ISBN 978-623-5383-40-8

KONSEP DASAR
MATEMATIKA

Nazariah, Nur Hasanah, Yunita Oktavia Wulandari,
Joni Wilson Sitopu, Cynthia Tri Octavianti, Rifka Agustianti,
Abd. Haris, Lulut Alfaris, Mesak Ratuanik, Jan Setiawan, Nuryami,
Rintis Rizkia Pangestika, Ima Mulyawati

GET PRESS

KONSEP DASAR MATEMATIKA

Nazariah
Nur Hasanah
Yunita Oktavia Wulandari
Joni Wilson Sitopu
Cynthia Tri Octavianti
Rifka Agustianti
Abd. Haris
Lulut Alfaris
Mesak Ratuanik
Jan Setiawan
Nuryami
Rintis Rizkia Pangestika
Ima Mulyawati

PT. GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI

KONSEP DASAR MATEMATIKA

Penulis :
Nazariah
Nur Hasanah
Yunita Oktavia Wulandari
Joni Wilson Sitopu
Cynthia Tri Octavianti
Rifka Agustianti
Abd. Haris
Lulut Alfaris
Mesak Ratuanik
Jan Setiawan
Nuryami
Rintis Rizkia Pangestika
Ima Mulyawati

ISBN : 978-623-5383-40-8

Editor : Ariyanto, M.Pd
Penyunting : Tri Purti Wahyuni, S.Pd
Desain Sampul dan Tata Letak : Handri Maika Saputra, S.ST

Penerbit : PT. GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI
Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi :
Jl. Pasir Sebelah No. 30 RT 002 RW 001
Kelurahan Pasie Nan Tigo Kecamatan Koto Tangah
Padang Sumatera Barat
Website : www.globaleksekutifteknologi.co.id
Email : globaleksekutifteknologi@gmail.com

Cetakan pertama, Juni 2022

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat rahmat dan hidayah-Nya buku ”Konsep Dasar Matematika” ini dapat disusun dan diselesaikan dengan baik.

Buku ini menguraikan “Konsep Dasar Matematika” secara komprehensif yang terdiri atas 13 bab, yaitu : 1) Penalaran Matematika, 2) Pengantar Logika, 3) Persamaan dan Pertidaksamaan Linear, 4) Relasi dan Fungsi, 5) Pertidaksamaan Kuadrat, 6) Barisan Bilangan, 7) Deret Bilangan, 8) Geometri, 9) Geometri Transformasi, 10) Permutasi dan Kombinasi, 11) Peluang, 12) Pengelolaan Data, 13) Pemecahan Masalah Matematika.

Penulis berharap buku ini dapat menambah khasanah keilmuan kepada seluruh pembaca dan dapat memenuhi kebutuhan materi belajar mengajar tentang pemberdayaan masyarakat. Buku ini diharapkan dapat membantu pembaca dalam melaksanakan proses belajar mengajar sesuai dengan tujuan yang diharapkan.

Pada kesempatan ini, penulis membuka ruang bagi para akademisi, praktisi, dan para pembaca sekalian untuk memberikan saran, masukan maupun kritik yang sifatnya membangun demi penyempurnaan buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat untuk semua. Aamiin

Penulis, Juni 2022

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENALARAN MATEMATIKA

Oleh Nazariah

1.1 Penalaran

Pondasi dari matematika adalah penalaran. Penalaran merupakan salah satu kompetensi dasar matematika disamping pemahaman, komunikasi, koneksi dan pemecahan masalah. Penalaran juga merupakan proses mental dalam mengembangkan pikiran dari beberapa fakta dan prinsip. Ketika kita dihadapkan dengan sebuah diskusi, debat, atau menulis kita selalu dihadapkan dengan argumen untuk mendukung pendapat kita. Kita berusaha agar argumen kita menjadi kuat dan tidak terbantahkan. Maka kita selalu mendukung argumen kita dengan data, fakta, dan dengan penalaran-penalaran untuk mendukung pernyataan yang menjadi kesimpulan dari argumen kita. Hal ini sesuai dengan pendapat Sumarmo mengutip pendapat Shurter and Pierce yang mendefenisikan penalaran sebagai proses memperoleh kesimpulan logis berdasarkan data dan sumber yang relavan (Sumarmo, 2013).

Menurut W. Poespoprodjo ilmu penalaran atau logika adalah ilmu dan kecakapan menalar, berpikir dengan tepat (*the science and art of correct thinking*). Dengan kata lain ditunjuk sasaran atau bidang logika, yaitu kegiatan pikiran atau akal budi manusia. Dengan berpikir dimaksudkan kegiatan akal untuk "mengolah" pengetahuan yang kita terima melalui panca indera, dan ditunjukkan untuk mencapai suatu kebenaran (Poespoprodjo, 2011).

Namun, tidak semua berpikir merupakan penalaran.. Proses berpikir dimulai dari pengamatan indera atau observasi empiric. Proses itu di dalam pikiran menghasilkan sejumlah pengertian dan proposisi sekaligus. Berdasarkan pengamatan-pengamatan indera yang sejenis, pikiran menyusun proposisi yang sejenis pula. Proses inilah yang disebut dengan penalaran yaitu bahwa berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar kemudian digunakan untuk menyimpulkan sebuah proposisi yang baru yang sebelumnya tidak diketahui.

Syarat-syarat pokok pemikiran dan penalaran untuk mendapatkan kesimpulan yang benar (Ranjabar, 2015):

1. Pemikiran harus berpangkal dari kenyataan atau titik pangkal yang benar.
2. Alasan-alasan yang diajukan harus tepat dan kuat.
3. Jalan pikiran harus logis dan kerap.

Dari definisi di atas dapat diambil kesimpulan bahwa ciri-ciri penalaran yakni :

1. Adanya suatu pola pikir yang disebut logika. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa kegiatan penalaran merupakan suatu proses berpikir logis. Berpikir logis ini diartikan sebagai berpikir menurut suatu pola tertentu atau menurut logika tertentu.
2. Proses berpikirnya analitik. Penalaran merupakan suatu kegiatan yang mengandalkan diri pada suatu analitik, dalam kerangka berpikir yang dipergunakan untuk analitik tersebut adalah logika penalaran yang bersangkutan.

1.2 Penalaran Matematika

Karin Brodie menyatakan bahwa *mathematical reasoning is reasoning about and with the object of mathematic* (Brodie, 2010). Pernyataan tersebut dapat diartikan bahwa penalaran matematika adalah penalaran mengenai objek matematika. Objek matematika dalam hal ini adalah cabang-cabang matematika yang dipelajari seperti statistika, aljabar, geometri, dan sebagainya.

Math Glossary juga menyatakan *mathematical reasoning: thinking through math problems logically in order to arrive at solutions. It involves being able to identify what is important and unimportant in solving a problem and to explain or justify a solution* (Glossary, 2022). Penalaran matematika adalah berpikir mengenai permasalahan-permasalahan matematika secara logis untuk memperoleh penyelesaian. Penalaran matematika juga mensyaratkan kemampuan untuk memilah apa yang penting dan tidak penting dalam menyelesaikan sebuah permasalahan dan untuk menjelaskan atau memberikan alasan atas sebuah penyelesaian.

Dari definisi Math Glossary, dapat diketahui bahwa terdapat dua hal yang harus dimiliki siswa dalam melakukan penalaran matematika yaitu kemampuan menjalankan procedural penyelesaian masalah secara matematis dan kemampuan menjelaskan atau memberikan alasan yang dilakukan.

Materi matematika dan penalaran matematika merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahan, yaitu materi matematika di pahami melalui penalaran dan penalaran dipahami dan diteliti melalui materi matematika. Penalaran matematis yang mencangkup kemampuan untuk berpikir secara logis dan sistematis merupakan ranah kognitif yang paling tinggi.

Dari definisi tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa Penalaran matematis mensyaratkan kemampuan untuk memilah apa yang penting dan tidak penting dalam menyelesaikan sebuah permasalahan dan untuk menjelaskan atau memberikan alasan atas sebuah penyelesaian. Untuk meningkatkan kemampuan penalaran siswa, seharusnya guru tidak hanya memberikan pertanyaan kepada siswa yang bersifat mengingat kembali tentang sesuatu atau prosedur matematika, melainkan juga seharusnya memberikan pertanyaan yang mendorong siswa untuk berpikir, bernalar, dan menjelaskan pengetahuannya.

1.3 Jenis-Jenis Penalaran

Berdasarkan analisis terhadap karya beberapa pakar, secara garis besar penalaran matematis diklarifikasikan kedalam dua jenis yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif (Soemarno, 2014).

1.3.1 Penalaran Induktif

Secara umum penalaran induktif didefenisikan sebagai penarikan kesimpulan berdasarkan pengamatan terhadap data terbatas. Karena berdasarkan keterbatasan pengamatan tersebut, maka nilai kebenaran kesimpulan dalam penalaran induktif tidak mutlak tetapi bersifat probabilistik. Ditinjau dari karakteristik proses penarikan kesimpulan, penalaran induktif meliputi beberapa kegiatan sebagai berikut:

1. Penalaran transduktif yaitu proses menarik kesimpulan dari pengamatan terbatas dan diberlakukan terhadap kasus tertentu.
2. Penalaran analogi yaitu proses menarik kesimpulan berdasarkan keserupaan proses atau data.
3. Penalaran generalisasi yaitu proses menarik kesimpulan secara umum berdasarkan data terbatas
4. Memperkirakan jawaban, solusi atau kecendrungan: interpolasi dan eksrapolasi.
5. Memberi penjelasan terhadap model, fakta, sifat, hubungan, atau pola yang ada.
6. Menggunakan pola hubungan untuk menganalisis situasi, dan menyusun konjektur.

Induksi sangat penting karena nilai induksi tidak terhingga nilainya dalam pencarian kebenaran-kebenaran, tentang alam semesta, tentang manusia, tentang relasi antar manusia (Ranjabar, 2015). Ada beberapa alasan antara lain sebagai berikut:

1. Induksi mendorong kita untuk melakukan observasi secara jelas dan hati-hati.
2. Induksi menumbuhkan dalam diri rasa cinta akan fakta-fakta bukan teori-teori.
3. Induksi menyatukan antara fakta-fakta yang bertumpuk- tumpuk dan kesaling hubungan antar fakta-fakta.
4. Induksi membuat kita dapat memprediksi peristiwa-peristiwa.

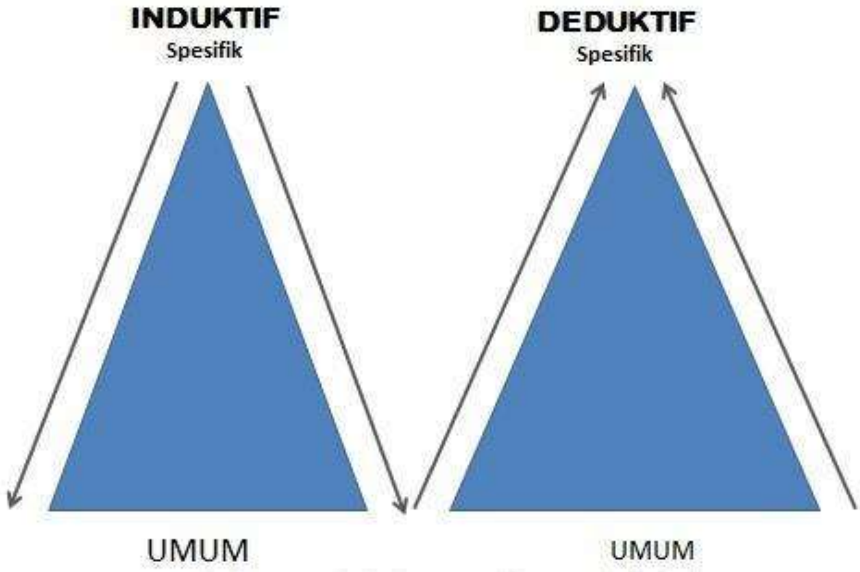
1.3.2 Penalaran Induktif

Penalaran deduktif adalah penarikan kesimpulan berdasarkan aturan yang disepakati (Soemarno, 2014). Nilai kebenaran dalam penalaran deduktif bersifat mutlak benar atau salah dan tidak keduanya bersama-sama. Penalaran deduktif dapat tergolong tingkat rendah atau tingkat tinggi. Beberapa kegiatan yang tergolong pada penalaran deduktif diantaranya adalah:

1. Melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu.
2. Menarik kesimpulan logis (penalaran logis): berdasarkan aturan inferensi, berdasarkan profesi yang sesuai, berdasarkan peluang, korelasi antara dua variabel, menetapkan kombinasi beberapa variabel.
3. Menyusun pembuktian langsung,pembuktian tak langsung dan pembuktian dengan induksi matematika.
4. Menyusun analisis dan sintesis beberapa kasus.

Panarikan kesimpulan secara deduktif biasanya memakai pola berpikir yang disebut "silogisme" (Ranjabar, 2015). Silogisme tersusun tersusun dari dua buah pernyataan (premis) dan sebuah kesimpulan (konklusi). Di dalam mempelajari matematika kemampuan penalaran dapat dikembangkan pada saat siswa memahami suatu konsep (pengertian), atau menemukan dan membuktikan suatu prinsip. Ketika menemukan atau membuktikan suatu prinsip, dikembangkan pola pikir induktif dan deduktif. Siswa dibiasakan melihat ciri-ciri beberapa kasus, melihat pola dan membuat dugaan tentang hubungan yang ada diantara kasus-kasus itu, serta selanjutnya menyatakan hubungan yang berlaku umum (generalisasi, penalaran induktif). Di samping itu siswa juga perlu dibiasakan menerima terlebih dahulu suatu hubungan yang jelas keberadaannya, selanjutnya menggunakan hubungan itu untuk menemukan hubungan-hubungan yang lainnya (penalaran deduktif). Jadi baik penalaran deduktif maupun induktif, keduanya sangat penting dalam pembelajaran matematika. Kemudian pada penelitian ini penulis memakai kedua penalaran tersebut karena keduanya saling memiliki keterkaitan antara satu sama lain yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif.

Gambar 1. Bagan Penalaran Induktif



Gambar 2. Pendekatan induktif dengan pendekatan deduktif

1.4 Indikator Kemampuan Penalaran Matematika

Karunia Eka Lestari mengutip pendapat sumarmo yang menyatakan, indikator yang berkaitan dengan kemampuan penalaran matematika (Yhudhanegara, 2017) yaitu:

1. Menarik kesimpulan logis.
2. Memberikan penjelasan dengan model, fakta, sifat-sifat, dan hubungan.
3. Memperkirakan jawaban dan proses solusi.
4. Menggunakan pola dan hubungan untuk menganalisis situasi atau membuat analogi dan generalisasi.
5. Menyusun dan menguji konjektur.
6. Membuat counter example (kontra contoh).
7. Mengikuti aturan inferensi dan memeriksa validitas argument.
8. Menyusun argumen yang valid.

Romadhina yang merujuk pedoman teknik peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas Nomor 506/C/Kep/PP/2004, merinci indikator kemampuan penalaran matematis (Soemarno, 2014) sebagai berikut:

1. Mengajukan dugaan.
2. Melakukan manipulasi matematika.
3. Menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi.
4. Menarik kesimpulan dari pernyataan.
5. Memeriksa keshahihan suatu argument.
6. Menemukan pola atau sifat dari gejala matematika untuk membuat generalisasi.

Sehingga dapat dismpulkan bahwa kemampuan penalaran matematis merupakan salah satu kemampuan berpikir tingkat tinggi. Sedangkan kegiatan atau indikator yang termasuk dalam kemampuan penalaran matematis meliputi:

1. Menarik kesimpulan dari suatu data.
2. Menggeneralisasi dan menarik kesimpulan umum dari pola, data, atau proses.
3. Menganalogikan suatu permasalahan.

4. Memperkirakan suatu model.
5. Menjelaskan penyelesaian dari sebuah masalah.
6. Menggunakan pola hubungan untuk menganalisis dan menyusun konjektur.
7. Transduktif yakni dapat menarik kesimpulan khusus dari satu kasus dan diterapkan untuk kasus lainnya.

Indikator pencapaian kemampuan penalaran matematika yakni mengajukan pernyataan matemaika dengan tertulis, mengajukan dugaan, melakukan manipulasi matematika, menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi, menarik kesimpulan dari suatu pernyataan, memeriksa kesahihann suatu argumen, menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi .

Kemampuan penalaran matematis siswa dapat menunjang siswa untuk dapat menyimpulkan dan membuktikan suatu pernyataan, membangun gagasan baru, sampai pada menyelesaikan masalah-masalah dalam matematika yang diberikan. Maka dari itu, kemampuan penalaran matematis tentunya harus bisa dibiasakan dan dikembangkan pada setiap pembelajaran matematika. Pembiasaan itu harus diawali dengan kekonsistenan guru dalam mengajar para siswa terutama dalam pemberian soal-soal atau permasalahan sesuai materi yang diajarkan yang bersifat tidak rutin.

Kemampuan penalaran matematika termasuk dalam tujuan pembelajaran matematika untuk pendidikan dasar dan menengah yang dikemukakan Depdiknas yaitu salah satunya agar siswa menggunkan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan atau pernyataan matematika, serta mengkomunikasikan gagasan dengan symbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas masalah. *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM) sebelumnya juga mengemukakan tentang prinsip danstandar pembelajaran matematika yang dilakukan di sekolah salah satunya yaitu agar siswa memiliki kemampuan penalaran dan komunikasi matematika (Azmi, 2018).

Indikator kemampuan penalaran matematis dalam penelitian ini adalah kemampuan siswa dalam menyajikan pernyataan matematika secara tertulis, mengajukan dugaan (conjegtures), melakukan manipulasi matematika, menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap beberapa solusi, memeriksa kesahihan suatu argumen, menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

DAFTAR PUSTAKA

Azmi, M. P. (2018). Asosiasi antara Kemampuan Analogi dengan Komunikasi Matematik Siswa SMP 8 . *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 91-92.

Brodie, K. (2010). Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classroom. *Springer*, 7.

Glossary. (2022, April Senin). Retrieved from http://www.surfnetparents.com/

Poespoprodjo, W. (2011). *Logika Ilmu Nalar.* Bandung: Pustaka Grafika.

Ranjabar, J. (2015). *Dasar-dasar logika.* Bandung.

Soemarno, H. H. (2014). Penilaian Pembelajaran Matematika. p. 32.

Sumarmo, U. (2013). Berpikir Dan Disposisi Matematik Serta Pembelajarannya. 302.

Yhudhanegara, K. E. (2017). *Penelitian Pendidikan Matematika.* Bandung: Rfika Aditama.

BAB 2
PENGANTAR LOGIKA

Oleh Nur Hasanah

2.1 Konsep Logika

Konsep logika pertama kali dikembangkan oleh filusuf yunani, Aristoteles, sekitar 2300 tahun yang lalu dan saat ini logika mempunyai aplikasi luas didalam ilmu computer salah satunya pada bidang pemprograman, analisis kebenaran algoritma, *artificial intelligence*, perancangan computer dan sebagainya (Munir, 2010).

Perkataan “logika”atau “logis”atau “logical”sudah sering didengar dalam kehidupan sehari-hari yang menunjukkan cara berpikir atau cara hidup seseorang yang menggunakan logika, masuk akal yang *reasonable* yang wajar dan beralasan atau berargumen baik benar maupun salah. Logika juga menunjuk pada suatu disiplin ilmiah yang merupakan kegiatan intelektual yang dipelajari untuk memperoleh pengetahuan dan pemahaman dalam bidang tertentu secara sistematik-rasional terargumentasi dan terorganisasi yang terikat atau tunduk pada aturan-aturan prosedur (metode) tertentu.

Sejak dikembangkannya refleksi filsafat dan matematika oleh orang Yunani dua ribu lima ratus tahun yang lalu, hingga kini sejarah kebudayaan dan peradaban manusia telah melahirkan berbagai disiplin ilmiah untuk secara metodik-sistematikal dan rasional terargumentasi memperoleh pengetahuan tentang berbagai hal (Wulansari *et al*, 2015).

Logika merupakan studi penalaran (*reasoning*), yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi, bukan dengan perasaan atau pengalaman. Pelajaran logika fokus pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*). Contoh : Semua pengedara sepeda motor memakai helm. Setiap orang yang memakai helm adalah mahasiswa. Jadi, semua pengedara sepeda motor adalah mahasiswa

Kecerdasan matematis-logis merupakan suatu kemampuan untuk menangani bilangan dan perhitungan, yang pola berpikir logis dan ilmiah. Biasanya, kecerdasan ini dimiliki oleh para ilmuwan, matematikawan, saintis, filosof, fisikawan, dan lain sebagainya. Kecerdasan ini mempunyai dua unsur, yakni matematika dan logika. Dua unsur ini disatupadukan sehingga menjadi kecerdasan matematis-logis. Hal ini dikarenakan keterkaitan diantara keduanya (matematikalogika) sangat erat, bahkan keduanya sama-sama mengikuti hukum dasar yang sama, yakni konsistensi(Wulansari *et al*., 2015). Masih banyak mahasiswa yang menunjukkan kemampuan dalam memecahkan bermasalah logika mengalami kesulitan (Susandi *et al*., 2017).

2.2 Pernyataan

Pernyataan merupakan setiap kumpulan kata yang berarti yang disusun menurut aturan tata bahasa disebut kalimat. Kalimat yang dibicarakan dalam logika matematika adalah kalimat-kalimat yang menerangkan (*indicative sentences /declarative sentences*).

Contoh-contoh kalimat yang menerangkan antara lain:

1. Situbondo adalah kota santri
2. 7 adalah bilangan prima

Logika Matematika tidak akan membicarakan kalimat-kalimat tentang kalimat tanya, kalimat yang mengungkapkan suatu perasaan, Kalimat perintah atau kalimat yang berisi harapan.

Misal dalam suatu pernyataan “Pertanda hendak hujan” adalah suatu hipotesis. Hipotesis yang boleh berupa argumen hukum, bukti matematis, atau kesimpulan, di mana semua itu berkaitan dengan beragam argumen. Atas sebab keragaman aplikasinya, ada aturan yang berlaku secara umum dan bebas dari bahasa yang digunakan sebagai argument. Bentuk aturan yang berlaku untuk bahasa Indonesia juga berlaku untuk bahasa Inggris atau bahasa alamiah lainnya.

Dengan kata lain, berdasarkan semua aturan yang dirumuskan itu, mengakibatkan siapa saja yang menguasainya dapat memutuskan dengan mengikuti aturan itu secara sistematis dan bebas dari keterkaitan perasaannya. Kalimat terakhir menyatakan apa yang disebut sebagai objektif, atau terbebas dari subjektif. Sebarang aturan memerlukan bahasa agar aturan itu dapat diungkapkan. Bahasa alamiah tidak selalu cukup tepat: Terdapat sifat berarti dua (ambiguitas). Dengan demikian perlu dikembangkan bahasa formal yang disebut bahasa objek. Untuk menghindari sifat bawaan bahasa alamiah seperti itu, digunakan simbolsimbol yang secara jelas didefinisikan dalam bahasa objek. Lagi pula, bahasa simbol lebih mudah ditulis dan dimanipulasi. Karena begitu pentingnya penggunaan simbol, logika itu sendiri sebagai kajian yang diketahui sebagai logika simbolik(Nasution, 2019).

2.3 Proposisi

Proposisi merupakan Kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak dapat sekaligus keduanya. Kebenaran dari sebuah kalimat disebut nilai kebenaran (*truth value*). Berikut conto proposisi.

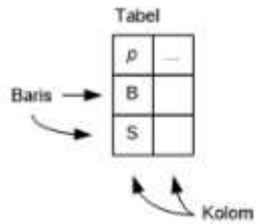
Tabel 1. Contoh Proposisi

No.	Pernyataan	Proposisi
1.	2 merupakan bilangan genap	benar
2.	Ibukota provinsi Jawa Timur adalah Situbondo	salah
3.	2>4	salah

Secara symbol proposisi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti p,q,r dll.

2.4 Tabel Kebenaran

Logika matematika tidak terlepas dengan yang namanya tabel kebenaran yang berfungsi untuk menyajikan informasi tertentu secara ringkas salah satu adalah dengan tabel. Tabel terdiri dari baris dan kolom dengan mana kolom yang digunakan untuk mewakili setiap pernyataan sedangan baris mewakili nilai kebenaran(Nasution, 2019). Biasanya kolom awal adalah pernyataan atomik, sedangkan kolom berikutnya sebagai hasil dari kegiatan lain yang terkait dengan baris yang sama, berikut contoh gambar tabel;



Gambar 3. Tabel Pernyataan (Nasution, 2019)

Nilai kebenaran dari proposisi majemuk ditentukan dari nilai kebenarannya dan proposisi atomiknya dan cara mereka dihubungkan oleh operator logika seperti pada difini berikut jika p dan q adalah proposisi maka;

1) Konjungsi $p \wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanyabenar, selain itu nilainya salah
2) Disjungsi $p \vee q$ bernilai salah jika p dan q keduanya salah, selain itu nilainya benar
3) Negasi p, yaitu jika p salah, sebaliknya bernilaia salah jika p benar

Tabel Kebenaran konjungsi

p	q	$p \wedge q$
b	*b*	*b*
b	*s*	*s*
s	*b*	*s*
s	*s*	*s*

Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
b	*b*	*b*
b	*s*	*b*
s	*b*	*b*
s	*s*	*b*

Tabel Kebenaran Negasi

p	$\sim q$
b	*s*
s	*b*

2.5 Mengkombinasikan Proposisi

Mengkombinasikan proposisi yaitu mengkombinasikan satu atau kebih proposisi operator yang digunakan biasanya dan (and), atau (or) dan tidak (nol). Dua operator utama dinamakan operator bilangan biner karena operator tersebut mengoperasikan dua buah proposisi sedangkan untuk operator ketiga dinamakan operator uner karena hanya membutuhkan satu buath proposisi.

Proposisi yang diproleh dari pengkombinasian disebut proposisi majemuk sedangkan untuk proposisi yang bukan hasil pengkombinasian disebut proposisi atomik.

Proposisi majemuk dibagi menjadi tiga yaitu disjungsi, konjungsi dan ingkaran dengan rincian sebagai berikut;

1. Disjungsi

Disjungsi merupakan kalimat deklaratif yang dihubungkan dengan kata hubung "atau" dan dilambangkan dengan simbol "∨" yang artinya atau.

2. Konjungsi

Konjungsi dua pernyataan a dan b ditulis "a ∧ b" (dibaca "a dan b") bernilai B (benar), hanya apabila kedua pernyataan tunggalnya bernilai B, dan untuk nilai-nilai kebenaran a dan b lainnya, maka "a ∧ b" bernilai S (salah).

3. Ingkaran/Negasi

Negasi Setiap pernyataan memiliki kebalikan, atau dinyatakan sebagai kalimat deklaratif negatif. Negatif dari suatu pernyataan secara umum dibentuk oleh pengantar kata bukan atau penidakan pada tempat yang tepat di dalam pernyataan

Definisi : negasi suatu pernyataan ialah suatu pernyataan yang bernilai salah apabila pernyataan semula bernilai benar, atau bernilai benar apabila pernyataan semula bernilai salah(Arif *et al.*, 2015).

Contoh negasi :
Jika pernyataan a : $Ana\ suka\ makan\ apel$ dan disimbolkan dengan a maka negasi $\sim a$: $Ana\ tidak\ suka\ makan\ apel$

Tabel 2. Contoh tabel kebenaran dari pernyataan

a	$\sim a$	$\sim(\sim a)$
B	S	B
S	B	S

Diketahui proposisi-proposisi berikut:
p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah
Maka
$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah
$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah
$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan (Hari ini tidak hujan)

2.6 Hukum-hukum Logika Proposisi

Hukum-hukum logika matematika yaitu sebagai berikut;

1. Hukum Identitas
   i. $p \vee S \Leftrightarrow p$
   ii. $p \wedge B \Leftrightarrow p$
2. Hukum Negasi
   i. $p \vee \backsim p \Leftrightarrow B$
   ii. $p \wedge \backsim p \Leftrightarrow S$
3. Hukum null/dominasi
   i. $p \wedge S \Leftrightarrow S$
   ii. $p \vee B \Leftrightarrow B$
4. Hukum idempoten
   i. $p \vee p \Leftrightarrow p$
   ii. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda)
   i. $\backsim (\backsim p) \Leftrightarrow p$
6. Hukum penyerahan (absorpsi)
   i. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
   ii. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. Hukum Komutatif
   i. $p \vee p \Leftrightarrow p \vee p$
   ii. $p \wedge p \Leftrightarrow p \wedge p$
8. Hukum Asosiatif
   i. $p \vee (p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
   ii. $p \wedge (p \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distibutif
   i. $p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   ii. $p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. Hukum De Morgan
    i. $\backsim (p \wedge q) \Leftrightarrow \backsim p \vee \backsim q$
    ii. $\backsim (p \vee q) \Leftrightarrow \backsim p \wedge \backsim q$

2.7 Inferensi

Proses penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi disebut inferensi berikut beberapa kaida dalam inferensi;

1. Modus Ponen

   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$, yang dalam hal ini p dan $p \Rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah kesimpulan atau konklusi. Kaidah modus ponen dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

   Simbol ∴ dibaca "jadi" atau "oleh karena itu". Modes ponen menyatakan bahwa jika hipotesis p dan implikasi $p \Rightarrow q$ benar, maka konklusi q benar.

2. Modus Tollen

   Kaidah ini didasarkan pada tautology $(\backsim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \backsim p$ yang dalam hal ini $\backsim q$ dan $p \Rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan p adalah kesimpulan atau konklusi. Kaidah modus tollen dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

3. Silogisme Hipotesis
   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$ Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

4. Silogisme Disjungtif
   Kaidah ini didasarkan pada tautology $[(p \vee q) \wedge\backsim p \Longrightarrow q$ Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk;

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ \therefore q \end{array}$$

5. Simplikasi
   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge q) \Longrightarrow q$ yang dalam hal ini, p dan q adalah hipotesis, sedangkan p adalah konklusi. Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$$

6. Penjumlahan
   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $p \Longrightarrow (p \vee q)$. Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{l} \underline{p} \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

7. Konjungsi
   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $\big((p) \wedge (q)\big) \rightarrow (p \wedge q)$Kaidah ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore\ p \wedge q \end{array}$$

DAFTAR PUSTAKA

Arif, E. *et al.* (2015) 'Metode Pengajaran Akuntansi di Tingkat Pengantar Menggunakan Persamaan Dasar Akuntansi Berbasis Logika Matematika (From Rule of Thumb Toward Algebraic Equations Rationality)', 26(2), pp. 22–25.

Nasution, M. K. M. (2019) 'Logika : Suatu Pengantar Logika : Suatu Pengantar', (April), pp. 1–5. doi: 10.13140/RG.2.2.20013.33761/1.

Susandi, A. D. and Widyawati, S. (2017) 'Proses Berpikir dalam Memecahkan Masalah Logika Matematika Ditinjau dari Gaya Kognitif Field Independent dan Field Dependent', *NUMERICAL (Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika)*, 1(1), p. 93. doi: 10.25217/numerical.v1i1.122.

Wulansari, M. and Hakim, L. (2015) 'Pengaruh Kecerdasan Logis-Matematis, Hasil Belajar Pengantar Akuntansi, Dan Minat Belajar Terhadap Tingkat Pemahaman Akuntansi', *Jurnal Pendidikan Akuntansi (JPAK) UNESA*, 3(3), pp. 1–9.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika

BAB 3
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

Oleh Yunita Oktavia Wulandari

3.1 Persamaan dan Pertidaksamaan

Sebelum membahas apakah itu persamaan dan pertidaksamaan, kita mengingat kembali apa itu kalimat terbuka dan variabel. Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya karena memiliki unsur yang belum diketahui nilainya yang disebut dengan variabel. Variabel ini merupakan simbol/lambang yang mewakili sebarang anggota suatu himpunan semesta yang biasanya dilambangkan dengan huruf kecil bercetak miring.

Berdasarkan tanda hubungnya, kalimat terbuka terdiri dari dua macam, yaitu persamaan dan pertidaksamaan. Persamaan merupakan kalimat terbuka yang dihubungkan oleh tanda ”=”, sedangkan pertidaksamaan dihubungkan oleh tanda ”$<, >, \leq, \geq$ ".

Contoh Persamaan

1. $x^2 - 4 = 0$
2. $3x - 10 = 5x + 1$

Contoh Pertidaksamaan

1. $x^2 - 9 \geq 0$
2. $8x - 3 < 2x + 10$

3.2 Persamaan Linier

Persamaan linier adalah persamaan yang terdiri dari dua ekspresi yang sama satu sama lain. Persamaan linear mungkin memiliki satu variabel atau lebih di dalamnya, di mana setiap variabel pangkat tertingginya adalah 1 (Abuasad and Jibril, 2019).

3.2.1 Persamaan linier satu variabel

Persamaan linier satu variabel ini mempunyai satu variabel. Berikut bentuk umumnya:

$$ax + b = 0$$

Dengan $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, a disebut koefisien dari x dan b disebut konstanta. Solusi dari persamaan linier tersebut adalah nilai x yang memenuhi persamaan jika disubstitusikan ke persamaan tersebut.

Langkah dalam menentukan solusi dari persamaan linier satu variabel, yaitu:

1. Sederhanakan setiap ruas persamaan. Gabungkan suku yang sejenis.
2. Tambahkan suku pada setiap ruas persamaan sehingga semua suku yang mengandung variabel berada pada satu ruas tanda sama dengan dan semua istilah konstan berada di sisi lain.
3. Sederhanakan setiap ruas persamaan dengan menggabungkan suku-suku sejenis.
4. Terapkan Sifat Perkalian Persamaan untuk mengisolasi variabel.
5. Periksa dengan mensubstitusikan solusi ke persamaan awal.

Contoh 1

Tentukan solusi dari persamaan linier berikut

a. $2x - 20 = 5x + 1$

b. $4x + 20 = 0$

Penyelesaian

a. $2x - 20 = 5x + 1$

$\rightarrow 2x - 5x = 20 + 1$

$\rightarrow -3x = 21$

$\rightarrow x = \dfrac{21}{-3} = -7$

Jadi, solusi dari persamaan $3x - 20 = 0$ adalah $x = \frac{20}{3}$.

b. $4x + 20 = 0 \rightarrow 4x = -20 \rightarrow x = -\frac{20}{5} = -5$

Jadi, solusi dari persamaan $4x + 20 = 0$ adalah $x = -5$.

Menyelesaikan Persamaan Linier Satu Variabel

Berikut merupakan langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah Persamaan linier satu variabel:

a. Tuliskan informasi yang diketahui dari permasalahan yang diberikan
b. Buat model matematika dari permasalahan tersebut.
c. Menyelesaikan model matematika yang telah dibuat untuk mendapatkan solusinya.
d. Menginterpretasikan hasil penyelesaian.
e. Mengevaluasi dan menyimpulkan solusi dari permasalahan yang diberikan.

Contoh :
Ibu belanja ke pasar untuk membeli jeruk dan kelengkeng. Harga 1 kg kelengkeng 2 kali harga 1 kg jeruk di toko Sabar Subur. Ibu membeli 3 kg jeruk dan 2 kg kelengkeng dengan harga Rp126.000,00. Jika Asih juga membeli 5 kg buah jeruk di toko yang sama, apakah cukup jika Asih membawa uang Rp60.000,00 ?
Jawab :

Langkah-Langkah	**Penyelesaian**
Menuliskan informasi yang diketahui dari permasalahan	Diketahui: • Harga 1kg kelengkeng sama dengan 2 kali harga 1kg jeruk • Harga 3kg jeruk dan 2kg kelengkeng adalah Rp.126.000,00 • Asih membawa uang Rp.60.000,00
Membuat model matematika	Misalkan x adalah harga 1kg jeruk, maka harga 1kg kelengkeng adalah $2x$. Harga 3kg jeruk dan 2kg kelengkeng adalah Rp.126.000,00 $3x + 2(2x) = 126000$
Menyelesaikan persamaan	$3x + 2(2x) = 126000$ $\rightarrow 3x + 4x = 126000$ $\rightarrow 7x = 126000$

Langkah-Langkah	Penyelesaian
	$\rightarrow x = \frac{126000}{7} = 18000$
Menginterpretasikan hasil penyelesaian	$x = 18000$ Harga 1kg jeruk Rp.18000
Mengevaluasi dan menyimpulkan	Asih membeli 5kg jeruk, sehingga Asih harus membayar $5 \times 18000 = 90000$. Sedangkan, uang yang dibawa Asih adalah Rp.60.000,00. Jadi uang Asih tidak cukup untuk membeli 5kg jeruk.

3.2.2 Persamaan linier dua variabel

Persamaan linier dua variabel ini mempunyai dua variabel. Persamaan ini disebut juga persamaan garis lurus karena jika digambarkan grafiknya berupa garis lurus. Berikut bentuk umumnya:

$ax + by = c$ atau $y = mx + c$

Dengan $a, b, c \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$, a disebut koefisien dari x, b disebut koefisien dari y, c disebut konstanta, m merupakan gradien. Solusi dari persamaan linier tersebut adalah nilai x dan y yang memenuhi persamaan jika disubstitusikan ke persamaan tersebut.

3.2.3 Persamaan linier tiga variabel

Persamaan linier tiga variabel ini mempunyai tiga variabel. Berikut bentuk umumnya:

$$ax + by + cz = d$$

Dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, b, c \neq 0$, a disebut koefisien dari x, b disebut koefisien dari y, c disebut koefisien dari z, dan d disebut konstanta. Solusi dari persamaan linier tersebut adalah nilai x, y, dan z yang memenuhi persamaan jika disubstitusikan ke persamaan tersebut.

3.2.4 Persamaan Linier n variabel

Persamaan linier n variabel ini mempunyai n variabel. Bentuk umumnya

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

dengan variabel-variabelnya $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dan koefisien-koefisien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dan b $\in$ R. Solusi dari persamaan linier tersebut adalah nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots,$dan x_n yang memenuhi persamaan jika disubstitusikan ke persamaan tersebut.

3.3 Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier merupakan suatu himpunan terbatas dari suatu persamaan linear dalam variabel-variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Jika $\mathrm{x}_1 = \mathrm{s}_1, \mathrm{x}_2 = \mathrm{s}_2, \mathrm{x}_3 = \mathrm{s}_3, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{s}_\mathrm{n}$ adalah solusi untuk setiap persamaan linear dalam sistem persamaan linier, maka urutan bilangan-bilangan $\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \mathrm{s}_3, \ldots, \mathrm{s}_\mathrm{n}$ disebut suatu solusi dari sistem tersebut. Jika $\mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_2 = \mathrm{b}_3 = \cdots = \mathrm{b}_\mathrm{m} = 0$, maka system persamaan linier tersebut disebut system persamaan linier homogeny. Sedangkan jika $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \ldots, \mathrm{b}_\mathrm{m}$ merupakan konstanta tak nol, maka system persamaan linier tersebut disebut system persamaan nonhomogen (Karso, 2014).

Setiap sistem persamaan linear mungkin tidak mempunyai solusi, mempunyai tepat satu solusi, atau tak hingga banyaknya solusi. Sistem persamaan yang tidak mempunyai solusi disebut sistem yang tak konsisten sedangkan jika minimal terdapat satu solusi maka sistem tersebut disebut konsisten (Rainarli *et al.*, 2011).

3.3.1 Sistem Persamaan Linier Dua Variabel

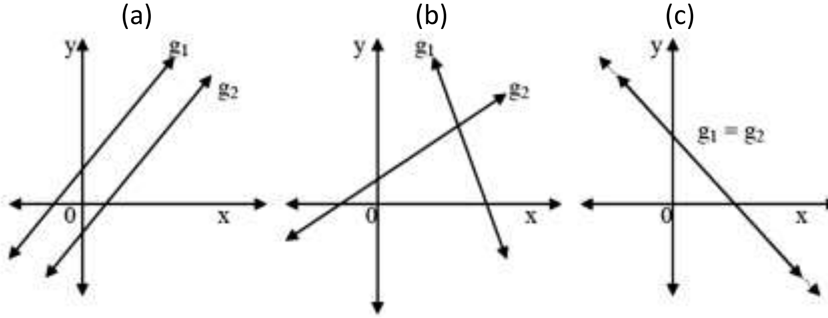
Persamaan linier dua variabel ini dapat digambarkan sebagai suatu garis lurus pada bidang koordinat kartesius.

Perhatikan sistem persamaan dua variabel berikut:

$a_1x + b_1y = c_1$ .... g_1

$a_2x + b_2y = c_2$ .... g_2

Dengan $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$.
Jika kita ilustrasikan ke dalam grafik, maka terdapat tiga kemungkinan grafiknya.



Gambar 4. Kemungkinan grafik dari sistem persamaan linier dua variabel
Sumber :(Karso, 2014)

- Pada gambar (a) tampak bahwa kemungkinan garis g_1 sejajar dengan garis g_2, sehingga tidak ada perpotongan kedua garis. Oleh karena itu sistem tersebut tidak mempunyai solusi.
- Pada gambar (b) tampak bahwa kemungkinan garis g_1 berpotongan dengan garis g_2 di satu titik. Oleh karena itu, sistem tersebut hanya mempunyai tepat satu solusi.
- Pada gambar (c)tampak bahwa kemungkinan garis g_1 berimpit dengan garis g_2, sehingga terdapat tak hingga banyaknya titik potong dari kedua garis tersebut. Oleh karena itu sistem mempunyai tak terhingga banyaknya solusi.

Langkah-langkah dalam menentukan solusi dari sistem persamaan linier dua variabel:

1. Metode substitusi
   Metode ini yaitu menyatakan salah satu variabel ke dalam variabel lainnya. Setelah itu variabel tersebut menggantikan variabel yang sama dalam persamaan lainnya.
   Contoh Metode Substitusi
   Tentukan solusi dari sistem persamaan linier

$$\left.\begin{array}{l}2x + 3y = 84 \\ 3x + y = 63\end{array}\right\}$$

Penyelesaian

Perhatikan $3x + y = 63$,

1) Nyatakan variabel y ke dalam x, $3x + y = 63$
   $\rightarrow y = -3x + 63$
2) Gantikan variabel y yang didapat pada langkah satu ke persamaan lainnya
   Mengganti nilai y pada persamaan $2x + 3y = 84$ dengan $y = -3x + 63$, sehingga didapatkan
   $2x + 3(-3x + 63) = 84$
   $\rightarrow 2x - 9x + 189 = 84$
   $\rightarrow -7x = -105$
   $\rightarrow x = 15$
3) Memasukkan nilai $x = 15$ ke dalam persamaan $y = -3x + 63$ supaya mendapatkan nilai y yang dicari.
   $y = -3x + 63 = -3(15) + 63 = 18.$
4) Jadi didapatkan solusi dari sistem persamaan linier di atas yaitu $x = 15$ dan $y = 18$.

2. Metode eliminasi

Metode ini yaitu menghilangkan salah satu variabel dari sistem persamaan linier tersebut dengan cara menyamakan koefisien salah satu variabel yang akan dihilangkan.

Contoh Metode Eliminasi

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier

$$\left.\begin{array}{l}2x + 3y = 84 \\ 3x + y = 63\end{array}\right\}$$

Penyelesaian

1) Perhatikan sistem persamaan linier tersebut. Kita akan menghilangkan variabel y,oleh karena itu, kita harus menyamakan koefisien y dari kedua persamaan tersebut

$$\begin{array}{lcl}2x + 3y = 84 & |\times 1| & 2x + 3y = 84 \\ 3x + y = 63 & |\times 3| & 9x + 3y = 189\end{array}$$

2) Kita hilangkan variabel y dari kedua persamaan dengan melakukan operasi pengurangan.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 84 & |\times 1| & 2x + 3y = 84 \\ 3x + y = 63 & |\times 3| & \underline{9x + 3y = 189} \; - \\ & & -7x = -105 \\ & & \rightarrow x = 15 \end{array}$$

3) Kita akan hilangkan variabel x, maka kita harus menyamakan koefisien x dari kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 84 & |\times 3| & 6x + 9y = 252 \\ 3x + y = 63 & |\times 2| & 6x + 2y = 126 \end{array}$$

4) Kita hilangkan variabel x dari kedua persamaan dengan melakukan operasi pengurangan.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 84 & |\times 3| & 6x + 9y = 252 \\ 3x + y = 63 & |\times 2| & \underline{6x + 2y = 126} \; - \\ & & 7y = 126 \\ & & \rightarrow y = 18 \end{array}$$

5) Jadi didapatkan solusi dari sistem persamaan linier di atas yaitu $x = 15$ dan $y = 18$.

3. Metode Grafik

Metode ini yaitu menggambarkan grafik persamaan linear dua variabel, sehingga grafik sistem persamaan linear dua variabel ditunjukkan dengan dua garis lurus pada koordinat kartesius. Solusi secara sistem ini berupa titik potong kedua garis lurus tersebut yaitu nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut. Jika garis berpotongan, maka sistem tersebut mempunyai satu solusi; jika garis sejajar, maka sistem tersebut tidak mempunyai solusi; jika garisnya berhimpit, maka sistem tersebut mempunyai banyak solusi.

3.4 Pertidaksamaan

Pertidaksamaan merupakan suatu kalimat terbuka yang ditandai dengan tanda ”$<, >, \leq, \geq$ ". Berikut merupakan sifat-sifat pertidaksamaan:

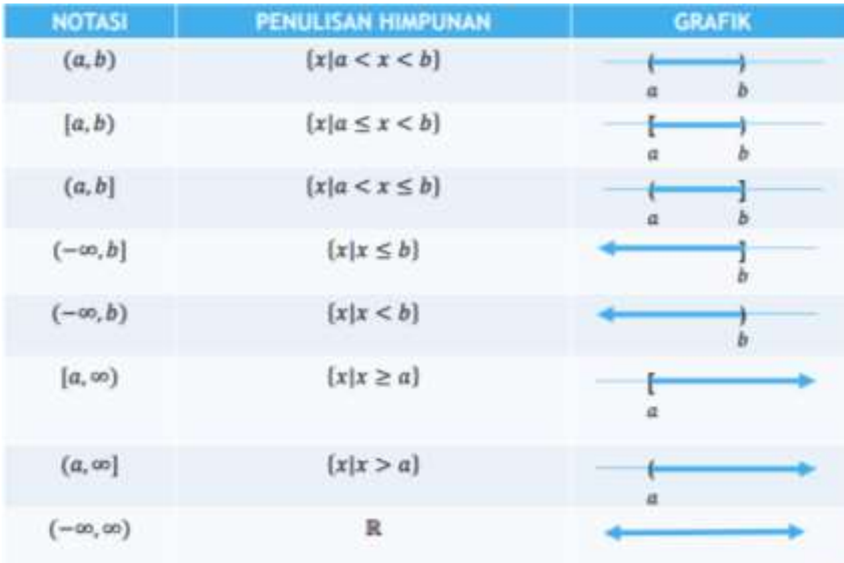
1. Jika $a < b$, maka $b > a$
2. Jika $a > b$, maka:
   i. $a \pm c > b \pm c$
   ii. $ap > bp$, dengan $p > 0$
   iii. $aq < bq$, dengan $q < 0$
3. Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$
4. Jika $a > b$ dan $c > d$, maka $a + c > b + d$
5. Jika $a > b > 0$ dan $c > d > 0$, maka $ac > bd$
6. Jika $a > b > 0$, maka:
   i. $a^2 > b^2$
   ii. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
7. Jika $\frac{a}{b} > 0$, maka $ab > 0$
8. Jika $\frac{a}{b} < 0$, maka $ab < 0$ (Romli, 2020).

3.4.1 Pertidaksamaan Linier

Pertidaksamaan linier merupakan pertidaksamaan yang setiap sukunya memuat konstanta dengan variabel berderajat satu. Menyelesaikan suatu pertidaksamaan berarti mencari semua himpunan bilangan real yang membuat pertidaksamaan tersebut berlaku. Berbeda dengan persamaan, himpunan solusi dari suatu pertidaksamaan dapat berupa interval bilangan atau gabungan dari beberapa interval.

3.4.2 Interval

Suatu pertidaksamaan dapat dituliskan dalam bentuk interval. Sebagai contoh, suatu interval buka (a,b) merupakan himpunan semua x yang memenuhi pertidaksamaan $a \leq x \leq b$. Untuk lebih jelasnya dapat kita lihat pada Gambar 2.4 di bawah ini.



NOTASI	PENULISAN HIMPUNAN	GRAFIK
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	a
$(a, \infty]$	$\{x \mid x > a\}$	a
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Gambar 5. Penulisan Interval
Sumber :(Varberg, Purcell and Rigdon, 2007)

3.4.3 Tahapan Menyelesaikan Pertidaksamaan

Berikut merupakan hal-hal yang dapat kita lakukan dalam mencari himpunan selesaian dari suatu pertidaksamaan, yaitu:

1. Menambah suatu bilangan yang sama pada kedua ruas pertidaksamaan,
2. Mengalikan bilangan positif pada kedua ruas suatu pertidaksamaan,
3. Mengalikan bilangan negatif pada kedua ruas suatu pertidaksamaan, kemudian membalik tanda pertidaksamaannya (Varberg, Purcell and Rigdon, 2007).

Contoh 1
Carilah himpunan solusi dari pertidaksamaan $4x - 5 > x + 16$.
Penyelesaian
Perhatikan
$4x - 5 > x + 16$
$\rightarrow 4x > x + 21$ (ditambah dengan 5)
$\rightarrow 3x > 21$ (ditambah dengan $-x$)

$\rightarrow x > 7$ (dikali dengan $\frac{1}{3}$)

Jadi himpunan solusi dari pertidaksamaan $4x - 5 > x + 16$ adalah $\{x | x > 7\} = (7, \infty)$.

Contoh 2

Selesaikan pertidaksamaan $-2 < 8x + 6 \leq 3$.

Penyelesaian

Perhatikan

$-2 < 8x + 6 \leq 3$

$\rightarrow -8 < 8x \leq -3$ (ditambah dengan -6)

$\rightarrow -1 < x \leq -\frac{3}{8}$ (dikali dengan $\frac{1}{8}$)

Jadi himpunan solusi dari pertidaksamaan $-2 < 8x + 6 \leq 3$ adalah $\left\{x | -1 < x \leq -\frac{3}{8}\right\} = (-1, -\frac{3}{8}]$.

DAFTAR PUSTAKA

Abuasad, S. and Jibril, A. (2019) ‘CHAPTER 3 Equations and Inequalities-A FIRST COURSE IN FOUNDATION OF Chapter 3 Equations (المعادلات) and Inequalities (المتباينات)’, (July).

Karso (2014) ‘Materi kurikuler matematika SMA’, *Materi Kurikuler Matematika SMA*, pp. 1–624.

Rainarli, E. *et al.* (2011) ‘Aljabar Linear dan Matriks’, pp. 1–73.

Romli, I. (2020) *Kalkulus 1: Edisi Pertama*. Balai Insan Cendekia Mandiri. Available at: https://books.google.co.id/books?id=HbwxEAAAQBAJ.

Varberg, D. E., Purcell, E. J. and Rigdon, S. E. (2007) *Calculus*. Pearson Educación.

BAB 4
RELASI DAN FUNGSI

Oleh Joni Wilson Sitopu

4.1 Pendahuluan

Bab ini berkaitan dengan menghubungkan pasangan elemen dari dua himpunan dan kemudian memperkenalkan hubungan antara dua elemen dalam pasangan. Praktis dalam kehidupan kita sehari-hari, kita memasangkan anggota dari dua himpunan bilangan. Semua matematika, serta mata pelajaran yang mengandalkan matematika, seperti sains dan teknik komputer, memanfaatkan relasi dan fungsi. Suatu fungsi memberikan kepada setiap anggota himpunan X tepat satu anggota himpunan Y. Fungsi digunakan secara luas dalam matematika diskrit; misalnya, fungsi digunakan untuk menganalisis waktu yang dibutuhkan untuk mengeksekusi algoritma. Relasi menggeneralisasikan pengertian fungsi. Relasi adalah himpunan pasangan terurut. Pasangan terurut (a, b) dalam suatu relasi diinterpretasikan sebagai indikasi suatu relasi yang berangkat dari a ke b. Model database relasional yang membantu pengguna mengakses informasi dalam database (kumpulan catatan yang dimanipulasi oleh komputer) didasarkan pada konsep relasi. (R. Johnsonbaugh, (2000)).

4.2 Relasi

1. Definisi Relasi

Relasi digunakan untuk menggambarkan sifat-sifat tertentu dari sesuatu. Dengan cara itu, hal-hal tertentu dapat dihubungkan dengan cara tertentu; ini disebut relasi. Jelas, bahwa hal-hal terkait, atau tidak, tidak ada di antara keduanya.

2. Hasil Kali Cartesian

Misalkan A dan B adalah dua himpunan sembarang, himpunan semua pasangan terurut (a,b) di mana a∈A dan b∈B disebut produk kartesius/hasil kali kartesius (*cartesian* *product*) dari A dan B dinotasikan dengan $A \ X \ B$ dan didefinisikan sebagai $A \ X \ B$ = {(a,b) l a ∊ A ; b ∊ B}. Dalam hal ini (a,b) disebut sebagai pasangan terurut (*ordered pair*) atau 2 tupel. (Singh, S., (2009)).

Definisi

Pasangan terurut (a , b) dan (c , d) dikatakan sama jika & hanya jika (jika) a = c dan b = d.

Contoh (1)

Apabila A = (1 , 2) dan B = (a , b , c) maka
$A \ X \ B$ = { (1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c) } dan
$B \ X \ A$ = { (a,1),(a,2),(b1,),(b,2),(c,1),(c,2) }

Perhatikan bahwa $A \ X \ B \neq B \ X \ A$, akibatnya operasi produk kartesius tidak komutatif**.**

Dengan menggunakan n(S) untuk jumlah elemen dalam himpunan S, untuk:

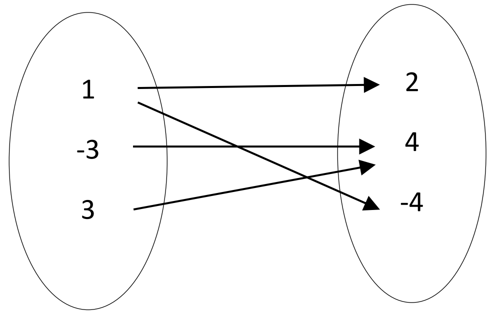
$$n(A \ X \ B) = n(A) \ X \ n(B) = 2 \text{x} 3 = 6$$

4.2.1 Representasi Relasi

Suatu relasi dapat terdiri dari sejumlah pasangan terurut atau sejumlah tak terhingga pasangan terurut. Selanjutnya, suatu relasi dapat didefinisikan dengan beberapa metode yang berbeda:

Diagram panah. Diagram Venn dan panah dapat digunakan untuk mewakili hubungan antara himpunan yang diberikan. Suatu relasi dapat didefinisikan dengan korespondensi (Gambar 5). Pasangan terurut yang bersesuaian adalah {(1, 2), (1, -4), (-3, 4), (3, 4)}.

Dalam diagram panah dari a ke b berarti bahwa a berhubungan dengan b. Graf semacam ini disebut graf berarah atau digraf.



Gambar 6. Diagram Panah

Matriks Relasi. Cara lain untuk merepresentasikan relasi R dari A ke B adalah dengan matriks. Baris-barisnya dilabeli dengan elemen-elemen A, dan kolom-kolomnya dilabeli dengan elemen-elemen B. Jika aϵA dan bϵB maka kita menulis 1 pada baris a kolom b jika aRb, jika tidak kita menulis 0.
Misalnya Relasi R = {(a, 1), (b, 1), (c, 2), (c, 3)} dari A = {a, b, c, d} ke B = {1, 2, 3, 4} memiliki matriks berikut:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Gambar 7. Matriks Relasi (R. Johnsonbaugh, (2000))

4.2.2 Relasi invers

Diberikan sebuah relasi R dari A ke B, invers dari R, dinotasikan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan sebagai $bR^{-1}a$: R^{-1} = {(b,a) : (a,b) ∈ R}. (Richard Mayr, (2018))
Misalnya, jika R adalah relasi “menjadi putra atau putri dari”, maka R^{-1} adalah relasi "menjadi orang tua".

Contoh (2)

misalkan R = {(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2)} maka
R^{-1} = {(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3}

Contoh (3)

Misalkan R dan S relasi antara A dan B
i. tunjukan bahwa, jika $R \subseteq S$ maka $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
ii. buktikan bahwa $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

Bukti (i)

Misalkan

$(a,b) \in R^{-1} \rightarrow (b,a) \in R$ definisi relasi invers

$\therefore (b,a) \in S$ karena $R \subseteq S$

$\therefore (a,b) \in S^{-1}$ definisi relasi invers

$\therefore R^{-1} \subseteq S^{-1}$ definisi subset

Bukti (ii)

(1) Misalkan $(a,b) \in (R \cap S)^{-1}$

$\therefore (b,a) \in (R \cap S)$ definisi invers

$(b,a) \in R$ and $(b,a) \in S$ definisi irisan

$(a,b) \in R^{-1}$and $(b,a) \in S^{-1}$ definisi invers

$(a,b) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ definisi irisan

$(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$ definisi subset

(2) Misalkan $(a,b) \in R^{-1} \cap S^{-1}$

$(a,b) \in R^{-1}$and $(b,a) \in S^{-1}$ definisi irisan

$(b,a) \in R$ and $(b,a) \in S$ definisi invers

$\therefore (b,a) \in (R \cap S)$ definisi irisan

$\therefore (a,b) \in (R \cap S)^{-1}$ definisi invers

$R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$ definisi subset

Jadi dari (1) dan (2) diperoleh

$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ qed

4.2.3 Relasi komposisi

Misalkan A, B, dan C adalah tiga himpunan.

Diberikan relasi R dari A ke B dan relasi S dari B ke C, maka komposisi R_oS dari relasi R dan S adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

$R_oS = \{(a,c): (a,b) \in R \text{ dan } (b,c) \in S \ \ni b \in B\}$.

Misalnya, jika R adalah relasi "menjadi ayah dari", dan S adalah relasi "menikah dengan", maka R_oS adalah relasi "menjadi ayah mertua".

Contoh (4)

Misalkan $R = \{(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)\}$

$S = \{(2,u),(4,s),(4,t),(6,t),(8,u)$.

Tentukan R_oS.

Penyelesaian.

$R_o S = \{(1,u),(1,t),(2,s),(2,t),(3,s),(3,t),(3,u)\}$

Contoh (5)

Misalkan $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, misalkan R dan T adalah Dua relasi pada A sedemikian sehingga:

$R = \{(x,y): 2x + 3y = 15\}, T = \{(x,y): 3x + 2y \in A\}$

Tuliskan R,T dan $R_o T$ sebagai himpunan pasangan terurut?

Penyelesaian :

$R = \{(0,5),(3,3),(6,1)\}$

$T = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0)\}$

$R_o T = \{(6,0),(6,1),(6,2)\}$

4.2.4 Relasi Biner

Relasi biner R pada himpunan A disebut (Richard Mayr, (2018)):

1. **Refleksif**

Jika $\forall$ xϵA, xRx. Misalnya pada relasi Z "sama dengan" (=) bersifat refleksif.

Contoh (6)

Misalkan A = {a, b, c, d} dan R didefinikan sebagai berikut :

R = {(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (c, c), (d, c), (d, d)}.

R adalah relasi refleksif.

Contoh (7)

Misalkan R suatu relasi pada suatu himpunan maka jika R refleksif maka R^{-1} refleksif

Bukti ;

Ambil $(a,a) \in R \; \forall \, a \in A$

$\therefore (a,a) \in R^{-1} \; \forall \, a \in A$

$\therefore R^{-1}$ adalah refleksif

2. **Transitif**

Jika $\forall$(x,y,z)ϵA, xRy dan yRz $\ni$ xRz. Misalnya persamaan (=) dan pertidaksamaan (<) pada Z adalah relasi transitif.

Contoh (8)

Misalkan $A = \{a,b,c,d\}$ dan R didefisikan sbb :

$R = \{(a,b),(a,c),(b,d),(a,d),(b,c),(d,c)\}$. Dimana R adalah relasi transitif pada A.

3. Simetris

Jika ∀ (x,y)ϵA, xRy ∋ yRx. Misalnya pada Z, persamaan (=) simetris, tetapi pertidaksamaan (<) tidak simetris .

Contoh (9)

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$. Tunjukkan R symmetries.

Misalkan R adalah himpunan bilangan real dan R adalah relasi aRb jika dan hanya jika a<b. Tunjukkan bahwa R tidak simetris

Penyelesaian

bRc dan cRb maka R adalah symmetris.

$2 < 4$ but $4 \nless 2$.

Contoh (10)

Misalkan R adalah relasi pada himpunan A maka R simetris jika dan jika $R = R^{-1}$

Bukti :

(1) Ambil R simetris

Misalkan $(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$

$(b, a) \in R^{-1}$ dan $(a, b) \in R^{-1}$

$\therefore R = R^{-1}$

(2) Ambil $R = R^{-1}$

Misalkan $(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R^{-1}$

$(b, a) \in R$ karena $R = R^{-1}$

$\therefore$ R Simetris

4. Antisimetris

Jika ∀ (x,y)ϵA, xRy dan yRx ∋ x = y. Misalnya, pertidaksamaan (≤) pada Z adalah antisimetris.

Contoh (11)

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan R didefinisikan sbb:

$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, d), (d, b)\}$.

R tidak simetris, sebagai aRc ~~t~~api cRa. R tidak anti-simetris, karena a R b dan b R a, tetapi a ≠ b

5. R irrefleksif

jika, $\forall$ a $\in$ A , (a, a) $\notin$ R

Contoh (12)

misalkan A = {a, b, c, d} dan R didefinisikan sebagai berikut: R = {(a, a), (a, c), (b, a), (b, d), (c, c), (d, c), (d, d)}.

Dimana R bukan relasi refleksif atau irrefleksif karena b tidak terkait dengan dirinya sendiri dan a, c, d terkait dengan dirinya sendiri.

Contoh (13)

Misalkan R adalah relasi pada himpunan A maka R refleksif jika dan hanya jika R^c irrefleksif

Bukti :

Ambil (a, a) $\in$ R $\forall$ a $\in$ A

$\therefore$ (a, a) $\notin R^c$ $\forall$ a $\in$ A   definisi complement

$\therefore$ R^c irrefleksif   definisi irrefleksif

4.2.5 Relasi Orde Parsial

1. Definisi

Misalkan R adalah relasi biner pada himpunan tak kosong X. R adalah orde parsial jika R adalah relasi refleksif, transitif, dan antisimetri. (John A. Dossey et al. (2006))

Sebagai contoh

Relasi < bukan urutan parsial, karena transitif dan antisimetris tetapi tidak refleksif.

Contoh (4.14)

Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 6, 9}dan relasi R yang didefinisikan pada A menjadi "a membagi b". Apakah R Relasi orde parsial pada A?

Penyelesaian :

Pertama kita daftar semua pasangan terurut dari R sebagai berikut:

R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,9),(2,2),(2,4),2,6),(3,3),(3,6) ,(3,9), (4,4),(6,6),(9,9)}

(1,1),(2,2),(3,3),4,4),(6,6) dan (9,9) $\in$ R

$\therefore$ **R refleksif**

(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,9),(2,4),(2,6),(3,6) dan (3,9) $\in$ R tapi (2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(9,1),(4,2),(6,2),(6,3) dan (9,3) $\notin$ R

$\therefore$ **R antisimetris**

(1,2), (2,4) $\in$ R dan (1,4) $\in$ R

(1,3), (3,6) $\in$ R dan (1,6) $\in$ R

(1,3), (3,9) $\in$ R dan (1,9) $\in$ R

$\therefore$ **R transitif,**

maka R relasi orde parsial

4.2.6 Relasi Equivalensi

Relasi ekivalen pada himpunan A adalah relasi biner pada A dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. Reflesif: $\forall$ x $\in$ A, x R x.
2. Simetris: x Ry $\ni$ y R x.
3. Transitif: (x R y) ^ (y R z) $\ni$ x R z. (John A. Dossey et al. (2006)

Misalnya, pada Z, persamaan (=) adalah relasi ekivalen Contoh lain, juga pada Z, adalah sebagai berikut: xRy (mod 2) ("x kongruen dengan y modulo 2") jika dan hanya jika x-y genap. Misalnya, 6 - 2 (mod 2) karena 6-2 = 4 genap, tetapi 7≠4 (mod 2), karena 7−4 = 3 tidak genap. Congruen modulo 2 sebenarnya adalah relasi ekivalensi:

1. Reflesif : $\forall$ x integer, x – x = 0 adalah genap, sehinga x ≡ z (mod 2).
2. Simetris : jika x ≡ y (mod 2) maka x - y = t adalah genap, tapi y – t = −t juga genap, karena y ≡ x (mod 2).
3. Transitif: ambil jika x ≡ y (mod 2) dan y ≡ z (mod 2) makax – y = t dan y – z = u adalah genap. Dari sini, x – z = (x – y) + (y – z) = t + u

   Adalah juga genap karena x ≡ z (mod 2).

4.3 Fungsi

4.3.1 Pengertian Fungsi

Relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi atau pemetaan jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A berpasangan dengan tepat satu anggota himpunan B. (K.H. Rosen, 1995).

Suatu fungsi atau pemetaan dapat disajikan dalam bentuk himpunan pasangan terurut, rumus, diagram panah, atau diagram cartesius. Fungsi f yang memetakan himpunan A ke himpunan B ditulis dengan notasi:

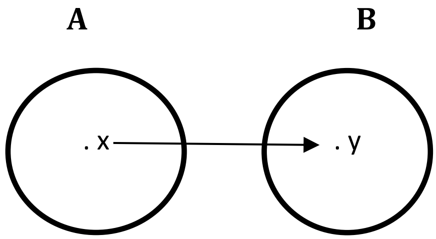
$f: A \longrightarrow B$

Dengan:

A disebut domain (daerah asal) dinotasikan D_f

B disebut Kodomain (daerah kawan) dinotasikan K_f

{y∈B l (x,y)∈R, x∈A} disebut range (daerah hasil), dinotasikan dengan R_f



Gambar 8. Fungsi (K.H. Rosen, 1995)

A = harus habis 1 kali

B = tidak perlu

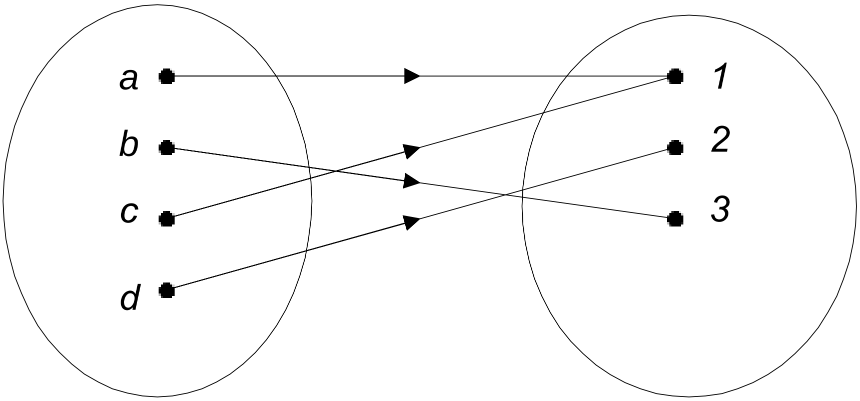
4.3.2 Sifat-sifat Fungsi

1. Fungsi surjektif (Onto)

Pada fungsi $f: A \longrightarrow B$, jika setiap elemen di B mempunyai pasangan di A atau. $R_f = B$, atau setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = y$, atau Fungsi f dikatakan dipetakan pada (*onto*) atau surjektif (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*. (K.H. Rosen, 1995)

Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.

A = { a,b,c,d}　　　　　　　　　　B = {1,2,3}



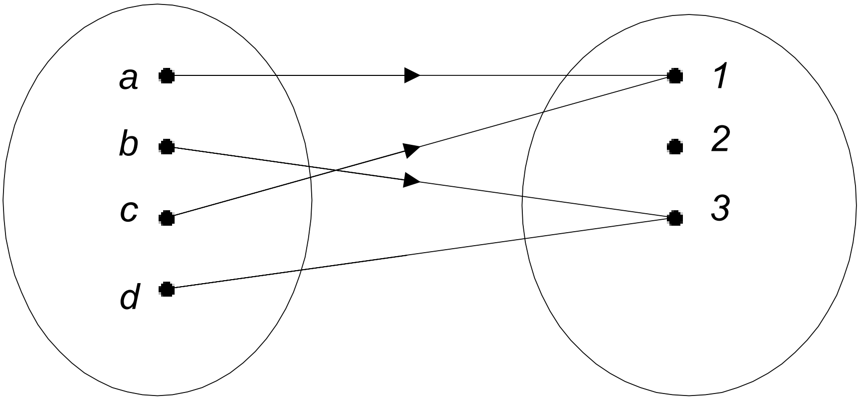
Gambar 9. Fungsi Surjektif

2. Fungsi Into

Pada fungsi $f : A \longrightarrow B$, jika terdapat elemen di B yang tidak mempunyai pasangan di A. (K.H. Rosen, (1995))

Contoh:

A = { a,b,c,d}　　　　　　　　　　B = {1,2,3}



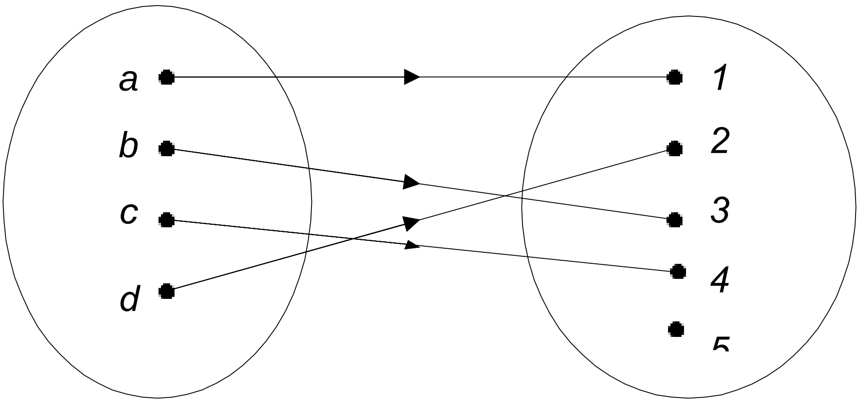
Gambar 10. Fungsi Into

3. Fungsi Injektif (Satu-satu)

Pada fungsi $f : A \longrightarrow B$, jika setiap elemen di B mempunyai pasangan tepat satu elemen dari A. (K.H. Rosen, (1995))

Contoh ;

A = { a,b,c,d}　　　　　　　　　　　　B = {1,2,3,4,5}



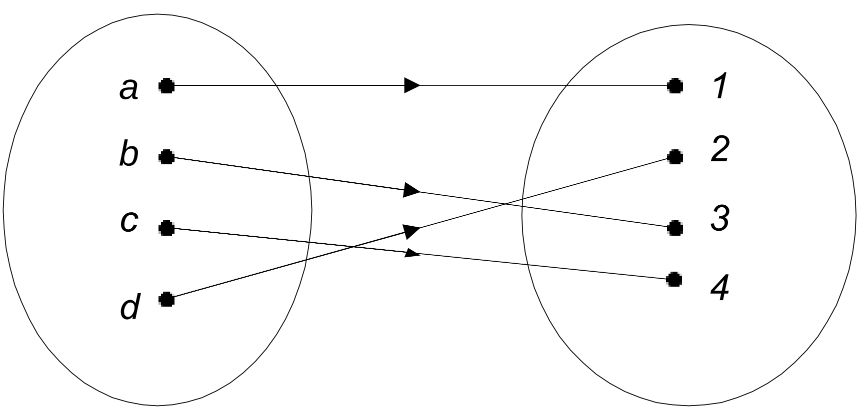
Gambar 11. Fungsi Injektif

4. Fungsi Bijektif (Korespodensi satu-satu)

Jika fungsi $f : A \longrightarrow B$ merupakan fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif. (K.H. Rosen, (1995))

Contoh:

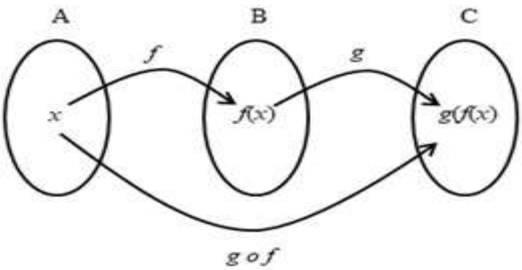
A = { a,b,c,d}　　　　　　　　　　　　B = {1,2,3,4}



Gambar 12. Fungsi Bijektif

4.3.3 Fungsi Komposisi

Misalkan f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan g adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $g \circ f$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh $g_o f = A \rightarrow C$: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall$ x ϵ A. Dengan syarat: . $R_f \cap D_g \neq \varnothing$.



Gambar 13. Fungsi Komposisi (John A. Dossey et al. (2006))

Komposisi bisa lebih dari dua fungsi jika $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, dan $h : C \longrightarrow D$, maka $hogof : A \longrightarrow D$ dan dinyatakan dengan: $(hogof\,)(x) = h(g(f(x)))$.

Sifat-sifat fungsi komposisi:

Operasi pada fungsi komposisi tidak besifat komutatif $(gof)(x) \neq (fog)(x)$. Operasi bersifat asosiatif : $(hogof)(x) = (ho(gof))(x) = ((hog)of)(x)$

Contoh:

Jika f(x) = 2x + 3 dan (fog)(x) = 2x^2 + 6x - 7, maka g(x) adalah

$(f)(g(x)) = 2x^2 + 6x - 7$

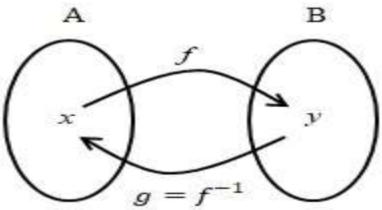
$2(g(x)) + 3 = 2x^2 + 6x - 7$

$g(x) + x^2 + 3x - 5$

4.3.4 Fungsi invers

Jika fungsi $f : A \longrightarrow B$ memiliki relasi dengan fungsi $g : B \longrightarrow A$, maka fungsi g merupakan invers dari f dan ditulis f^{-1} atau $g = f^{-1}$.

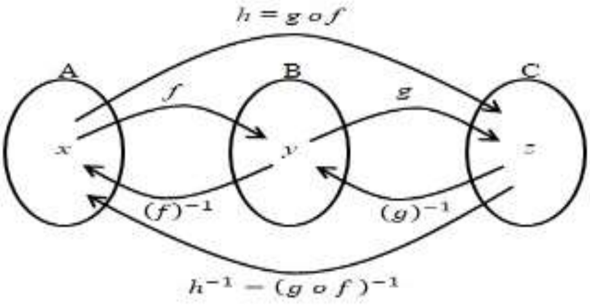
Jika f^{-1} dalam bentuk fungsi, maka f^{-1} disebut fungsi invers.



Gambar 14. Fungsi Invers (John A. Dossey et al. (2006))

Menentukan invers suatu fungsi *y = f(x)* dapat ditempuh dengan cara berikut:
Ubah persamaan *y = f(x)* ke dalam bentuk *x = f(y)*
Gantikan x dengan $f^{-1}(y)$ sehingga $f(y) = f^{-1}(y)$
Gantikan y dengan x sehingga diperoleh invers berupa f^{-1}

Invers dari Fungsi Komposisi



Gambar 15. Fungsi Invers Dari Fungsi Komposisi (K.H. Rosen, (1995))

DAFTAR PUSTAKA

John A. Dossey et al. (2006). Discrete Mathematics, fifth edition. Addition-Wesley. Pearson Education, Inc.

J.K. Truss. Discrete Mathematics for Computer Science, Addison-Wesley 1991.

K.H. Rosen, (1995). Discrete Mathematics and its Applications, McGraw Hill.

Richard Mayr, (2018). Discrete Mathematics, Chapters 2 and 9: Sets, Relations, and Functions, Sequences, Sums, Cardinality of Sets University of Edinburgh, UK

R. Johnsonbaugh, (2000). Discrete Mathematics, 5th ed. Prentice-Hall.

Singh, S., (2009). Cartesian product. Retrieved from the Connexions Web site: http://cnx.org/content/m15207/1.5/.

BAB 5
PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Oleh Cynthia Tri Octavianti

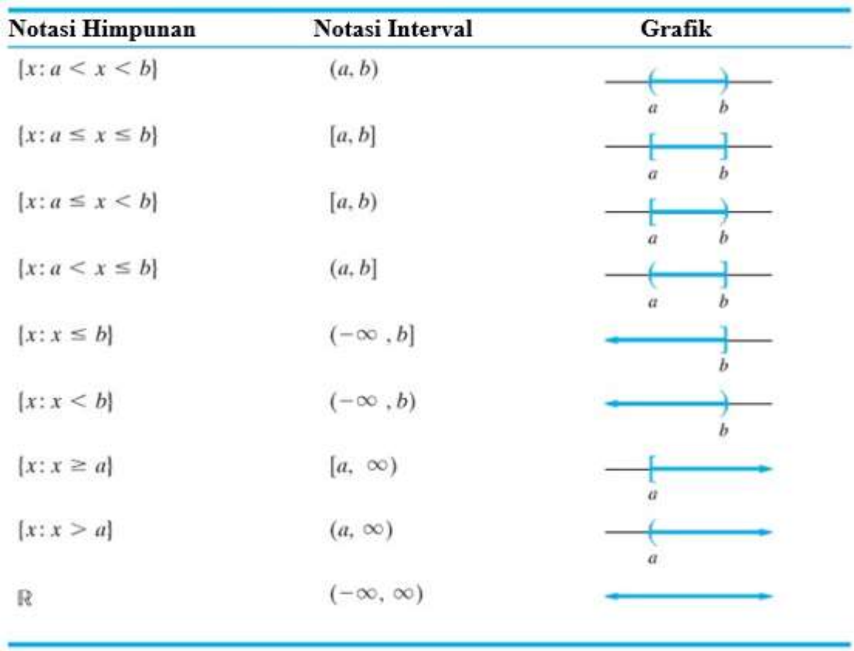
5.1 Pengertian Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat merupakan pertidaksamaan dengan salah satu tanda $(<, >, \leq, \geq)$ serta melibatkan pernyataan kuadrat(Sterling and Safari, 2018).

Anda dapat menggunakan penyelesaian persamaan kuadrat untuk menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat. Berikut lebih dahulu diperkenalkan selang-selang (interval) yang akan sering muncul dalam pertidaksamaan kuadrat.

5.2 Selang-selang (interval)

Pada bahasan pertidaksamaan kuadrat akan sering ditemukan beberapa tipe selang atau interval. Berikut akan dibahas tentang cara penulisan selang atau interval. Pertidaksamaan $a < x < b$ merupakan interval terbuka dari seluruh bilangan antara a dengan b, dengan tidak menyertakan titik-titik ujung a dengan b. Kita nyatakan ini dengan notasi (a, b). Selanjutnya, pertidaksamaan $a \leq x \leq b$ merupakan interval tertutup, yang memuat titik-titik ujung a dengan b. Gambar 16 di bawah menunjukkan cara penulisan notasi himpunan, notasi interval dan grafiknya.



Notasi Himpunan	Notasi Interval	Grafik
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a \le x \le b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \le x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \le b\}$	$(a, b]$	
$\{x : x \le b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : x \ge a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Gambar 16. Notasi himpunan, interval dan grafiknya
(Sumber : (Varberg, Purcell and Rigdon, 2003))

Berikut diberikan terlebih dahulu penyelesaian pertidaksamaan linear untuk memudahkan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat.

5.3 Pertidaksamaan Linear

Anda mungkin akan menyelesaikan pertidaksamaan linear seperti :

$5x - 2 \le 0$ atau $3x - 7 \le 5(x - 3) + 4$

Penyelesaian pertidaksamaan ini bergantung pada observasi bahwa jika $a < b$ maka

1. $a + k < b + k$ untuk setiap bilangan k
2. $a - k < b - k$ untuk setiap bilangan k
3. $ka < kb$ untuk setiap bilangan positif k
4. $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$ untuk setiap bilangan positif k
5. $na > nb$ untuk setiap bilangan negatif n
6. $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$ untuk setiap bilangan negatif n

Seperti pada persaman, prosedur atau langkah-langkah untuk menyelesaikan pertidaksamaan terdiri dari operasi pertidaksamaan langkah per langkah sehingga diperoleh himpunan penyelesaiannya jelas. Alat utamanya adalah sifat-sifat urutan. Berikut diberikan operasi-operasi tertentu pada suatu pertidaksamaan yang dilakukan dengan tidak mengubah himpunan penyelesaiannya. Khususnya:

1. Kita bisa menambahkan suatu bilangan yang bernilai sama pada masing-masing ruas pertidaksamaan;
2. Kita bisa mengalikan dengan suatu bilangan positif pada masing-masing ruas pertidaksamaan;
3. Kita bisa mengalikan dengan suatu bilangan negatif pada masing-masing ruas pertidaksamaan dengan membalikkan arah tanda pertidaksamaannya.

Berikut diberikan contoh menyelesaikan pertidaksamaan linear

Contoh 1.

Diketahui pertidaksamaan linear $2x - 7 < 4x - 2$, tentukan penyelesaiannya dan berikan grafik dari himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian

$2x - 7 < 4x - 2$

$2x < 4x + 5$ (tambahkan dengan 7 pada kedua ruas)

$-2x < 5$ (tambahkan dengan $-4x$ pada kedua ruas)

$x > -\frac{5}{2}$ (kalikan $\left(-\frac{1}{2}\right)$ pada kedua ruas, balikkan tanda pertidaksamaan)

Grafik tampak pada Gambar 17.

Gambar 17. Grafik penyelesaian $2x - 7 < 4x - 2$
(Sumber : (Varberg, Purcell and Rigdon, 2003))

5.4 Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat

Adapun langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut

a. lakukan operasi dasar sedemikian hingga diperoleh bentuk pertidaksamaan kuadrat $ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \leq 0$.
b. Tentukan penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$.
c. Tentukan letak dari dua akar persamaan kuadrat yang diperoleh di garis bilangan sumbu X sedemikian hingga sumbu X akan terbagi menjadi beberapa interval.
d. Lakukan uji tanda pada garis bilangan sumbu X dengan mensubstitusikan salah satu nilai x dalam interval-interval tersebut.
e. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat tersebut dengan mengambil interval yang tandanya sesuai dengan tanda pada pertidaksamaan kuadrat.

Untuk memudahkan berikut diberikan contoh

Contoh 2.

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat $x^2 - x < 6$

Penyelesaian.

Kita dapat menggunakan operasi awal dengan memindahkan suku yang tidak nol ke ruas yang lain dan faktorkan.

$x^2 - x < 6$

$x^2 - x - 6 < 0$ (tambahkan bilangan -6 pada kedua ruas)

$x^2 - x - 6 = 0$ (tentukan penyelesaian persamaan kuadrat)

$(x - 3)(x + 2) = 0$ (faktorkan)

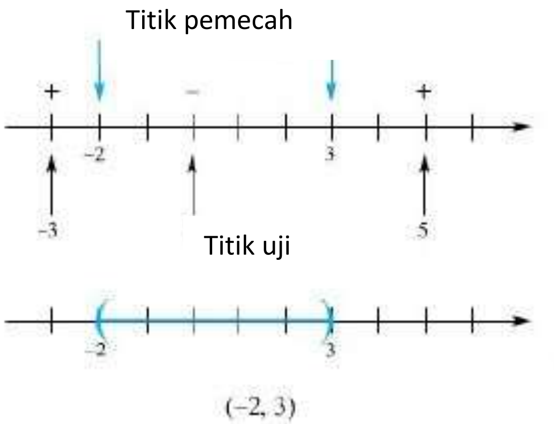
$x = 3 \bigvee x = -2$

Diperoleh titik-titik pemecahnya adalah -2 dengan 3: dari titik tersebut mengubah garis bilangan real sehingga menjadi tiga bagian interval yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2,3)$, dan $(3, \infty)$. Pada masing-masing interval di atas, $(x - 3)(x + 2)$ selalu mempunyai tanda positif atau selalu mempunyai tanda negatif. kita gunakan titik-titik uji -3, 0, dan 5 untuk mencari tanda positif atau negatifnya (ambil sembarang titik di antara tiga interval tersebut akan memenuhi pertidaksamaan). Hasil-hasil yang kita peroleh diperlihatkan di bawah.

Tabel 3. Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat

Titik penguji	**Hasil nilai** $(x-3)(x+2)$	**Tanda pertidaksamaan**
-3	6	(+)
0	6	(-)
5	14	(+)

Berdasarkan hasil tabel 1 di atas kita mendapatkan hasil bahwa himpunan penyelesaian $(x-3)(x+2)<0$ adalah selang atau interval $(-2{,}3)$. Grafiknya diperlihatkan pada bagian bawah Gambar 18.



Gambar 18. Grafik penyelesaian $x^2-x<6$
(Sumber : (Varberg, Purcell and Rigdon, 2003))

Contoh 3.

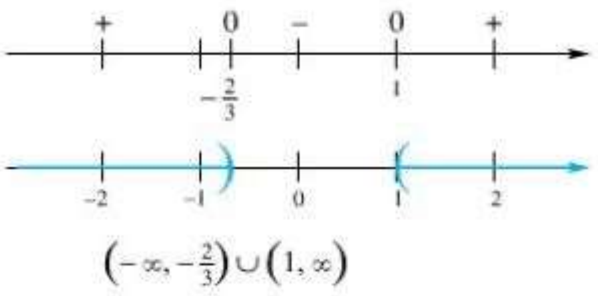
Tentukan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat $3x^2-x-2>0$

Penyelesaian

Oleh karena

$$3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Dari hasil di atas diperoleh $-\frac{2}{3}$ dan 1 adalah titik-titik pemecah. Misalkan kita ambil titik-titik uji -2, 0, dan 2, sehingga diperoleh hasil seperti pada gambar 19. Sehingga diperoleh kesimpulan bahwa himpunan penyelesaian pertidaksamaan terdiri dari titik-titik pada interval $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ atau $(1, \infty)$.



Gambar 19. Grafik Penyelesaian $3x^2 - x - 2 > 0$
(Sumber : (Varberg, Purcell and Rigdon, 2003))

Adapun menurut (Leff and Pawlowski, 2021) terdapat penyelesaian secara umum untuk pertidaksamaan kuadrat sebagai berikut:

Mungkin kita sudah mengetahui bahwa penyelesaian sebuah pertidaksamaan kuadrat mempunyai bentuk yang dapat diprediksi. Misal diberikan $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$. Jika r dan R akar yang tidak sama dari fungsi $f(x) = 0$ dengan $r < R$, maka solusi dari himpunan yang berkaitan dengan pertidaksamaan kuadrat dapat dirangkum pada tabel 2 di bawah.

Tabel 4. Himpunan yang berkaitan dengan pertidaksamaan kuadrat

Kasus "kurang dari"	Solusi interval	Kasus "lebih dari"	Solusi interval
$f(x) < 0$	$\{x \mid r < x < R\}$	$f(x) > 0$	$\{x \mid x < r \; atau \; x > R\}$
$f(x) \leq 0$	$\{x \mid r \leq x \leq R\}$	$f(x) \geq 0$	$\{x \mid x \leq r \; atau \; x \geq R\}$

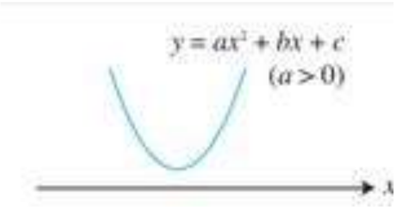
Berikut diberikan contoh untuk memperjelas bahasan di atas :

Contoh 4.

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dari $8 - x^2 \leq 2x$.

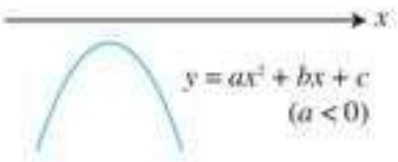
Penyelesaian

Tuliskan pertidaksamaan dalam bentuk standar $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$. kemudian ubahlah koefisien x^2 menjadi positif dengan membalikkan tanda pertidaksamaan menjadi $x^2 + 2x - 8 \geq 0$
Ubah menjadi persamaan $x^2 + 2x - 8 = 0$, selanjutnya faktorkan $(x + 4)(x - 2) = 0$, jadi $x = -4$ atau $x = 2$.
Karena pertidaksamaan telah diubah ke bentuk $f(x) \geq 0$ dan mempunyai solusi interval $\{x|x \leq r \ atau \ x \geq R\}$. Maka diperoleh $\{x|x \leq -4 \ atau \ x \geq 2\}$.
Menurut (Joseph B. W. Yeo, Teh Keng Seng, Loh Cheng Yee, 2013) terdapat kasus khusus ketika $ax^2 + bx + c$ positif atau negatif Tanda $b^2 - 4ac$ mempengaruhi posisi grafik $y = ax^2 + bx + c$



Gambar 20. grafik $y = ax^2 + bx + c, a > 0$
[Sumber :(Joseph B. W. Yeo, Teh Keng Seng, Loh Cheng Yee, 2013)]

Ketika $a > 0$ dan $b^2 - 4ac < 0$, $y = ax^2 + bx + c$ terletak di atas sumbu-x atau $y = ax^2 + bx + c > 0$ untuk semua nilai x.



Gambar 21. grafik $y = ax^2 + bx + c, a < 0$
(Joseph B. W. Yeo, Teh Keng Seng, Loh Cheng Yee, 2013)

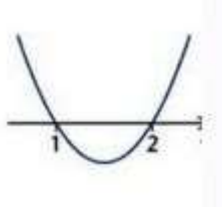
Ketika $a < 0$ dan $b^2 - 4ac < 0$, $y = ax^2 + bx + c$ terletak di bawah sumbu-x atau $y = ax^2 + bx + c < 0$ untuk semua nilai x.
Untuk kasus yang lain maka grafiknya memotong sumbu-x.
Berikut diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 5.

Tentukan penyelesaian $x^2 - 3x + 2 < 0$

Penyelesaian

Faktorkan pernyataan kuadrat $(x - 1)(x - 2) < 0$
Sketsa grafik $y = (x - 1)(x - 2)$



Gambar 22. grafik $x^2 - 3x + 2 < 0$
(sumber: (Sherran, 2004))

Dari gambar menunjukkan $(x - 1)(x - 2) < 0$ untuk semua nilai x terdapat di antara bilangan 1 dan 2.
Ini menunjukkan bahwa $x^2 - 3x + 2 < 0$ ketika $1 < x < 2$
Jika pernyataan kuadrat tidak dapat difaktorkan maka gunakan rumus abc untuk memperoleh titik uji irisan kurva dengan sumbu koordinat x

Contoh 6.

tentukan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + 2x - 5 > 0$

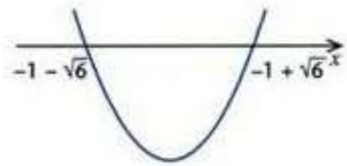
Penyelesaian

gunakan rumus abc untuk menyelesaikan $x^2 + 2x - 5 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

Sederhanakan $x = -1 \pm \sqrt{6}$

Sketsakan grafik $y = x^2 + 2x - 5$



Gambar 23. grafik $x^2 + 2x - 5 > 0$

(Sumber : (Sherran, 2004))

Dari gambar, $x^2 + 2x - 5 > 0$ ketika $x < -1 - \sqrt{6}$ atau ketika $x > -1 + \sqrt{6}$.

DAFTAR PUSTAKA

Joseph B. W. Yeo, Teh Keng Seng, Loh Cheng Yee, I. C. (2013) *New Syllabus Additional Mathematics Textbook - Google Books*. Available at: https://www.google.co.id/books/edition/New_Syllabus_Additional_Mathematics_Text/QR99AAAAQBAJ?hl=en&gbpv=1&dq=quadratic+inequalities&pg=PA64&printsec=frontcover (Accessed: 30 April 2022).

Leff, L. S. and Pawlowski, C. M. (2021) *Barron's math 360. A complete study guide to pre-calculus : your go-to guide for everything pre-calculus*.

Sherran, P. (2004) *Mathematics.* Letts Educational.

Sterling, M. and Safari, an O. M. C. (2018) *Algebra II For Dummies, 2nd Edition*.

Varberg, D., Purcell, E. J. and Rigdon, S. E. (2003) 'Kalkulus Jl. 1 Ed. 8'. Edited by H. W. Hardani. Available at: https://books.google.co.id/books?id=TksIOewEGZ8C (Accessed: 22 April 2022).

BAB 6
POLA BILANGAN DAN BARISAN BILANGAN

Oleh Rifka Agustianti

6.1 Latar Belakang

Pada era masa kini, beragam kasus dan peristiwa yang mempergunakan angka-angka dengan kaidah tertentu sangat mudah ditemukan di lingkungan sekitar, contohnya penggunaan nomor bangunan di sisi kanan memakai nomor genap dan sebelah kiri memakai nomor ganjil yang berderet secara terurut. Serupa halnya dengan bidang ilmu terapan lainnya, pemakaian bilangan dengan beragam variasi serta bentuk perhitungannya sering ditemui dalam aplikasi keseharian manusia.

Guna mengembangkan berbagai inovasi yang sudah ada, maka kita harus mengetahui serta menguasai konteks dasar dari media atau pengetahuan yang ada, diantaranya barisan bilangan dengan beragam hubungannya. (Dwiningrum, 2018)

Perkara tentang barisan bilangan sesungguhnya telah ada semenjak era Yunani kuno muncul sebagai sebuah perkara yang menarik perhatian. Dari 2.400 tahun silam, konsepsi barisan yang dikenal dalam matematika telah ramai didiskusikan masyarakat kala itu, yakni semenjak seorang pakar filsuf Yunani bernama Zeno mengungkapkan sebuah kemelut dalam matematika. Kemelut tersebut terkenal dengan paradoks Zeno, yakni :

”Seorang pelari yang perlu melampui sebuah jarak tertentu melalui sebuah teknik yaitu menempuh seperdua dari masing-masing jarak yang dilalui, sebagai risikonya, pelari tersebut tak akan tiba pada penghujung dari jarak yang akan dilaluinya”.

Perkara paradoks Zeno baru mampu dipecahkan dengan ditemukannya perkara barisan, terutama barisan tak hingga.

Selain perkara barisan, terdapat juga masalah yang berhubungan dengan konsepsi deret dalam matematika. Terdapat sebuah kisah mengenai seorang budak yang memohon pada tuannya agar disediakan beras dengan cara menaruh satu butir beras pada petak pertama sebuah papan catur. Lalu, menaruh dua butir pada petak kedua, empat butir pada petak ketiga, dan selanjutnya, sehingga masing-masing petak seterusnya harus diisi dengan beras sebanyak pangkat dua dari jumlah beras yang tersedia di petak sebelumnya. Alhasil, beras seantero negeri tak cukup guna melengkapi permohonan budak tersebut.

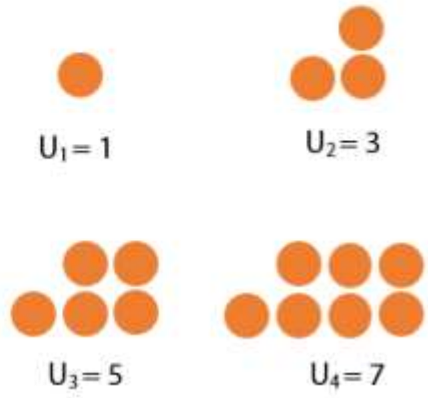
Permasalahan tersebut, pada hakikatnya ialah bagian dari aplikasi barisan serta deret yang dikenal dalam matematika. Konsepsi barisan serta deret akan terus menerus berkaitan dengan bilangan serta kaidah-kaidah tertentu. (Karso, 2020)

6.2 Pola Bilangan

Definisi pola bilangan ialah suatu barisan bilangan yang mengacu pada pola tertentu sehingga didapatkan sebuah formula umum guna menetapkan suku ke-n pada sebuah pola bilangan. Terdapat berbagai pola bilangan yang selalu digunakan yakni :

6.2.1 Pola Bilangan Ganjil

Pola bilangan ganjil merupakan barisan loncat yang terbentuk dari himpunan angka-angka ganjil yaitu 1, 3, 5, 7, ... Formula Un pada pola bilangan ganjil serta bentuknya yaitu :



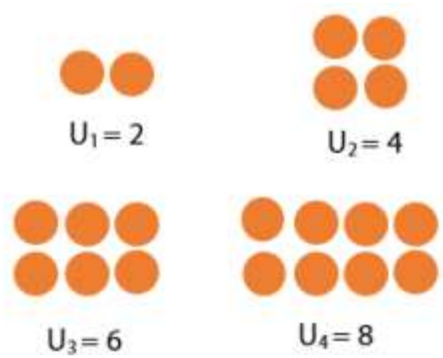
Gambar 24. Ilustrasi Pola Bilangan Ganjil
Sumber : Sayekti Dwiningrum

Perhatikan bahwa pola suku – sukunya :
$U_1 = 1 = 2(1) - 1$
$U_2 = 3 = 2(2) - 1$
$U_3 = 5 = 2(3) - 1$
$U_n = 2n - 1$

Melalui telaah rangkaian beberapa sukunya, maka terlihat bahwa pola bilangan yang muncul memperlihatkan sebuah kaidah tertentu, sehingga didapat sebuah formula suku ke−n yaitu $U_n = 2n - 1$

6.2.2 Pola Bilangan Genap

Hampir serupa dengan pola bilangan ganjil, pada pola bilangan genap pun merupakan barisan bilangan loncat yang termasuk himpunan angka-angka genap yaitu 2, 4, 6, 8, ... Formula U_n serta bentuknya yaitu :



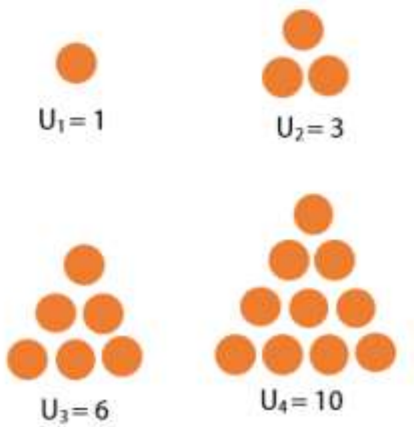
Gambar 25. Ilustrasi Pola Bilangan Genap
Sumber : Sayekti Dwiningrum

Perhatikan bahwa pola suku – sukunya :
$U_1 = 2 = 2(1)$
$U_2 = 4 = 2(2)$
$U_3 = 6 = 2(3)$
$U_n = 2n$

Melalui telaah rangkaian beberapa sukunya, maka terlihat bahwa pola bilangan yang muncul memperlihatkan sebuah kaidah tertentu, sehingga didapat sebuah formula suku ke–n yaitu $U_n = 2n$

6.2.3 Pola Bilangan Segitiga

Untuk pola bilangan segitiga, barisan bilangan yang menggantikan bulatan dapat membentuk segitiga. Model pola bilangan segitiga: 1, 3, 6, 10, dan selanjutnya. Formula U_n pola bilangan segitiga serta bentuknya yaitu :



Gambar 26. Ilustrasi Pola Bilangan Segitiga
Sumber : Sayekti Dwiningrum

Perhatikan bahwa pola suku – sukunya :

$U_1 = 1 = \frac{1}{2}(1)(1 + 1)$

$U_2 = 3 = \frac{1}{2}(2)(2 + 1)$

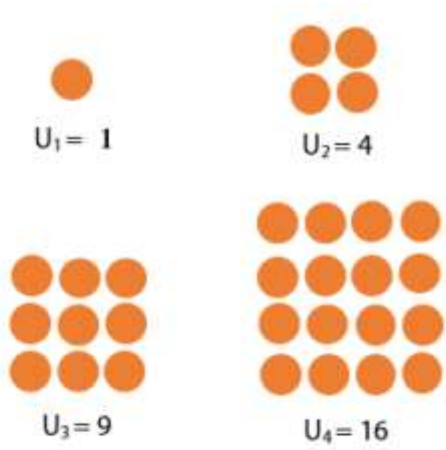
$U_3 = 6 = \frac{1}{2}(3)(3 + 1)$

$U_n = \frac{1}{2}\, n\,(n + 1)$

Melalui telaah rangkaian beberapa sukunya, maka terlihat bahwa pola bilangan yang muncul memperlihatkan sebuah kaidah tertentu, sehingga didapat sebuah formula suku ke−n yaitu $U_n = \frac{1}{2}\, n\,(n + 1)$

6.2.4 Pola Bilangan Persegi

Pada pola bilangan persegi mempunyai pola yang serupa dengan pola bilangan kuadrat. Barisan bilangannya pun adalah pola bilangan kuadrat yaitu 2, 4, 9, 16, ... Dengan demikian, formula U_n pola bilangan persegi dapat dijelaskan sebagai kuadrat dari sebuah bilangan.



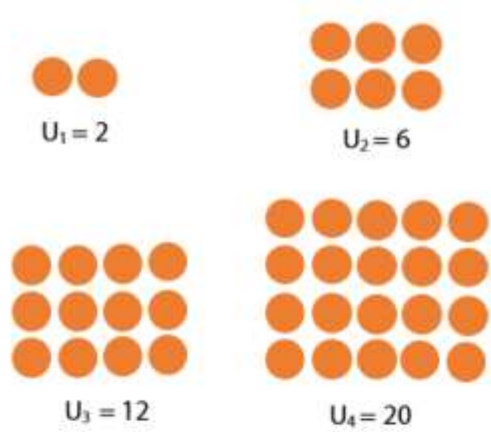
Gambar 27. Ilustrasi Pola Bilangan Persegi
Sumber : Sayekti Dwiningrum

Perhatikan bahwa pola suku – sukunya :
$U_1 = 1 = 1^2$
$U_2 = 4 = 2^2$
$U_3 = 9 = 3^2$
$Un = n^2$

Melalui telaah rangkaian beberapa sukunya, maka terlihat bahwa pola bilangan yang muncul memperlihatkan sebuah kaidah tertentu, sehingga didapat sebuah formula suku ke–n yaitu $U_n = n^2$

6.2.5 Pola Bilangan Persegi Panjang

Model pola bilangan persegi panjang yakni 2, 6, 12, 20, dan selanjutnya. Formula U_n pada pola bilangan persegi dapat dijelaskan dari bentuk seperti pada gambar berikut :



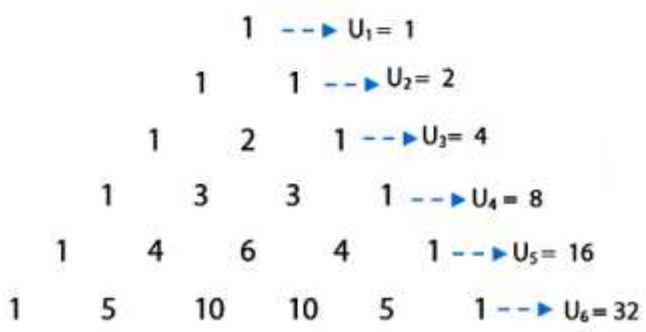
Gambar 28. Ilustrasi Pola Bilangan Persegi Panjang
Sumber : Sayekti Dwiningrum

Perhatikan bahwa pola suku – sukunya :
$U_1 = 2 = 1(1 + 1)$
$U_2 = 6 = 2(2 + 1)$
$U_3 = 12 = 3(3 + 1)$
$U_n = n (n + 1)$

Melalui telaah rangkaian beberapa sukunya, maka terlihat bahwa pola bilangan yang muncul memperlihatkan sebuah kaidah tertentu, sehingga didapat sebuah formula suku ke−n yaitu $U_n = n (n + 1)$.

6.2.6 Pola Bilangan Segitiga Pascal

Pola bilangan segitiga pascal ialah akumulasi angka-angka dari masing-masing baris pada segitiga pascal. Model pada baris keempat pada segitiga pascal terbentuk dari angka 1, 2, 1 sehingga bilangan suku keempat adalah 1 + 2 + 1 = 4. Barisan bilangan segitiga pascal ialah 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Formula U_n pada pola bilangan persegi dapat dijelaskan dari bentuk seperti pada gambar berikut :



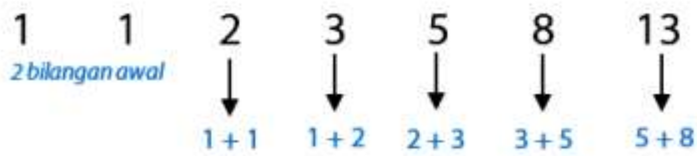
Gambar 29. Ilustrasi Pola Bilangan Segitiga Pascal
Sumber : Sayekti Dwiningrum

Perhatikan bahwa pola suku – sukunya :
$U_1 = 1 = 2^{1-1}$
$U_2 = 2 = 2^{2-1}$
$U_3 = 4 = 2^{3-1}$
$U_n = 2^{n-1}$

Melalui telaah rangkaian beberapa sukunya, maka terlihat bahwa pola bilangan yang muncul memperlihatkan sebuah kaidah tertentu, sehingga didapat sebuah formula suku ke–n yaitu $U_n = 2^{n-1}$.

6.2.7 Pola Bilangan Fibonacci

Pola bilangan Fibonacci merupakan pola bilangan rekursif, ditemukan oleh ilmuwan asal Italia bernama Leonardo da Pisa. Pola bilangan Fibonacci didapat dari menjumlahkan dua angka sebelumnya yakni 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, dan selanjutnya.



Gambar 30. Ilustrasi Pola Bilangan Fibonacci
Sumber : Sayekti Dwiningrum

Perhatikan bahwa pola suku – sukunya :
$U_1 = 1 = 1$
$U_2 = 1 = 1$
$U_3 = 2 = 1 + 1 = U_1 + U_2$
$U_n = U_{n-2} + U_{n-1}$

Melalui telaah rangkaian beberapa sukunya, maka terlihat bahwa pola bilangan yang muncul memperlihatkan sebuah kaidah tertentu, sehingga didapat sebuah formula suku ke–n yaitu $U_n = U_{n-2} + U_{n-1}$

Berikut disajikan formula suku ke-n pada setiap pola bilangan dalam bentuk tabel agar lebih mudah diingat

Tabel 5. Macam Pola Bilangan dan Formula Suku ke-n

No	Pola Bilangan	Un
1	Ganjil	$2n - 1$
2	Genap	$2n$
3	Segitiga	$\frac{1}{2}n(n+1)$
4	Persegi	n^2
5	Persegi panjang	$n(n+1)$
6	Segitiga pascal	2^{n-1}
7	Fibonacci	$U_{n-2} + U_{n-1}$

6.3 Barisan Sebagai Suatu Fungsi

Guna menetapkan beberapa suku suatu barisan, bisa ditelaah dari kesesuaian pola dari beberapa suku sebelumnya. Salah satu teknik guna menetapkan formula suku ke-n ialah melalui telaah beda antara dua suku berturut-turut. Jika dari satu derajat penyelesaian belum didapat beda yang konstan, maka persoalan diselesaikan pada derajat selanjutnya hingga didapat beda yang konstan. Sebuah barisan disebut bertingkat satu jika beda konstan didapat dalam satu derajat penyelesaian. Disebut barisan bertingkat dua jika beda konstan didapat dalam dua derajat penyelesaian dan selanjutnya. Agar menguasai pengertian barisan bertingkat satu, bertingkat dua, serta selanjutnya, simak pemodelan di bawah ini :

3, 7, 11, 15, … dinamakan barisan bertingkat satu sebab beda konstan didapat dari satu derajat penyelesaian, dengan beda konstan sama dengan 3 pada derajat pertama.

3 7 11 15

4 4 4

6, 9, 14, 21, 30, … dinamakan barisan bertingkat dua sebab beda konstan didapat dari satu derajat penyelesaian, dengan beda konstan sama dengan 2 pada derajat kedua.

6 9 14 21 30

3 5 7 9

2 2 2

Guna menetapkan formula suku ke-n setiap barisan tersebut didapat melalui proses berikut :

1. Barisan linier bertingkat satu

   Karena barisannya bertingkat satu maka formula suku ke−n ialah $U_n = an + b$, sehingga $U_1 = a + b$, $U_2 = 2a + b$, $U_3 = 3a + b$, serta selanjutnya.

   a+b 2a+b 3a+b 4a+b

   a a a

   Dengan demikian formula umum suku ke – n dari 3, 7, 11, 15, ... diperoleh melalui proses berikut :

   3 7 11 15

   4 4 4

   $a = 4 \rightarrow a + b = 3 \rightarrow 4 + b = 2 \rightarrow b = -2$

   Sehingga formula suku ke−n dari 3, 7, 11, 15, ... ialah $U_n = 4n - 2$

2. Barisan linear bertingkat dua

Karena barisannya bertingkat dua maka formula suku ke−n ialah $U_n = an^2 + bn + c$, sehingga $U_1 = a + b + c$, $U_2 = 4a + 2b + c$, $U_3 = 9a + 3b + c$, serta selanjutnya.

a+b+c, 4a+2b+c, 9a+3b+c, 16a+4b+c

3a+b 5a+b 7a+b

2a 2a

Dengan demikian formula suku ke−n dari 6, 9, 14, 21, 30, … diperoleh melalui proses berikut :

6 9 14 21 30

3 5 7 9

2 2 2

$2a = 2 \rightarrow a = 1$

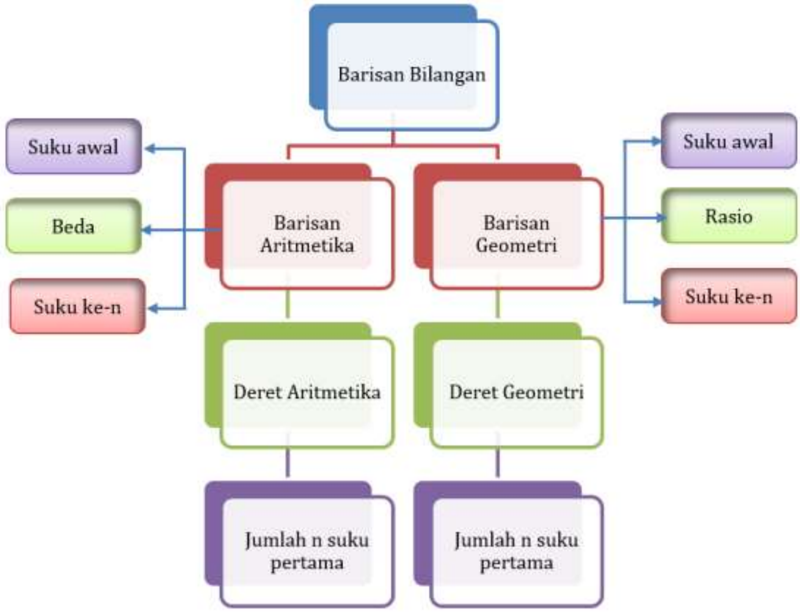
$3a + b = 3 \rightarrow 3.1 + b = 3 \rightarrow b = 0$

$a + b + c = 6 \rightarrow 1 + 0 + c = 6 \rightarrow c = 5$

Sehingga formula suku ke−n nya ialah $U_n = n^2 + 5$

6.4 Barisan Bilangan

Barisan merupakan rincian susunan angka-angka yang mempunyai karakter ataupun keteraturan (Istiqomah, 2020). Barisan bilangan terdiri dari barisan aritmatika dan barisan geometri. Berikut disajikan peta konsep pada barisan bilangan berikut ini :



Gambar 31. Konsep Barisan Bilangan
Sumber : Istiqomah

6.4.1 Barisan Aritmetika

Seringkali dinamakan barisan hitung merupakan barisan bilangan dimana masing-masing sukunya didapat dari suku sebelumnya melalui penambahan ataupun pengurangan dari sebuah angka yang konstan yang disebut beda, biasanya dilambangkan dengan b. Dengan demikian, beda adalah selisih dua suku berurutan. Suku pertama barisan aritmetika dilambangkan U_1 atau a, sementara suku ke-n dilambangkan dengan U_n (Dhoruri, 2009).

Coba perhatikan barisan bilangan berikut :

i. 4, 7, 10, 13, 16, ... → memiliki beda = 7-4 = 10-7 = 3
ii. 10, 5, 0, -5, -10, ... → memiliki beda = 5-10 = 0-5 = -5

Dari contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa selisih/ beda didapat dari selisih dua suku berurutan, sehingga $\boldsymbol{b = U_n - U_{n-1}}$. Dengan demikian, barisan aritmetika tersebut yakni :

U_1	U_2	U_3	U_4	U_n
A	a + b	a +2b	a +3b	a + (n -1) b

Sehingga, formula suku ke-n sebuah barisan aritmetika ialah

$$\boldsymbol{U_n = a + (n-1)b}$$

Dimana U_n = suku ke-n ; a = suku pertama ; b = beda

6.4.2 Barisan Geometri

Barisan geometri ialah sebuah barisan dimana hasil pembagian dari dua suku berurutan adalah konstan.

Coba perhatikan barisan bilangan berikut :

i. 3, 6, 12, ... →memiliki $r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$
ii. 1, ½, ¼, ... → memiliki $r = \frac{1/2}{1} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

Dari contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa rasio didapat dari hasil bagi dua suku berurutan, sehingga $\boldsymbol{r = \frac{U_n}{U_{n-1}}}$. Secara umum barisan geometri tersebut yakni :

U_1	U_2	U_3	U_4	U_n
a	Ar	ar^2	ar^3	ar^{n-1}

Sehingga, formula suku ke-n sebuah barisan geometri ialah

$$\boldsymbol{U_n = ar^{n-1}}$$

Dimana U_n = suku ke-n ; a = suku pertama ; r = rasio

DAFTAR PUSTAKA

Dhoruri, A. (2009) *Barisan Aritmetika dan deret aritmetika*.

Dwiningrum, S. (2018) *Handout Materi Pola Bilangan*.

Istiqomah (2020) *Matematika Umum Kelas XI*. Direktorat SMA, Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS dan DIKMEN.

Karso, H. (2020) *Barisan dan deret*. FPMIPA UPI.

BAB 7
DERET BILANGAN

Oleh Abd. Haris

7.1 Pendahuluan

Setiap akhir minggu Ahmad selalu menyisihkan uang saku yang ia dapatkan untuk ditabung. Ia bertekad untuk dapat menabung uang lebih banyak pada minggu-minggu berikutnya. Pada akhir minggu pertama Ahmad menabung Rp.1.000,00, pada akhir minggu kedua Ahmad menabung Rp.2.000,00, pada akhir minggu ketiga Ahmad menabung Rp.3.000,00 begitu seterusnya Ia selalu menabung Rp.1.000,00 lebih banyak dari minggu sebelumnya.

Tuliskan jumlah uang yang ditabung serta jumlah total uang tabungan Ahmad setiap akhir minggunya dengan melengkapi tabel di bawah ini.

Akhir Minggu ke-	Uang yang Ditabung	Total Tabungan
1	1.000	1.000
2	2.000	3.000
3	3.000	...
4	...	...
5	...	...
6	...	...
7	...	...

Berapakah total uang tabungan Ahmad pada akhir minggu ke-10? Jelaskan! Jawab :

Perhatikan bahwa uang yang ditabung oleh Ahmad membentuk suatu barisan. Banyaknya uang yang ditabung oleh Ahmad pada tiap akhir minggu menyatakan suku dari barisan bilangan tersebut. Total uang tabungan Ahmad tiap akhir minggu menyatakan jumlahan dari beberapa suku pertama dari barisan bilangan tersebut, yang selanjutnya disebut dengan **deret bilangan.** Jumlah n suku pertama dinotasikan

dengan Sn. Dalam hal ini $S2$ = 3.000 menyatakan jumlah 2 suku pertama dari barisan bilangan tersebut.
$S3$ = 6.000 menyatakan jumlah 3 suku pertama dari barisan bilangan tersebut. Sekarang coba jumlahkan 4 suku pertama dari barisan tersebut.

Deret dapat diartikan sebagai jumlah suku-suku dari suatu barisan bilangan. Deret dinotasikan dengan S_n. Dengan demikian, jika diketahui barisan bilangan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ maka deret dari barisan tersebut adalah $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$.
Seperti halnya barisan, deretpun dibagi menjadi dua macam, yaitu **deret aritmatika** dan **deret geometri** .

7.2 Deret Aritmatika

Pertambahan hasil produksi mobil pada suatu pabrik tiap bulannya selalu meningkat. Produksi mobil pada bulan pertama adalah 100 unit, bulan kedua adalah 120, bulan ketiga adalah 140. Begitu seterusnya hasil produksi pabrik tersebut menghasilkan 20 unit lebih banyak dari bulan sebelumnya. Tuliskan jumlah unit mobil yang dihasilkan tiap bulan serta jumlah total unit mobil setiap bulannya dengan melengkapi tabel di bawah ini.

Bulan ke-	Mobil yang Dihasilkan	Total unit mobil
1	100	100
2	120	220
3	140	...
4	...	...
5	...	...
6	...	...
7	...	...

Perhatikan bahwa bayaknya unit mobil yang dihasilkan pabrik membentuk suatu barisan. Jika jumlah n suku pertama dinotasikan dengan Sn, maka $S4$ menyatakan jumlah 4 suku pertama dari suatu barisan. Sekarang coba jumlahkan 4 suku pertama dari barisan tersebut.

$$S_4 = 100 + 220 + \cdots + \cdots\ (i)$$

Berikutnya coba jumlahkan 4 suku pertama dari barisan tersebut dengan cara menuliskan bentuk penjumlahan tersebut dalam urutan terbalik.

$$S_4 = \cdots + \cdots + \cdots + 100\ (ii)$$

Coba jumlahkan dan melalui langah-langkah berikut ini dengan cara mengisi bagian yang kosong.

$$S_4 = 100 + 120 + 140 + 160\ (i)$$
$$S_4 = 160 + 140 + 120 + 100\ (ii)$$
$$\rule{8cm}{1pt} \quad +$$
$$2S_4 = \underbrace{260 + \cdots + \cdots + 260}_{\text{4 suku}}$$
$$= (100 + 160) + (100 + 160) + (100 + 160) + (100 + 160)$$
$$2S_4 = 4\ x\ (100 + 160)$$
$$\boldsymbol{S_4} = \frac{\boldsymbol{4\ x\ (100 + 160)}}{\boldsymbol{2}}\ (iii)$$

Berapakah jumlah 10 suku pertama barisan diatas? Temukan cara tercepat tanpa perlu menjumlahkan satu persatu semua sukunya. Perhatikan langkah-langkah yang telah kamu lakukan dalam menghitung jumlah 4 suku pertama barisan di atas dan coba kamu lengkapi langkah-langkah di bawah ini.

Kamu telah mengetahui bahwa suku ke-n dari suatu barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n - 1)b$, dengan a adalah U_1, b adalah pembeda, dan n bilangan asli. Maka suku ke-2. Ke-3, dan ke-(n-1) dapat dituliskan dalam bentuk seperti berikut:

$$U_2 = a + b$$
$$U_3 = a + 2b$$
$$U_{n-1} = a + (n - 1)b$$

Sekarang coba jumlahkan n suku pertama dari barisan tersebut.

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n \qquad (i)$$

Berikutnya coba jumlahkan n suku pertama dari barisan tersebut dengan cara menuliskan bentuk penjumlahan tersebut dalam urutan terbalik.

$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots + U_3 + U_2 + U_1 \qquad (ii)$

Coba jumlahkan (i) dan (ii) melalui langah-langkah berikut ini.

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n \qquad (i)$

$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots + U_3 + U_2 + U_1 \qquad (ii)$

$2S_n = (U_1 + U_n) + (U_1 + U_n) + \cdots + (U_1 + U_n) + (U_1 + U_n)$

$2S_n = n(U_1 + U_n)$

$S_n = \frac{n}{2}\ (+U_n)$

Atau

$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)}$

Karena $U_n = a + (n-1)b$ maka $S_n = \frac{n}{2}\ \{a + a + (n-1)b\}$

$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}\ \{2a + (n-1)b\}}$

Dimana seperti sebelumnya n adalah jumlah suku, a adalah suku pertama, dan b adalah selisih antara dua suku yang beruruatan.

Contoh Soal

Diketeahui deret aritmetika 3 + 7 + 11 + 15 + ...

Tentukanlah

a. Rumus suku ke-n untuk barisan yang bersesuaian.
b. Rumus jumlah n suku pertama
c. Jumlah 16 pertama.

Penyelesaian **:**

a. Suku pertama dan pembeda deret tersebut dapat kamu temukan dengan mudah, yaitu a = 3 dan b = 7-3 = 4

   Sehingga,

   $U_n = a + (n - 1)b$

   $U_n = a + (n - 1)b$

   $= 3 + (n - 1)4$

   $= 4n - 1$

b. Rumus jumalah n suku pertama

   $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\} = \frac{n}{2}\{a + U_n\} = \frac{n}{2}\{a + 4n - 1\} = 2n^2 + n$

c. S_{16} dari deret tersebut.

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\}$

$S_{16} = \frac{16}{2}\{2a + (16 - 1)b\}$

$= 8\{2a + 15b\}$

$= 8\{2(3) + 15(4)\}$

$= 8(6 + 60)$

$= 8(66)$

$= 528$

Atau bisa dengan Rumus jumalah n suku pertama di atas

$S_n = 2n^2 + n = S_{16} = 2(16)^2 + 16 = 2\ (256) + 16 = 528$

Latihan

1. Tentukanlah jumlah 25 suku yang pertama dari deret berikut ini:
   a. 5 + 15 + 25 + ...
   b. 100 + 92 + 84+ ...
   c. 1,5 + 2,0 + 2,5 + ...
2. Hitunglah harga n, jika ;
   a. 1 + 2 + 3 +... + n = 153
   b. 2 + 4 + 6 +... + 2n = 6000
   c. 3 + 5 + 7 +...+ (2n + 1) = 960
3. Diketahui suatu barisan aritmatika dengan suku kedua adalah 6 dan suku kesebelas adalah 24, tentukanlah :
   a. Suku pertama serta beda dari barisan aritmatika tersebut.
   b. Suku ke-40
   c. Jumlah 40 suku pertama dari deret yang bersesuaian
4. Tentukanlah banyaknya suku suatu deret aritmatika yaitu : 3 + 6 + 9 + 12 + ... yang jumlahnya sama dengan 165.

7.3 Deret Geometri

Amin memiliki hobi mengumpulkan kelereng. Tiap akhir minggu ia selalu membeli kelereng untuk dikoleksi. Pada akhir minggu pertama, ia membeli 3 buah kelereng. Pada akhir minggu kedua, ia membeli 6 buah kelereng. Pada akhir minggu ketiga, ia membeli 12 buah kelereng. Begitu seterusnya Ia selalu membeli kelereng sebanyak 2 kali lipat dari akhir minggu sebelumnya.

Tuliskan jumlah kelereng yang dibeli Amin serta jumlah total kelereng setiap akhir minggunya dengan melengkapi tabel di bawah ini.

Akhir Minggu ke-	**Kelereng yang dibeli**	**Total kelereng**
1	3	3
2	6	9
3	12	...
4	...	...
5	...	...
6	...	...
7	...	...

Perhatikan bahwa bayaknya kelereng yang dibeli Amin membentuk suatu barisan geometri dengan *r* (rasio) = 2. Jika jumlah *n* suku pertama dinotasikan dengan S_n, maka S_5 menyatakan jumlah 5 suku pertama dari suatu barisan. Sekarang coba jumlahkan 5 suku pertama dari barisan tersebut.

$S_5 = 3 + 6 + +12 + 24 + 48\ (i)$

Berikutnya coba kalikan dengan *r* = 2 pada masing-masing ruas sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

$2S_5 = 6 + 12 + 24 + 48 + 96 \quad (ii)$

Coba kurangkan (ii) terhadap (i).

$2S_5 = 6 + 12 + 24 + 48 + 96\ (ii)$

$S_5 = 3 + 6 + +12 + 24 + 48 \quad (i)$

$\underline{\hspace{6cm}} \quad +$

$2S_5 - S_5 = 6 - 3$

$S_5(2 - 1) = 3\ x\ (2 - 1)$

$\boldsymbol{S_5 = \frac{3\ x\ (2^5 - 1)}{2 - 1}} \quad (iii)$

Berapakah jumlah 10 suku pertama barisan diatas? Temukan cara tercepat tanpa perlu menjumlahkan satu persatu semua sukunya. Perhatikan langkah-langkah yang telah kamu lakukan dalam menghitung jumlah 5 suku pertama barisan di atas dan coba kamu lengkapi langkah-langkah di bawah ini.

Kamu telah mengetahui bahwa suku ke-*n* dari suatu barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$, dengan a adalah U_1, r adalah rasio, dan *n* bilangan asli. Maka suku ke-2. Ke-3, dan ke-(n-1) dapat dituliskan dalam bentuk seperti berikut:

$U_2 = ar$

$U_3 = ar^2$

$U_n = ar^{n-1}$

Secara umum jumlah n suku pertama baisan geometri dapat ditulis sebagai tersebut.

$$S_n = a + ar + +ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (i)$$

Kemudian kalikan (i) dengan *r* pada masing-masing ruas sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad (ii)$$

Coba kurangkan (i) terhadap (ii).

$$S_n = a + ar + +ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (i)$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad (ii)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Penting

Secara umum jumlah dari suatu deret geometri adalah sebagai berikut.

$$S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right), r > 1$$

$$S_n = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right), r < 1$$

Dengan a adalah suku pertama (U_1) dan r adalah pembanding atau rasio.

Contoh Soal

1. Diketahui deret geometri 3 + 9 + 27 + ...
   a. Tentukan suku ke-6 dari deret tersebut.
   b. Apakah deret tersebut merupakan deret geometri naik atau geometri turun?

   Penyelesaian

   Dari deret tersebut, kamu peroleh a = 3 dan

   $$r = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{9}{3} = 3$$

   a. Oleh karena r = 3 > 1 maka,

   $$S_6 = 3\left(\frac{3^6 - 1}{3 - 1}\right)$$
   $$S_6 = 3\left(\frac{729 - 1}{3 - 1}\right)$$
   $$S_6 = 3\left(\frac{728}{2}\right)$$
   $$S_6 = 1.092$$

   b. Deret tersebut merupakan deret geometri naik karena r > 1

2. Diketahui deret geometri 2 + 2^2 + 2^3 + ...+ 2^n mempunyai jumlah 254, hitunglah n

   Penyelesaian

   $$S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$$
   $$254 = 2\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)$$
   $$254 = 4r^n - 2$$
   $$n = 7$$

Latihan

1. Tentukanlah jumlah enam suku yang pertama dari deret berikut ini :
   a. 1 + 4 + 16 +…
   b. 1 – 2 + 4 – 8 +…
2. Tentukanlah jumlah deret geometri berikut ini :
   a. 4 + 2 + 1 + … + $\frac{1}{32}$

b. 2 + 18 + … + 4374

3. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 32 dan suku ketiga 8, tentukanlah;
   a. Rasio
   b. Jumlah delapan suku yang pertama.

7.4 Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri yang banyak suku-sukunya tak hingga disebut deret geometri tak higga yang dituliskan:

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

Dengan $a = a_1$ adalah suku pertama

r adalah rasio

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, -1 < r < 1$

Jika $n \to \infty$ maka $S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n)}{1-r}$$

Secara umum, deret geometri tak hingga dibagi menjadi dua jenis, yaitu deret geometri tak hingga yang konvergen dan divergen dengan:

1. Jika |r|> $1 \leftrightarrow r < -1$ $r > 1$ maka:

   $$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n)}{1-r}$$

   $$S_\infty = \frac{a}{1-r} - (\infty)$$

   $= \infty$ disebut *deret vergen* tidak mempunyai limit jumlah.

2. Jika |r|< $1 \leftrightarrow -1 < r < 1$ maka:

   $$\lim_{n\to\infty} = r^n = 0$$

   $$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} - 0\frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Jadi, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, $-1 < r < 1, r \neq 0$ merupakan *deret konvergen*. Sehingga ciri deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah jika $-1 < r < 1$

Contoh

Hitung limit jumlah dari deret geometri tak hingga:

$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$

Peneyelesaian

Dari deret tersebut, kamu peroleh a = 1 dan

$$r = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

Latihan

1. Tentukan jumlah dari $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots$
2. Diketahui deret geometri dirumuskan dengan $U_n = 5^{-n}$ tentukan jumlah tak hingga dari deret tersebut

DAFTAR PUSTAKA

Istiqomah (2019) ‘Modul Pembelajaran SMA Matematika Umum Barisan dan Deret’, *Mata Pelajaran Matematika SMK Adaptif*, pp. 1–61.

Saputri, A., Hariyani, S. and Rahaju, R. (2021) ‘Pembelajaran Barisan Dan Deret Dengan Model’, *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 6(2), pp. 165–178.

Setyaningsih, Sri, and Hendradi Hardhienata. 2009. *Matematika Dasar 2*. Pusat komputasi, Bogor.

Shadiq, F. and Mustajab, N. A. (2010)’, Pembelajaran Matematika Dengan Pendekatan Realistik Di SMP *Kementerian Pendidikan Nasional Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika 2010*.

BAB 8
GEOMETRI

Oleh Lulut Alfaris

8.1 Pendahuluan

Geometri ialah salah satu bidang dalam matematika dimana bidang ini diawali dengan sebuah konsep pangkal, yakni sebuah titik. Titik ini akan membentuk sebuah garis, dan garis akan menyusun suatu bidang. Yang kemudian akan bisa difungsikan untuk menyusun bangun ruang. Geometri merupakan salah satu cabang matematka tertua. Geometri berasal dari bahasa Yunani, geo (bumi) dan metron (pengukuran). Sehingga geometri ialah cabang matematika yang berkaitan dengan sifat-sifat ruang yang berhubungan dengan jarak, bentuk, ukuran, dan posisi relatif ruang (De Risi, 2015).

8.2 Geometri Aljabar

Peneltian terkait geometri aljabar dilakukan dengan mengonstruksi suatu objek matematika yakni skema dan sheaf, kemudian meninjau hubungannya dengan struktur yang sudah dikenal. Berbagai alat ini dibuat untuk membantu memahami permasalahan mendasar terkait geometri (Ravi, 2017).

Salah satu objek fundamental dalam studi geometri aljabar adalah varietas aljabarik yang merupakan manifestasi geometris dari akar suatu sistem suku banyak. Dari struktur ini, dapat dikaji berbagai kurva aljabarik seperti garis, parabola, elips, kurva eliptik dan lain-lain.

Geometri aljabar merupakan salah satu topik sentral dalam matematika dengan berbagai topik terkait seperti analisis kompleks, topologi, teori bilangan, teori kategori, dan lain-lain.

8.3 Geometri Euclid

Euclid merupakan seorang ahli matematika yang berasal dari Yunani. Beliau menulis buku yang berjudul Elements, dimana buku ini merupakan kajian sistematik terkait geometri. Merupakan orang yang pertama untuk yang menunjukkan bagaimana usul-usul ini diletakkan secara sempurna membentuk satu deduksi dan sistem logik yang komprehensif.

Postulat atau aksioma digunakan sebagai dasar penentuan objek dan konsep dari geometri. Geometri Euclid didasarkan pada lima asumsi dasar yang disebut aksioma atau postulat (Greenberg, 1994).

Elements merupakan sebuah kajian sistematik yang terawal mengenai geometri. Merupakan salah satu buku yang paling berpengaruh.

Postulat Euclid

1. Garis lurus dapat digambar dari sembarang titik sampai sembarang titik lainya.
2. Setiap garis lurus dapat diperpanjang sampai tak terhingga dengan garis lurus.
3. Lingkaran dapat digambar dari sembarang titik pusat dengan jari-jari yang berbeda.
4. Semua sudut siku-siku besarnya sama satu dengan lainya.
5. Jika sebuah garis lurus memotong dua garis yang lain, maka yang akan terbentuk sudut dalam yang sisinya sama yang besarnya kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis lurus tersebut jika diteruskan sampai tak hingga akan bertemu pada sisi yang sudutnya kurang dari dua sudut siku-siku.

Setidaknya selama seribu tahun, para ahli geometri terganggu oleh kompleksitas yang berbeda dari postulat kelima, dan percaya bahwa itu dapat dibuktikan sebagai teorema dari empat lainnya. Banyak yang berusaha menemukan bukti dengan kontradiksi, termasuk Ibn al-Haytham (Alhazen, abad ke-11),[1] Omar Khayyám (abad ke-12), Nasīr al-Dīn al-Tūs (abad ke-13), dan Giovanni Girolamo Saccheri (abad ke-18) (Eder, 2000).

Euclid adalah pembelajaran geometri yang didasarkan pada definisi, teorema/aksioma (titik, garis dan bidang) dan asumsi-asumsi dari seorang matematikawan yunani (330 B.C) yakni Euclid. Buku Euclid yang berjudul "*Element*" adalah buku pertama yang membahas tentang geometri secara sistemetis. Banyak penemuan-penemuan Euclid telah didahului oleh matematikawan Yunani, tatapi penemuan itu tidak terstruktur dengan rapi seperti yang dilakukan Euclid. Euclid membuat pola deduktif secara komprehensif untuk membentuk geometri. Pendekatan dari Euclid terdiri dari pembuktian semua teorema dari aksioma-aksiomanya.

Geometri Euclides sering disebut juga geometri parabolik, yaitu geometri yang mengikuti satu himpunan proposisi yang didasarkan pada lima postulat Euclid yang telah didefinisikan dalam bukunya The Elements. Lebih khusus, geometri Euclid berbeda dari jenis geometri lain dalam dalil kelima, sering disebut dengaan postulat paralel. Non-Euclidean geometri menggantikan postulat kelima ini dengan salah satu dari dua alternatif postulat dan mengarah ke geometri hiperbolik atau geometri eliptik. Ada dua jenis geometri Euclidean: geometri bidang, yang merupakan dimensi Euclidean geometri-dua, dan geometri padat, yang merupakan dimensi Euclidean geometri-tiga.

Terdapat sua jenis geometri Euclidean, geometri bidang dan geometri padat, yang jelas berbeda. Geometri bidang adalah bagian dari geometri dalam ruang dua dimensi yang berhubungan dengan gambaran dari bidang, seperti garis, lingkaran dan poligon. Geometri padat adalah bagian dari geometri dalam ruang tiga-dimensi yang berhubungan dengan makanan padat, seperti polyhedra, bola, dan garis dan bidang. Dalam kedua jenis kelima postulat Euclidean geometri Euclid sesuai, tetapi masing-masing menggambarkan tokoh dalam berbagai jenis ruang.

8.4 Geometri Non-Euclid

Geometri non-Euklides merupakan himpunan kecil geometri berdasarkanaksioma yang berhubungann erat dengan geometri Euklides. Apabila geometri Euklides terbentang antara geometri metrik dan geometri Affine, geometri non-Euklides ada saat ruang metrik tidak ada, atau postulat paralel diabaikan.

Perbedaan mendasar dari geometri metrik adalah keadaan garis paralel. Cara lain untuk menggambarkan perbedaan antara geometri tersebut adalah dengan menggambarkan dua garis lurus dengan panjang tak hingga yang keduanya egak lurus dengan sebuah garis ketiga.

Perbedaan penting antara geometri metrik adalah sifat garis sejajar. Postulat kelima Euclid, postulat paralel, ekuivalen dengan postulat Playfair, yang menyatakan bahwa, dalam bidang dua dimensi, untuk sembarang garis l dan sebuah titik A, yang tidak berada pada l, ada tepat satu garis yang melalui A tidak berpotongan l. Dalam geometri hiperbolik, sebaliknya, ada banyak sekali garis yang melalui A tidak berpotongan dengan l, sedangkan dalam geometri eliptik, setiap garis yang melalui A berpotongan dengan l.

Cara lain untuk menggambarkan perbedaan antara geometri ini adalah dengan mempertimbangkan dua garis lurus yang diperpanjang tanpa batas dalam bidang dua dimensi yang keduanya tegak lurus terhadap garis ketiga (dalam bidang yang sama). Dalam geometri Euclidean, garis-garis tetap pada jarak yang konstan satu sama lain (artinya garis yang ditarik tegak lurus terhadap satu garis di setiap titik akan berpotongan dengan garis lainnya dan panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik perpotongan tetap konstan) dan diketahui sebagai paralel.

Dalam geometri hiperbolik, melengkung dari satu sama lain, meningkatkan jarak saat seseorang bergerak lebih jauh dari titik perpotongan dengan tegak lurus yang sama; garis-garis ini sering disebut ultraparalel.

Teorema Ibn al-Haytham, Khayyam dan al-Tusi pada segi empat, termasuk segiempat Lambert dan segiempat

Saccheri, adalah "beberapa teorema pertama dari geometri hiperbolik dan elips". Teorema ini bersama dengan postulat alternatifnya, seperti aksioma Playfair, memainkan peran penting dalam pengembangan geometri non-Euclidean selanjutnya. Upaya awal untuk menantang postulat kelima ini memiliki pengaruh yang cukup besar pada perkembangannya di antara ahli geometri Eropa selanjutnya, termasuk Witelo, Levi ben Gerson, Alfonso, John Wallis dan Saccheri. Semua upaya awal yang dilakukan untuk mencoba merumuskan geometri non-Euclidean, bagaimanapun, memberikan bukti cacat dari postulat paralel, yang mengandung asumsi yang pada dasarnya setara dengan postulat paralel. Upaya awal ini, bagaimanapun, memberikan beberapa sifat awal dari geometri hiperbolik dan eliptik (Rashed & Morelon, 1996).

Model geometri non-Euclidean adalah model matematika dari geometri non-Euclidean dalam arti bahwa tidak tepat satu garis dapat ditarik sejajar dengan suatu garis l melalui suatu titik yang bukan pada l. Dalam model geometri hiperbolik, sebaliknya, ada banyak sekali garis yang melalui A sejajar dengan l, dan dalam model geometri eliptik, garis sejajar tidak ada.

8.5 Geometri Eliptik

Geometri elips adalah contoh geometri di mana postulat paralel Euclid tidak berlaku. Sebaliknya, seperti dalam geometri bola, tidak ada garis sejajar karena dua garis harus berpotongan. Namun, tidak seperti dalam geometri bola, dua garis biasanya diasumsikan berpotongan pada satu titik (bukan dua). Karena itu, geometri eliptik yang dijelaskan dalam artikel ini kadang-kadang disebut sebagai geometri eliptik tunggal sedangkan geometri bola kadang-kadang disebut sebagai geometri eliptik ganda.

Kemunculan geometri ini pada abad ke-19 mendorong perkembangan geometri non-Euclidean secara umum, termasuk geometri hiperbolik. Geometri elips memiliki berbagai sifat yang berbeda dari geometri bidang Euclidean klasik. Sebagai contoh, jumlah sudut dalam setiap segitiga selalu lebih besar dari 180°.

Dalam geometri eliptik, dua garis yang tegak lurus terhadap suatu garis harus berpotongan. Faktanya, garis tegak lurus di satu sisi semua berpotongan pada satu titik yang disebut kutub absolut dari garis itu. Garis tegak lurus di sisi lain juga berpotongan di suatu titik. Namun, tidak seperti dalam geometri bola, kutub di kedua sisinya sama. Ini karena tidak ada titik antipodal dalam geometri elips. Misalnya, ini dicapai dalam model hipersferis (dijelaskan di bawah) dengan membuat "titik" dalam geometri kita benar-benar menjadi pasangan titik yang berlawanan pada bola. Alasan untuk melakukan ini adalah memungkinkan geometri eliptik memenuhi aksioma bahwa ada garis unik yang melalui dua titik.

Setiap titik sesuai dengan garis kutub mutlak yang merupakan kutub mutlak. Setiap titik pada garis kutub ini membentuk pasangan konjugasi absolut dengan kutub. Sepasang titik seperti itu adalah ortogonal, dan jarak di antara mereka adalah kuadran.

8.6 Geometri Proyektif

Geometri proyektif adalah studi tentang sifat-sifat geometris yang invarian sehubungan dengan transformasi proyektif. Ini berarti bahwa, dibandingkan dengan geometri dasar Euclidean, geometri proyektif memiliki pengaturan yang berbeda, ruang proyektif, dan seperangkat konsep geometri dasar yang selektif. Intuisi dasarnya adalah bahwa ruang proyektif memiliki lebih banyak titik daripada ruang Euclidean, untuk dimensi tertentu, dan bahwa transformasi geometris diizinkan yang mengubah titik ekstra.

Isu pertama untuk ahli geometri adalah jenis geometri apa yang memadai untuk situasi baru. Hal ini tidak mungkin untuk merujuk ke sudut dalam geometri proyektif seperti dalam geometri Euclidean, karena sudut adalah contoh dari konsep yang tidak invarian sehubungan dengan transformasi proyektif, seperti yang terlihat dalam gambar perspektif. Salah satu sumber untuk geometri proyektif memang teori perspektif. Perbedaan lain dari geometri dasar adalah cara di mana garis paralel dapat dikatakan bertemu di titik tak terhingga, setelah konsep tersebut diterjemahkan ke dalam istilah geometri proyektif.

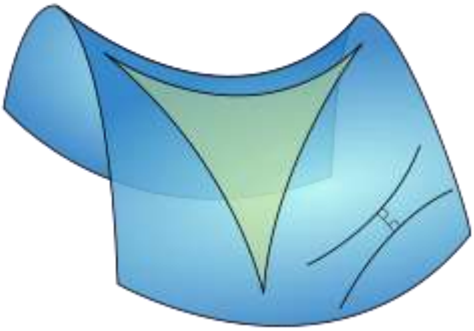
Sementara ide-ide yang tersedia sebelumnya, geometri proyektif terutama merupakan pengembangan abad ke-19. Ini termasuk teori ruang proyektif kompleks, koordinat yang digunakan (koordinat homogen) menjadi bilangan kompleks. Beberapa jenis utama matematika yang lebih abstrak (termasuk teori invarian, aliran geometri aljabar Italia, dan program Erlangen Felix Klein yang menghasilkan studi kelompok klasik) dimotivasi oleh geometri proyektif. Itu juga merupakan subjek dengan banyak praktisi untuk kepentingannya sendiri, sebagai geometri sintetis. Topik lain yang berkembang dari studi aksiomatik geometri proyektif adalah geometri hingga.

Topik geometri proyektif itu sendiri sekarang dibagi menjadi banyak subtopik penelitian, dua contohnya adalah geometri aljabar proyektif (studi varietas proyektif) dan geometri diferensial proyektif (studi invarian diferensial dari transformasi proyektif).

8.7 Geometri Hiperbolik

Geometri hiperbolik erat hubungannya dengan geometri Euclidean: satu-satunya perbedaan aksiomatik adalah postulat paralel. Ketika postulat paralel dihilangkan dari geometri Euclidean, geometri yang dihasilkan adalah geometri absolut. Ada dua jenis geometri absolut, Euclidean dan hiperbolik.

Perbedaan ini juga memiliki banyak konsekuensi: konsep yang ekuivalen dalam geometri Euclidean tidak ekuivalen dalam geometri hiperbolik; konsep baru perlu diperkenalkan. Selanjutnya, karena sudut paralelisme, geometri hiperbolik memiliki skala absolut, hubungan antara jarak dan pengukuran sudut.



Gambar 32. Hiperbolik Parabolik

8.8 Aplikasi Geometri

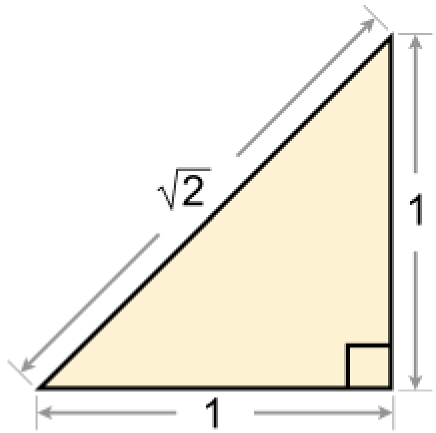
a. Fisika

Aplikasi geometri dalam ilmu astronomi, terutama yang berkaitan dengan pemetaan posisi bintang dan planet dan menjelaskan hubungan antara pergerakan benda-benda langit, yang sangat berguna bagi sepanjang sejarah. Geometri Riemannian dan pseudo-Riemannian yang digunakan dalam relativitas umum.

b. Seni Arsitektur

Matematika dan seni terkait dalam berbagai cara. Contohnya, teori perspektif bahwa geometri lebih dari sekadar properti metrik dari sebuah figure. Seniman telah lama menggunakan konsep proporsi dalam desain. Rasio emas adalah proporsi tertentu yang memiliki peran kontroversial dalam seni. Sering diklaim sebagai rasio panjang yang paling estetis.

c. Bidang Matematika



Gambar 33. Segitiga Phytagoras

Kalkulus dipengaruhi oleh geometri. Yaitu pengenalan koordinat oleh René Descartes dan perkembangan bersamaan aljabar menandai era baru untuk geometri. Figur geometris seperti kurva bidang dari sekarang dapat direpresentasikan secara analitis dalam bentuk fungsi dan persamaan Geometri analitik terus menjadi andalan dalam kurikulum pra-kalkulus dan kalkulus. Selain intu terdapat teori Bilangan, dimana angka mempunyai peran dalam geometri (Flanders & Price, 2014).

DAFTAR PUSTAKA

De Risi, V. (2015). Mathematizing Space: The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age.

Vakil, R. (2017). Foundations of Algebraic Geometry.

Greenberg, M.J. (1994). Euclidean ana Non-Euclidean Geometry: Development and History. New York: W.H. Freeman and Company.

Eder, M. (2000). Views of Eucid's Parallel in Ancient Greece and in Medieval Islam, Rutgers University.

Rashed, R & Morelon, R. (1996), Encyclopedia of the History of Arabic Science. Routledge.

BAB 9
GEOMETRI TRANSFORMASI

Oleh Mesak Ratuanik

9.1 Pendahuluan

Pada bagian ini dijelaskan tentang konsep-konsep dan teorema esensial dalam geometri transformasi di ruang berdimensi dua (R^2). Kemampuan yang dikembangkan dalam mempelajari materi ini ini melalui diskusi kelompok, tugas kelompok dengan bantuan aplikasi misalnya *Power-Point*, Geogebra dan lain-lain. Mahasiswa dapat menjelaskan konsep-konsep geometri transformasi bidang, teorema-teorema yang berkaitan dengan geometri transformasi bidang dan menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan geometri transformasi bidang.

9.2 Pengertian Fungsi

Suatu fungsi pada V adalah suatu pasangan yang mengaitkan tiap anggota V dengan satu anggota V. Jika f adalah fungsi dari V ke V yang mengaitkan tiap $x \in V$ dengan $y \in V$ maka dapat ditulis $y = f(x), x$ disebut prapeta dari y dari f, dan y disebut peta dari x dari f. Daerah asal fungsi tersebut adalah V dan daerah nilainya juga V. Fungsi ini disebut fungsi pada f.

9.2.1 Jenis Fungsi

1. Fungsi yang surjektif
   Fungsi yang surjektif adalah fungsi yang bersifat, setiap $B \in V$ terdapat A sebagai prapeta B. B disebut peta dari A oleh f, dan A disebut prapeta dari B oleh f.
2. Fungsi yang injektif
   Fungsi yang injektif adalah fungsi yang bersifat, $A \neq B$, akibat $f(A) \neq f(B)$, ekuivalen dengan ungkapan, kalau $f(A) = f(B)$ akibatnya $A = B$.

3. Fungsi yang bijektif
   Fungsi yang bijektif adalah fungsi yang terdiri dari fungsi yang surjektif dan dan fungsi yang injektif.

9.2.2 Tranformasi

Suatu transformasi pada bidang V disebut suatu fungsi yang bijektif. Menunjukkan bahwa suatu padanan tertentu adalah transformasi. Suatu padanan pada V adalah suatu transformasi jika memenuhi persyaratan sebagai berikut:

1. Padanan tersebut merupakan fungsi
2. Padanan tersebut bersifat surjektif
3. Padanan tersebut bersifat injektif

a. Pencerminan (Refleksi)

Definisi 1.1

Pencerminan di satu garis s adalah satu fungsi P yang diartikan pada setiap titik Q pada bidang R, berlaku:

a. Kalau $Q \in s$ akibatnya $P_s\ (Q)\ =\ Q$
b. Kalau $Q \notin s$ akibatnya $P_s\ (Q)\ =\ Q'$, maka s disebut sumbu dari QQ'

b. Pencerminan sebagai Transformasi

Untuk menunjukkan bahwa pencerminan adalah suatu transformasi sebagai berikut:

a. Pencerminan sebuah fungsi
b. Pencerminan bersifat surjektif
c. Pencerminan bersifat injektif

Teorema 1.1

Setiap pencerminan pada sebuah garis merupakan transformasi.

c. Isometri

Definisi 1.2

Satu transformasi T merupakan satu isometri jika dan hanya jika pada setiap pasang titik P dan Q berlaku P'Q'= PQ dengan P'= T(P) dan Q'= T(Q).

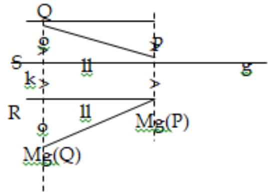
Teorema 1.2

Setiap pencerminan pada garis adalah suatu isometri.

Bukti:

Ambil titik Q dan P serta tarik garis g,

PQMg(P)SR adalah persegi panjang, maka PS = Mg(P)R, k adalah titik tengah QMg(Q).



Gambar 34. Teorema 1.2

Jadi, kR = kS. Akibatnya RQ = Mg(Q)S,

Dari $\angle$ PSQ = $\angle$Mg(P)RMg(Q),

Jadi ΔPSQ $\cong$ Δ Mg(P) Mg(Q) R,

Jadi PQ= Mg(P) Mg(Q)

Definisi 1.3

Suatu transformasi disebut suatu koliniasi jika hasil transformasi sebuah garis lurus akan berupa garis lurus lagi.

Teorema 1.3

Isometri adalah kolineasi dengan kata lain:

Jika T isometri dan G garis maka T(g)=g' akan berupa garis.

Bukti:

Ambil sebarang $A \in g$, $B \in g$, $T(g) = g'$, $T(A) = A'$ dan $T(B) = B'$.

Tarik garis h yang dilalui A’ dan B’, akan ditunjukan bahwa h = g’.

- Bukti $h \subset g'$

  Ambil $X' \in h$.

  Diandaikan (A’x B’) adalah AX’+X’B’.

  Sehingga T suatu transformasi akibatnya ada X sehingga T(X) = X’.

  T isometri:

  AX = A’X’, XB = X’B’, AB = A’B’, AX + XB = A’X’ + X’B’ sehingga AB=A’B’.

  Ini berarti A, X, B segaris pada g, sehingga X’=$T(X) \in g'$.

  Jadi jika $X' \in h$ maka $X' \in g'$ berarti $h \subset g'$.

- Bukti $g' \subset h$

  Ambil $Y' \in h$.

  Oleh karena bidang kita bidang euclids, kita andaikan (A’x B’) artinya AX’+X’B’.

  Karena T suatu transformasi maka ada Y sehingga T(Y) = Y’.

  T isometri:

  AX = A’Y’, YB = Y’B’, AB = A’B’, AY + YB = A’Y’ + Y’B’ sehingga AB=A’B’.

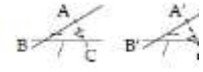
  Ini berarti A, Y, B segaris pada g, sehingga Y’=$T(Y) \in g'$.

  Jadi jika $Y' \in g'$ maka $Y' \in h$ berarti $g' \subset h$.

Karena $h \subset g'$ dan $g' \subset h$, maka h = g’.

Teorema 1.4

a. Isometri mempertahankan besar sudut
b. Isometri mempertahankan kesejajaran



Gambar 35.
teorema 1.4 a

Bukti:

a. Ambil $\angle$ABC

   Andaikan A’ = T(A), B’ = T(B), C’ = T(C)

   Dipunyai A’B’ dan B’C’ adalah garis lurus

   Oleh karena $\angle$ABC = BA $\cup$ BC maka $\angle$A’B’C’= B’A’ $\cup$ B’C’

   Sedangkan A’B’=AB, B’C’=BC, dan C’A’=CA.

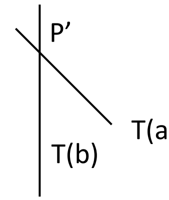
   Sehingga ΔABC $\cong$ ΔA’B’C’

   Jadi $\angle$A’B’C’= $\angle$ABC.

   Sehingga suatu isometri mengawetkan besarnya sudut.

b. Dipunyai a // b, a' = T(a) dan b' = T(b)

Gambar 36. Teorema 1.4 b



akan dibuktikan a' // b'.
Andaikan a' memotong b' di sebuah titik P', jadi P' $\in$ a' dan P' $\in$ b'.
Oleh karena T sebuah transformasi maka terdapat P sehingga T(P) = P', dengan P $\in$ a dan P $\in$ b.
Ini berarti a memotong b di P;
Ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa a // b,
Maka pengandaian a' memotong b' salah.
Jadi haruslah a'// b'.

Akibatnya: a $\perp$ b $\rightarrow$ T(a) $\perp$ T(b) dengan T isometri.

d. Isometri Langsung dan Isometri Lawan

Definisi 1.4

Suatu transformasi T dikatakan mengawetkan suatu orientasi, jika untuk setiap tiga ganda titik tak segaris (P,Q,R), orientasinya sama dengan ganda tiga titik (P',Q',R') dengan P' = T(P), Q' = T(Q), dan R'= T(R).

Suatu transformasi T dikatakan membalik suatu orientasi, jika untuk setiap tiga ganda titik tak segaris (P,Q,R), orientasinya tidak sama dengan ganda tiga titik (P',Q',R') dengan P'= T(P), Q'= T(Q), dan R'= T(R).

Definisi 1.5

Suatu transformasi dinamakan isometri langsung, jika transformasi itu mengawetkan orientasi, dan dinamakan isometri lawan jika transformasi itu mengubah orientasi.

Teorema 1.5

Setiap pencerminan adalah isometri lawan.

Teorema 1.6

Setiap isometri adalah isometri langsung dan isometri lawan.

9.2.3 Komposisi Transformasi

Definisi 1.6

Andaikan F dan G dua buah transformasi dengan F:V$\rightarrow$V dan G:V$\rightarrow$V, maka komposisi dari F dan G yang ditulis sebagai G $\circ$ F didefinisikan sebagai: (G $\circ$ F)(P)=G[f(P)], $\forall$ P$\in$V

Teorema 1.7

Komposisi transformasi adalah transformasi.

Bukti:

Jika F:V$\rightarrow$V masing-masing suatu transformasi, maka komposisi H=G$\circ$F:V$\rightarrow$V akan dibuktikan juga suatu transformasi.

Untuk itu harus dibuktikan dua hal:

a. H surjektif

b. H injektif

a. Akan dibuktikan H surjektif

   Ambil Y$\in$V, karena G transformasi, maka G surjektif sehingga $\forall Y \in V \exists Z \in V \ni Y = G(Z)$.

   Karena F transformasi berarti F juga surjektif, maka pada $Z \exists X \in V \ni Z = F(X)$.

   Diperoleh Y = G(Z) atau Y = G[F(X)] atau Y = (G$\circ$F)(X) atau Y = H(X).

   Ini berarti $\forall Y \in V \exists X \in Y \ni Y = H(X)$.

   Jadi H surjektif

b. Akan dibuktikan H injektif

   Ambil H(P) = H(Q) maka (G$\circ$F)(P) = (G$\circ$F)(Q) atau G[F(P)] = G[F(Q)].

   Oleh karena G injektif maka F(P) = F(Q) dan F injektif maka P = Q.

   Jadi H injektif.

a. Sifat Komposisi Transformasi

Sifat tertutup dan sifat asosiatif.

Teorema 1.8

Operasi komposisi bersifat tertutup.

Teorema 1.9

Jika P, Q, dan R adalah transformasi-transformasi maka P $\circ$ (Q $\circ$ R)=(P $\circ$ Q) $\circ$ R.

b. Komposisi dua isometri

Teorema 1.10

Jika P dan Q adalah isometri maka $P \circ Q$ adalah isometri.

Teorema 1.11

Jika S_1 dan S_2 adalah isometri langsung sedang T_1 dan T_2 adalah isometri lawan maka:

a. $S_1 \circ S_2$ adalah isometri langsung.

b. $S_1 \circ T_1$ adalah isometri lawan.

c. $T_1 \circ S_1$ adalah isometri lawan.

d. $T_1 \circ T_2$ adalah isometri langsung.

9.2.4 Transformasi Identitas

Suatu transformasi dinamakan transformasi identitas jika transformasi tersebut memetakan setiap titik pada bidang terhadap dirinya sendiri.

Transformasi identitas dilambangkan dengan huruf I. Jadi I(P) = P, $\forall P \in V$.

Teorema 1.12

Identitas adalah suatu isometri langsung.

a. Transformasi Balikan

Berdasarkan transformasi identitas I yaitu TI = IT = T, maka I berperan sebagai bilangan 1(satu) dalam operasi komposisi transformasi.

Andaikan ada transformasi T dan Q dengan TQ = QT = I maka Q disebut balikan (invers) dari T dan T disebut balikan dari Q, balikan dari T dituliskan dengan T^{-1}. Jadi jika Q balikan dari T maka $Q = T^{-1}$.

Teorema 1.13

a. Jika T adalah suatu isometri lawan maka T^{-1} adalah isometri lawan.

b. Jika T adalah suatu isometri langsung maka T^{-1} adalah isometri langsung.

Teorema 1.14

Setiap transformasi memiliki balikan.

Bukti:

Andaikan T suatu transformasi, kita definisikan padana sebagai berikut:
Andai $X \in V$, V bidang euclid, T transformasi maka T bijektif.
Jadi $\exists A \in V \ni T(A) = X$.
Kita tentukan L(X) = A, artinya L(X) adalah prapeta dari X.
Dari $T(A) = X \rightarrow T[L(X)] = X \Leftrightarrow TL(X) = X, \forall X \in V \rightarrow TL = I$.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa LT = I.
Andaikan $T(Y) = B \rightarrow (LT)(Y) = L[T(Y)] \Leftrightarrow (LT)(Y) = L(B) = Y, \forall Y \in V \rightarrow TL = I \ni TL = LY = I$sekarang akan dibuktikan bahwa L adalah suatu transformasi.
Dari definisi, jelas L suatu padanan yang surjektif.
Andaikan $L(X_1) = L(X_2)$ dan $T(A_1) = X_1$, $T(A_2) = X_2$ $L(X_1) = A_1$, $L(X_2) = A_2$. T transformasi dan karena $A_1 = A_2 \rightarrow X_1 = X_2$.
Jadi dari $L(X_1) = L(X_2) = X_1 = X_2$ sehingga L injektif.
Jadi L suatu transformasi.
Transformasi l ini disebut balikan transformasi dilambangkan $L = T^{-1}$.

Teorema 1.15

Setiap transformasi tepat memiliki satu balikan.

Bukti:
Andaikan T suatu transformasi dengan dua balikan S1 dan S2.
Jadi (TS1)(P) = (S1T)(P) = IP dan (TS2)(P) = (S2T)(P) = IP,
maka (TS1)(P) = (TS2)(P) sehingga T[S1(P)] = T[S2(P)].
Karena T transformasi maka $S1(P) = S2(P), \forall P \in V \ni S1 = S2$.
Jadi balikan T adalah S1 = S2.

Teorema 1.16

Apabila T dan S transformasi-transformasi maka $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

Bukti:

$$(TS)^{-1}(TS) = I \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$(S^{-1}T^{-1})(TS) = S^{-1}(T^{-1}T)S = S^{-1}IS = S^{-1}S = I \ldots\ldots(2)$$

Berdasar (1) dan (2) dan oleh karena suatu transformasi memiliki satu balikan maka $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

b. **Involusi**

Definisi 1.6

Suatu transformasi balikan adalah transformasi itu sendiri disebut involusi. Suatu involusi transformasi yang bersifat involutorik. Refleksi sebagai involusi.

Teorema 1.17

Balikan setiap pencerminan pada garis adalah pencerminan itu sendiri.

9.3 Setengah Putaran

9.3.1 Pengertian Setengah Putaran

Sebuah setengah putaran dengan pusat A dinotasikan S_A adalah suatu padanan yang didefinisikan sebagai berikut:
Untuk setiap titik P pada bidang.

a. Jika P ≠ A, maka S_A (P) = P’ dengan A titik tengah PP’.
b. Jika P = A maka S_A (P) = P = A.

a. Sifat-Sifat Setengah Putaran

Teorema 1.18

Setengah putaran adalah transformasi.

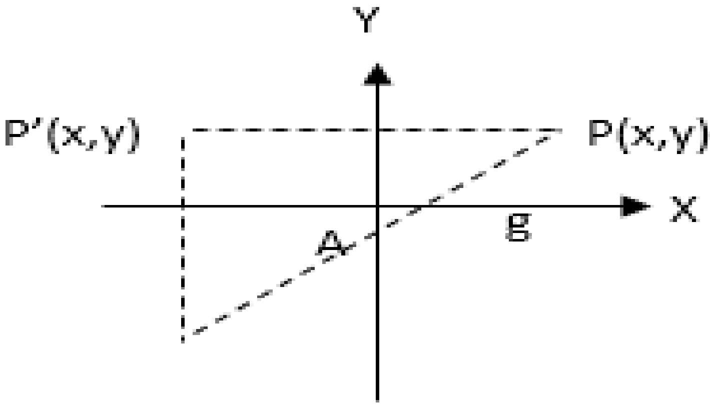
Teorema 1.19

Pandanglah A sebuah titik, garis g dan h berpotongan tegak lurus di A, maka $S_A = M_g M_h$.

Bukti:

Oleh karena $g \perp h$, maka kita dapat membuat sebuah sistem sumbu ortogonal dengan g sebagai sumbu X dan h sebagai sumbu Y dan A sebagai titik asal. Harus dibuktikan bahwa $\forall P, S_A(P) = M_g M_h(P)$.

Jika P = A



Gambar 37. Teorema 1.19

$$\left.\begin{array}{l} M_g M_h(P) = M_h(P) = P \\ S_A(P) = P \end{array}\right\} S_A(P) = M_g M_h(P)$$ P $_1$ (-x,-y) h

Jika P ≠ A
Misal $S_A(P) = P_1(x_1, y_1)$, A(0,0) titik tengah

$$PP_1 \to (0,0) = \left(\frac{x_1 + y}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right) \ni \frac{x_1 + y}{2} = 0, \frac{y_1 + y}{2} = 0, x_1 = -x, y_1 = -y$$

Jadi $S_A(P) = P_1(x_1, y_1)$.
Perhatikan $M_g M_h(P) = M_g[(-x, y)] = (-x, -y)$.
Jadi, jika P ≠ A maka $S_A(P) = P_1(x_1, y_1)$
$\ni \forall P \in V, S_A(P) = M_g M_h(P)$.
Ini berarti $S_A = M_g M_h$.

Teorema 1.20

Jika g dan h dua garis yang berpotongan tegak lurus maka $M_g M_h = M_h M_g$

Teorema 1.21

Jika A(a,b) dan P(x,y) maka S_A (P) adalah (2a-x,2b-y)

Teorema 1.22

Jika S_A setengah putaran maka $S_A^{-1} = S_A$

Karena $S_A^{-1} = S_A$ ini menunjukkan bahwa setengah putaran adalah suatu involusi.

Pencerminan terhadap garis g yang didefinisikan $M_g(P) = P$, jika $P \in g$ dan $M_g(P) = P'$, jika $P \notin g$ dan g adalah sumbu PP'. Jika kita lihat secara umum, maka setiap titik A g petanya titik itu sendiri. Titik yang demikian disebut titik invariant atau titik tetap dari pencerminan di atas. Definisi titik invariant tersebut adalah:

Definisi 1.7

Titik A disebut titik invariant transformasi T, apabila berlaku T(A) = A

Dapat diperlihatkan bahwa pencerminan mempunyai titik invariant yang banyaknya tak hingga. Sedangkan setengah putaran hanya mempunyai satu titik invariant yaitu titik pusat setangah putaran itu.

Pada bagian b dikatakan bahwa garis dikatakan bahwa bila garis dipetakan oleh suatu transformasi menjadi garis disebut kolineasi. Setiap isometric adalah kolineasi. Karena setengah putaran adalah kolineasi. Di antara kolineasi-kolineasi tersebut ada yang disebut dilatasi, dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 1.8

Suatu kolineasi Δ dinamakan dilatasi apabila setiap garis g berlaku sifat Δ(g)//g.

Salah satu contoh kolineasi yang bersifat dilatasi adalah setengah putaran. Contoh tersebut dipertegas oleh teorema berikut:

Teorema 1.23

Andaikan S_A suatu setengah putaran dan g sebuah garis, jika $A \notin g$ maka $S_A(g)//g$.

Bukti:

Andaikan $P \in g$, maka A titik tengah PP', dengan $P' = S_A(P)$.

Andaikan Q $\in$ g, maka A titik tengah QQ', dengan P'= S_A (Q).

Maka ΔAPQ $\cong$ ΔAP'Q', sehingga PQP'Q' sebuah jajar genjang.

Ini berarti PQ // P'Q'

Jadi S_A (g) // g.

Teorema 1.24

Suatu setengah putaran adalah suatu dilatasi yang bersifat involutorik.

b. Komposisi Setengah Putaran

Teorema 1.25

Komposit setengah putaran dengan pusat-pusat yang berbeda tidak mempunyai titik invariant.

Bukti:

Missal A dan B pusat-pusat setengah putaran dan A ≠ B, g = AB dan tarik garis h dan k yang tegak lurus g di A dan di B,

maka $S_A S_B = (M_h M_g)(M_g M_k)$

$= [(M_h M_g) M_g] M_k$

$= [M_h (M_g M_g)] M_k$

$= [M_h] M_k$

$= M_h M_k$

Misalkan X titik invariant, maka

$S_A S_B (X) = X$

$M_h M_k (X) = X$

$M_h [M_h M_k (X)] = M_h (X)$

$(M_h M_h) M_k (X) = M_h (X)$

$M_k (X) = M_h (X)$

Jadi $M_k (X) = M_h (X) = X_1$

Untuk X ≠ X_1,

Dalam hal ini h dan k adalah sumbu X X_1. oleh karena ruas garis hanya memiliki satu sumbu haruslah h = k, ini tidak mungkin sebab A ≠ B.
Untuk X = X_1,
Maka $M_k(X) = X$ dan $M_h(X) = X$, ini berarti h dan k berpotongan di X.
Ini tidak mungkin karena h // k dan h melalui A, k melalui B.
Ini berarti tidak mungkin $\exists X_1 \ni \mathrm{M}_k(X) = M_h(X)$ atau $S_A S_B(X) = X$.
Jadi $S_A S_B$ tidak memiliki invarian.

Teorema 1.26

Jika A ≠ B adalah dua titik maka hanya ada satu buah setengah putaran yang memetakan A ke B.

Bukti:

Misal ada dua setengah putaran S_D dan S_E, D ≠ E $\ni S_D(A) = B$ dan $S_E(A) = B$. Jadi, $S_D(A) = S_E(A)$

$$S_D^{-1} S_D(A) = S_D^{-1} S_E(A)$$
$$A = S_D^{-1} S_E(A)$$
$$A = S_D S_E(A)$$

Ini berarti A titik invariant dari $S_D\ S_E$, sedangkan D ≠ E. ini tidak mungkin, pengandaian salah, jadi haruslah hanya satu setangah putaran yang memetakan A ke B.

Teorema 1.27

Apabila T suatu transformasi, H adalah himpunan titik-titik dan A sebuah titik, maka A∈T(H)↔T $^{-1}$ (A) ∈H

Bukti:

(⇒) Andaikan A∈T(H).
Jadi ada x∈H sehingga A = T(x).
Maka T $^{-1}$ (A) = T $^{-1}$ (T(x)) = (T $^{-1}$ T)(x) = I(x) = x.
Jadi T $^{-1}$ (A) ∈H.

(⇐) Andaikan T $^{-1}$ (A) ∈H
Ini berarti T $^{-1}$ (T(A)) ∈T(H) atau A∈T(H).

9.4 Translasi

a. Ruas Garis Berarah

Pengertian

Suatu ruas garis berarah adalah sebuah ruas garis yang salah satu ujungnya dinamakan titik pangkal dan ujung lainnya dinamakan titik akhir. Apabila A dan B dua titik, maka lambang $\overrightarrow{AB}$ dapat digunakan untuk menyatakan ruas garis berarah dengan pangkal A dan titik akhir B. ruas garis berarah AB dan CD disebut kongruen. Ditulis $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$. Apabila AB = CD.

Ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ ekivalen ruas garis berarah $\overrightarrow{CD}$ ditulis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ jika AB = CD dan arahnya sama.

Definisi 1.9

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ apabila S_p (A) = D dengan titik tengah BC.

b. Sifat-Sifat Ruas Garis Berarah

Teorema 1.28

Andaikan $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ ruas garis berarah yang tidak segaris maka segiempat ABCD sebuah jajar genjang ↔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Teorema 1.29

Jika diketahui ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ maka berlaku:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ (sifat refleksif)

b) Jika $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ maka $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (sifat simetrik)

c) Jika $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{CD}$,= $\overrightarrow{EF}$ maka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ (sifat transitif)

Teorema 1.30

Jika ditentukan sebuah titik P dan sebuah garis berarah $\overrightarrow{AB}$ maka ada titik tunggal Q sehingga $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

Bukti:

Andaikan R titik tengah $\overrightarrow{BP}$, $Q = S_R(A)$, maka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ atau $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

Andaikan $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PT}$.

Jadi $S_R(A) = T$, R di tengah BP.

Berhubung peta A oleh S_R tunggal, maka T = Q.

Jadi PQ merupakan satu-satunya ruas garis berarah dengan pangkal P dan titik akhir Q yang ekivalen dengan $\overrightarrow{AB}$.

Akibat:

a) Jika $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ adalah titik-titik yang diketahui maka titik $P(x_3 + x_2 - x_1, y_3 + y_2 - y_1)$ adalah titik tunggal sehingga $\overrightarrow{P_3P} = \overrightarrow{P_1P_2}$.

b) Jika $P_n(x_{n,} y_n)$ dengan n = 1, 2, 3, 4 maka, $\overrightarrow{P_3P} = \overrightarrow{P_1P_2} \leftrightarrow x_2 - x_1 = x_4 - x_3, y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.

c. **Perkalian Skalar dengan Ruas Garis Berarah**

Definisi 1.10

Misalkan $\overrightarrow{AB}$ adalah ruas garis berarah dan k adalah bilangan real.

a. Jika k > 0 maka k.$\overrightarrow{AB}$ adalah suatu ruas garis berarah $\overrightarrow{AP}$ dengan AP=k(AB), P$\in \overrightarrow{AB}$.(sinar AB).

b. Jika k < 0 maka $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ dengan P pada sinar yang berlawanan dengan $\overrightarrow{AB}$ dan AP = $|k|$ (AB).

Teorema 1.31

Jika s dan t adalah dua garis sejajar. W dan V adalah dua titik, V'=$M_tM_s(V)$ dan $W' = M_tM_s(W)$ maka $\overrightarrow{VV'} = \overrightarrow{WW'}$.

Definisi 1.10

Suatu transformasi G adalah suatu translasi jika ada $\overrightarrow{AB}$ sehingga untuk setiap P pada bidang V, G(P) = P' dan PP' = $\overrightarrow{AB}$, ditulis $G_{AB}(P) = P'$.

Teorema 1.32

Jika $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ maka $G_{AB} = G_{CD}$.

Bukti:

Ambil sebarang X.

Misal $G_{AB}(X) = X_1$ dan $G_{CD}(X) = X_2$, maka $\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{XX_2} = \overrightarrow{CD}$.

Karena $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, maka $\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{XX_2}$.

Jadi $X_1 = X_2$ dan $G_{AB}(X) = G_{CD}(X), \forall X \in V$.

Jadi $G_{AB} = G_{CD}$.

Teorema 1.33

Misal garis s // t dan CD adalah ruas garis berarah yang tegak lurus s dan t dengan $C \in s$ dan $D \in t$. Jika $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ maka $G_{AB} = M_t M_s$.

Akibat (Teorema)

a. Jika u, v, dan w adalah garis-garis tegak lurus AB yang berturut-turut melalui A, M (M adalah titik tengah AB), dan B maka $G_{AB} = M_v M_u = M_w M_v$.

b. Setiap translasi adalah isometri langsung.

c. $(G_{AB})^{-1} = G_{BA}$.

9.4.1 Komposisi Translasi

Di atas dijelaskan bahwa suatu translasi dapat dinyatakan dalam bentuk komposisi dari dua pencerminan. Pada bagian ini akan diperlihatkan bahwa setiap translasi dapat diuraikan sebagai komposisi dua setengah putaran. Komposisi translasi adalah translasi juga.

Teorema 1.34

Jika G_{AB} sebuah translasi sedangkan C dan D adalah dua titik sehingga $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ maka $G_{AB} = S_D S_C$.

Bukti:

Andaikan g = $\overrightarrow{CD}$, k $\perp$ g di C, m $\perp$ g di D.

Diketahui $\overrightarrow{AB}$ = 2 $\overrightarrow{CD}$

Maka $G_{AB} = M_m M_k$.

$$\begin{aligned} S_D S_C &= \left(M_m M_g\right)\left(M_g M_k\right) \\ &= M_m\left(M_g M_g\right)M_k \\ &= M_m I M_k \\ &= M_m M_k \\ &= G_{AB} \end{aligned}$$

Jadi $G_{AB} = S_D S_C$.

Teorema 1.35

Jika G_{AB} adalah suatu translasi dan S_C adalah setengah putaran maka $G_{AB} S_C = S_D$ dengan D titik sedemikian hingga $\overrightarrow{AB}$ = 2 $\overrightarrow{CD}$.

Bukti:

$$\begin{aligned} G_{AB} S_C &= \left(S_D S_C\right) S_C \\ &= S_D\left(S_C S_C\right) \\ &= S_D I \\ &= S_D \end{aligned}$$

Teorema 1.36

Jika S_A, S_B, S_C adalah setengah putaran - setengah putaran maka $S_C S_B S_A = S_D$ dengan D adalah titik yang memenuhi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Bukti:

$S_C S_B = G_{2BC} \rightarrow S_C S_B S_A = G_{2BC} S_A$.

Andaikan $G_{2BC} S_A = S_A$, maka $2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AX}\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\end{array}\right\}X=D$$

Jadi $S_C S_B S_A = S_D$.

Teorema 1.37

Komposit dua translasi adalah translasi.

Teorema 1.38

Jika G_{OA} sebuah translasi yang ditentukan oleh titik-titik O(0,0) dan A(a,b) dan T(transformasi yang didefinisikan untuk setiap titik P(x,y) sebagai T(P) = (x+a,y+b), maka T = G_{OA}.

Bukti:

Untuk P = (x,y), T(P) = (x+a,y+b).

Andaikan

$$G_{OA}(P)=P' \rightarrow \overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OA} \ni P'=(x+a-0, y+b-0)=(x+a, x+b).$$

Jadi T(P) = G_{OA} (P), $\forall P \in V$.

Ini berarti T = G_{OA}.

9.5 Rotasi

9.5.1 Pengertian Sudut Berarah

Sebuah sudut berarah adalah suatu sudut yang salah satu kakinya ditentukan sebagai kaki awal dan lainnya sebagai kaki akhir.

Untuk melambangkan besarnya sebuah sudut berarah , ditantukan hal-hal berikut:

m($\angle$ABC) = m($\angle$ABC) apabila orientasi ganda (BAC) adalah positif.

m($\angle$ABC) = -m($\angle$ABC) apabila orientasi ganda (BAC) adalah negatif.

9.5.2 Sudut antara Dua Garis

Apabila ada dua garis berpotongan yang tidak tegak lurus, maka sudut antara dua garis itu dipilih sudut lancip.

Teorema 1.39

Andaikan s dan t dua garis yang tidak saling tegak lurus dan yang berpotongan di titik A, maka m($\angle$PAP') = m($\angle$QAQ'), dengan P''= $M_tM_s(P)$ dan Q''= $M_tM_s(Q)$.

Bukti:

Kasus 1

Andaikan P dan K terletak pada garis s, maka $M_tM_s(A)$ = A.

Sebut peta ini A'. Jadi A = A'.

Oleh karena M_tM_s sebuah isometri maka P', K' dan A'= A terletak pada ssatu garis yang melalui A, sehingga m($\angle$PAP') = m($\angle$KAK').

Apabila P $\notin$s, dan besar sudutnya tidak berubah terhadap isometri maka m($\angle$PAK) = m($\angle$P'AK').

Oleh karena komposit dua refleksi garis adalah sebuah isometri lawan, maka orientasi ganda (APK) sama dengan orientasi ganda (AP'K').

Jadi m($\angle$PAP') = m($\angle$KAK').

Kasus 2

m($\angle$PAP') = m($\angle$PAK) + m($\angle$KAP').

Sedangkan m($\angle$KAK') = m($\angle$KAP') + m($\angle$P'AK').

Sehingga m($\angle$PAP') = m($\angle$KAK').

Kasus 3

m($\angle$PA P') = m($\angle$KAK').

Jadi untuk setiap titik P$\neq$A diperoleh m($\angle$PA P') = m($\angle$KAK').

Sehingga m($\angle$QA Q') = m($\angle$PAP').

Jadi oleh transformasi M_tM_s setiap titik berputar dengan sudut berarah yang sama mengelilingi titik yang sama.

9.6 Komposisi Rotasi

1. Pengertian

Rotasi adalah transformasi. Komposisi dua transformasi adalah transformasi. Untuk apakah komposisi dua rotasi? Ditinjau dua keadaan yakni:

a. Pusat-pusat rotasinya sama.
b. Pusat-pusat rotasinya berbeda.

Rotasi-rotasi yang pusatnya sama

Komposisi dua rotasi yang pusatnya sama, akan berupa rotasi dengan sifat yang sama pula atau transformasi identitas. Transformasi identitas dapat dianggap sebagai sebuah rotasi dengan sudut putar.

Jadi, dapat dikatakan bahwa himpunan rotasi mengelilingi titik yang sama adalah tertutup terhadap komposisi.

Rotasi-rotasi yang pusatnya berbeda. Sebuah titik pada bidang dilakukan dua rotasi mengelilingi dua titik berbeda A dan B. dan masing-masing dengan sudut rotasi φ_1 dan φ_2.

Teorema 1.40

Komposisi dua rotasi adalah sebuah rotasi atau translasi.

Bukti:

Andaikan ada rotasi $R_{A,\theta 1}$ dan $R_{B,\theta 2}$.

Tarik garis s = $\overrightarrow{AB}$.

$\angle$XAY = $\angle$XAZ = $\frac{1}{2}\theta_1$ maka $R_{A,\theta 1} = M_s M_t$ dan $R_{B,\theta 2} = M_u M_s$

Jadi $R_{B,\theta 2} R_{A,\theta 1} = (M_u M_s)(M_s M_t) = M_u M_t$

Jika u // t maka $R_{B,\theta 2} R_{A,\theta 1}$ adalah geseran.

Jika u dan t berpotongan di C maka $M_u M_t$ adalah rotasi yang berpusat di C.

Jadi $R_{B,\theta 2} R_{A,\theta 1} = R_{C,\theta}$

Secara umum hal di atas dapat dikatakan sebagai berikut:

Jika $R_{B,\phi 2} R_{A,\phi 1} = R_{C,\phi}$

a. $0 < |\phi_1 + \phi_2| \leq 180^0$ maka $\phi = \phi_1 + \phi_2$

b. $\phi_1 + \phi_2 > 180^0$ maka $\phi = (\phi_1 + \phi_2) - 360^0$

c. $\phi_1 + \phi_2 < -180^0$ maka $\phi = (\phi_1 + \phi_2) + 360^0$

d. $\phi_1 + \phi_2 = 0^0$ maka $R_{B,\phi 2} R_{A,\phi 1}$ adalah suatu translasi.

9.6.1 Refleksi Geser

a. Komposisi Isometri Dasar

Isometric yang telah dibahas pada pertemuan terdahulu adalah refleksi, setengah putaran, rotasi, dan translasi. Karena setengah putaran adalah rotasi dengan sudut 180^0 atau -180^0, maka setengah putaran juga merupakan rotasi.

Kita telah mengetahui bahwa:

a. Komposisi dua translasi adalah juga translasi
b. Komposisi dua refleksi adalah translasi atau rotasi
c. Komposisi dua rotasi adalah translasi atau rotasi

b. Komposisi Rotasi dan Translasi

Teorema 1.41

Komposisi sebuah rotasi dan sebuah translasi adalah rotasi dengan besar sudut rotasinya sama dengan sudut rotasi yang dikomposisikan.

Bukti:

Misal diketahui $R_{A,\theta}$ dan G_{BC}, s adalah sebuah garis melalui A $\perp \overrightarrow{BC}$ dan D sebuah titik sehingga $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$. t adalah garis melalui D // s. maka $G_{BC} = M_t M_s$.

Jika r garis melalui A sehingga sudut dari r ke s = $\frac{1}{2}\theta$, maka $R_{A,\theta} = M_s M_r$.

$G_{BC} R_{A,\theta} = (M_t M_s)(M_s M_r) = M_t M_r$, $t \cap r$ = E maka $M_t M_r$ adalah sebuah rotasi mengelilingi E. $\angle(t, r) = \frac{1}{2}\theta$, diperoleh

$M_t M_r = R_{E,\theta}$. Di sini $M_s M_t$ dan $R_{A,\theta}$ haruslah $M_r M_s \ni R_{A,\theta} G_{BC} = (M_r M_s)(M_s M_t) = M_t M_r = R_{B,\theta}$.

Akibat

Himpunan translasi dan rotasi membentuk grup dengan operasi komposisi.

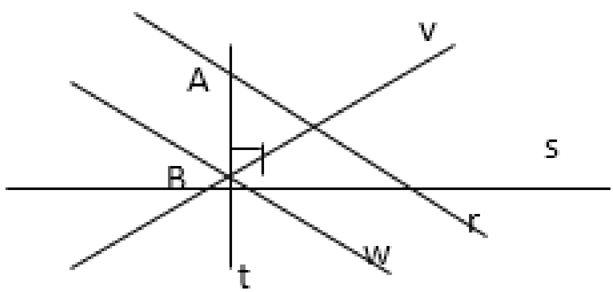
c. Komposisi Rotasi dan Refleksi

Misal diketahui $R_{A,\phi}$ dan M_s.

Jika $A \in s \rightarrow R_{A,\phi} = M_t M_s$. t adalah garis melalui A ∋ $\angle(s,t) = \frac{1}{2}\theta$.

Jadi $R_{A,\phi} M_s = (M_t M_s) M_s = M_t$.

Jika $A \notin s$..kita tarik t dan r, ∋ t ⊥ s dan r melalui A ∋ $\angle(t,r) = \frac{1}{2}\theta$.



Gambar 38. Komposisi dan Rotasi

Maka $R_{A,\phi} M_s = (M_r M_t) M_s = M_r (M_t M_s) = M_r S_B .....(1)$ dengan $B = t \cap s$.

Jika v sebuah garis melalui B dan ⊥ r, w garis melalui B // r, maka $S_B = M_w M_v$.

$R_{A,\phi} M_c = M_r S_B = M_r (M_w M_v) = (M_r M_w) M_v = G_{2BC} M_v$ dengan $c = v \cap r$

Komposisi $G_{2BC} M_v$ **dinamakan refleksi geser.**

Definisi 1.12

Sebuah transformasi G dinamakan refleksi geser apabila ada garis g dan sebuah ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ yang sejajar g sehingga $G = G_{AB}M_g$. Garis itu dinamakan sumbu refleksi geser.

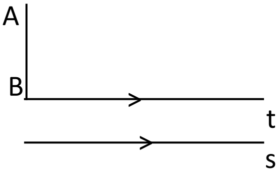
Teorema 1.42

Komposisi sebuah refleksi dan rotasi yang pusatnya tidak pada garis refleksi yang dikomposisikan adalah refleksi geser.

Akibat:

1. Jika s dan $\overrightarrow{AB} \perp$ s, maka komposisi G_{AB} dengan refleksi M_s adalah refleksi.

$$\overrightarrow{AB} \perp s \rightarrow G_{AB}M_s = (M_tM_s)M_s$$
$$= M_t(M_sM_s)$$
$$= M_t$$

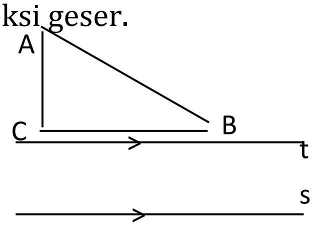


Gambar 39. akibat teorema 1.42

3. Jika diketahui garis a dan $\overrightarrow{AB}$ yang tidak $\perp$ s, maka komposisi G_{AB} dan M_s adalah refleksi geser.

$$\overrightarrow{AB} \not\perp s \rightarrow M_sG_{AB} = M_s(G_{AC}G_{CB})$$
$$= (M_sG_{AC})G_{CB}$$
$$= M_tG_{CB}$$

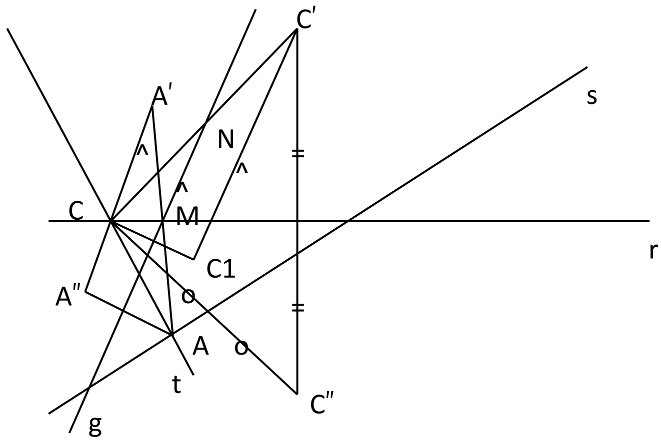
t // CB $\rightarrow M_sG_{AB} = G$



Gambar 40. akibat teorema 1.42 (2)

4. Jika ada garis r, s, dan t yang ketiganya tidak kongruen dan tidak sejajar, maka komposisi refleksi terhadap ketiga garis tersebut adalah refleksi geser.

$$\left.\begin{aligned} M_rM_sM_t(A) &= A' \\ M_rM_sM_t(C) &= C' \end{aligned}\right\} G = G_{A''A'}M_g$$



Gambar 41. akibat teorema 1.42 (3)

9.6.2 Komposisi Refleksi Geser

Hingga kini telah Anda jumpai empat isometric dasar, yaitu refleksi pada garis, translasi, rotasi dan refleksi geser. Dengan jelas mengomposisikan refleksi, translasi, dan rotasi-rotasi, kita peroleh lagi salah satu dari isometric ersebut dan juga refleksi geser. Sekarang akan kita lihat jika refleksi geser dikomposisikan dengan salah satu dari ketiga isometric yang semula atau refleksi geser dikomposisikan dengan refleksi geser lain.

a. Komposisi Refleksi Geser dan Translasi

G dengan sumbu t sehingga $G = G_{AB}M_t$ dengan $\overrightarrow{AB}$ // t, maka $G_{CD}G = G_{CD}(G_{AB}M_t) = (G_{CD}G_{AB})M_t = G_{EF}M_t$

Jika $\overrightarrow{EF} \perp$ t maka $G_{EF}M_t$ adalah suatu refleksi pada garis // t.

Jika $\overrightarrow{EF}$ tidak $\perp$ t maka $G_{EF}M_t$ adalah suatu refleksi geser.

Begitu pula GG_{CD} sebab $G_{AB}M_t = M_tG_{AB}$ jika t // $\overrightarrow{AB}$.

Jadi $G_{CD}G = (M_tG_{AB})G_{CD} = M_tG_{EF}$

Oleh karena $M_tG_{EF} = G_{EF}M_t$ maka $G_{CD}G = GG_{CD}$.

b. Komposisi Refleksi Geser dengan Refleksi pada Garis

Misalkan M_s refleksi pada garis a dan G sebuah refleksi geser maka $M_sG = M_s(G_{AB}M_t)$ $= M_s(M_tG_{AB}) = (M_sM_t)G_{AB}$

Jika s // t maka (M_sM_t) adalah sebuah translasi sehingga M_sG juga sebuah translasi.

Jika s tidak // t maka (M_sM_t) sebuah rotasi, sehingga M_sG sebuah rotasi dan juga GM_s sebuah rotasi.

Jadi komposit sebuah refleksi geser dengan sebuah refleksi pada garis adalah sebuah translasi atau rotasi.

Dengan melihat cara di atas kita dapat menentukan komposisi refleksi geser dan rotasi yaitu refleksi geser atau refleksi. Sedangkan, komposisi dua refleksi geser adalah translasi atau rotasi.

9.7 Isometric Bidang

9.7.1 Teorema Ketunggalan Isometri

Jika diketahui dua titik A dan A' di V maka $G_{AA'}$ merupakan isometric yang memetakan A ke A'. selain translasi tersebut dapat juga M_s dengan s adalah sumbu AA', sehingga $M_s(A) = A'$. Dan juga $S_P(A) = A'$,jika P titik tengah AA'. Selain isometric di atas, terdapat pula rotasi yang memetakan A ke A'. rotasi yang bersifat seperti itu tidak berfungsi.

Jika diketahui empat titik A, B, A', dan B' apakah ada isometric yang memetakan A ke A' dan B ke B'? jawabnya tidak selalu ada. Tidak ada isometric jika AB ≠ A'B'. jika AB = A'B' maka ada isometric yang memetakan A ke A' dan B ke B'. dapat dibuktikan paling sedikit satu isometric lawan yang mmetakan A ke A' dan B ke B'. isometric langsungnya komposisi dua penerminan atau komposisi tiga pencerminan.

Teorema (teorema ketunggalan isometric)

Diketahui tiga titik yang tak kolinear A, B, dan C. jika ada tiga titik lain A', B', dan C' maka ada paling banyak satu isometric yang memetakan A ke A', B ke B', dan C ke C'.

Bukti:

Andaikan ada 2 isometri T_1 dan T_2 sehingga:

$$T_1(A) = A' = T_2(A)$$
$$T_1(B) = B' = T_2(B)$$
$$T_1(C) = C' = T_2(C)$$

T_1 dan T_2 isometric maka AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'.

Oleh karena A, B, C tidak kolinear maka A', B', C' tidak kolinear.

Andaikan T_1 P ≠ T_2 P dan T_1 P = P', T_2 P = P" maka AP = A'P' = A'P".

jadi A' $\in$ sumbu $\overrightarrow{P'P''}$.

Andaikan T_1 P ≠ T_2 P dan T_1 P = P', T_2 P = P" maka BP = B'P' = B'P".

jadi B' $\in$ sumbu $\overrightarrow{P'P''}$.

Andaikan T_1 P ≠ T_2 P dan T_1 P = P', T_2 P = P" maka CP = C'P' = C'P".

jadi C' $\in$ sumbu $\overrightarrow{P'P''}$.

Jadi A', B', C', kolinear, ini berlawanan dengan yang diketahui A', B', C' tidak kolinear.

Jadi haruslah T_1 P = T_2 P, $\forall P \in V$. Ini berarti T_1 = T_2 .

Teorema 1.43

Jika a sebuah garis melalui titik asal sebuah system koordinat orthogonal dan jika M_s memetakan A(1,0) ke B(h,k) dan P(x,y) maka $M_s(P) = (hx + ky, kx - hy)$.

Bukti:

Misal P(x,y) dan T(P) = (hx+ky,kx-hy).

Akan dibuktikan T = M_s. Untuk itu akan dibuktikan terlebih dulu bahwa T sebuah isometri.

B = $M_s(A)$ dan $M_s(O) = O$ maka OB = OA $\rightarrow h^2 + k^2 = 1$.

Misal $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ maka

$$P_1^{'} = T(P_1) = (hx_1 + ky_1, kx_1 - hy_1)$$

$$P_2^{'} = T(P_2) = (hx_2 + ky_2, kx_2 - hy_2)$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
(P_1^{'}P_2^{'}) &= \{(hx_1 + ky_1) - (hx_2 + ky_2)\}^2 + \{(kx_1 - hy_1) - (kx_2 - hy_2)\}^2 \\
&= \{h(x_1 - x_2) + k(y_1 - y_2)\}^2 + \{k(x_1 - x_2) + h(y_1 - y_2)\}^2 \\
&= h^2(x_1 - x_2)^2 + k^2(y_1 - y_2)^2 + 2hk(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\
&\quad + k^2(x_1 - x_2)^2 + h^2(y_1 - y_2)^2 - 2hk(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\
&= (h^2 + k^2)(x_1 - x_2)^2 + (h^2 + k^2)(y_1 - y_2)^2 \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
&= (P_1P_2)
\end{aligned}$$

Jadi T isometri.
Pandang O(0,0), A(1,.0), B(h,k) tiga titik tak kolinear.
T(O) = O, $M_s(O) = O$,T(A) = (h,k) = B, $M_s(A) = B$,T(B) = (1,0) = A, $M_s(B) = A$.

Jadi T = M_s

9.7.2 Teorema Dasar Isometri

Teorema 1.44

Himpunan transformasi G yang anggota-anggotanya refleksi, translasi, rotasi dan refleksi geser adalah tertutup terhadap operasi komposisi.

Teorema 1.45

Jika ada dua garis $\overrightarrow{AB}$ dan ruas garis $\overrightarrow{CD}$ sehingga AB = CD maka ada dua isometric yang memetakan A ke C dan B ke D. satu diantaranya langsung dan yang satu lagi lawan.

Bukti:

Terdapat 3 kasus yang mungkin terjadi:

1. A = C, B ≠ D
2. A ≠ C, B = D

3. A = C, B = D

Kasus 1

S sumbu ruas garis $\overrightarrow{AB}$, AB = CD dan A = C, maka AB = AD ∋ $A \in s$.

Jadi $M_s(A) = A = C$ dan $M_s(B) = D$.

Ini berarti M_s salah satu isometri yang dicari dan beripa isometri lawan.

Jika $\overrightarrow{AD}$ adalah garis t, maka $M_t M_s(A) = M_t(C) = C$ dan $M_t M_s(B) = M_t(D) = D$.

Jadi $M_t M_s$ adalah isometric langsung yang memetakan A ke C dan B ke D, dengan demikian $M_t M_s$ adalah isometric yang kedua yang dicari.

Kasus 2

Andaikan s sumbu $\overrightarrow{AC}$ maka $M_s(A) = C$, andaikan $M_s(B) = B'$.

Jika B' = D, maka $M_s(B) = D$. Jadi M_s salah satu isometri yang kita cari berupa isometri lawan. Jika CD = t maka $M_t M_s$ isometric langsung yang dicari, sebab $M_t M_s(A) = M_t(C) = C$ dan $M_t M_s(B) = M_t(D) = D$.

Jika B ≠ D, andaikan u sumbu $\overrightarrow{B'D}$ maka C$\in$u sebab CB = AB = CD.

Jadi $M_u(C) = C$ dan $M_u(B') = D$.

Jadi $M_u M_s$ isometric langsung yang dicari, bila t = $\overrightarrow{CD}$ maka $M_t M_u M_s(A) = M_t M_u(C) = M_t(C) = C$ dan $M_t M_u M_s(B) = M_t M_u(B') = M_t(D) = D$.

Jadi $M_t M_u M_s$ isometric lawan yang dicari.

Kasus 3

Jika s = $\overrightarrow{AB}$, kita peroleh $M_s(A) = C$ dan $M_s(B) = D$, yaitu isometri lawan, sedangkan I = $M_t M_s$ adalah isometric langsung yang dicari.

Teorema (teorema dasar isometric)

Setiap isometric adalah komposit dari paling banyak tiga refleksi garis.

Bukti:

Misal T isometri dari A, B, C tiga titik tidak segaris.

Misal T(A) = A", T(B) = B", T(C) = C". karena AB = A" B", maka paling sedikit dua isometri yang memetakan A pada A" dan B pada B".

Misal Lo isometri langsung yang memetakan A pada A" dan B pada B", maka Lo= $M_t M_s$.

Misal L isometri lawan yang memetakan A pada A" dan B pada B", maka L= $M_t M_u M_s$.

Jadi N(B) = B" dan N(A) = A".

Perhatikan N(C) = C'.

Jika C' = C", maka N memetakan A pada A", B pada B" dan C pada C".

Menurut teorema ketunggalan isometri T = N.

Jika C' ≠ C", andaikan A"B" = v, oleh karena T dan N isometri maka AC=A"C"=A"C' dan BC = B"C" = B"C'.

Ini berarti bahwa A" dan B" sama jauhnya dari ujung ruas garis C"C', mengakibatkan v adalah sumbu C"C', sehingga $M_v(C'') = C'$, diperoleh

$$M_v N(A) = M_v(A'') = A'$$

$$M_v N(B) = M_v(B'') = B'$$

$$M_v N(C) = M_v(C'') = C'$$

Menurut teorema ketunggalan isometri maka T = $M_v N$.

Jadi T = N atau T = $M_v N$.

Oleh karena N adalah sebuah refleksi garis atau komposit dua refleksi garis maka T adalah komposit dari paling banyak tiga refleksi garis.

Akibat

Setiap isometric adalah refleksi, translasi, rotasi, atau refleksi geser. Translasi atau rotasi adalah isometric langsung, sedangkan isometric lawan adalah suatu rafleksi atau suatu refleksi geser.

Teorema 1.46

Jika ΔABC $\cong \Delta$ A'B'C' maka ada tepat satu isometric yang memetakan A pada A', B pada B', dan C pada C'.

Bukti:

Kita membuktikan eksistensi sebuah isometric tersebut, maka menurut teorema ketunggalannya hanya ada satu isometric. Kita tahu ada sebuah isometric T yang bersifat T(A) = A', T(B) = B', sebab AB = A'B'. andaikan T(C) = C_1 dan jika C_1 =C', selesailah bukti kita.

Jika $C_1 \neq C'$ dan tentukan u = $\overleftrightarrow{A'B'}$. Oleh karena A'$C_1$ = A'C' dan B'C_1 = B'C' maka sumbu $\overleftrightarrow{C_1C'}$, jadi

$$\begin{aligned} M_u(C_1) &= C' \\ M_uT(A) &= M_u(A') = A' \\ M_uT(B) &= M_u(B') = B' \\ M_uT(C) &= M_u(C') = C' \end{aligned}.$$

Dengan demikian terbukti adanya suatu isometric yang memetakan A pada A', B pada B', dan C pada C' yaitu T atau M_uT.

Sebagai penggunaan teorema dasar isometric di atas adalah dalam menentukan kekongruenan dua himpunan atau lebih.

Definisi 1.13

Dua himpunan A dan B adalah kongruen jika ada suatu isometric yang memetakan himpunan A pada himpunan B.

9.7.3 Parity

Parity adalah kesamaan suatu isometric dalam bentuk komposit refleksi-refleksi. Suatu isometric yang merupakan komposisi sejumlah genap dari refleksi-refleksi disebut isometric langsung, sedangkan isometric yang merupakan komposisi sejumlah ganjil dari refleksi-refleksi disebut isometric lawan.

Teorema 1.47

Sebuah isometric langsung dapat dinyatakan sebagai komposisi dua buah refleksi. Isometric lawan adalah sebuah refleksi atau komposisi tiga refleksi.

Teorema 1.48

Suatu isometric involutory langsung adalah setengah putaran: suatu isometric involutory lawan adalah refleksi.

Teorema 1.49

Jika P sebuah titik, m sebuah garis dan T isometric maka $TS_P T^{-1} = S_{T(P)}$ dan $TM_m T^{-1} = M_{T(m)}$.

Teorema 1.50

T isometric, maka $TG_{AB}T^{-1} = G_{T(A)T(B)}$ dan $TR_{C,\phi}T^{-1} = R_{T(C),\phi}$ jika T isometric langsung, sedangkan $TR_{C,\phi}T^{-1} = R_{T(C),\phi}$ jika T isometric lawan.

Bukti:

(i). $TG_{AB}T^{-1} = TM_l M_k T^{-1}$

$$= TM_l T^{-1} TM_k T^{-1}$$

$$= M_{T(l)} M_{T(k)}$$

$$= G_{T(A)T(B)}$$

(ii). $TG_{c,\theta}T^{-1} = M_g M_l M_k M_g^{-1}$

$$= M_g M_l I M_k M_g^{-1}$$

$$= \left(M_g M_l M_g^{-1}\right)\left(\mathrm{M_g} M_k M_g^{-1}\right)$$

$$= M_{Mg(l)} M_{Mg(k)}$$

$$= R_{T(c),\theta}$$

Teorema 1.51

Misalkan A dan B dua titik A ≠ B maka $R_{A,\phi}R_{B,\phi} \neq R_{B,\phi}R_{A,\phi}$ dengan θ = 0, ø ≠ 0.

Teorema 1.52

Jika $M_n M_m = M_m M_n \leftrightarrow m \perp n$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ $\left(M_m M_n\right)\left(M_m M_n\right) = M_n M_m M_m M_n$

$S_A S_A = I$

Jadi $M_m M_n = S_A \rightarrow m \perp n$

$(\Leftarrow) m \perp n$

$M_m M_n(P) = P^1$

$M_n M_m(P) = P^1$

$M_m M_n(P) = M_n M_m(P)$

$M_m M_n = M_n M_m$

Jadi Jika $M_n M_m = M_m M_n \leftrightarrow m \perp n$.

DAFTAR PUSTAKA

Martin, G. 1982. *Transformation Geometry An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.

Mulyati. 2002. *Geometri Euclid*. Malang: JICA.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Bandung: Depdikbud.

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: UGM.

BAB 10
PERMUTASI DAN KOMBINASI

0leh Jan Setiawan

10.1 Permutasi

Sering ditemui permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang terkait pengaturan susunan suatu benda. Tentunya untuk menyelesaikan permasalahan ini secara sistematis sangat dibutuhkan. Untuk menyelesaikan ini, salah satu konsep matematika yang dapat digunakan adalah permutasi dan kombinasi. Dengan permutasi dan kombinasi ini dapat ditentukan jumlah cara berbeda untuk menyusun suatu benda. Selain itu juga dapat diaplikasikan dalam memilih satu benda atau lebih dari sekumpulan benda tertentu. Sebelum membicarakan permutasi dan kombinasi, istilah yang perlu kita kenali pertama kali adalah faktorial. Faktorial suatu bilangan bulat positif n dapat dilambangkan dengan $n!$, merupakan perkalian dari semua bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan n.

Contoh:

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Perlu diketahui untuk $0! = 1$.

Permutasi dapat didefinikan sebagai susunan dari sekumpulan benda yang memperhatikan urutannya (Chuang-Chong and Khee-Meng, 1999; Bóna, 2004; Suksompong, 2008; Vardeman *et al.*, 2016; Tier, 2017; Mathai and Haubold, 2018; Blitzstein and Hwang, 2019; Kean-Pew and Mingyan-Simon, 2019). Jumlah permutasi apabila dari n benda diambil seluruhnya dalam satu waktu diisimbolkan dengan ${}^{n}P_{n}$ yang merupakan,

${}^{n}P_{n} = n!$

jumlah permutasi apabila dari n benda yang diambil sebanyak r dalam satu waktu dimana $0 < r \leq n$, disimbolkan dengan ${}^{n}P_{r}$ yang merupakan,

$^{n}\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Contoh:

1. Tentukan jumlah permutasi dari huruf XYZ!

   Jawab:

   Dengan n = 3, sehingga $^{3}\mathrm{P}_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

2. Tentukan jumlah permutasi 3 huruf dari huruf VWXYZ!

   Jawab:

   Dengan n = 5 dan r = 3, sehingga

   $^{5}\mathrm{P}_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Kemungkinan kejadian lainnya apabila dari sejumlah n benda diambil seluruhnya dalam satu waktu, dengan pengambilan benda yang sama boleh berulang, jumlah permutasinya dinotasikan dengan n^n. Sedangkan, pada pengambilan sejumlah r benda dari sejumlah n benda, dengan pengambilan benda yang sama boleh berulang, jumlah permutasinya dinotasikan dengan n^r.

Contoh:

1. Dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9, berapa banyak susunan angka yang dapat dibentuk dari angka tersebut bila terdiri dari semua angka tersebut dan setiap angka dapat berulang dipilih!

   Jawab:

   Dari angka yang tersedia dapat disusun sekali waktu adalah sebanyak 10^{10}
2. Dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9, berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari angka tersebut bila terdiri 3 angka dan setiap angka dapat berulang dipilih!

   Jawab:

   Dari angka yang tersedia dapat disusun sekali waktu yang terdisi dari 3 angka adalah sebanyak 10^3.

Berikutnya permutasi pada sekelompok benda dimana individu dalam kelompok tersebut tidak dibedakan. Misalkan terdapat sejumlah n benda yang terdiri atas kelompok benda dengan jumlah anggotanya masing-masing adalah p_1, p_2, p_3, hingga kelompok ke k dengan jumlah anggotanya p_k. Permutasinya dapat dituliskan sebagai,

$$\frac{n!}{p_1!\,p_2!\,p_3!\cdots p_k!}$$

dimana $n = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k$. Bentuk lain dari permutasi ini adalah ketika ingin menempatkan sejumlah n benda ke dalam r kelompok, dengan jumlah anggota tiap kelompoknya sebanyak n_1, n_2, n_3, hingga kelompok ke r dengan jumlah anggotanya n_r . perlu diketahui juga $n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r$. Penulisan untuk bentuk permutasi ini adalah,

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \cdots n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!}$$

Contoh:

1. Bila ada 10 buku yang terdiri atas 1 buku dengan kategori bahasa, 2 buku dengan kategori filsafat, 4 buku dengan kategori komputer dan 4 buku dengan kategori agama. Berapa banyak cara untuk menyusun buku berdasarkan kategorinya saja dalam satu baris pada rak buku!
   Jawab:
   Banyaknya kemungkinan susunan buku tersebut adalah,
   $$\frac{10!}{1!\,2!\,3!\,4!} = 12.600.$$
2. Tentukan berapa banyak cara untuk menempatkan 7 orang dalam tiga kamar hotel yang terdiri 1 kamar untuk 3 orang dan 2 kamar untuk 2 orang?
   Jawab:
   Banyaknya kemungkinan untuk menempatkan 7 orang dalam kamar yang tersedia adalah,
   $$\binom{7}{3, 2, 2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210.$$

Bentuk kejadian permutasi lainnya adalah pada sejumlah n benda yang tersusun dalam lingkaran yang permutasinya dituliskan sebagai $(n - 1)!$

Contoh:

Dalam sebuah rapat duduk 6 orang mengelilingi meja. Bila salah satu tempat ditempati oleh pimpinan rapat, berapa banyak susunan yang mungkin terjadi untuk menempatkan orang yang lainnya.

Jawab:

Banyaknya cara yang mungkin untuk kelima orang lainnya menempati duduk adalah $(6 - 1)! = 5! = 120$.

Contoh lainnya:

1. Dalam sebuah kelas terdiri atas 27 siswa dan 14 siswi. Apabila akan dipilih satu siswa dan satu siswi untuk mewakili kelas dalam lomba, berapa banyak cara untuk memilih siswa dan siswi tersebut.

   Jawab:

   Banyaknya cara untuk memilih seorang siswa dan seorang siswi dapat ditentukan dengan ${}^{27}P_1 * {}^{14}P_1 = 27 \times 14 = 378$
2. Terdapat delapan kursi yang diberi tanda dengan angka 1 hingga 8. Apabila ada dua wanita dan tiga pria yang masing-masing ingin duduk dikursi, dengan ketentuan, para wanita memilih lebih dulu pada kursi dengan nomor antara 1 hingga 4. Kemudian dilanjutkan oleh para pria dengan memilih sisa kursi yang tersedia. Tentukan jumlah kemungkinan susunan pemilihan kursi tersebut.

   Jawab:

   Dua wanita memilih dari kursi dengan nomor 1 – 4, ditentukan oleh ${}^{4}P_2$. Tiga pria memilih dari kursi yang tersisa ditentukan oleh ${}^{6}P_3$. Jumlah kemungkinan seluruh kejadiannya adalah, ${}^{4}P_2 \times {}^{6}P_3 = 12 \times 120 = 1440$.
3. Tentukan berapa banyak susunan suatu penanda yang dapat dibentuk apabila
   a. Terdiri atas dua huruf berbeda diikuti 3 angka yang berbeda!

b. Terdiri atas dua huruf diikuti 3 angka dengan diperbolehkan pengulangan!

Jawab:

a. Banyaknya penanda yang dapat dibentuk tanpa pengulangan adalah, ${}^{26}P_2 \times {}^{10}P_3 = 650 \times 720 =$ 468.000.

b. Banyaknya penanda yang dapat dibentuk dengan diperbolehkan pengulangan sebanyak, $26^2 \times 10^3 =$ $676 \times 1000 =$ 676.000.

4. Dari 50 siswa akan dipilih dua orang untuk mewakili lomba. Tentukan berapa banyak cara untuk memilihnya apabila,

   a. Tidak ada batasan,

   b. B dan C akan mewakili bila keduanya terpilih, dan

   c. D dan E tidak mau kalau besama-sama terpilih.

   Jawab:

   a. Pada saat tidak ada batasan, ${}^{50}P_2 = 50 \times 49 = 2450$.

   b. Untuk batasan B dan C akan mewakili bila keduanya terpilih. Pertama apabila keduanya terpilih jumlah cara memilihnya adalah 2. Kedua apabila keduanya tidak dipilih jumlah cara memilihannya adalah ${}^{48}P_2 = 48 \times 47 = 2256$. Sehingga, total cara yang memungkinkan untuk memilih dengan batasan ini adalah $2 + 2256 = 2258$, dan

   c. Untuk batasan D dan E tidak mau kalau besama-sama terpilih. Pertama adalah apabila kedua-duanya tidak terpilih bersamaan jumlah cara memilihnya adalah ${}^{48}P_2 = 48 \times 47 = 2256$. Apabila D yang terpilih ${}^{2}P_1 \times {}^{48}P_1 = 2 \times 48 = 96$. Serupa juga untuk E yang terpilih ${}^{2}P_1 \times {}^{48}P_1 = 2 \times 48 = 96$. Sehingga, total cara yang memungkinkan untuk memilih dengan batasan tersebut adalah $2\,(96) + 2256 = 2448$.

      Cara yang lebih singkatnya adalah menenjukan jumlah cara memilih dua perwakilan dari 50 siswa yaitu ${}^{50}P_2 = 2450$. Kemudian untuk terpilihnya D dan E bersamaan adalah ${}^{2}P_2 = 2$. Dengan demikian untuk total cara yang memungkinkan untuk memilih dengan batasan ini adalah $2450 - 2 = 2448$.

5. Apabila ada 3 pohon mangga, 4 pohon jambu dan 2 pohon belimbing yang akan disusun dipinggir jalan, tentukan banyaknya cara susunan menanamnya tanpa membedakan pohon dengan jenis yang sama!
   Jawab:
   Untuk menyusun dalam menanam pohon berdasarkan jenisnya, ditentukan dengan cara
   $$\frac{8!}{3!\,4!\,2!} = 140.$$

10.2 Kombinasi

Dalam banyak kejadian dalam penyusunan benda tidak dipermasalahkan, sehingga hanya mengambil sejumlah r benda dari n benda. Kombinasi merupakan pemilihan sejumlah benda atau seluruhnya pada saat susunan dari pemilihan tersebut tidak memperhatikan susunannya (Chuang-Chong and Khee-Meng, 1999; Bóna, 2004; Suksompong, 2008; Vardeman *et al.*, 2016; Tier, 2017; Mathai and Haubold, 2018; Blitzstein and Hwang, 2019; Kean-Pew and Mingyan-Simon, 2019). Notasi kombinasi mengambil sejumlah r benda dari n benda adalah ${}^{n}C_{r}$, dan diberikan dengan,

$${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}^{n}P_{r}/r!$$

Beberapa sifat kombinasi yang perlu diketahui, dengan n dan r adalah bilangan positif dimana $r \leq n$, yaitu:

1) ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$
2) ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$
3) $n\,{}^{n-1}C_{r-1} = (n-r+1)\,{}^{n}C_{r-1}$

Contoh:

1. Tentukanlah susunan yang terdiri dari 3 huruf berbeda diambil sekaligus dari dari 5 huruf yaitu ABCD dan E.
   Jawab:
   Untuk pemilihan 3 huruf dari 5 huruf dengan susunan yang berbeda ditentukan dengan ${}^{5}C_{3}$
   $$\frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$
2. Berapa banyak cara sebuah panitia yang terdiri dari 3 orang dapat dipilih dari 7 orang.

Jawab:
Dari persoalan ini panitia yang terdiri dari 3 orang tidak memiliki susunan yang terurut sehinga diselesaikan dengan kombinasi 3 dari 7 benda yang tersedia. Penyelesaiannya adalah ${}^{7}C_{3}$,

$$\frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35.$$

3. Dari 4 mahasiswa dan 7 mahasiswi akan diambil 2 mahasiswa dan 3 mahasiswi sebagai wakil dalam kepanitian acara di kampus. Tentukan banyaknya cara untuk memilihnya.
   Jawab:
   Untuk memilih 2 mahasiswa dari 4 mahasiswa ditentukan dengan ${}^{4}C_{2}$,

$$\frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

   Untuk memilih 3 mahasiswi dari 7 mahasiswi ditentukan dengan ${}^{7}C_{3}$,

$$\frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35.$$

   Sehingga, untuk banyak cara keseluruhannya adalah,
   ${}^{4}C_{2} \times {}^{7}C_{3} = 6 \times 35 = 210.$

10.3 Soal Latihan

1. Berapa banyak cara yang memungkinkan untuk 15 orang siswa menempati 15 tempat duduk yang tersedia dalam satu baris di bioskop.
2. Dalam proses memilih calon pegawai terdapat 10 kandidat yang memenuhi persyaratan. Pihak perusahaan akan memilih empat diantaranya. Berapa banyak yang memungkinkan untuk memilih calon pegawai tersebut dan disusun dari urutan pertama hingga urutan ke empat?
3. Ada 10 kuda yang berpartisipasi dalam pacuan. Jika memprediksikan kuda yang akan menempati posisi juara 1, 2 dan ke tiga, maka berapa banyak cara yang memungkinkan untuk susunan tersebut?

4. Apabila sebuah kata sandi dibuat terdiri dari 6 karakter yang dapat berisi angka dan huruf, tentukanlah berapa banyak cara yang memungkinkan untuk menyusun kata sandi tersebut, dimana,
    a. Angka dan huruf yang digunakan berulang.
    b. Angka dan huruf yang digunakan tidak boleh berulang.
5. Dimiliki angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.
    a. Tentukan berapa banyak angka yang terdiri atas 3 digit dapat dibentuk dari angka-angka tersebut dengan memperhatikan susunannya, dan setiap angka hanya dapat digunakan satu kali?
    b. Berapa banyak jumlah dari bilangan ganjilnya?
    c. Berapa banyak angka yang lebih besar nilainya dari 400?
6. Berapa banyak cara apabila ada 7 pohon yang berbeda akan ditanam secara melingkar?
7. Berapa banyak permutasi yang dapat dibentuk dari huruf-huruf yang terdapat pada kata KUKUKAKIKU?
8. Berapa banyak cara menempatkan pada 5 posisi pemain futsal dari 9 orang pemain yang ada dan dapat menempati posisi apa saja?
9. Dari 10 orang karyawan yang ada akan diberikan total hadiah 3 buah motor bagi yang beruntung. Berapa banyak cara untuk pengundiannya!
10. Disebuah *pet shop* terdapat 6 kucing. Berapa banyak cara untuk memilih 3 kucing yang akan diadopsi?
11. Dalam sebuah konser, seorang artis dapat menyanyikan 10 lagu. Pada suatu malam hanya dapat menyanyikan 7 lagu saja. Berapa banyak cara untuk memilih lagu yang akan dinyanyikan?
12. Dalam sebuah kotak berisikan 4 bola warna kuning, 3 bola warna merah dan 2 bola warna putih. Akan diambil 3 buah bola bersamaan. Tentukan berapa banyak cara apabila yang terambil 2 bola warna kuning dan 1 bola warna putih.

13. Dari satu set kartu poker, berapa banyak cara terambil 6 buah kartu tanpa memperhatikan kartu yang terambilnya.
14. Apabila diambil 3 buah buku secara acak dari rak yang terdiri 5 novel, 4 buku bahasa dan sebuah kamus, tentukan banyaknya cara yang terambil adalah dua novel dan 1 buku bahasa?

DAFTAR PUSTAKA

Blitzstein, J.K. and Hwang, J. (2019) *Introduction to Probability, Bayesian Statistics for Beginners*. Taylor & Francis.

Bóna, M. (2004) *Combinatorics of permutations*, *Combinatorics of Permutations*. Chapman & Hall/CRC.

Chuang-Chong, C. and Khee-Meng, K. (1999) *Principles and Techniques in Combinatorics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Kean-Pew, F. and Mingyan-Simon, L. (2019) *Principles and Techniques In Combinatorics Solutions Manual*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Mathai, A.M. and Haubold, H.J. (2018) *Probability and Statistics: A Course for Physicists and Engineers*. Walter de Gruyter GmbH.

Suksompong, P. (2008) *Introduction to Probability for Electrical Engineering*.

Tier, R. (2017) *Probability with Permutations and Combinations: A Deeper and More Thorough Look at the Fundamental Equations*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Vardeman, S.B. *et al.* (2016) *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*.

BAB 11
PELUANG

Oleh Nuryami

11.1 Pengertian Peluang

Peluang disebut juga probabilitas, dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) peluang diartikan kesempatan atau kebolehjadian. Peluang didefinisikan kemungkinan terjadinya suatu kejadian. Dalam kehidupan sehari-hari peluang bisa disebut dengan kemungkinan, kesempatan, atau perkiraan. Peluang suatu kejadian dapat digunakan untuk membantu dalam pengambilan keputusan. (Arnenda, 2021)

Chevalier de Mere merupakan seorang bangsawan Perancis tahun 1601-1665 yang pertama kali mengemukakan teori tentang peluang. Berawal dari Chevalier mengajukan beberapa pertanyaan kepada Blaise Pascal. Dari beberapa pertanyaan tersebut dikembangkan lebih lanjut oleh Pascal dan Fermat hingga jadi konsep peluang yang sekarang digunakan. (Lumbantoruan, 2019)

Harapan kejadian yang akan terjadi atau telah terjadi disebut peluang. Konsep kesempatan memiliki keterkaitan dengan peluang kejadian. Jika peluang yang diperoleh besar, berarti kesempatannya juga besar. Tetapi jika peluangnya kecil, maka kesempatan yang diperoleh juga kecil. Teori peluang ini merupakan cabang ilmu matematika yang berdasarkan konsep kombinatorik yang digunakan untuk ilmu statistika.

Peluang adalah ukuran kemungkinan suatu kejadian yang terjadi dalam suatu percobaan atau eksperimen yang dilaksanakan dalam kondisi tertentu. Hasil dari percobaan tersebut berupa kemungkinan-kemungkinan yang disebut hasil (outcome). Himpunan dari semua kemungkinan-kemungkinan hasil dari percobaan tersebut disebut ruang sampel (Sugiyarto, 2021)

Contoh yang sering dijumpai baik di buku-buku sekolah atau kejadian sehari-hari adalah undian, misalnya kupon hadiah barang yang dijual. Tiap orang yang memiliki kupon berkemungkinan untuk menang atau memiliki peluang untuk memperoleh hadiah. Contoh lain adalah ajang kompetesi, misalnya turnamen sepak bola, tiap kelompok pesebak bola yang mengikuti kompetesi memiliki peluang untuk menang. Pelemparan uang logam, ada kemungkinan muncul gambar atau angka. Dan pelemparan dadu, maka tiap mata dadu memiliki peluang yang sama untuk muncul (Sudigdo; *et al.*, 2007).

11.2 Manfaat Belajar Peluang

1. Membantu dalam Pengambilan Keputusan yang Tepat

   Mempelajari peluang digunakan untuk mencari kemungkinan-kemungkinan yang akan terjadi, sehingga dapat diambil sebagai pertimbangan pengambilan keputusan yang tepat. Tidak ada keputusan yang sudah pasti karena kehidupan yang selanjutnya tidak ada yang dapat memperkirakan.

2. Untuk Memperkirakan Hal yang Akan Terjadi

   Contohnya yang sering kita temui dalam kehidupan sehari-hari perkiraan terjadinya hujan dalam bentuk peluang baik secara kualitatif seperti “kemungkinannya kecil akan terjadi hujan esok hari”, atau dalam bentuk kuantitatif seperti “kemungkinan hujan esok hari sekitar 30%”. Jelas di sini bahwa berbicara mengenai peluang kita dihadapkan dalam suatu kondisi yang tidak pasti, akan tetapi kita hanya diberikan suatu petunjuk atau gambaran seberapa besar keyakinan kita bahwa suatu peristiwa bisa terjadi. Semakin besar nilai peluang yang dihasilkan dari suatu perhitungan maka semakin besar keyakinan kita bahwa peristiwa itu akan terjadi.

   Memang tidak bisa sepenuhnya mempercayai apa yang diprediksikan apa yang akan terjadi di masa depan. Karena kehidupan terutama masa depan merupakan kehendak dan rahasia Tuhan. Namun bila kita mempunyai prediksi maka dapat menghadapi apa yang sudah diprediksikan dengan baik.

3. Untuk Meminimalisir Kerugian

peluang digunakan untuk memprediksi apa yang akan terjadi selanjutnya, sehingga dapat juga memprediksi kerugian dan keuntungan. Dari prediksi tersebut kerugian dapat diminimalisir dengan melakukan pencegahan kerugian atas apa yang telah diprediksikan. Contohnya, penjual buah grosiran seperti buah *strawberry*, penjualan buah strawberry memiliki masa (waktu) yang terbatas, dalam arti jika tidak terjual pada hari pengiriman, maka tidak akan laku dijual pada hari berikutnya. Jika diandaikan harga pengambilan satu keranjang strawberry adalah $20, dan grosir akan menjualnya dengan harga $50 satu keranjang. Berapa keranjangkah persediaan yang perlu diambil setiap hari oleh grosir agar mendapat resiko kerugian minimum, atau agar mendapat keuntungan maximum? Hal ini dapat diselesaikan dengan konsep peluang.

4. Digunakan di Ilmu Ekonomi

Ilmu aktuaria merupakan ilmu gabungan antara ilmu peluang, matematika, statistika, keuangan, dan pemrograman komputer. Aktuaria adalah disiplin formal yang mempelajari tentang asuransi jangka panjang, seperti asuransi hidup dan asuransi kesehatan. Tanpa bermaksud menentang tuhan, aktuaria berusaha menjabarkan dengan baik rumus-rumus kapan seseorang harus melakukan klaim terhadap asuransinya, sehinnga aktuaria mampu mendeskripsikan rumus-rumus untuk menghitung nilai premi dan nilai klaim secara analitis, bukan intuisi. Sehingga perusahaan asuransi mencapai keuntungan tanpa merugikan pelanggan.

Penelitian terbaru menunjukkan bahwa aktuaria tdak hanya dapa diaplikasikan pada asuransi, melainkan pada analisis kriminologi. Model-model aktuaria mampu mendeskripsikan dengan baik peluang pelaku dengan tipe tindakan kriminal, usia, tingkat pendidikan dan etnis si pelaku.

5. digunakan dalam Ilmu Psikologi

Psikologi memang ilmu sosial tetapi bukan berarti didalam psikologi tidak menggunakan ilmu matematika. Biasanya model matematika yang sering dipergunakan itu adalah statistik. Tetapi bukan berarti model matematika yang lain tidak dipergunakan. Di sini saya mau menjabarkan tentang model matematika yaitu peluang. Di SMP dan di SMA tentu saja kita sudah mempelajari peluang (Yuniarti, 2020).

11.3 Konsep Dasar Peluang

Sebelum lebih dalam mempelajari tentang peluang, beberapa istilah yang perlu dipahami, yaitu

1. Percobaan

   Suatu kegiatan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk mendapat hasil tertentu. Hasil yang diperoleh dalam suatu percobaan tidak bisa dipastikan atau diramalkan. Segala proses yang dilakukan untuk memperoleh data dan dapat dilakukan secara berulang-ulang disebut juga percobaan (Arliani, 2006). Percobaan yang paling sederhana pelemparan dua koin dan pelemparan dadu.

2. Ruang sampel

   Himpunan yang anggota-anggotanya hasil dari percobaan-percobaan yang telah dilakukan disebut ruang sampel. Biasanya ruang sampel dilambangkan dengan huruf S. Anggota-anggota dari S ini disebut titik sampel. Sedangkan banyaknya anggota dari S ini disebut n(S). Untuk menentukan ruang sampel ada tiga cara yang dapat dilakukan yaitu;

   a) Menentukan ruang sampel dengan cara mendaftar. Contohnya pada pelemparan dua uang logam secara bersamaan. Kejadian-kejadian yang mungkin muncul tersebut disebut ruang sampel dan dapat didaftarkan seperti ini S = {AA, AG, GA, GG}, dengan n(S)= 4

   b) Menentukan ruang sampel dengan membuat tabel.

I \ II	A	G
A	AA	AG
G	GA	GG

   Jadi, ruang sampel nya adalah S = {AA, AG, GA, GG}, dengan n(S) = 4

   c) Menentukan ruang sampel dengan diagram pohon

$$A \begin{cases} \to A\ (A,A) \\ \to G\ (A,G) \end{cases} \qquad G \begin{cases} \to A\ (G,A) \\ \to G\ (G,G) \end{cases}$$

Jadi, ruang sampelnya adalah S = { AA, AG, GA, GG}

3. Kejadian sederhana dan kejadian majemuk

Semua anggota yang ada di himpunan ruang sampel merupakan kejadian atau peristiwa. Kejadian sederhana terjadi jika hanya memuat satu titik sampel. Jika memuat dua atau lebih titik sampel maka disebut kejadian majemuk.

Peristiwa sederhana : dalam himpunan raung sampel hanya terdiri 1 elemen atau 1 kejadian.

Peristiwa bersusun/majemuk : dalam ruang terdapat beberapa peristiwa atau kejadian sehingga memuat beberapa elemen didalamnya, gabungan dari beberapa peristiwa sederhana.

Jika hasil suatu percobaan termasuk dalam suatu himpunan, maka peristiwa tersebut telah terjadi.

Himpunan kosong Ø termasuk kejadian, tetapi disebut sebagai kejadian yang tidak mungkin terjadi (Kusrini, no date).

Contoh:

Untuk percobaan/pengamatan jenis kartu, ruang sampelnya adalah {heart, spade, club, diamond}, maka A = {heart} adalah kejadian sederhana, sedangkan B = {heart, diamond} adalah kejadian majemuk.

Sebaliknya, jika S = {seluruh 52 buah kartu yang dilihat satu persatu}, maka A = {semua kartu heart} adalah kejadian majemuk.

11.4 Peluang Suatu Kejadian

11.4.1 Pengertian Peluang Suatu Kejadian

Peluang adalah kejadian yang mungkin terjadi. Setiap kejadian nilai peluang/kemungkinannya antara 0 sampai 1. Nilai peluang merupakan desimal atau pecahan.

a. Jika nilai peluang 0, maka memiliki arti kejadian tersebut tidak mungkin terjadi atau mustahil terjadi. Contohnya ayam melahirkan
b. Jika nilai peluangnya 1, maka memiliki arti kejadian tersebut pasti terjadi. Contohnya manusia pasti makan dan minum.

11.4.2 Menghitung Peluang Suatu Kejadian

Hasil dari suatu percobaan yang mungkin terdapat n dan setiap kemungkinan tersebut memiliki peluang yang sama untuk muncul. Jika dalam suatu percobaan terdapat kejadian A, peluang kejadian A dapat ditentukan menggunakan rumus berikut :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{banyaknya\ anggota\ kejadian\ A}{banyaknya\ anggota\ ruang\ sampel}$$

P(A) = peluang kejadian A

Contoh 1

Pada pelemparan tiga buah uang secara bersamaan, tentukan peluang munculnya

a) Ketiga sisi angka
b) 1 gambar dan 2 angka

Jawaban :

S = {AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG}
Maka n(S) = 8

a) Misalnya, kejadian ketiga sisi angka adalah A = {GGG} maka n(A) = 1.
   $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$
b) Misalnya, 1 gambar dan 2 angka adalah B = {AAG, AGA, GAA} maka n(B) = 3
   $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

Contoh 2

Arumi mengikuti acara lari santai dengan doorprize yang disediakan adalah 4 buah sepeda motor. Acara tersebut diikuti oleh 800 orang. Berapakah peluang Firman untuk mendapatkan doorprize sepeda motor?

Jawaban :

S = semua peserta lari santai maka n(S) = 800 orang
Misalkan kejadian Firman memperoleh motor disebut kejadian A
A = {motor1, motor2, motor3, motor4} maka n(A) = 4
$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{800} = \frac{1}{200}$
Jadi, peluang Firman mendapatkan doorprize sepeda motor adalah $\frac{1}{200}$

Contoh 3

Suatu kotak berisi 4 bola hitam dan 6 bola putih. Dari kotak itu diambil dua bola sekaligus secara acak. Hitunglah peluang yang terambil :

1) Keduanya bola berwarna hitam;
2) Keduanya bola berwarna putih.

Jawaban :

Bola hitam = 4, bola putih = 6. Dipilih 2 bola, maka:

n(S) = C(10, 2) = $\frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!2!} = 45$

1) Misalkan, A = kejadian terambil keduanya bola berwarna hitam.

   n(A) = C(4,2) = $\frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = 6$

   P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

   Jadi, peluang yang terambil bola keduanya hitam adalah $\frac{2}{15}$

2) Misalkan, B = kejadian terambil keduanya bola berwarna putih.

   n(B) = C(6,2) = $\frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!2!} = 15$

   P(B) = $\frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

   Jadi, peluang yang terambil bola keduanya putih adalah $\frac{1}{3}$

Contoh 4

Jika dua buah dadu dilempar secara bersamaan selama satu kali. A merupakan kejadian bahwa jumlah mata kedua dadu yang muncul sama dengan 5. Kejadian-kejadian yang mungkin terjadi dari pelemparan kedua dadu tersebut adalah

		Dadu 2					
		1	2	3	4	5	6
Dadu 1	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Titik sampel dari kejadian tersebut adalah pasangan-pasangan mata dadu yang mungkin muncul dari pelemparan kedua dadu tersebut. Titik sampel (a, b) artinya a merupakan mata dadu yang muncul pada dadu 1 dan b merupakan mata dadu yang muncul di dadu 2.

Jadi ruang sampelnya adalah : S = {(1,1), ...(6,6)} dan n(S) = 36

A = kejadian muncul jumlah mata dadu 5 = {(4,1), (3,2), (2,3), (1,4)} dan n(A) = 4

Maka peluang kejadian A = P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

11.4.3 Komplemen dari Peluang Suatu Kejadian

Peluang komplemen dari suatu kejadian adalah suatu kejadian yang berlawanan dengan kejadian yang ada. Komplemen dari kejadian A merupakan himpunan dari seluruh kejadian yang tidak termasuk kedalam anggota himpunan A. Komplemen dari suatu kejadian dapat ditulis A^c .

Jika P(A) merupakan peluang kejadian A pada ruang sampel S, berlaku hubungan sebagai berikut:

P(A) + P(A') = 1

Contoh 1

Sebuah dadu bermata 6 dilambungkan sekali. Tentukan peluang muncul mata dadu bukan prima.

Jawaban

Misalnya A = kejadian muncul mata dadu prima

A = {2,3,5}; n(A) = 3

Berarti,

P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dengan demikian,

P(A) + P(A') = 1

$\frac{1}{2}$ + P(A') = 1

P(A') = $\frac{1}{2}$

Jadi, peluang muncul mata dadu bukan prima adalah $\frac{1}{2}$

Contoh 2

Dalam sebuah kantong terdapat 10 bola, yaitu 3 bola merah, 2 bola putih, dan sisanya bola biru. Tentukan peluang terambil bola tidak berwarna putih.

Jawaban

n(S) = 10; n(merah) = 3; n(putih) = 2; n(biru) = 5

berarti,

P (putih) = $\frac{n(putih)}{n(S)}$ = $\frac{2}{10}$ = $\frac{1}{5}$

Dengan demikian,

P(putih) + P(bukan putih) = 1

P(bukan putih) = 1 - $\frac{1}{5}$ = $\frac{4}{5}$

11.4.4 Frekuensi Harapan

Banyaknya kejadian yang diharapkan dalam suatu percobaan disebut frekuensi harapan dilambangkan F_h (A). Jika P(A) merupakan peluang kejadian A pada ruang sampel S, frekuensi harapan kejadian A dari n kali percobaan dirumuskan sebagai berikut.

F_h (A) = n × P(A)

Contoh

Tiga keping uang logam dilambungkan secara bersamaan. Jika percobaan dilakukan sebanyak 120 kali, tentukan frekuensi harapan muncul ketiganya gambar.

Jawaban

n (S) = { (AAA), (AAG), (AGA), (AGG), (GAA), (GAG), (GGA), (GGG)}

P (A) = $\frac{n(A)}{n(S)}$ = $\frac{1}{8}$

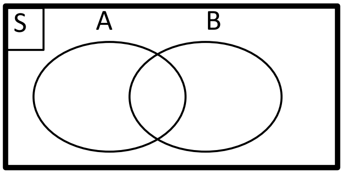
F_h (A) = n × P(A) = 120 × $\frac{1}{8}$ = 15

Jadi, frekuensi harapan muncul ketiganya gambar adalah 15 kali.

11.5 Peluang Dua Kejadian

11.5.1 Peluang Gabungan Dua Kejadian

Gabungan (union) merupakan kejadian A dan kejadian B yang anggota-anggota nya adalah anggota A atau anggota B. Biasanya dilambangkan dengan $A \cup B$.



Pada gambar diatas, gabungan kejadian A dan B merupakan semua daerah A dan B. Menurut teori himpunan $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Oleh karena itu, peluang gabungan kejadian A dan kejadian B dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$P(A \cup B)$ = peluang kejadian A atau B dan $P(A \cap B)$ = peluang kejadian A dan B.

Contoh

Dalam sebuah kotak terdapat 10 kartu berukuran sama yang diberi nomor 1 sampai 10. Jika diambil sebuah kartu secara acak, berapakah peluang terambil kartu bernomor genap atau prima.

Jawaban

S = {1, 2, 3, ..., 10}; n(S) = 10

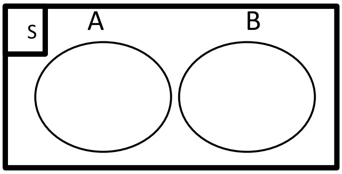
Misalnya, A = kejadian terambil kartu bernomor genap dan B = kejadian terambil kartu bernomor prima. Dengan demikian, A = {2, 4, 6, 8, 10}; n(A) = 5 dan B = {2, 3, 5, 7}; n(B) = 4.

Dalam hal ini, $A \cap B = \{2\}$. Berarti $n(A \cap B) = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Jadi, peluang terambil kartu bernomor genap atau prima adalah $\frac{4}{5}$

11.5.2 Peluang gabungan Dua Kejadian Saling Lepas



Pada gambar diatas $A \cap B = \emptyset$. Berdasarkan gambar diatas, kejadian A dan B dikatakan saling asing atau saling lepas karena dua kejadian tersebut tidak mungkin terjadi bersama-sama. Karena $A \cap B = \emptyset$ maka $n(A \cap B) = 0$ dan $P(A \cap B) = 0$. Rumus dari peluang gabungan kejadian A dan kejadian B yang saling lepas adalah

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Dengan $P(A \cup B)$ = peluang kejadian A atau B

Contoh

Dua dadu dilambungkan bersama-sama. Tentukan peluang muncul mata dadu berjumlah dua atau mata dadu pertama genap.

Jawaban

Misalnya, A = kejadian muncul mata dadu berjumlah 2 dan B = kejadian muncul mata dadu pertama genap

$A = \{(1,1)\}$; $n(A) = 1$

$B = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$; $n(B) = 18$

Berdasarkan soal tersebut $A \cap B = \emptyset$ berarti $n(A \cap B) = 0$. Oleh karenanya dapat disimpulkan kejadian A dan B saling lepas.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{18}{36} = \frac{19}{36}$

Jadi, peluang muncul mata dadu berjumlah dua atau mata dadu pertama genap adalah $\frac{19}{36}$

11.5.3 Peluang Dua Kejadian Saling Bebas

Dua kejadian yaitu kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika kemunculan kejadian yang satu tidak dipengaruhi kejadian yang lain. Kejadian saling bebas dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Contoh

Dalam sebuah kantong terdapat 4 bola hitam dan 6 bola putih. Sebuah bola diambil secara acak, kemudian dikembalikan lagi kedalam kantong. Selanjutnya, sebuah bola diambil lagi secara acak. Berapakah peluang terambil keduanya bola putih ?

Jawaban

N(S) = 10

Misalnya,

A = Kejadian terambil bola putih pada pengambilan pertama

B = Kejadian terambil bola putih pada pengambilan kedua.

Berdasarkan soal tersebut, A dan B saling bebas karena terjadinya A tidak mempengaruhi terjadinya atau tidaknya B.

$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ dan $P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Dengan demikian,

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

Jadi, peluang terambil keduanya bola putih adalah $\frac{9}{25}$

Peluang Kejadian Bersyarat

Kejadian bersyarat merupakan kebalikan atau lawan dari kejadian saling bebas. Dalam kejadian bersyarat kemunculan kejadian yang satu memengaruhi kejadian yang lain. Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B telah muncul dirumuskan sebagai berikut :

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Dengan P(A/B) = kejadian A dengan syarat kejadian B telah muncul dan $P(B) \neq 0$.

Contoh

Dua dadu bermata 6 dilempar bersama-sama. Jika angka yang muncul pada kedua dadu berjumlah 5, tentukan peluang angka 1 muncul pada salah satu dadu.

Jawaban

Dua dadu bermata 6 dilempar bersama-sama.

n(S) = 36

Misalnya,

A = kejadian muncul mata dadu berjumlah 5

= {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}; n(A) = 4

B = kejadian muncul angka 1 pada salah satu mata dadu

= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)};

n(B) = 11

A ∩ B = {(1,4), (4,1)}

n(A ∩ B) = 2

Dengan demikian,

P(A/B) = $\frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(B)} = \frac{2}{36} \times \frac{36}{4} = \frac{1}{2}$

Jadi, peluang angka 1 muncul pada salah satu dadu adalah $\frac{1}{2}$

DAFTAR PUSTAKA

Arliani, elly (2006) *Peluang*. Yogyakarta.

Arnenda, T. (2021) *Matematika untuk SMA/MA Kelas XII*. Surakarta: Putra Nugraha.

Kusrini (no date) ‘Konsep Dasar Peluang’, in *Statistika matematik*.

Lumbantoruan, J. H. (2019) *Buku Materi Pembelajaran Teori Peluang Dan Kombinatorika*. Jakarta.

Sudigdo; *et al.* (2007) *Matematika untuk SMP dan MTs Kelas IX*. Edited by S. Sarah and O. Heriyani. Jakarta: PT Grasindo.

Sugiyarto (2021) *Pengantar Statistika Matematika 1*. 1st edn. Yogyakarta: Magnum Pustaka Utama.

Yuniarti, Y. S. (2020) *Modul Pembelajaran SMA : Matematika Umum*. Karawang.

BAB 12
PENGELOLAAN DATA

Oleh Rintis Rizkia Pangestika

12.1 Pendahuluan

Pada kehidupan sehari-hari kita selalu berkaitan dengan yang dinamakan data. Data yang diperoleh dan dikumpulkan oleh kita disesuaikan dengan kebutuhan. Cara memproleh data dan menyajikan data juga memiliki macam jenis yang berbeda-beda. Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Anda dapat menjelaskan pengumpulan dan penyajian data. Berikut penjelasan terkait materi pengelolaan data.

12.2 Pengertian Data

Setiap hari media massa seperti televisi, media sosial, koran, dan radio selalu menampilkan berbagai macam informasi terkait kondisi yang ada di sekitar kita. Contohnya, informasi terkait dengan banyaknya warga Indonesia yang terkena Covid-19, persentase warga negara Indonesia yang sudah vaksin 1, 2, maupun booster, banyaknya pengusaha yang terdampak karena pandemi Covid-19 dan data yang lainnya. Selain, data yang ada di media massa, kita juga dapat memperoleh data yang terjadi di sekitar rumah kita. Misalnya, data pengeluaran kebutuhan keluarga dalam satu bulan, data penggunaan kuota internet dalam keluarga, dan lain sebagainya. Informasi-informasi yang kita dapat akan mempengaruhi kita dalam pengambilan keputusan, semakin data valid dan akurat semakin tepat dalam pengambilan keputusan.

Data dapat dikatakan baik apabila memenuhi beberapa persyaratan berikut (Fioiani, 2021).

1. Objektif, yaitu data yang dikumpulkan harus dapat mendeskripsikan keadaan yang sebenarnya.
2. Relevan, yaitu data yang dikumpulkan mempunyai kaitan dengan permasalahan yang sedang dibahas.

3. Sesuai zaman (*up to date)*, yaitu data tidak boleh ketinggalan zaman.
4. Representatif, yaitu data yang dikumpulkan melalui teknik sampling.
5. Harus dapat mewakili dan menggambarkan keadaan populasinya.
6. Dapat dipercaya, yaitu data yang dikumpulkan diperoleh dari sumber data yang tepat.

12.3 Jenis Data

Jenis data didasarkan dari sifat data, cara memperolehnya, dan sumber data.

12.3.1 Menurut Sifat Data

Data menurut sifatnya dapat digolongkan menjadi dua, yaitu data kuantitatif dan data kualitatif (Sufyaniprabawant, 2018). Data kuantitatif adalah data yang berupa angka atau bilangan. Contoh data kuantitatif yaitu nilai, tinggi badan, berat badan, jumlah orang, dan lain-lain. Data kualitatif adalah data yang bukan berupa angka (Sukarsa *et al.*, 2015). Contoh data kualitatif adalah jenis kelamin, agama, dan lain-lain.

Data kuantitatif diklasifikasikan menjadi dua yaitu data diskrit dan data kontinu (Fioiani, 2021). Data diskrit adalah data yang diperoleh dengan cara menghitung atau membilang. Contohnya, banyaknya siswa kelas V SD Negeri Sukajaya ada 30 siswa. Data kontinu adalah data yang diperoleh dengan cara mengukur. Contohnya, tinggi badan, berat badan, dan lain-lain.

12.3.2 Menurut Cara Memperolehnya

Menurut cara memperolehnya, data diklasifikasikan menjadi dua jenis, yaitu data primer dan data sekunder. Dara primer adalah data informasi yang diperoleh dari informan pertama yang dikumpulkan secara langsung oleh pengambil data. Data sekinder adalah data yang didapatkan secara tidak langsung (Sari, M. S., & Zefri, 2019). Contoh data primer yaitu nilai yang diperoleh guru ketika memberikan tes ke siswanya.

Contoh data sekunder yaitu data rata-rata nilai ujian nasional seluruh Indonesia.

12.3.3 Menurut Sumber Data

Data dapat diklasifikasikan menjadi data internal dan data eksternal. Data internal adalah data yang menggambarkan keadaan dalam suatu organisasi itu sendiri. Contoh data internal yaitu dalam suatu sekolah ada data guru, data siswa, dan lain-lain. Data eksternal adalah data yang menggambarkan keadaan di luar organisasi tersebut. Contoh data eksternal yaitu data yang menggambarkan faktor-faktor yang mempengaruhi suatu sekolah misal data pendapatan orang tua siswa, data pekerjaan orang tua siswa, dan lain sebagainya (Fioiani, 2021).

12.4 Pengumpulan Data

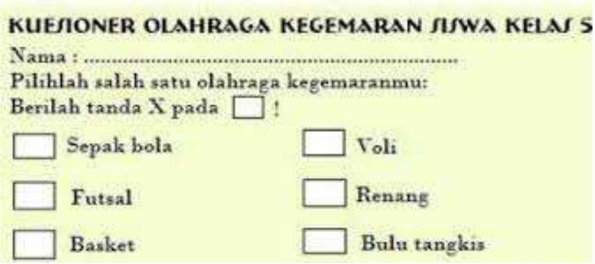
Data dapat diperoleh melalui percobaan (data primer) maupun bukan percobaan (data sekunder). Pengumpulan data dapat dilakukan dengan berbagai cara, antara lain sebagai berikut :

12.4.1 Pencatatan Langsung

Data dari hasil pencatatan langsung dapat diperoleh melalui wawancara, penelitian, atau pengukuran. Contoh pengumpulan data dengan cara pencatatan langsung, misalnya data hasil perolehan suara pemilihan ketua kelas, data hasil wawancara nomor sepatu teman di kelas, atau data hasil pengukuran tinggi badan siswa di kelas.

12.4.2 Kuesioner atau Angket

Kuesioner atau angket disebut juga lembar isian. Pengumpulan data ini dilakukan dengan cara meminta narasumber mengisi lembar isian sesuai data diri. Contoh kuesioner:



Gambar 42. Contoh Kuisioner
Sumber: https://www.ima-jateng-diy.com

12.5 Penyajian Data

12.5.1 Tabel Distribusi Frekuensi

Tabel distribusi frekuensi biasanya digunakan untuk data yang jumalhnya banyak atau besar. Jika data kuantitatif dapat disusun menjadi beberapa kelompok maka akan diperoleh daftar distribusi frekuensi. Distribusi frekuensi merupakan penyusunan data yang dimulai dari yang terkecil sampai dengan yang terbesar yang membagi banyaknya data dapam beberapa kelas. Sedangkan tabel frekuensi adalah tabel yang menunjukkan banyaknya frekuensi dari suatu kejadian. Maka tabel distribusi frekuensi yaitu statistika untuk menyusun data dengan cara membagi nilai pengamatan ke dalam kelas-kelas dengan interval tertentu (Doko, 2021).

Langkah-langkah menyusun tabel frekuensi adalah sebagai berikut:

1. Tentukan daerah jangkauan (Range) = R
   R = data terbesar – data terkecil
2. Tentukan banyaknya kelas/kelompok
   K = 1 + 3,3 log n
3. Tentukan interval kelas
   I = $\frac{R}{K}$
4. Tentukan batas kelas
5. Tentukan tepi kelas
   Tepi atas kelas = batas kelas + 0,5
   Tepi bawah kelas = batas bawah kelas – 0,5

12.5.2 Grafik

Grafik adalah lukisan pasang surutnya sutau keadaan yang ditunjukkan dengan garis atau gambar. Bentuk grafik antara lain histogram, poligon, ogive.

1. Histogram
   Histogram merupakan diagram frekuensi bertangga yang berbentuk batang-batang berhimpit.
2. Poligon
   Poligon adalah grafik garis yang menghubungkan nilai tengah tiap sisi atas yang berdekatan dengan nilai tengah jarak frekuensi mutlak masing-masing.
3. Ogive
   Ogive adalah jika garis poligon dijadikan kurva yang terdiri dua macam yaitu ogive positif dan ogive negatif.

12.5.3 Diagram

Diagram adalah gambaran untuk menerangkan data yang disajikan. Jenis diagram yaitu:

1. Diagram Batang
   Diagram batang digunakan untuk menyajikan data yang bersifat kategori atau distribusi.
2. Diagram Garis
   Diagram garis biasanya digunakan untuk menggambarkan keadaan yang terus menerus atau berkelanjutan dalam kurun waktu kertentu.
3. Diagram Lingkaran
   Diagram lingkaran biasanya digunakan untuk penyajian data yang berbentuk kategori yang dinyatakan dalam persentase.

**Untuk gambar penyajian dapat menggunakan Ms. Excel*

12.6 Membaca dan Menafsirkan Data

Data dapat lebih mudah dibaca dan dipahami jika telah disajikan dalam bentuk daftar, tabel, atau diagram. Membaca data berarti menyebutkan informasi yang ada pada data. Menafsirkan data berarti mencari informasi lain yang tidak tertulis pada data, misalnya data tertinggi, data terendah, jumlah data, dan selisih data.

12.6.1 Membaca dan Menafsirkan Data dalam bentuk Daftar

Diketahui tinggi badan (dama cm) 10 siswa kelas V sebagai berikut:

127 123 119 125 130 127 135 135 130 119

Informasi yang dapat kita peroleh dari data di atas adalah sebagai berikut:

1. Siswa dengan tinggi badan 119 cm ada 2 orang, 123 cm ada 1 orang, 125 cm ada 1 orang, 127 cm ada 2 orang, 130 cm 2 orang, 135 cm ada 2 orang.
2. Tinggi badan siswa tertinggi adalah 135 cm dan terendah adalah 119 cm

12.6.2 Membaca dan Menarsirkan Data dalam Bentuk Tabel

Perhatikan tabel berikut!

Tabel 6. Jumlah Siswa Kelas V Di Setiap Desa

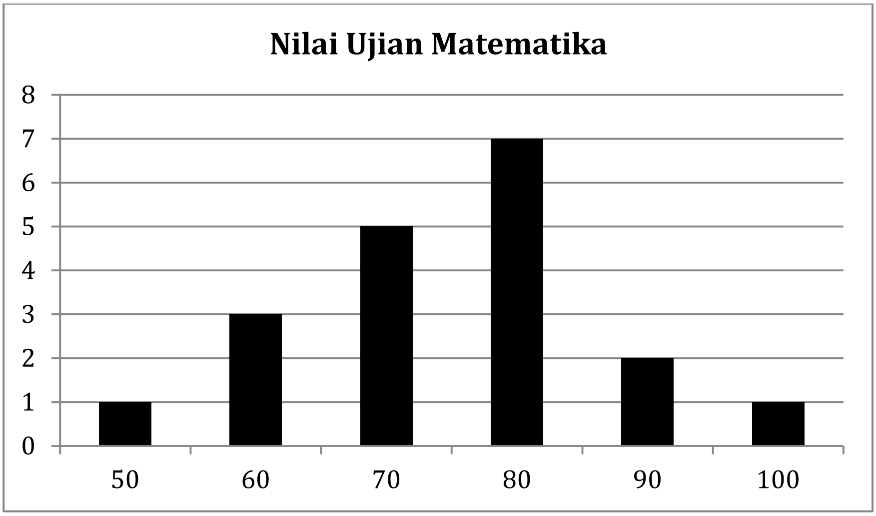
Nama Desa	Jumlah Siswa
Sukamaju	7 orang
Sukajaya	4 orang
Mandiraja	8 orang
Setia Budi	5 orang

Informasi yang dapat kita peroleh dari tabel di atas adalah sebagai berikut:

1. Jumlah siswa kelas V di Desa Sukamaju ada 7 orang, Desa Sukajaya ada 4 orang, Desa Mandiraja ada 8 orang, Desa Setiabudi ada 5 orang.
2. Jumlah siswa kelas V paling banyak ada di Desa Mandiraja.
3. Jumlah seluruh siswa V adalah 24 orang.

12.6.3 Membaca dan Menafsirkan Data dalam Bentuk Diagram Batang

Pada diagram batang, tinggi batang-batang persegi panjang menunjukkan banyaknya data. Perhatikan contoh berikut.



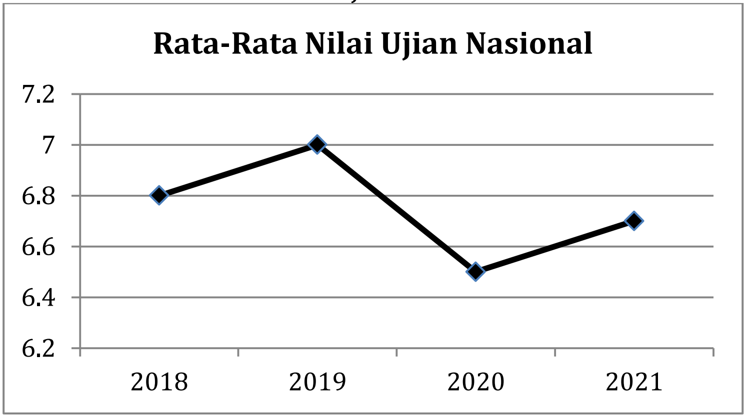
Gambar 43. Contoh Diagram Batang

Informasi yang dapat kita peroleh dari diagram batang di atas adalah sebagai berikut:

1. Banyak siswa yang memperoleh nilai 50 ada 1 siswa, 60 ada 3 siswa, 70 ada 5 siswa, 80 ada 7 siswa, 90 ada 2 siswa, dan 100 ada 1 siswa.
2. Siswa paling banyak mendapatkan nilai 80 dan paling sedikit mendapat nilai 50.
3. Jumlah siswa seluruhnya adalah 19 siswa.

12.6.4 Membaca dan Menafsirkan Data dalam Bentuk Diagram Garis

Pada diagram garis, banyaknya data ditunjukkan dengan titik-titik yang dihubungkan menjadi garis. Diagram garis biasanya menunjukkan data perkembangan atau pertumbuhan suatu hal secara berkelanjutan. Perhatikan contoh berikut.



Gambar 44. Grafik Rata-Rata Nilai Ujian Nasional

Informasi yang dapat kita peroleh dari diagram di atas adalah sebagai berikut :

1. Banyak siswa yang memperoleh nilai 50 ada 1 siswa, 60 ada 3 siswa, 70 ada 5 siswa, 80 ada 7 siswa, 90 ada 2 siswa, dan 100 ada 1 siswa.
2. Siswa paling banyak mendapatkan nilai 80 dan paling sedikit mendapat nilai 50.
3. Jumlah siswa seluruhnya adalah 19 siswa.

12.6.5 Membaca dan Menafsirkan Data dalam Bentuk Diagram Lingkaran

Pada setiap bagian lingkaran menunjukkan banyaknya data yang dituliskan dalam satuan persentase atau besar sudut. Perhatikan contoh berikut.

Gambar 45. Diagram Lingkaran

Informasi yang dapat kita peroleh dari diagram lingkaran di atas adalah:

1. Banyaknya hasil panen Desa Sukatani pada:

   Tahun 1996 : $\frac{20}{100} \times 200 = 40 ton$

   Tahun 1997 : $\frac{17,5}{100} \times 200 = 35 ton$

   Tahun 1998 : $\frac{15}{100} \times 200 = 30 ton$

   Tahun 1999 : $\frac{22,5}{100} \times 200 = 45 ton$

   Tahun 2000 : $\frac{25}{100} \times 200 = 50 ton$
2. Hasil panen terbanyak ada di tahun 2000 yaitu sebanyak 50 ton.
3. Hasil panen terkecil ada di tahun 1998 yaitu sebanyak 30 ton.

DAFTAR PUSTAKA

Doko, M. Y. E. (2021) *Modul materi statistika*. Fatelue: SMA Negeri 1 Fatelue.

Fioiani, A. D. (2021) 'Pembelajaran 5. Statistika dan Peluang', in *Modul Belajar Mandiri Matematika*. Kemendikbud, pp. 135–180.

Sari, M. S., & Zefri, M. (2019) 'Pengaruh Akuntabilitas, Pengetahuan, dan Pengalaman Pegawai Negeri Sipil Beserta Kelompok Masyarakat (Pokmas) Terhadap Kualitas Pengelolaan Dana Kelurahan Di Lingkungan Kecamatan Langkapura', *Jurnal Ekonomi*, 21(3), pp. 308–315. Available at: https://ejournal.borobudur.ac.id/index.php/1/article/view/608/583.

Sufyaniprabawant, H. (no date) 'Pembelajaran pengelolaan data', in, pp. 1–25.

Sukarsa, I. K. G. D. E. *et al.* (2015) *Statistika dasar*. Udayana: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana.

BAB 13
PEMECAHAN MASALAH

Oleh Ima Mulyawati

13.1 Pendahuluan

Dalam pembelajaran matematika, aspek pemecahan masalah merupakan bagian yang tak terpisahkan. Banyak para ahli mendefinisikan pemecahan masalah dalam bentuk soal cerita, membuat pola dalam matematika, menginterpretasikan gambar serta tabel, serta membuktikan teorema dengan postulat dan sebagainya. Pemecahan masalah ini menggunakan suatu proses dinamis untuk menggunakan pengetahuan ke dalam situasi yang baru.

13.2 Pengertian Masalah

Masalah merupakan bagian yang tidak dapat dihindari dalam kehidupan manusia. Masalah ini dapat menjadi kendala apabila masalah tesebut tidak dicarikan solusi yang tepat dalam penyelesaian. Dalam menyelesaikan permasalahan, setiap orang memiliki cara tersendiri agar masalah tersebut selesai.

Masalah harus diselesaikan atau dicari solusinya. Kita tidak dapat menghindar dari permasalahan. Pertanyannya sebenarnya masalah di matematika itu seperti apa. Apakah yang menjadi gambaran dalam masalah. Pertanyaan dapat di katakan menjadi masalah jika seperti apa. Masalah dinyatakan dengan beberapa pendapat menurut para ahli.

Menurut Polya (1978), *problem to find only not to "problem to prove", if we have a problem is different question see problem to find, or problem to prove.* Menurut VanGundy (2005), *problem in term difficult obstacle or goal to overcoam, instead, involve a seriesprocess to apply and evaluate*. Hal yang sama juga diutarakan oleh Wahyudi and Anugraheni (2017), masalah tidak dapat diselesaikan atau dipecahkan dengan prosedur rutin menjadi tantangan dalam pembelajaran matematika.

Berdasarkan pendapat dari para ahli tersebut maka masalah merupakan prosedur dalam penyelesaian yang melibatkan proses untuk menyelesaikan suatu persoalan yang tidak rutin. Permasalahan bagi seseorang merupakan hambatan dalam memperoleh tujuan. Situasi dalam permasalahan ini berbeda setiap individu.

Definisi yang diuraikan tentang masalah di atas menjadi rujukan dalam buku ini. Sehingga yang di maksud pemecahan masalah dalam buku ini meliputi soal berupa pertanyaan yang mencangkup situasi siswa dan menjadi tantangan bagi siswa dalam menyelesaikan persoalan matematika dengan prosedur tertentu.

Suatu pertanyaan dapat menjadi masalah jika dalam menyelesaikan persoalan orang tersebut tidak memiliki prosedur yang benar untuk menemukan jawaban. Dapat dilihat bahwa dalam proses pemecahan masalah merupakan aktivitas mental tertinggi bagi siswa. Hal ini menumbuhkan proses berpikir bagi siswa agar tertantang dalam menyelesaikan permasalahan. Hal yang perlu dipahami adalah pertanyaan akan menjadi masalah jika tergantung individu dan waktu. Artinya, persoalan siswa dalam menangani permasalahan akan berbeda. Bagi siswa yang satu akan menjadi masalah berbeda dengan siswa yang lain. Masalah dapat juga berlaku saat itu juga. Artinya, jika siswa sudah memperoleh prosedur penyelesaian untuk pertanyaan tertentu maka pertanyaan yang diajukan sudah tidak dapat disebut masalah. Siswa dapat menyelesaikan persoalan dengan prosedur yang dipilih.

13.3 Pengertian Pemecahan Masalah

Menurut Branca dalam Sumartini (2018), kemampuan pemecahan masalah sangat penting dipelajari siswa karena (a) memuat tujuan pembelajaran matematika, (b) bagian dari kurikulum matematika meliputi prosedur, strategi, metode, dan (c) terdapat kemampuan dasar yang harus dikembangkan oleh siswa dalam belajar matematika. Menurut Rukmana Yus, Syafari and Minarni (2019), pemecahan masalah merupakan kemampuan atau keterampilan yang sangat penting untuk didapatkan karena sejak lahir manusia akan menghadapi masalah sehingga memaksa untuk menemukan penyelesaian. Dalam hal ini yang di maksud dari pemecahan masalah merupakan bagian dari kurikulum matematika yang penting bagi siswa sehingga memungkinkan untuk menggunakan pengetahuan atau pengalaman yang dimiliki ke dalam situasi baru bagi siswa.

Masalah akan mendorong seseorang secara tidak langsung untuk menyelesaikan persoalan. Dalam soal pemecahan masalah matematika terdapat dua persoalan secara umum yaitu soal dan soal tidak rutin. Seorang pengajar perlu berhati-hati dalam menyajikan soal pemecahan masalah. Bagi sebagian pengajar, untuk membuat soal yang bukan masalah rutin bagi siswa tentunya merupakan hal yang sulit. Hal ini dapat di atasi dengan menyajikan persoalan yang bervariasi baik dalam bentuk permasalahan soal, tingkat kesulitan soal, kemampuan awal siswa, serta kemampuan yang harus dikembangkan oleh siswa. Untuk memudahkan dalam pemilihan soal, perlu dilakukan perbedaan terhadap persoalan untuk masalah rutin dan tidak rutin.

Soal rutin biasanya dapat dikerjakan dengan mudah oleh siswa. Tipe soal rutin ini dapat diselesaikan dengan prosedur matematika yang sama atau mirip dengan hal yang baru dipelajari. Sebagai contoh kasus 1. Siswa kelas 4 SD diberikan permasalahan bilangan bulat yang berbentuk soal cerita. Misalnya: '*Dalam Ujian Tengah Semester Matematika terdapat 35 soal, setiap jawaban benar akan diberikan skor 3, jawaban salah akan diberikan skor -1, dan tidak menjawab akan diberikan skor 0. Jika Ani siswa kelas 4 menjawab 28 soal dengan 3 soal yang salah. Tentukan berapa skor yang diperoleh oleh Ani tersebut?.* Dengan bentuk soal seperti ini maka siswa kelas 4 SD dapat menjawab persoalan di atas. Bisa jadi karena siswa kelas 4 SD sudah terbiasa dengan tipe soal tersebut sehingga tidak akan menjadi masalah bagi siswa kelas 4 SD.

Hal ini berbeda dengan soal non rutin. Soal non rutin ini siswa belum terbiasa dalam menyelesaikan soal tersebut atau soal tersebut dapat diselesaikan dengan beberapa prosedur penyelesaian. Misalkan, untuk contoh kasus 2 yang sama siswa kelas 4 SD diberikan persoalan bilangan bulat dalam bentuk soal cerita. Misalnya, '*Setiap peserta olimpiade matematika diberikan soal sebanyak 50 butir soal. Bagus hanya mampu menjawab 41 butir soal. Total skor yang diperoleh Bagus 150. Dengan aturan penskoran adalah setiap jawaban benar memperoleh skor (+4), jawaban salah memperoleh skor (-2), serta tidak dijawab memperoleh skor (-1). Berapa banyak soal yang tidak dijawab oleh Bagus?*Contoh soal tidak rutin yang lain '*Seorang pedagang minyak goreng hendak membeli minyak goreng di toko grosir sebesar 10 Liter. Minyak tersebut akan dimasukkan dalam plastik untuk dijual secara eceran. Jika pedagang tersebut hanya mempunyai plastik yang berukuran ½ liter, 1 liter, dan 2 liter. Ada berapa banyak cara yang dapat dibuat oleh pedagang?* Dengan soal ini maka siswa akan memunculkan pertanyaan ada berapa cara yang dapat dibuat oleh pedagang untuk mengemas minyak goreng ke dalam plastik yang berbeda.

Soal ini memberikan peluang kapada siswa untuk memberikan alternatif jawaban yang berbeda. Salah satu alternatif dari penyelesaian soal tersebut adalah sebagai penjualnya tentunya kita akan menggunakan ukuran yang bervariasi. Ukuran yang akan di jual oleh pedagang dapat bervariasi misal setiap ½ liter, 1 liter atau 2 liter. Alternatif jawaban yang mungkin bisa dapat dilihat dalam tabel berikut ini.

Kategori	½ liter	1 liter	2 liter	Total (dalam liter)
Alternatif 1				
Jumlah Bungkus	2	1	4	7
Jumlah Minyak goreng	1	1	8	10
Alternatif 2				
Jumlah Bungkus	2	3	3	8
Jumlah Minyak goreng	1	3	6	10
Alternatif 3				
Jumlah Bungkus	2	5	2	9

Kategori	½ liter	1 liter	2 liter	Total (dalam liter)
Jumlah Minyak goreng	1	5	4	10
Alternatif 4				
Jumlah Bungkus	2	7	1	10
Jumlah Minyak goreng	1	7	2	10

Masih banyak alternatif penyelesaian yang dapat dipikirkan oleh siswa. Tugas pengajar adalah memberikan arahan agar siswa dapat menyelesaikan soal tersebut.

13.4 Langkah Pemecahan Masalah

Ada beberapa langkah dalam penyelesaian pemecahan masalah menurut pendapat para ahli diantaranya. Misalnya Polya (1973), tahapan menyelesaikan pemecahan masalah dengan empat tahap yaitu diantaranya: (1) *understanding the problem* (memahami masalah), (2) *devising a plan* (merencanakan penyelesaian), (3) *carrying out the plan* (melakukan rencana penyelesaian), (4) *looking back* (memeriksa kembali jawaban yang diperoleh). Menurut Sternberg (2009), ada tujuh tahapan dalam proses penyelesaian masalah yaitu diantaranya: (1) *problem identification* (mengidentifikasi masalah), (2) *definition of problem* (mendefinisikan masalah maksudnya menentukan apakah masalah dapat diselesaikan), (3) *constructing strategy*(mengkonstruk strategi yang digunakan dalam penyelesaian masalah), (4) *organizing information about problem*(mengumpulkan informasi yang membantu dalam menyelesaikan masalah, (5) *Allocation of Resources* (mengalokasikan sumber yang akan digunakan dalam proses pemecahan masalah), (6)*monitoring problem solving* (menilai apakah strategi yang akan digunakan dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah atau tidak. Jika belum maka dapat kembali memulai pada tahapan *problem solving* yang lebih awal), (7) *evaluation problem solving* (mengevaluasi hasil dari *problem solving*). Menurut John and Geoff (2013), langkah yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah diantaranya (1) mengidentifikasi data yang relevan dari banyak data yang akan digunakan, (2) mengabungkan informasi yang terkait, (3) menggabungkan informasi yang berbeda untuk menghubungkan masalah baru dengan masalah yang akan kita sebelumnya. Menurut John Dewey dalam Carson (2007), ada lima tahapan dalam proses pemecahan masalah yaitu (1) paham terhadap masalah, (2) mendiagnosis atau mendefinisikan permasalahan, (3) memikirkan beberapa solusi, (4) membuat penyelesaian dari solusi, (5) mengecek penyelesaian. Krulik and Rudnick (1988), dan Carson (2007), tahapan dalam proses pemecahan masalah meliputi (1)*read* maksudnya adalah menyatakan masalah dengan bahasa yang mudah dimengerti, (2) *explore* adalah menemukan pola atau konsep dalam proses pemecahan masalah, (3) *select of strategy*adalah membuat hipotesis dalam proses pemecahan masalah, apa yang akan ditemukan, (4) *solve* adalah menggunakan metode atau cara yang dipilih dalam proses penyelesaian masalah, (5) *review and extend*adalah melihat kembali jawaban dan mencari variasi dalam proses pemecahan masalah.

Beberapa langkah pemecahan masalah yang dikemukakan oleh para ahli. Dalam buku ini, akan lebih fokus pada langkah pemecahan masalah dalam buku Polya yang berjudul '*How to Solve It*. Terdapat empat langkah dalam penyelesaian masalah polya yaitu: memahami masalah, merencanakan penyelesaian, melakukan rencana penyelesaian, memeriksa kembali jawaban yang diperoleh.

Penyelesaian masalah Polya (1957), secara ringkas dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Memahami masalah (*understanding the problem)*

   Pada proses memahami masalah, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan antara lain.

   Yang tidak diketahui di soal?

   Adakah informasi awal di soal?

   Apa yang diketahui di soal?

   Apakah soal dapat dinyatakan dalam persamaan atau dibuat hubungan lainnya?

   Apakah soal cukup mencari yang ditanyakan?

   Apakah soal tidak cukup untuk mencari yang ditanyakan?

Apakah soal itu memuat informasi yang berlebihan atau saling bertentangan?
Buatlah gambar atau notasi yang sesuai?

2. Merencanakan penyelesaian (*devising a plan)*
   Pada proses merencanakan penyelesaian terdapat beberapa hal yang perlu diperhatikan yaitu antara lain.
   Pernahkah melihat masalah ini sebelumnya? Apakah ada yang sama atau berbeda dengan masalah sebelumnya?
   Apakah kamu mengetahui masalahnya? Apakah mengetahui teori yang digunakan?
   Perhatikan yang tidak diketahui? Apakah ada pemecahan masalah yang sama dengan yang tidak diketahui?
   Perhatikan yang ditanyakan atau diketahui di soal. Apakah ada soal dengan penyelesaian yang mirip dengan yang pernah dipecahkan atau dikerjakan?
   Pemecahan masalah mirip dengan pemecahan masalah sebelumnya. Dapatkah hasil yang lalu digunakan? Dapatkah strategi yang lalu digunakan? Apakah harus mencari strategi lain untuk soal yang baru? Dapatkah dinyatakan dalam bentuk yang lain? Atau kembali pada definisi.
3. Melakukan rencana penyelesaian (*carrying out the plan)*
   Hal yang perlu diperhatikan dilangkah yang ketiga yaitu:
   Melihat langkah dalam penyelesaian masalah. Apakah langkah yang dipilih sudah benar atau belum?
   Bagaimana langkah untuk membuktikan hasil terebut. Apakah sudah benar?
4. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh (*looking back)*
   Pada tahapan terakhir hal yang menjadi bahan pertimbangan Polya adalah
   Bagaimana memeriksa hasil yang diperoleh?
   Bagaimana memeriksa pendapat kamu?
   Bagaimana jawaban tersebut dicari dengan cara yang berbeda?
   Apakah kamu memeriksanya sekilas?
   Dapatkah mengetahui hasil, metode untuk masalah yang lain?

13.5 Contoh Prosedur Penyelesaian Masalah Polya Dalam Matematika Sekolah Dasar

Berikut ini contoh soal cerita yang merupakan soal pemecahan masalah di Sekolah Dasar. Pemecahan masalah tersebut dapat diselesaikan dengan tahapan Polya.

Soal 1.

Seorang konstruksi kayu akan membuat meja dan kursi. Meja yang akan dibuat membutuhkan 4 kaki, sedangkan kursi yang akan dibuat membutuhkan 3 kaki. Setelah selesai mengerjakan, total jumlah kaki yang digunakan adalah 68 kaki. Tentukan berapa banyak meja dan kursi yang dapat dibuat oleh konstruksi kayu? (Diadaptasi dari Kania, 2018)

Berdasarkan soal di atas, maka langkah prosedur dalam penyelesaian masalah Polya sebagai berikut.

i. Memahami masalah (*understanding the problem)*
Berdasarkan informasi di atas, yang diketahui di soal adalah Meja membutuhkan 4 kaki, sedangkan kursi membutuhkan 3 kaki. Banyaknya jumlah kaki yang digunakan setelah membuat meja dan kursi adalah 68 kaki. Sedangkan yang ditanyakan di soal adalah ada berapa banyak meja dan kursi yang dapat dibuat oleh seorang kontruksi kayu?

ii. Merencanakan penyelesaian (*devising a plan)*
Berdasarkan permasalahan di atas untuk dapat menyelesaikan banyaknya meja dan kursi yang dapat dibuat maka dapat dianalisis sebagai berikut. Analisis pertama, jika kita membuat 2 meja maka banyak kaki meja yang digunakan ada 8 kaki. Sedangkan total kaki yang digunakan untuk membuat kursi adalah (68 – 8) = 60 kaki. Maka banyak kursi yang dapat dibuat adalah sebanyak 60/3 = 20 kursi. Analisis kedua, jika membuat 3 meja maka banyak kaki meja yang digunakan ada 12 kaki. Total kaki yang digunakan untuk membuat kursi adalah 56 kaki. Jadi, tidak dapat dibuat dibuat kursi. Untuk lebih jelasnya, dapat disajikan dalam bentuk tabel sebai berikut.

iii. Melakukan rencana penyelesaian (*carrying out the plan)*

Berdasarkan perencanaan penyelesaian, maka langkah berikutnya adalah melakukan rencana penyelesaian. Perencanaan penyelesaian soal di atas dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

Jumlah meja	1	2	3	4	5
Jumlah kaki	4	8	12	16	20
Sisa kaki	64	60	56	52	48
Jumlah bangku	$\frac{64}{3} = no$	$\frac{60}{3} = 20$	$\frac{56}{3} = no$	$\frac{52}{3} = no$	$\frac{48}{3} = 16$

Diperoleh hasil berikut,

Jumlah meja	2	5	8	11	14
Jumlah kaki	8	20	32	44	56
Sisa kaki	60	48	36	24	12
Jumlah bangku	$\frac{60}{3} = 20$	$\frac{48}{3} = 16$	$\frac{36}{3} = 12$	$\frac{24}{3} = 8$	$\frac{12}{3} = 4$

Terdapat 5 buah cara untuk membuat meja dan kursi. Banyaknya meja dan kursi yang dapat dibuat adalah 2 meja 20 kursi, 5 meja dan 16 kursi, 8 meja dan 12 kursi, 11 meja dan 8 kursi, 14 meja dan 12 kursi.

iv. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh (*looking back)*

Tahapan akhir adalah memeriksa hasil dari jawaban yang diperoleh. Cara yang dapat digunakan adalah mesubtitusi hasil yang diperoleh. Misalnya,

a 2 meja dan 20 kursi
Total kaki yang digunakan = 2(4) + 20(3) = 68 kaki

b 5 meja dan 16 kursi
Total kaki yang digunakan = 5(4) + 16(3) = 68 kaki

c 8 meja dan 12 kursi
Total kaki yang digunakan = 8(4) + 12(3) = 68 kaki

d 11 meja dan 8 kursi
Total kaki yang digunakan = 11(4) + 8(3) = 68 kaki

e 14 meja dan 12 kursi
Total kaki yang digunakan = 14(4) + 12(3) = 68 kaki

13.6 Strategi Pemecahan Masalah

Menurut Krulik and Rudnick (1988), Alfred S. Posamentier (1997), terdapat 10 strategi yang digunakan dalam proses pemecahan masalah diantaranya: strategi bekerja mudur *(working backwards),* menemukan pola (*finding a pattern),* mengubah cara pandang terhadap suatu masalah (*adopting a different point of view),* mensederhanakan masalah yang serupa (*solving a simpler analogous a problem),* mempertimbangkan kasus yang ekstrim(*considering extreme case),* membuat gambaran *(making a drawing),* membuat tebakan dan mengujinya termasuk perkiraan (*intelligent guessing and testing include approximation),* memperhitungkan semua kemungkinan (*accounting for all possibilities),* mengorganisir data (*organizing data),* dan penalaran logis (*logical reasoning).* Berikut ini merupakan strategi pemecahan masalah diuraikan secara sederhana dan jelas sebagai berikut.

1. Strategi bekerja mudur (*working backwards)*

Strategi ini dapat digunakan untuk menyajikan permasalahan hasil akhir yang diketahui dan menyakan sesuatu yang terjadi sebelumnya.

Soal 2

> Rata-rata 10 nilai ulangan harian matematika Dina adalah 85. Gurunya mengumumkan bahwa siswa harus mengeliminasi salah satu nilai mereka lalu menghitung rata-ratanya. Dina mengeliminasi nilai 49 yang dia dapatkan pada ulangan yang ketiga. Berapakah rata-rata nilai ulangan Dina yang baru? (Diadaptasi dari Alfred S. Posamentier, 1997)

Berdasarkan soal di atas, maka langkah prosedur dalam penyelesaian masalah Polya sebagai berikut.

i. Memahami masalah (*understanding the problem)*
   Berdasarkan informasi di atas, yang diketahui di soal adalah Rata-rata 10 nilai ulangan harian Dina adalah 85. Dina mengeliminasi nilai 49 yang didapatkan pada ulangan

ketiga. Yang ditanyakan di soal adalah nilai rata-rata ulangan Dina yang baru?

ii. Merencanakan penyelesaian (*devising a plan)*

Berdasarkan permasalahan di atas untuk dapat menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan rata-rata data.

$$rata-rata(\bar{x}) = \frac{jumlah\,semua\,data}{banyak\,data} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Rata-rata 10 nilai ulangan harian Dina adalah 85. Jumlah semua data yang diperoleh dari 10 bilangan adalah 850. Dina mengeliminasi nilai 49 dari ulangan yang ketiga.

iii. Melakukan rencana penyelesaian (*carrying out the plan)*

Berdasarkan langkah 2, maka langkah berikutnya adalah 850 – 49 = 801

Terdapat 9 buah data, untuk menghitung rata-rata yang baru diperoleh $rata-rata\ data\ baru = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{801}{9} = 89$

iv. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh (*looking back*).

Rata-rata	Banyak Data	Jumlah Semua Data
85	10	850
89	9	801
Selisih = 850 - 801 = 49. Merupakan nilai yang dibuang oleh Dina. Jadi, rata-rata nilai ulangan yang baru adalah 89.		

2. Menemukan pola (*finding a pattern)*

Strategi ini digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan pola tertentu. Biasanya strategi ini digunakan untuk mengamati pola yang diberikan seperti gambar, angka, huruf untuk menentukan pola berikutnya.

Soal 3

Jika digit terakhir 3^3 adalah 7. Tentukan digit terakhir dari 3^{21}? (Diadaptasi dari Alfred S. Posamentier, 1997)

Berdasarkan soal di atas, maka langkah prosedur dalam penyelesaian masalah Polya sebagai berikut.

i. Memahami masalah (*understanding the problem)*
Berdasarkan informasi di atas, yang diketahui di soal adalah 3^{21}. Yang ditanyakan di soal adalah digit terakhir dari? 3^{21}

ii. Merencanakan penyelesaian (*devising a plan)*

$3^1 = 3$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$

iii. Melakukan rencana penyelesaian (*carrying out the plan)*
Perhatikan pola di atas, terdapat perulangan digit terakhir setiap empat kali. Maka kita dapat mencari digit terakhir dari pangkat 21, dengan membagi 4 (berulang setiap empat kali) diperoleh sisa 1 sehingga digit terakhir dari 3^{21} adalah 3.

iv. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh (*looking back*).
Pemeriksaan kembali dari jawaban yang diperoleh sehingga diperoleh digit terakhir dari 3^{21} adalah 3.

3. Mengubah cara pandang terhadap suatu masalah (*adopting a different point of view)*

Melihat dari sudut pandang yang berbeda secara umum. Cara ini dapat membuat soal terlihat lebih mudah dibandingkan dengan cara biasa. Cara ini digunakan agar kita tidak terpaku pada konsep yang menjebak melainkan dapat melihat dari sudut pandang yang lain sehingga membuat permasalahan menjadi lebih mudah.

Soal 4

Diketahui segitiga ABC, dengan D terletak pada AC. Panjang AD = 9 cm, panjang BC = 15 cm, dan BD = 30 cmTentukan selisih luas segitiga ABC dan segitiga BCD.

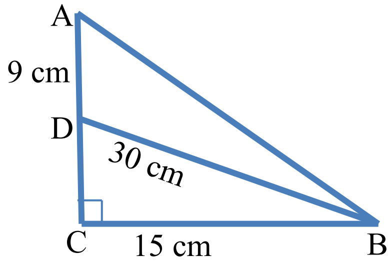
Penyelesaian dengan prosedur Polya berikut.

i. Memahami masalah (*understanding the problem)*

Dari soal 4, yang diketahui di soal adalah segitiga ABC, dengan D terletak pada AC. Panjang AD = 9 cm, panjang BC = 15 cm, dan BD = 30 cm. Yang ditanyakan di soal adalah selisih luas segitiga ABC dan segitiga BCD?

ii. Merencanakan penyelesaian (*devising a plan)*

Kita dapat menggambar **soal 4** sebagai berikut.



Dapat dilihat bahwa ΔABC panjang BC = 15 cm sedangkan untuk panjang AC kita tidak mengetahuinya. Untuk ΔBCD panjang BC = 15 cm sedangkan untuk panjang CD kita tidak mengetahuinya. Kita dapat melihat dengan sudut pandang yang lain untuk menyelesaikan soal tersebut dengan konsep luas. Jika ditanyakan luas ΔBCD ditambah dengan luas ΔBDA maka merupakan luas ΔABC.

iii. Melakukan rencana penyelesaian (*carrying out the plan)*

Luas ΔABC - Luas $\Delta BCD =$ Luas ΔBDA

Luas ΔBDA dengan alasnya merupakan AD dan tingginya merupakan BC.

Luas $\Delta BDA = \frac{1}{2} \times AD \times BC = \frac{1}{2} \times 9 \times 15 = 67{,}5\ cm^2$

iv. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh (*looking back*).

Pemeriksaan kembali dari jawaban yang diperoleh dapat menggunakan gambar luas segitiga sehingga diperoleh jawaban Luas $\Delta BDA = 67{,}5\ cm^2$.

4. Mensederhanakan masalah yang serupa (*solving a simpler analogous a problem)*

Strategi ini dapat digunakan untuk menyederhanakan masalah yang komplek sehingga menjadi lebih sederhana. Untuk menyelesaikan masalah ini, kita dapat menyelesaikan dengan persoalan yang mirip sehingga membantu kita menyelesaikan masalah menjadi lebih mudah. Contoh kasus 3, mengukur tebal 1 kertas dari A4 kita. Kita akan mengalami kesulitan mengukur tebal 1 kertas dengan menggunakan mistar. Untuk mengatasi masalah tersebut maka kita bisa membuat analogi kegiatan yaitu mengukur tebal kertas, tetapi bukan untuk 1 kertas tetapi untuk 1 rim. Dengan cara ini, kita dapat mengukur tebal 1 rim dan untuk mendapatkan tebal 1 kertas A4 kita peroleh dengan membagi tebal 1 rim dengan 500 kertas (Contoh kasus 3 diadaptasi dari Wahyudi and Anugraheni, 2017).

5. Mempertimbangkan kasus yang ekstrim(*considering extreme case)*

Strategi ini lebih mudah digunakan apabila digunakan untuk kondisi soal yang ekstrim. Kasus ini terjadi jika kondisi awal adalah kondisi awal soal yang mustahil atau kondisi awal nol. Contoh kasus 4, Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan tetap $45 {}^{km}\!/_{jam}$. Terdapat mobil lain yang bergerak di belakang mobil pertama dengan ½ km setelah 1 menit kemudian. Hitung kecepatan mobil kedua tersebut? (Contoh kasus 4 diadaptasi dari Syahlan, 2017).

Penyelesaian dari kasus di atas mobil pertama bergerak tetap $45 {}^{km}\!/_{jam}$. Permasalahan di atas merupakan kondisi yang ekstrim, mobil bergerak dengan konstan. Asumsikan mobil kedua bergerak dengan kecepatan $0 {}^{km}\!/_{jam}$. Berdasarkan informasi tersebut, karena mobil kedua sudah menempuh $^1\!/_2$ km dalam waktu 1 menit. Kita dapat mencari kecepatan mobil kedua, dengan menggunakan rumus Jarak (J) = Kecepatan (K) x Waktu (W), diperoleh kecepatan mobil kedua adalah $^1\!/_2$ ${}^{km}\!/_{menit}$ atau $30 {}^{km}\!/_{jam}$. Kecepatan mobil kedua pasti $30 {}^{km}\!/_{jam}$

lebih cepat dari mobil pertama sehingga kecepatan mobil kedua adalah ($75 \,{}^{km}\!/_{jam}$ $30 \,{}^{km}\!/_{jam} . + 45 \,{}^{km}\!/_{jam}$).

6. Membuat gambaran *(making a drawing)*

Strategi ini dapat diilustrasikan dengan lebih mudah jika kita membuat gambaran permasalahan soal dalam bentuk tabel, gambar atau diagram. Dengan membuat gambaran (dalam bentuk tabel, gambar atau diagram), kita dapat menyusun informasi untuk menyelesaikan permasalahan.

SOAL 5

> Six teams, K, L, M, N, O, and P, took part in a football tournament. Each team competed against each of the others exactly once. In a particular time, K, L, M, N, and O, consecutively, had done 5, 4, 3, 2, and 1 matches. How many matches had P done at this time?

Langkah penyelesaian dengan prosedur polya, sebagai berikut.

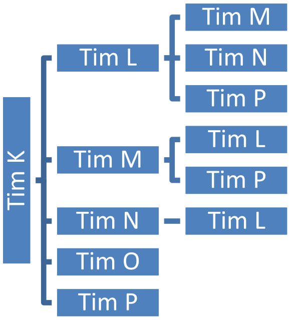
i. Memahami masalah (*understanding the problem)*

   Berdasarkan informasi di soal 5, yang diketahui di soal terdapat 6 tim sepak bola yaitu tim K, tim L, tim M, tim N, tim O, dan tim P. Tim K, L, M, N, O berturut-turut telah melakukan pertandingan selama 5, 4, 3, 2, 1 kali pertandingan. Setiap tim bersaing satu sama lain tepat satu kali. Yang ditanyakan di soal, tim P melakukan berapa kali pertandingan.

ii. Merencanakan penyelesaian (*devising a plan)*

   Dapat dilihat bahwa tim K melakukan lima kali pertandingan maka tim K pasti akan bertemu dengan tim L, tim M, tim N, tim O, dan tim P. Tim O melakukan satu kali pertandingan maka hanya akan bertemu dengan tim K. Tim L melakukan empat kali pertandingan akan bertemu tim K, tim M, tim N, dan pasti akan bertemu dengan tim P. Untuk lebih jelasnya, dapat kita selesaikan permasalahan ini dengan menggunakan gambar.

iii. Melakukan rencana penyelesaian (*carrying out the plan)*



Berdasarkan hasil analisis gambar maka tim P akan melakukan tiga kali pertandingan yaitu dengan tim K, tim L, dan tim M.

iv. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh (*looking back*).
Berdasarkan hasil analisis gambar, maka kita akan mengetahui jika tim P melakukan 3x pertandingan

7. Membuat tebakan dan mengujinya termasuk perkiraan (*intelligent guessing and testing include approximation)*

Strategi ini mungkin bukan termasuk dalam prosedur matematika yang komplek. Kita dapat membuat tebakan untuk menyelesaikan soal yang membutuhkan waktu lebih lama jika kita menyelesaikan dengan prosedur matematika yang komplek. Membuat tebakan dan mengujinya merupakan alternatif dalam menyelesaikan masalah matematika dengan lebih cepat. Jika kita gagal dalam membuat tebakan maka dapat diselesaikan dengan uji coba yang lainnya.

SOAL 6

Berdasarkan contoh kasus 2 maka kita dapat menganalisis permasalahan Polya sebagai berikut.

i. Memahami masalah (*understanding the problem)*
Yang diketahui di soal terdapat 50 butir soal. Setiap jawaban benar memperoleh skor (+4), jawaban salah skor (-2), serta tidak dijawab skor (-1). Total skor yang diperoleh 150 dengan hanya menjawab 41 butir soal. Yang ditanyakan Berapa banyak soal yang tidak dijawab?.

ii. Merencanakan penyelesaian (*devising a plan)*

Dapat dilihat bahwa terdapat 50 butir soal dengan hanya menjawab 41 butir soal. Artinya, terdapat 9 soal tidak dijawab dengan skor (-1).

iii. Melakukan rencana penyelesaian (*carrying out the plan)*
Kita dapat membuat tebakan berapa banyak soal yang dijawab benar dan salah sebagai berikut.

Jumlah Benar (+4)	Jumlah Salah (-2)	Jumlah Tidak Dijawab (-1)	Skor Total
40 * (+4) = 160	1 * (-2) = -1	9 * (-1) = (-9)	150*
39 * (+4) = 156	2 * (-2) = -4	9 * (-1) = (-9)	*
38 * (+4) = 152	3 * (-2) = -6	9 * (-1) = (-9)	*

iv. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh (*looking back*).
Berdasarkan hasil analisis di atas dapat diperoleh Bagus menjawab soal benar ada 40 butir soal, soal salah ada 1 butir soal.

8. Memperhitungkan semua kemungkinan (*accounting for all possibilities)*

Strategi ini pada perinsipnya sama dengan membuat tebakan dan mengujinya akan tetapi pada strategi ini jika terdapat kemungkinan lain yang dapat menjadi jawaban, maka kita dapat memeriksa kemungkinan tersebut. Pemeriksaan kemungkinan ini dilakukan agar kita dapat memperoleh jawaban pasti dari permasalahan tersebut.

9. Mengorganisir data (*organizing data)*

Strategi ini dapat digunakan apabila kita akan melakukan organisir data, mengolah serta menarik kesimpulan dari data tersebut. Sebagai contoh kasus, mengamati jenis kendaran yang dipakai oleh warga sekitar di Sekitar SD kamu. Untuk menjawab permasalahan di atas, kita dapat melakukan pengamatan dan mencatat jenis kendaraan apa saja yang di pakai oleh warga sekitar. Kita dapat menentukan merek kendaraan apa yang digunakan paling banyak oleh warga sekitar di lingkungan Sekolah Dasar. Dengan cara ini, kita dapat menentukan merek kendaraan paling favorit yang digunakan warga sekitar di Sekolah Dasar kamu.

10. Penalaran logis (*logical reasoning)*

Permasalahan terkadang memiliki beberapa kemungkinan jawaban. Kita membutuhkan alasan yang logis terhadap beberapa kemungkinan yang menjadi jawaban dari suatu persoalan. Segala kemungkinan jawaban akan menjadi pertimbangan yang logis terhadap permasalahan yang akan diselesaikan.

Latihan

1. Ani, Rini, dan Dewi membeli buku dan pensil sejenis. Ani membeli 2 buku dan 3 pensil seharga Rp. 17.000,00. Rini membeli 5 buku dan 4 pensil seharga Rp. 26.000,00. Tentukan harga 1 buku dan 1 pensil dan tentukan yang harus dibayar jika membeli 5 buku dan 6 pensil?
2. Reni mempunyai uang dalam bentuk pecahan lembaran Rp. 10.000,00, lembaran Rp. 5.000,00, lembaran Rp. 50.000,00. Jika total uang yang dimiliki oleh Reni adalah Rp. 100.000,00. Berapa banyak kemungkinan kombinasi uang yang dimiliki oleh Reni jika harus memuat lembaran Rp. 10.000,00, lembaran Rp. 5.000,00, lembaran Rp. 50.000
3. Pak Joko memiliki peternakan terdapat beberapa kambing, sapi, dan ayam. Pada saat yang bersamaan, ayam dan sapi sama banyak. Pak Joko mendapatkan di antara binatang-binatang tersebut memiliki keseluruhan 32 kepala dan 92 kaki. Tentukan banyaknya kambing dan sapi yang dimiliki Pak Joko?
4. Sebuah gedung diselesaikan dengan 40 pekerja dalam waktu 35 hari. Setelah menyelesaikan gedung selama 14 hari, ada 5 orang pegawai yang sakit dan tidak dapat menyelesaikan gedung. Dengan berkurangnya pekerja, berapa harikah gedung tersebut akan dibangun tepat pada waktunya?
5. Sebuah gudang terdapat makanan sekarung konsentrat untuk ayam dan dangsa. Seekor ayam menghabiskan makanan sekarung konsentrat dalam waktu 12 hari, sedangkan seekor angsa mampu menghabiskan makanan sekarung konsentrat dalam waktu 24 hari. Berapa hari akan habis jika sekarung konsentrat tersebut dimakan oleh seekor ayam ditambah 3 ekor angsa?

DAFTAR PUSTAKA

Alfred S. Posamentier, S. K. (1997) 'Problem-Solving Strategies For Efficient and Elegant Solutions A Resource for the Mathematics Teacher, p. 271.

Carson, J. (2007) 'A problem with problem solving: Teaching thinking without teaching knowledge, *The Mathematics Educator*, 17(2), pp. 7–14.

John, B. and Geoff, T. (2013) *Thinking Skills: Critical Thinking and Problem Solving,Cambridge University Press*.

Kania, N. (2018) 'Analisis Kesalahan Mahasiswa PGSD Dalam Menyelesaikan Soal Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan George Polya, *EduMa*, 7(1), pp. 19–40. doi: 10.1360/zd-2013-43-6-1064.

Krulik, S. and Rudnick, J. A. (1988) *Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers,Africas potential for the ecological intensification of agriculture*.

Polya (1973) 'HowToSolveIt.pdf, p. 284.

Polya, G. (1957) *How to solve it: a new aspect of mathematical method second edition,The Mathematical Gazette*. Available at: http://www.jstor.org/stable/3609122?origin=crossref.

Rukmana Yus, S., Syafari, S. and Minarni, A. (2019) 'Analysis of Students Failure in Mathematical Problem Solving Based on Newman Procedure at Middle Secondary School 3 Aceh Tamiang District, *American Journal of Educational Research*, 7(11), pp. 888–892. doi: 10.12691/education-7-11-20.

Sternberg, R. J. (2009) 'Cognitive Psychology, in *Cognitive Psychology*. doi: 10.4324/9781315778006.

Sumartini, T. S. (2018) 'Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa melalui Pembelajaran Berbasis Masalah, *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 5(2), pp. 148–158. doi: 10.31980/mosharafa.v5i2.270.

Syahlan (2017) 'Sepuluh Strategi dalam Pemecahan Masalah Matematika, *Indonesian Digital Journal of Mathematics and Education*, 4(6), pp. 358–369. Available at: http://idealmathedu.p4tkmatematika.org.

VanGundy, A. B. (2005) *101 Activities for Teaching Creativity and Problem Solving*.
Wahyudi and Anugraheni, I. (2017) *Strategi Pemecahan Masalah Matematika,Satya Wacana University Press*.

BIODATA PENULIS

Nazariah
Dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Agama Islam, Universitas Muhammadiyah Aceh

Penulis lahir di Desa Pante Lhoksukon Aceh Utara. Pada tanggal 07 Juli 1987. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Agama Islam, Universitas Muhammadiyah Aceh. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika UIN AR RANIRY Banda Aceh pada tahun 2011 dan melanjutkan S2 pada Jurusan Magister Pendidikan Matematika UNSYIAH Banda Aceh pada tahun 2012 dan selesai pada tahun 2015. Penulis telah menulis buku "Materi Ajar Untuk Sekolah Dasar" dan telah menyelesaikan penulisan buku tentang Pengajaran yang berfokus pada bab Keterampilan Dasar Mengajar.

BIODATA PENULIS

Nur Hasanah, M.Pd
Dosen Pendidikan Matematika

Penulis lahir di Sumenep tanggal 10 April 1997. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP PGRI Situbondo. Anak pertama dari dua bersaudara, pasangan Suyoto, S.Pd dan ibu Mu'isa saat ini menetap di Ponpes. Tarbiyatul Mutaallimin yang beralamat di Kabupaten Situbondo Telp. 082337604494. Pendidikan Formal saat SD Negeri II Kropoh Raas yang beralamat Dusun Jati Rt.01 Rw.01 Desa Kropoh Kab. Sumenep, SMP Negeri 1 Raas Sumenep yang terletak di Desa Brakas Kab.Sumenep, pada jenjang SMA Negeri 1 Panji Situbondo yang terletak di Jl. Argopuro No. 1 A Kab. Situbondo, S1 STKIP PGRI Situbondo beralamat di Jl. Argopuro Gg. VII dan jenjang magister di Universitas Jember Jl. Kalimantan 37 Kampus Tegalboto Jember. Karir menjadi pengajar dimulai pada tahun 2011 yang berawal mengajar di TPQ Ar Rahmah Mimbaan Panji Situbondo pada saat jenjang pendidikan sekolah menengah atas hingga saat ini, setelah menyelesaikan kuliah jenjang sarjana mengajar di anak usia dini (Kelompok Bermain) KB Nurul Fityan Alasmalang Panarukan Situbondo sambil lalu melanjutkan kuliah jenjang magister di Universitas Jember setelah menyelesaikan kuliah di universitas jember melanjutkan karir di STKIP PGRI Situbondo.

BIODATA PENULIS

Yunita Oktavia Wulandari
Staf Dosen Jurusan Pendidikan Matematika
Universitas Wisnuwardhana

Penulis lahir di Malang tanggal 31 Oktober 1988. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Wisnuwardhana. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika, Universitas Negeri Malang dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang.

BIODATA PENULIS

Dr., Drs. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.,
Dosen Pendidikan Mataematika

Dr., Drs. Joni Wilson Sitopu, M.Pd., lahir di Medan. Menyelesaikan Pendidikan S1 Prodi Matematika FMIPA USU Medan pada tahun 1989. Menyelesaikan Pendidikan S2 Pascasarjana Prodi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan (UNIMED) pada tahun 2009. Menyelesaikan Pendidikan dari Pascasarjana S3 Prodi Doktor Ilmu Matematika FMIPA USU Medan pada tahun 2020.

Dosen di Universitas Simalungun sejak tahun 1992. Saat ini mengajar Mata Kuliah, Matematika Dasar, Statistika, Bio Statistik, Tehnologi Komputer (TI). Tahun 2009-2016, Instruktur PLPG UNIMED dan Nomensen Medan. Pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif menulis jurnal OJS, nasional dan Internasional, dan aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional. Saat ini penulis menjabat sebagai Kepala Pusat Komputer Universitas Simalungun Pematangsiantar.

BIODATA PENULIS

Cynthia Tri Octavianti
Staf Dosen Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas FKIP,
Universitas Wisnuwardhana Malang

Penulis lahir di Tegal tanggal 3 Oktober 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas FKIP, Universitas Wisnuwardhana Malang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika di Universitas Sebelas Maret Surakarta dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika di Universitas Gadjah Mada.

BIODATA PENULIS

Rifka Agustianti, M. Pd
Dosen Tetap Matematika Universitas Nurtanio Bandung

Penulis lahir di Kota Palopo (Sulawesi Selatan) pada tanggal 27 Agustus 1988. Penulis adalah dosen tetap mata kuliah matematika pada Program Studi Motor Pesawat Fakultas Teknik, Universitas Nurtanio Bandung. Menyelesaikan pendidikan S1 pada tahun 2013 dan langsung melanjutkan pendidikan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika pada tahun 2015 di STKIP Siliwangi Bandung (sekarang IKIP Siliwangi Bandung). Tak hanya mengajar di perguruan tinggi, penulis juga aktif menjadi tutor matematika pada beberapa bimbingan belajar dan privat di Bandung.

Selain menulis *book chapter*, penulis juga aktif menulis beberapa artikel ilmiah pada jurnal yang terakreditasi Kemendikbud yang bertemakan matematika dan pendidikan matematika. Untuk menggenapi tridarma perguruan tinggi, penulis juga aktif dalam kegiatan pengabdian masyarakat di beberapa sekolah.

BIODATA PENULIS

Lulut Alfaris, S.T., M.T.
Dosen Jurusan Teknologi Kelautan
Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran

Penulis menyelesaikan pendidikan SMA di SMAN 1 Genteng Banyuwangi, selanjutnya menempuh pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Teknik Kelautan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya . Saat ini menjadi dosen di Program Studi Teknologi Kelautan, Politeknik Kelautan dan Perikanan Pangandaran. Diantara Mata Kuliah yang Penulis ajar ialah Oseanografi serta Matematika Teknik. Penulis bias dihubungi di lulut.alfaris@kkp.go.id

BIODATA PENULIS

Mesak Ratuanik, S.Si., M.Pd
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika STKIP Saumlaki

Penulis merupakan anak ketiga dari empat bersaudara dari pasangan suami-istri, Ayah Eduard Ratuanik dan Ibu Nelci Ungirwalu, Lahir di Waturu, Kabupaten Kepulauan Tanimbar, Maluku pada tanggal 13 April 1989. Jenjang Pendidikan Sekolah Dasar di SD Inpres Waturu, SMP Negeri 5 Tanimbar Utara dan melanjutkan ke SMA Negeri 2 Tanimbar Utara. Telah Menyelesaikan Studi S1 di Universitas Pattimura Ambon pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (2008-2012). Menyelesaikan Studi Magister Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta (2017-2019). Tahun 2018-2019 menjadi tutor Matematika Dasar dalam Kegiatan Program Matrikulasi Kuliah Mahasiswa Mappi, Papua. Penulis juga aktif menerbitkan penelitian-penelitian bidang pendidikan pada Jurnal Nasional dan Jurnal Internasional. Sekarang menjadi salah satu tenaga pendidik (dosen) di Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan Saumlaki (STKIPS), Kabupaten Kepulauan Tanimbar, Maluku. Beberapa Mata Kuliah yang diampu oleh penulis diantaranya Pengantar Dasar Matematika, Geometri Dasar, Geometri Analitik, Geometri Transformasi, Analisis Real, Metode Numerik, Kalkulus dan Metodolgi Penelitian.

BIODATA PENULIS

Jan Setiawan
Staf Dosen Prodi Teknik Elektro Univesitas Pamulang
Staf Periset Badan Riset dan Inovasi Nasional

Penulis lahir di Jakarta pada tahun 1980. Saat ini penulis adalah staf Peneliti Ahli Madya pada Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN). Penulis menyelesaikan studi S1 di prodi Fisika Institut Pertanian Bogor pada tahun 2003. Pada tahun 2008, penulis berkesempatan melanjutkan studi S2 melalui program beasiswa pegawai BATAN di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia yang diselesaikan tahun 2010. Melalui beasiswa Kemenristek Dikti, penulis melanjutkan studi S3 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia pada tahun 2012 dan menyelesaikannya ditahun 2015. Bidang kepakaran penelitian Penulis adalah teknik material. Dalam karir sebagai peneliti selain membangun kompetensi kepakaran bidang teknik material, sejak tahun 2016 penulis juga aktif menjadi pengajar pada Program Studi Teknik Elektro - Universitas Pamulang.

Email Penulis: jansetiawan.lecturer@gmail.com

BIODATA PENULIS

Nuryami, M.Pd
Dosen Pendidikan Matematika
STAI Muhammadiyah Probolingggo

Penulis lahir di Probolinggo, pada tanggal 12 Agustus 1995. Anak tunggal dari pasangan Bapak Rohman dan Ibu Sutima. Pendidikan dasar telah ditempuh di MI Darumafatihil Ulum lulus pada tahun 2008. Kemudian melanjutkan sekolah menengah pertamanya di MTs Darma pada tahun 2011. Kemudian lanjut Sekolah menengah atas melanjutkan di MA Zainul Hasan 1 Genggong pada tahun 2014. Pendidikan selanjutnya ditempuh di Universitas Muhammadiyah Jember sebagai mahasiswi Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Jurusan Strata (S1) Pendidikan Matematika dan lulus tahun 2018. Kemudian melanjutkan pendidikan sebagai mahasiswi Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Jurusan Strata (S2) ditempuh di Universitas Negeri Jember dan lulus pada tahun 2021. Sekarang penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, STAI Muhammadiyah Probolinggo yang beralamat di Jl. Soekarno-Hatta 94 B Probolinggo. Karir sebagai Pengajar dimulai pada tahun 2018. Diawali dengan menjadi tutor bimbingan privat. Pada tahun 2019 menjadi guru SDIT Jember hingga tahun 2020. Sekarang penulis fokus mengabdi di STAI Muhammadiyah Probolinggo.

BIODATA PENULIS

Rintis Rizkia Pangestika, M.Pd.
Dosen Prodi PGSD

Penulis lahir di Banyumas tanggal 03 Desember 1989. Penulis saat ini berdomisili di Purworejo. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi PGSD (Pendidikan Guru Sekolah Dasar) Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Purworejo. Tahun 2012 penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi PGSD di Universitas Negeri Semarang dan melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Dasar di Universitas Negeri Yogyakarta lulus pada tahun 2015. Penulis mulai aktif menulis buku atau *book chapter* sejak tahun 2019.

BIODATA PENULIS

Ima Mulyawati, M.Pd
Dosen di Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar

Ima Mulyawati, lahir di Semarang pada tahun 1988. Menempuh jenjang SD, SMP, SMA di daerah asalnya tersebut. Menamatkan S-1 di Pendidikan Matematika UNNES (2009); S-2 di Pendidikan Matematika UNNES (2013). Pengalaman mengajar diawali dengan guru matematika di SMA-SMK Mataram Semarang (2009-2013), dosen di Unisda Lamongan (2014), dan saat ini mengajar di Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar.