h;

>> sil=surf(X,Y,Z);

>> set(sil,'FaceAlpha',0.1)

>> hold on

>> [x,y,z] = sphere;

>> x = x(11:end,:);
```

```
>> y = y(11:end,:);
>> z = z(11:end,:);
>> r=2;
>> hs = surf(r.*x,r.*y,r.*z);
>> set(hs,'FaceAlpha',0.2)
>> axis equal
>> xlabel("x");
>> ylabel("y");
>> zlabel("z");
>> [x,y,z]=meshgrid(-2:0.5:2);
>> M=x.*z;
>> N=y.*z;
>> O=x.*y;
>> quiver3(x,y,z,M,N,O)
```

Karena permukaan S berbentuk tembereng bola maka batasan kurva C pada bidang xy adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dengan $z = \sqrt{3}$. Nilai $z = \sqrt{3}$ diperoleh dari mengurangi bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dengan $r = 1$.

Rubah x dan y menjadi:

$$x = r\cos t = (1)\cos t = \cos t$$

$$y = r\sin t = (1)\sin t = \sin t$$

Sehingga persamaan parametrik kurva C adalah:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Dan

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 0\rangle$$

Karena $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, maka $\mathbf{F}$ menjadi:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{\mathbf{3}} \cos t\, \mathbf{i} + \sqrt{\mathbf{3}} \sin t\, \mathbf{j} + \cos t \sin t\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle \sqrt{\mathbf{3}} \cos t\,, \sqrt{\mathbf{3}} \sin t\,, \cos t \sin t \rangle$$

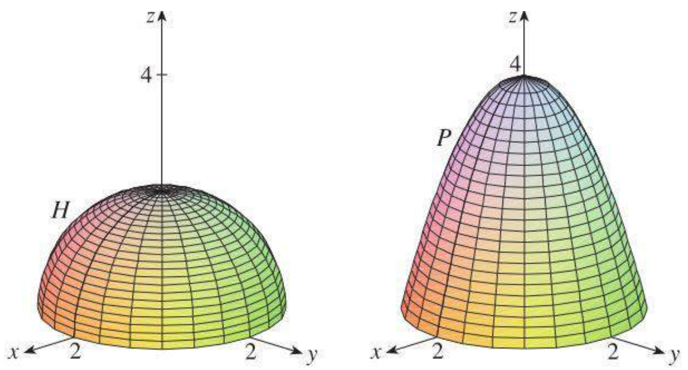
Dengan teorema Stokes:

$$\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \langle \sqrt{\mathbf{3}} \cos t\,, \sqrt{\mathbf{3}} \sin t\,, \cos t \sin t \rangle \cdot \langle - \sin t\,, \cos t\,, 0 \rangle dt$$

$$\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \cos t \sin t \right) dt = 0$$

Latihan 14

1. Perhatikan hemisphere H dan bagian dari paraboloid P berikut.



Misalkan $\mathbf{F}$ adalah medan vektor di R^3 yang komponennya memiliki turunan parsial kontinu. Jelaskan mengapa:

$$\int \int_H \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_P \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

2. Gunakan teorema Stokes untuk mengevaluasi:

$$\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Di mana $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z^2 \mathbf{i} + y^2 z^2 \mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ dan S adalah permukaan yang terletak dalam silinder $x^2 + y^2 = 4$ dan bagian dari paraboloid $z = x^2 + y^2$ berorientasi keatas.

3. Evaluasi:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Di mana $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ dan C adalah kurva elips dengan orientasi berlawanan jarum jam hasil irisan antara bidang $x + z = 5$ dan silinder $x^2 + y^2 = 9$.

Jawaban 14

1. Pehatikan bahwa kedua permukaan pada H dan P memiliki batas kurva yang sama yaitu lingkaran $x^2 + y^2 = 4$.

   Berdasarkan teorema Stoke's dapat ditulis:

   $$\int\int_H \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_P \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

   Di mana C adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dengan orientasi berlawanan jarum jam.

   Langkah 1:

   Teorema Stokes menyatakan bahwa:

   $$\int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

   Di mana C adalah batas dari permukaan dengan orientasi berlawanan jarum jam.

   Langkah 2:

   Diketahui permukaan adalah paraboloid $z = x^2 + y^2$ di dalam silinder $x^2 + y^2 = 4$.

   Bayangan batas permukaan adalah lingkarang $x^2 + y^2 = 4$ yang sejajar dengan bidang xy $z = 4$.

   Parametrik kurva C adalah $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 4\rangle$

   Sehingga: $d\mathbf{r} = \langle -2\sin t, 2\cos t, 0\rangle dt$

   Langkah 3:

   Diketahui $\mathbf{F} = \langle x^2z^2, y^2z^2, xyz\rangle$ maka:

   $$\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = \langle 64\cos^2 t, 64\sin^2 t, 16\sin t\cos t\rangle$$

   Karena C berupa lingkaran maka batas dari t adalah 0 sampai 2π.

   Langkah 4:

Maka:

$$\int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$\int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{128}{3}\int_0^{2\pi}(3\cos t\sin^2 t - 3\sin t\cos^2 t)dt = 0$$

2. Langkah 1:

Teorema Stokes menyatakan bahwa:

$$\int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Langkah 2:

Kita memerlukan curl $\mathbf{F}$ untuk menghitungnya.

Karena $\mathbf{F} = \langle xy, 2z, 3y\rangle$ maka:

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \langle 1,0,-x\rangle$$

Langkah 3:

Misalkan S adalah lintasan dari bidang $z + x = 5$ di dalam silinder $x^2 + y^2 = 9$. Jika S dalam bentuk $z = g(x, y)$ dan berorientasi ke atas, maka:

$$\int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \left(-P\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) - Q\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) + R\right) dA$$

Di mana D adalah proyeksi permukaan S pada bidang xy.

S adalah bagian dari bidang $z = 5 - x$

D adalah daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, dan $z = 0$

Langkah 4:

$$\int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_D (-(1)(-1) - 0(0) + (-x))\,dA = \int\int_D (1-x)dA$$

Kita gunakan polar untuk menyelesaikannya:

$$\int\int_S \text{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (1 - r\cos\theta)r\,dr\,d\theta = 9\pi$$

Rangkuman 14

Misalkan S adalah potongan permukaan mulus dan berorientasi dibatasi oleh kurva C tertutup sederhana terbatas dengan orientasi positif. Misalkan $\mathbf{F}$ adalah medan vektor yang turunan parsialnya kontinu pada daerah terbuka di R^3 yang mengandung S, maka:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Karena:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Atau

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Dan

$$\int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Serta

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dA$$

Maka teorema Stokes menjadi:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int\int_D \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dA$$

Catatan:

Kurva terbatas yang berorientasi positif dari permukaan berorientasi sering ditulis sebagai ∂S, sehingga Teorema Stokes dapat dinyatakan sebagai:

$$\int\int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Tes Formatif 14

1. Jika $\mathbf{F} = \langle -y, x, -2 \rangle$ dan S adalah permukaan kerucut $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$ berorientasi ke bawah, maka nilai dari:

$$\int\int_S \text{curl}\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. -2π

B. -8π

C. -32π

D. -16π

E. -4π

2. Jika $\mathbf{F} = \langle -2yz, yx, 3x \rangle$ dan S adalah permukaan paraboloid $z^2 = 5 - x^2 - y^2$, terletak pada bidang $z = 1$ berorientasi ke atas, maka nilai dari:

$$\int\int_S \text{curl}\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. 8π

B. 10π

C. 12π

D. 14π

E. 16π

3. Jika $\mathbf{F} = \langle y, z, x \rangle$ dan S adalah permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \geq 0$, berorientasi searah dengan sumbu y positif, maka nilai dari:

$$\int\int_S \text{curl}\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

adalah …

A. π

B. $\pi/2$

C. 0

D. $-\pi/2$

E. $-\pi$

4. Jika $\mathbf{F} = \langle 1, x + yz, xy - \sqrt{z} \rangle$ dan C adalah kurva terbatas pada bidang $3x + 2y + z = 1$, di oktan pertama, maka nilai dari:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

adalah …

A. $1/3$

B. $4/3$

C. $1/36$

D. $1/24$

E. $1/18$

5. Jika $\mathbf{F} = \langle yz, 2xz, e^{xy} \rangle$ dan C adalah kurva berbentuk lingkaran $x^2 + y^2 = 16,\ z = 5$, maka nilai dari:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

adalah …

A. 100π

B. 80π

C. 60π

D. 40π

E. 20π

Jawaban Tes Formatif 14

1. C
2. A
3. E
4. D
5. B

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 14 yang terdapat di bagian modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Modul 14.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 – 100% = baik sekali

90 – 100% = baik

90 – 100% = cukup

<100% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda sudah menyelesaikan mata kuliah Kalkulus Peubha Banyak. Bagus! Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Modul 14, terutama bagian yang belum dikuasai.

QR Code Video Pembelajaran	QR Code Video Pembelajaran

GLOSARIUM

Aproksimasi adalah pendekatan terbaik yang mendekati nilai sebenarnya.

Curl merupakan salah satu bentuk diferensiasi bidang vektor.
Cusp adalah patahan atau titik pada sikloid.

Differential adalah istilah untuk melakukan turunan dari suatu fungsi.
Divergen adalah istilah untuk ukuran aliran keluar per satuan volume dari medan vektor pada suatu titik.

Fungsi potensial adalah fungsi yang mungkin terbentuk dari suatu medan vektor dengan syarat $\mathbf{F} = \nabla f$.
Fluks adalah medan vektor $\mathbf{F}$ di atas permukaan S adalah integral permukaan dari komponen vektor normal satuan $\mathbf{n}$ di atas permukaan S.

Gradien vektor adalah turunan vektor dari suatu fungsi skalar.
Gradien medan vektor adalah turunan dari suatu medan vektor.

Hemisphere adalah istilah untuk menggambarkan setengah bola.

Integral adalah istilah untuk mendapatkan fungsi awal yang sudah mengalami turunan.
Integral garis adalah integral yang dihitung dengan mengevaluasi fungsi yang hendak diintegralkan sepanjang seutas kurva.
Integral permukaan adalah integral yang dilakukan untuk menghitung luas permukaan dengan batas tertentu.

Jacobian adalah determinan dari matriks Jacobi.

Kalkulus Peubah Banyak adalah mata kuliah yang merupakan bentuk pengembangan atau kelanjutan dari mata kuliah Kalkulus Differensial dan Kalkulus Integral.

Luas area adalah kuantitas dari wilayah terbatas.

Matriks adalah susunan entri yang berbentu persegi panjang dalam baris dan kolom tertentu.

Norm adalah istilah untuk panjang vektor.

Ortogonal adalah suatu istilah untuk menyatakan vektor-vektor yang saling tegak lurus.

Pengali Lagrange adalah metode untuk mencari nilai maksimum dan minimum suatu fungsi.

Radial adalah kecepatan dari suatu benda dalam arah segaris dengan arah pandangan (menjauhi atau mendekati pengamat).

Surface adalah istiah untuk menggambarkan permukaan di tiga dimensi.
Sikloid adalah lintasan yang dilalui oleh suatu titik pada keliling lingkaran jika titik itu bergulir sepanjang garis lurus.

Tangensial adalah perubahan kecepatan tiap satuan waktu.

Usaha adalah gaya dikali jarak.

Vektor merupakan sebuah besaran yang memiliki arah.
Vektor normal adalah vektor yang tegak lurus dengan garis atau bidang.
Vektor satuan adalah vektor dengan panjang satuan.
Vektor normal satuan adalah vektor yang tegak lurus dengan garis atau bidang dengan panjang satuan.

Work adalah istilah untuk usaha yang dihasilkan dari penerapan gaya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. Larson and B. H. Edwards, *Multivariable Calculus, Ninth Edition*, Ninth Edit. Brooks/Cole Cengage Learning, 2010.

[2] J. Stewart, *Multivariable Calculus: Concepts & Contexts*. Canada: Thomson Brooks/Cole, 2005.

[3] H. Anton and A. Kaul, *Elementary Linear Algebra*, Twelfth Ed. John Wiley & Sons, Inc., 2019.

[4] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, Tenth Edit. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[5] J. Stewart, *Multivariable calculus*, Seventh Ed. Brooks/Cole Cengage Learning, 2012.

[6] C. H. Edwadrs and D. E. Penney, *Multivariable Calculus: with Analytic Geometry*, Fifth Edit. Prentice Hall, Inc., 1998.

[7] P. D. Lax and M. S. Terrell, *Multivariable Calculus with Applications*. Springer International Publishing, 2017.

[8] B. Solomon, *Linear Algebra Geometry and Transformation*. Florida: CRC Press Inc., 2015.

[9] J. H. Hubbard and B. B. Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra and Differential Forms: A Unified Approach*, Fifth Edit. New York: Matrix Editions, 2015.

[10] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, W. G. McCallum, D. Flath, B. G. Osgood, and E. Al, *Calculus Multivariable*, Seventh Ed. Wiley & Sons, Inc., 2017.

[11] M. Bona and S. Shabanov, *Concepts in Calculus II Beta Version*. 2012.

[12] J. Shurman, *Multivariable calculus*. Oregon: Reed College, 2011.

[13] K. Kuttler, *Multivariable Calculus , Applications and Theory*. 2011.

[14] A. Ostebee and P. Zorn, *Mutivariable Calculus: From Graphical, Numerical, and Symbolic Points of View*, Second Edi. New York: Freeman Custom Publishing, 2008.

Tim Penulis

Dr. Joko Soebagyo, M.Pd. Lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA tahun 2003, lulus S2 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Jakarta tahun 2014, dan lulus S3 Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2019. Saat ini adalah dosen tetap Program Studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA. Mengampu mata kuliah Aljabar Linier, Kalkulus Peubah Banyak, Teori Grup, Aljabar Abstrak, Geometri Euclid, Geometri Non Euclid, Geometri Transformasi, Analisis Kompleks, Etnomatematika, Filsafat & Teori Belajar Matematika, Metodologi Penelitian Kualitatif, Statistik Pendidikan, Statistik Sosial, Strategi Pembelajaran Matematika, Review Jurnal Internasional, Penulisan dan Publikasi Ilmiah di Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA. Aktif menjadi narasumber di Direktorak Guru dan Tenaga Kependidikan Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. Aktif menjadi pelatih analisis teks dengan MaxQDA di berbagai Perguruan Tinggi. Saat ini menjabat Kepala Divisi Instrumentasi dan Pengembangan Dokumen Lembaga Penjaminan Mutu Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA.

Dr. Khoerul Umam, M.Pd. Lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA tahun 2010, lulus S2 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya tahun 2013, dan lulus S3 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang tahun 2020. Saat ini adalah dosen tetap Program Studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA. Mengampu mata kuliah, Kalukulus Peubah Banyak, Matematika Realistik, Masalah Bawah dan Nilai Syarat Bawah. Saat ini saya hidup Bersama Istri tercinta Indri Trisno Wibowo, dan dua putri saya yang cantik; Mischa Mahreen Nusabha dan Zareen Khumaira.

Dr. Ishaq Nuriadin, M.Pd. Lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA tahun 2007, lulus S2 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2010, dan lulus S3 Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2015. Saat ini adalah dosen tetap Program Studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA. Mengampu mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak, Teori Graf, Geometri Transformasi, Filsafat & Teori Belajar Matematika, Metodologi Penelitian Kualitatif, Metodologi Penelitian Kuantitatif, Aplikasi Statistik Pendidikan, Edupreneuship, Pembelajaran Matematika Realistik, di Program Studi S1 PGSD, Program Studi PPG, Program Studi S1 Pendidikan Matematika, dan S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA.

Dr. Sigid Edy Purwanto, M.Pd. Lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA tahun 1999, lulus S2 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang tahun 2003, dan lulus S3 Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2010. Saat ini adalah dosen tetap Program Studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA. Mengampu mata kuliah Statistika, Kalkulus, Teori Grup, Pembelajaran Matematika Realistik, Analisis Riil di Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA. Saat ini menjabat Ketua Program Studi S2 Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA.

Dr. Samsul Maarif, M.Pd. lahir di Pemalang, Jawa Tengah yang merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Beliau menyelesaikan pendidikan di SD Bulakan 04 tahun 1997, SMP N 1 Randudongkal tahun 2000, STM Texmaco Pemalang tahun 2003 dan Stara-1 (S1) Pendidikan Matematika di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta tahun 2009. Gelar Magister Pendidikan didapat di Universitas Pendidikan Indonesia pada tahun 2012 dengan konsentrasi pendidikan matematika. Gelar Doktor didapat pada Stara-3 (S3) di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2018.

Beliau sekarang aktif sebagai dosen di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta. Disamping itu beliau menjabat sebagai Wakil Dekan II FKIP Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. HAMKA Jakarta Periode 2021 - sekarang. Buku yang pernah ditulis beliau berjudul *Pembelajaran Geometri Berbantu Cabri II Plus*.

Indonesia menulis

Buku ini mencakup diferensial, integral dan kalkulus vektor untuk fungsi lebih dari satu variabel. Aplikasi dari mata kuliah ini digunakan secara luas dalam ilmu fisika, teknik, ekonomi, dan grafik komputer.

Untuk akses **Buku Digital**, Scan **QR CODE**

Media Sains Indonesia
Melong Asih Regency B.40, Cijerah
Kota Bandung - Jawa Barat
Email : penerbit@medsan.co.id
Website : www.medsan.co.id

IKAPI

GET IT ON Google Play

ISBN 978-623-362-225-7 (PDF)
9 786233 622257