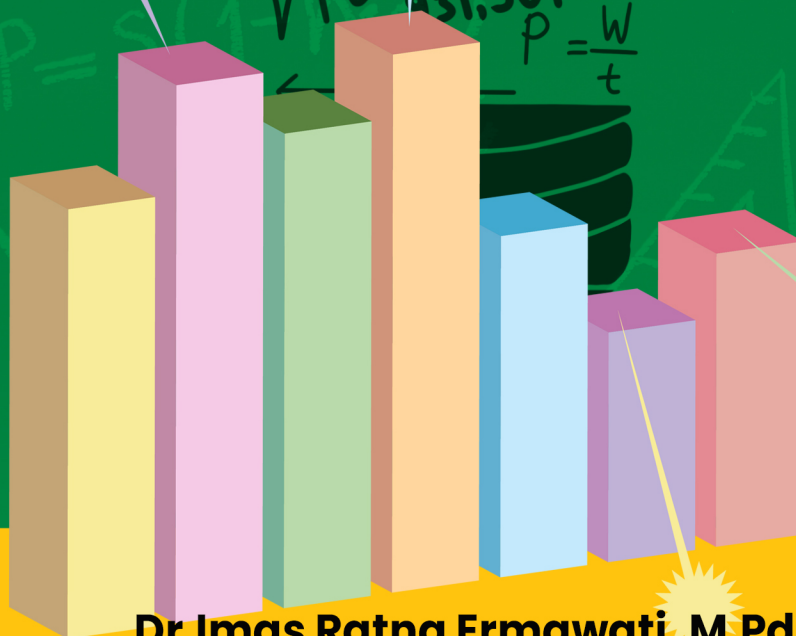




EL-MARKAZI

FISIKA STATISTIK



Dr. Imas Ratna Ermawati, M.Pd
Sugianto, S.Si, M.Si
Dr. Tri Isti Hartini, M.Pd

FISIKA STATISTIKA

Ketentuan Hukum Pidana

Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta

Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama **1 (satu) tahun** dan/atau pidana denda paling banyak **Rp100.000.000 (seratus juta rupiah)**.
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama **3 (tiga) tahun** dan/atau pidana denda paling banyak **Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)**.
3. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama **4 (empat) tahun** dan/atau pidana denda paling banyak **Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah)**.
4. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama **10 (sepuluh) tahun** dan/atau pidana denda paling banyak **Rp4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah)**.

FISIKA STATISTIKA

Dr.Imas Ratna Ermawati, M.Pd

Sugianto, S.Si , M.Si

Dr.Tri IstiHartini, M.Pd



EL-MARKAZI
publish your dream with a book

FISIKA STATISTIKA

@Elite Media Kreazi (ElMarkazi) 2023

Penulis :

Dr.Imas Ratna Ermawati, M.Pd
Sugianto, S.Si , M.Si
Dr.Tri IstiHartini, M.Pd

Desain Cover :

Elite Media Kreazi (Elmarkazi)

Layout :

Elite Media Kreazi (Elmarkazi)

Ukuran :

xii, 112 hlm, Uk: 18,2 cm x 25,7 cm

ISBN : 978-623-331-498-5

Cetakan Pertama :

Februari 2023

Diterbitkan oleh :

PENERBIT ELMARKAZI

Anggota IKAPI

Jl.RE.Martadinata RT.26/05 No.43 Pagar Dewa,
Kota Bengkulu, Provinsi Bengkulu 38211

Website: www.elmarkazi.com dan www.elmarkazistore.com

E-mail: elmarkazipublisher@gmail.com

Dicetak oleh Percetakan ElMarkazi

Isi diluar tanggung jawab percetakan

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau
memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
tanpa izin tertulis dari Penerbit

PRAKATA

Tuhan menciptakan manusia dengan tujuan. Apa itu tujuan Tuhan? Seperti yang dikutip di Al Quran Az Zariyat: 57 *“dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka menyembah-Ku”*.

Sudah jelas bahwa Tuhan menciptakan seisinya untuk menyembah. Terlepas dari tugas untuk menyembah sang kuasa, ada tujuan. Apa tujuan menyembah Allah? Mengharapkan ridho dan mendapatkan surganya.

Mata kuliah fisika statistik masih dianggap sebagai mata kuliah yang membosankan dan sulit dipahami bagi kebanyakan mahasiswa. Alasannya karena materi yang dibahas yaitu mengenai sistem atomik dan sub-atomik yang sulit dibayangkan oleh mahasiswa. Terlebih lagi, persamaan statistik yang dikombinasikan dengan bentuk integral dan persamaan matematika yang terkandung di dalamnya membuat mahasiswa harus ekstra berpikir untuk memahaminya. Dalam buku ini, penulis mencoba mengarahkan mahasiswa dari sudut pandang makroskopik, sehingga mahasiswa akan lebih mudah membayangkan dan memahami persamaan yang digunakan. Persamaan yang digunakan dalam buku ini juga dijelaskan secara gamblang dan detail sehingga sangat memudahkan mahasiswa memahami proses demi proses

Buku ini diharapkan banyak membantu mahasiswa di Program Studi Pendidikan Fisika dalam kaitan menyelesaikan tugas di bidang Fisika.

Jakarta, Februari 2023

Penyusun

Tim Fisika Uhamka

DAFTAR ISI

PRAKATA	v
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
UNIT - 1 FISIKA STATISTIK	1
1. Ruang Lingkup Fisika Statistik.....	2
2. Keadaan Setimbang.....	6
3. Asembel Klasik dan Kuantum.....	8
4. Faktorial.....	9
4.1. Fungsi Gamma untuk n bulat positif.....	9
4.2. Aproksimasi Striling.....	9
4.3. Aproksimasi lain.....	9
LATIHAN SOAL	10
UNIT - II DISTRIBUSI PELUANG THERMODINAMIKA	11
1. Distribusi Peluang.....	12
1.1. Distribusi Binomial.....	12
1.2. Distribusi Poisson.....	13
1.3. Distribusi Gauss (Normal).....	14
2. Energi Internal.....	15
2.1. Hukum Ke Satu Thermodynamika.....	16
2.2. Entropi.....	17
2.3. Temperatur dan Energi Internal.....	19
2.4. Kerja dan Jumlah State yang Tersedia.....	20
3. Peluang termodinamik suatu Keadaan makro.....	21
LATIHAN SOAL	22
UNIT - III STATISTIK MAXWELL BOLTSMAN	23
1. Distribusi Maxwell Boltzman.....	24
1.1. Temperatur Pada Keseimbangan Statistik.....	29

1.2. Temperatur Efektif.....	30
1.3. Kestimbangan Termal	30
2. Hukum Ke Nol Thermodinamika.....	31
2.1. Temperatur Dan Hukum ke Nol Thermodinamika.....	31
3. Aplikasi Maxwell Boltman.....	32
3.1. Gas Ideal.....	32
3.2. Pemuaian Maxwell Boltman.....	35
LATIHAN SOAL	37
UNIT - IV STATISTIK BOSE EINSTEIN	39
1. Distribusi Bose Einstein	40
1.1. Konfigurasi Yang Paling Mungkin.....	41
1.2. Distribusi m Partikel.....	42
2. Gas Bose Einstein	43
2.1. Radiasi Benda Hitam.....	44
3. Energi yang terpancar tiap satuan luas tiap satuan waktu	46
4. Kalor jenis zat Padat	46
5. Aplikasi Bose Einstin	47
5.1. Teori Rayleigh dan Jeans	47
5.2. Rapat Energi Wein.....	48
LATIHAN SOAL	49
UNIT - V STATISTIK FERMI DIRAC	51
1. Fungsi Fermi Diract.....	53
1.1. Fungsi Distribusi Fermi Diract pada Suhu 0 K.....	53
1.2. Energi Fermi	54
1.3. Fungsi Distribusi Fermi Dirac pada Suhu $T > 0$ K	55
1.4. Integral yang Mengandung Fungsi Fermi Dirac	56
1.5. Energi Rata-Rata Elektron.....	58
1.6. Kapasitas Kalor Logam.....	59
1.7. Fungsi distribusi Fermi Diract.....	61
2. Partikel Fermi Diract.....	63

LATIHAN SOAL	65
UNIT – VI PERSAMAAN KEADAAN	67
1. Suhu.....	68
2. Suhu Gas Ideal.....	69
3. Hubungan Suhu Dengan Energi Partikel.....	70
4. Persamaan Keadaan Gas Ideal.....	71
5. Persamaan Gas Sejati.....	72
LATIHAN SOAL	75
UNIT VII TEORI ENSAMBEL	77
1. Ruang Fase.....	77
2. Ensambel Mikrokanonik.....	79
3. Ensambel Kanonik.....	82
4. Ensambel Makrokanonik.....	83
5. Aplikasi ensambel kanonik untuk gas tak ideal.....	84
LATIHAN SOAL	86
UNIT VIII TEORI KINETIK GAS	87
1. Model Gas Ideal.....	88
1.1. Tekanan Gas Ideal.....	89
1.2. Temperatur Gas Ideal.....	90
1.3. Energi Dalam Gas Ideal.....	90
2. Kecepatan Molekul.....	91
3. Tekanan Gas.....	92
4. Fluks Molekul.....	93
5. Distribusi Kecepatan Maxwell.....	93
LATIHAN SOAL	96
DAFTAR PUSTAKA	101
GLOSARIUM	103
LAMPIRAN	107
DAFTAR RIWAYAT PENULIS	111

DAFTAR TABEL

Tabel 1	Sifat-sifat makroskopik dan mikroskopik pada sebuah sistem	5
Tabel 2	Asembel Klasik Dan Kuantum.....	8
Tabel 3	State / Konfigurasi.....	13

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1	Kesetimbangan Partikel	7
Gambar 2	Jumlah partikel total konstan $N = n + n$	7
Gambar 3	Balok identic.....	18
Gambar 4	Sistem Boson	40
Gambar 5	Energi Fermi	56
Gambar 6	Fluks Molekul.....	93
Gambar 7	Tumbukan Molekul	94

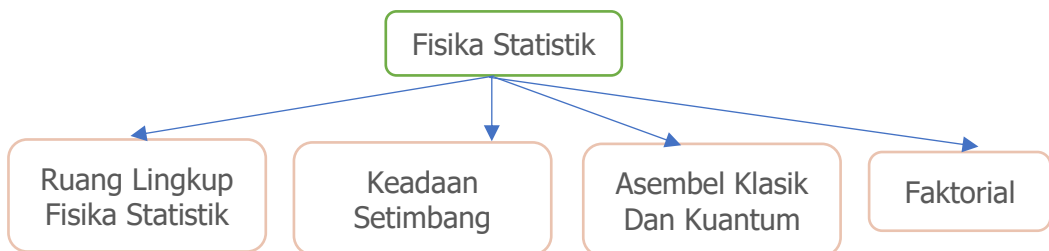
UNIT - 1

FISIKA STATISTIK

Metode Pembelajaran	: Case Method
Waktu	: 150 Menit
Sub CPMK	: Mahasiswa memiliki wawasan dan pengetahuan tentang ruang lingkup materi fisika statistik

A. PENDAHULUAN

Unit ini akan membahas ruang lingkup fisika statistik, keadaan setimbang serta asembel klasik dan kuantum dalam ilmu fisika pendekatan yang digunakan dalam kehidupan sehari-hari.



B. MATERI

Dalam QS Al Baqarah (2-3) *“Kitab (Al-Qur'an) ini tidak ada keraguan padanya; petunjuk bagi mereka yang bertakwa, dan (yaitu) mereka yang beriman kepada yang gaib, melaksanakan shalat, dan menginfakkan sebagian rezeki yang Kami berikan kepada mereka,”*.

Mekanika statistik berkaitan dengan sifat materi dalam kesetimbangan dalam arti empiris yang digunakan dalam termodinamika. Tujuan dari mekanika statistik untuk mendapatkan semua sifat kesetimbangan dari sistem molekul makroskopik dari hukum-hukum dinamika molekul. Oleh karena itu ini bertujuan untuk mendapatkan tidak hanya hukum-hukum umum termodinamika tetapi juga fungsi-fungsi termodinamika tertentu dari sebuah sistem yang diberikan. Namun mekanika statistik, tidak menjelaskan cara sistem mendekati kesetimbangan, juga

tidak mengetahui apakah suatu sistem sesungguhnya bisa ditemukan dalam kesetimbangan. Yang terjadi hanyalah situasi keadaan kesetimbangan yang seperti apa untuk diberikan pada system.

Ruang lingkup fisika statistik meliputi dua bagian besar, yaitu teori kinetik dan mekanika statistik. Berdasarkan pada teori peluang dan hukum mekanika, teori kinetik mampu menggambarkan sistem dalam keadaan tak seimbang, seperti: proses efusi, viskositas, konduktivitas termal, dan difusi. Disini, molekul suatu gas ideal tidak dianggap bebas sempurna tetapi ada antaraksi ketika bertumbukan dengan molekul lain atau dengan dinding. Bentuk antar aksi yang terbatas ini diacukan sebagai antar aksi lemah atau kuasi bebas. Ruang lingkup ini tidak membahas partikel berantar aksi kuat.

1. Ruang Lingkup Fisika Statistik

- Menerangkan sifat-sifat makroskopik suatu sistem melalui sifat-sifat mikroskopik partikel penyusunnya tanpa merinci secara mendalam sifat masing-masing penyusun, melainkan dari aspek statistiknya.
- Mengembangkan lebih mendalam masalah informasi gas yang tidak dapat diterangkan dengan hukum I dan II termodinamika, seperti gas foton, gas fonon, serta gas elektron.
- Memberi pemahaman tentang kinetika (laju perubahan fisika) bila suatu wujud berubah dari satu status ke status yang lain.

Banyaknya gejala dalam dunia fisis melibatkan banyak partikel, maka nilai tinggi dari pendekatan fisika statistik jelas terlihat. Beberapa ilustrasi berikut dimaksudkan untuk menunjukkan alasan-alasan keharusan penggunaan metode statistik dalam menangani permasalahan fisis. Ketidakmungkinan kita untuk memahami perilaku tiap partikel dalam suatu sistem yang terdiri banyak partikel. Misalkan, satu mol gas berisi sekitar 10^{23} molekul, apabila kita ingin mengetahui keadaan sistem dengan mencari persamaan gerak partikel, dapat dilakukan sebagai berikut:

Secara klasik dengan mekanika Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{a \vec{r}}{t^2}$$

Secara kuantum dengan persamaan Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi + V r (\varphi) = E\varphi$$

Adanya sistem fisis yang tidak bisa dianalisis secara satu persatu. Misalkan dimiliki partikel yang terdiri atas 1000 partikel. Bila ke dalam sistem tersebut diberikan energi 1000 eV, tidak berarti tiap partikel akan mendapatkan tambahan energi sebesar 1 eV, tetapi cukup dengan menyimpulkan bahwa setiap partikel rata-rata mendapat tambahan energi sebesar 1 eV.

Adanya partikel fisis yang saling mempengaruhi (cooperative). Sebagai contoh: kita tinjau spektrum yang dipancarkan oleh benda hitam. Radiasi tersebut berasal dari radiasi yang diserap kemudian dipancarkan kembali oleh atom-atom pada dinding rongga. Sebuah atom secara terpisah memiliki tingkat energi yang khas sehingga diharapkan akan mendapatkan spektrum yang tak kontinu. Namun, dalam wujud padatnya; jarak antar atom sangat dekat sehingga spektrum tak kontinu yang dipancarkan suatu atom terpengaruh cukup signifikan pada atom tetangganya sehingga dihasilkan spektrum yang kontinu.

Adanya fluktuasi pada sistem mikroskopik. Misalkan: sebagaimana diketahui bahwa tekanan gas pada dinding bejana diakibatkan oleh tumbukan molekul gas dinding tersebut. Untuk suatu gas dalam keadaan tertentu, tekanannya juga konstan pada nilai tertentu baik secara empirik maupun menurut teori kinetik gas. Namun bila luas permukaan yang diamati semakin kecil, terlihat fluktuasi kecil disekitar nilai yang diharapkan. Ini disebabkan karena gerak molekul gas yang bersifat acak, seperti teramati pada gerak brown.

Perilaku Mikroskopik dan Kuantum State. Banyak sekali sifat-sifat partikel elemen pembangun suatu materi yang tidak bisa dipahami dengan baik. Kita tidak tahu secara mendasar, apa sih sebenarnya muatan listrik atau massa ? Kenapa muatan listrik terkuantisasi, sedangkan massa tidak, kenapa partikel berperilaku seperti gelombang. Perilaku ini menyebabkan sifat-sifat yang aneh-aneh seperti kuantisasi momentum sudut, ketidak pastian harga nilai posisi dan momentum, dan lain-lain. Terlepas dari apakah kita memahami atau tidak yang jelas ini semua merupakan sifat-sifat penting dari mikroskopik yang akan kita pergunakan dalam translasi antara tingkah laku mikroskopik dan makroskopik. Berikut akan kita tinjau beberapa dari perilaku-perilaku tersebut.

a. Kuantisasi muatan listrik.

Muatan listrik suatu materi terkuantiasi dalam kelipatan bilangan $+e$ atau $-e$ dan tidak $\frac{1}{2}e$ atau $\frac{1}{4}e$ dimana $e = 1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb

b. Sifat gelombang dari partikel

Sifat gelombang dari partikel dinyatakan sebagai berikut $\tau = \frac{h}{p}$

dimana h panjang gelombang dari partikel, p adalah momentum partikel dan h adalah konstanta Planck ($h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js).

c. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg.

Prinsip ketidakpastian Heisenberg dinyatakan sebagai berikut $\Delta x \Delta p \approx h$ dimana Δx adalah ketidak pastian posisi dan Δp adalah ketidak pastian momentum.

d. Kuantum State dan Ruang Fase

Dari prinsip ketidak pastian terlihat baik posisi maupun momentum tidak dapat

ditentukan secara pasti dalam waktu yang bersamaan. Jika kita coba melokalisir sebuah partikel dalam ruang 2D dengan koordinat posisi dan momentum (x, p_x) kita tidak akan dapat menemukan suatu titik tertentu, tetapi menemukannya dalam segi empat dengan sisi-sisi Δx dan Δp_x . Jika

Δx dibuat sekecil mungkin maka ketidakpastian Δp_x semakin besar, dan sebaliknya.

Pada keadaan tertentu, jumlah kuantum state yang dapat dicapai dalam elemen $d^3r d^3p$ volume $6D$ adalah $\frac{d^3r d^3p}{h^3}$.

Jumlah kuantum state total adalah $\sum_{s \rightarrow} \int \frac{d^3r d^3p}{h^3}$

dimana s adalah kuantum state

e. Kuantisasi Momentum Sudut Total

Efek kuantum lain dari sebuah partikel adalah momentum sudut total tidak dapat berharga sembarangan tetapi tertentu,

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$$

dimana $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, untuk boson

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, untuk fermion

Momentum sudut total dari sebuah sistem partikel berhubungan dengan momentum sudut spin dan momentum sudut orbital dari sistem partikel tersebut. Momentum sudut spin diberikan oleh

$$s = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \dots$$

dan momentum orbital diberikan oleh $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$

Jadi momentum sudut total dari sebuah sistem partikel adalah penjumlahan dari momentum sudut spin dan momentum sudut orbital, berikan sebagai berikut $J = L + S$

Tabel 1

Sifat-sifat makroskopik dan mikroskopik pada sebuah sistem

Sifat Makroskopik	Sifat Mikroskopik
<ul style="list-style-type: none"> Tidak berdasarkan pada pengandaian khusus mengenai struktur materi. Jumlah besaran yang diberikan terbatas. 	<ul style="list-style-type: none"> Dimulai dengan pengandaian mengenai struktur materi. Banyak kuantitas yang harus diperinci

<ul style="list-style-type: none"> • Besaran dipilih melalui daya tangkap indera kita secara langsung • Pada umumnya, besaran makroskopik dapat diukur secara langsung 	<ul style="list-style-type: none"> • Kuantitas yang diperinci tidak berdasarkan daya tangkap indera kita. • Kuantitas tidak bisa diukur
--	---

Obyek yang ditentukan dalam fisika statistik umumnya memiliki sifat:

- Berukuran sangat kecil, sehingga kadang muncul sebagai partikel dan kadang sebagai gelombang, sehingga lebih mudah bila diketahui dengan mekanika kuantum yang bersifat probabilistik.
- Tidak dapat diisolasi, sehingga tidak diketahui posisi dan momentum awalnya secara serempak. Akibatnya tidak mungkin digunakan hukum Newton untuk menentukan obyek tersebut.
- Berada dalam jumlah yang besar, sehingga prosesnya memiliki pilihan arah waktu tertentu atau bersifat *time irreversible*.

2. Keadaan Setimbang

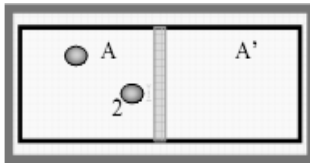
Keadaan setimbang merupakan keadaan yang sangat penting pada proses pengukuran. Dalam fisika statistik untuk menyatakan Keadaan setimbang dinyatakan dengan peluang maksimal, pernyataan peluang maksimal dapat dinyatakan oleh berbagai cara, diantaranya:

- a. Jumlah keadaan yang terbesar dari semua jumlah keadaan yang ada (P_{\max}).
- b. Jumlah keadaan yang dibolehkan (U_{\max}).
- c. Jumlah keadaan makro yang memiliki jumlah keadaan mikro terbesar (W_{\max})

Dua buah partikel identik berada dalam sistem yang terisolasi (sistem I). Sistem I ini terdiri dari dua sistem (sistem A dan A') yang dibatasi oleh dinding, yang memungkinkan perpindahan partikel antar kedua sistem tersebut. Dari

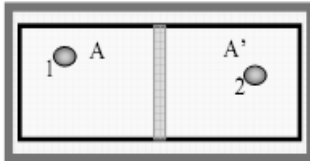
keadaan yang ditunjukkan pada gambar 1, maka kita dapat menyatakan bahwa kesetimbangan terjadi ketika masing-masing sistem diisi oleh sebuah partikel, dimana memiliki peluang terbesar ($P(2) = P(3) = 1/2$), mengingat dalam hal ini kedua partikel dianggap sama.

Keadaan 1



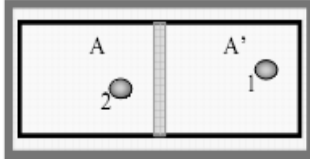
Keadaan 1, kedua partikel berada di sistem A, sehingga peluangnya adalah:
 $P(1) = 1/4$

Keadaan 2



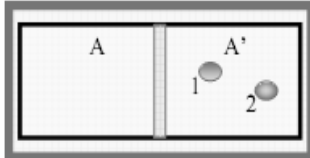
Keadaan 2 dan keadaan 3, merupakan keadaan yang sama karena dalam hal ini keduanya merupakan partikel identik, sehingga peluangnya adalah:

Keadaan 3



$P(2) = P(3) = 2/4 = 1/2$

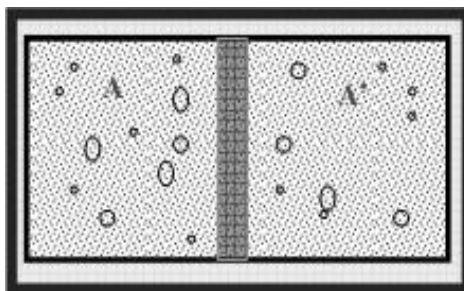
Keadaan 4



Keadaan 4, kedua partikel berada pada sistem A', sehingga peluangnya adalah:
 $P(4) = 1/4$

Gambar 1. Kesetimbangan Partikel

Ditinjau suatu sistem tertutup seperti tampak pada gambar 2 memiliki jumlah total partikel untuk kedua sistem adalah N . Karena sistem gabungan ini terisolasi maka jumlah total partikel tidak berubah (konstan). Misal jumlah partikel dalam sistem A adalah n dan jumlah partikel dalam sistem A' adalah n'



Gambar 2. Jumlah partikel total konstan $N = n + n'$

Keadaan kesetimbangan akan diperoleh jika masing-masing sistem A dan A' memiliki jumlah partikel yang sama atau hampir sama, sehingga keadaan setimbang dapat diprediksikan ketika sistem A dan A' memiliki partikel $n \approx n' \approx 1/2 N$

3. Asembel Klasik dan Kuantum

Tabel. 2 Asembel Klasik Dan Kuantum

Partikel	Klasik	Boson	Fermion
Sifat partikel (berkaitan dengan partikel mekanis yang berkesesuaian)	<ul style="list-style-type: none"> • Tunduk pada aturan mekanika klasik • Energi partikel kontinu • Spin bernilai sembarang • Partikel cukup berjauhan sehingga fungsi gelombangnya tidak bertumpangan 	<ul style="list-style-type: none"> • Tunduk pada aturan mekanika kuantum • Energi partikel tak kontinu • Spin bilangan bulat • Fungsi gelombangnya simetri 	<ul style="list-style-type: none"> • Tunduk pada aturan mekanika kuantum • Energi partikel tak kontinu • Spin bilangan bulat ditambah setengah • Fungsi gelombangnya antisimetri
Sifat partikel (berkaitan dengan penyusunan konfigurasi)	<ul style="list-style-type: none"> • Terbedakan 	<ul style="list-style-type: none"> • Tidak terbedakan 	<ul style="list-style-type: none"> • Tidak terbedakan • Taat pada asas pauli
Contoh	<ul style="list-style-type: none"> • Molekul gas 	<ul style="list-style-type: none"> • Foton • Fonon • Helium • Partikel alfa 	<ul style="list-style-type: none"> • Elektron • Proton
Nama partikel	<ul style="list-style-type: none"> • Boltzmann 	<ul style="list-style-type: none"> • Boson 	<ul style="list-style-type: none"> • Fermion
Fungsi distribusi	<ul style="list-style-type: none"> • Maxwell-Boltzmann (MB) 	<ul style="list-style-type: none"> • Bose-Einstein (BE) 	<ul style="list-style-type: none"> • Fermi-Dirac (FD)

4. Faktorial

Faktorial dari suatu bilangan bulat, misalnya saja n , memiliki arti

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \dots\dots\dots(1)$$

di mana

$$0! = 1 \dots\dots\dots(2)$$

Demikianlah nilai faktorial terdefinisi pada nilai bilangan bulat positif.

4.1. Fungsi Gamma untuk n bulat positif

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx \dots\dots\dots(3)$$

Dengan melakukan integrasi parsial terhadap Persamaan (3) dapat

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) \dots\dots\dots(4)$$

yang apabila dituliskan lebih jauh

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \Gamma(1). \dots\dots\dots(5)$$

4.2. Aproksimasi Stirling

Aproksimasi Stirling yang berguna untuk menyederhanakan faktorial dan saat menurunkannya adalah

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \dots\dots\dots(6)$$

atau

$$\ln n! \approx (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \dots\dots\dots(7)$$

4.3. Aproksimasi lain

Dengan melihat nilai yang besar dari n di mana umumnya merupakan daerah kerja mekanika statistik dan umumnya yang dibahas adalah perubahan nilai atau turunan dari $\ln n!$ maka aproksimasi lain digunakan, yaitu

$$\ln n! \approx n \ln n - n \dots\dots\dots(8)$$

LATIHAN SOAL

Kerjakan soal dibawah ini!

1. Fisika statistik dimulai dengan membuat anggapan tentang sifat-sifat partikel penyusun materi. Bagaimana kebenaran anggapan tersebut dapat dinilai?
2. Termodinamika membahas keadaan setimbang sedang fisika statistik membahas keadaan dengan peluang maksimum. Jelaskan bagaimana keadaan dengan peluang maksimum dapat dihubungkan dengan keadaan setimbang?
3. Tuliskan persamaan dan perbedaan antara pendekatan termodinamika dan pendekatan fisika statistik. Apakah kelebihan dan kekurangan masing-masing metode? Metode mana yang lebih tepat bagi fisikawan?
4. Hitunglah $\Gamma(5/2)$

UNIT – II

DISTRIBUSI PELUANG THERMODINAMIKA

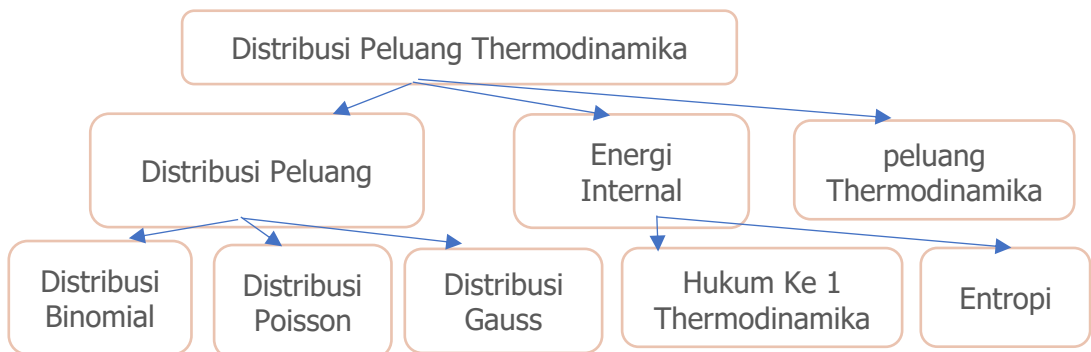
Metode Pembelajaran : Case Method

Waktu : 150 Menit

Sub CPMK : Mahasiswa mampu Menjelaskan konsep dan Merumuskan bentuk fungsi dari distribusi binomial, Menentukan peluang sistem dengan menggunakan fungsi distribusi binomial, Merumuskan bentuk fungsi dari distribusi Poisson, Menjelaskan syarat berlakunya fungsi distribusi Poisson, dan menjelaskan distribusi gauss serta energi internal

A. Pendahuluan

Unit ini membahas Setelah mengikuti perkuliahan , mahasiswa diharapkan dapat Menjelaskan konsep peluang, Merumuskan bentuk fungsi dari distribusi binomial, Menentukan peluang sistem dengan menggunakan fungsi distribusi binomial, Merumuskan bentuk fungsi dari distribusi Poisson., distribusi Poisson, distribusi gauss , energi internal dan peluang thermodynamika.



B. Materi

"Dan langit itu Kami bangun dengan kekuasaan (Kami) dan sesungguhnya Kami benar-benar meluaskannya." (QS. Adz-Dzaariyat, 51:47) temuan-temuan ilmu alam modern mendukung kebenaran yang dinyatakan dalam Al Quran dan bukan dogma materialis. Materialis boleh saja

menyatakan bahwa semua itu "kebetulan", namun fakta yang jelas adalah bahwa alam semesta terjadi sebagai hasil penciptaan dari pihak Allah dan satu-satunya pengetahuan yang benar tentang asal mula alam semesta ditemukan dalam firman Allah yang diturunkan kepada kita.

Dalam suatu pertandingan sering dilakukan undian untuk memilih tempat pertandingan. Biasanya undian dilakukan dengan cara melambungkan sebuah uang logam bersisi dua; sebutlah sisi muka dan sisi belakang. Pada peristiwa pengundian tersebut tidak dapat dipastikan sisi mana yang akan muncul, apakah sisi muka atau sisi belakang. Hanya ada peluang bahwa sisi muka yang akan muncul atau sisi belakang yang akan muncul. Jadi peluang dapat didefinisikan sebagai suatu cara dari sistem untuk dapat menempati state (keadaan) tertentu.

1. Distribusi Peluang

1.1. Distribusi Binomial

Jika p adalah peluang sistem berada pada state yang memenuhi kriteria, dan q adalah peluang sistem berada pada sistem yang tidak memenuhi kriteriam, maka

$$P+q = 1$$

Jika sistem mempunyai dua elemen identik, maka setiap elemen berada pada state yang memenuhi kriteria atau tidak memenuhi kriteria memenuhi

$$(p_1+q_1) (p_2+q_2) = p_1p_2+p_1q_2+q_1p_2+q_1q_2= 1 \times 1=1$$

dimana 1 melambangkan partikel ke-1 dan 2 melambangkan partikel ke-2 Bila sistem yang terdiri dari N partikel dimana n partikel berada pada state yang memenuhi kriteria dan $(N-n)$ partikel tidak memenuhi kriteria, maka peluang dari sejumlah partikel yang memenuhi kriteria dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \dots\dots\dots (1)$$

yang mungkin dari partikel yang memenuhi kriteria. Persamaan di atas dikenal dengan nama "fungsi distribusi binomial" dan valid digunakan untuk N dan n tidak terlalu besar. Misalkan sebuah sistem terdiri dari 3 partikel identik berada dalam medan magnet B . Masing-masing partikel dapat berada pada state spin up (arah momen magnetik p paralel dengan arah medan magnet B atau orientasi $+$) dan state spin down (arah momen magnetik p antiparalel dengan arah medan magnet B atau orientasi $-$). Peluang dari ketiga partikel untuk mendapatkan state / konfigurasi dapat dilihat pada table dibawah ini

Tabel 3 State / Konfigurasi

Partikel-1	Partikel-2	Partikel-3	Energi Total	Jumlah State	Peluang
+	+	+	-3 μB	1	1/8
+	+	-	-1 μB		
+	-	+	-1 μB	3	3/8
-	+	+	-1 μB		
-	-	+	+1 μB		
-	+	-	+1 μB	3	3/8
+	-	-	+1 μB		
-	-	-	+3 μB	1	1/8
			Total	8	1

1.2. Distribusi Poisson

Bila jumlah state yang memenuhi kriteria jauh lebih kecil dari jumlah partikel ($n \ll N$) dan $p \ll 1$, maka distribusi binomial tidak lagi valid. Untuk itu digunakan dapat digunakan distribusi Poisson. Dari distribusi binomial didapatkan

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \dots\dots\dots (2)$$

Jika $n \ll N$, maka koefisien binomial pada bagian kanan dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = N^n$$

I Misalkan $q^{N-n} = y$, dan $q = 1-p$, maka

$$\ln Y = (N-n) \ln(1-p)$$

Untuk harga $n \ll N$, dapat dianggap $N-n = N$, dan pada keadaan $p \ll 1$, dibolehkan melakukan pendekatan dengan deret Taylor, sehingga sisi kanan dari persamaan I diatas menjadi

$$\ln(1-p) = -p$$

sehingga persamaan menjadi $y = e^{-Np}$

Dengan memasukkan harga-harga di atas kedalam fungsi distribusi binomial, didapatkan

$$P(n) = \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np} \text{ atau } P_N(n) = \frac{\tau^n}{n!} e^{-\tau}$$

dimana $\tau = Np$. Persamaan ini dikenal dengan "fungsi distribusi Poisson" dan baik digunakan bila $p \ll 1$ dan $N \rightarrow \infty$

1.3. Distribusi Gauss (Normal)

Distribusi binomial dapat digunakan untuk menghitung peluang semua state yang mungkin dari sebuah sistem. Untuk sistem terdiri dari banyak elemen, formula Stirling dapat digunakan untuk menentukan peluang elemen. Namun untuk sistem yang sangat besar ($N \gg 1$), menghitung seluruh spektrum peluang sangat membosankan. Untunglah pada $N \gg 1$ distribusi peluang merupakan fungsi yang rata dimana state-state yang hampir sama mempunyai peluang yang hampir sama. Sebagai contoh, $P_{1000}(491)$ hampir sama $P_{1000}(490)$ dan $P_{1000}(492)$.

Cara yang paling simpel untuk menghitung peluang sistem yang terdiri dari sejumlah besar partikel adalah dengan menggunakan konsep harga rata-rata dan standar deviasi. Distribusi Gauss dikembangkan atas dasar asumsi distribusi peluang untuk semua state yang dapat dicapai dinyatakan dengan parameter μ (nilai rata-rata) dan σ (standar deviasi). Dalam menurunkan formula Gauss dibuat pendekatan bahwa fungsinya

kontinu dan rata, titik referensinya no diambil terdekat ke harga n yang ditinjau. Pendekatan menjadi reliabel bila jumlah elemen sistem bertambah besar. Formula Gauss diturunkan dengan mengaplikasikan "deret Taylor" dimana

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x^m} |_{(x-x_0)}^m \dots\dots\dots (3)$$

Jika harga fungsi f(x) dan semua tulunannya pada suatu titik x = x₀ diketahui, maka nilai fungsi pada titik lain x = x₁ dapat ditentukan. Dalam kasus ini, kita selidiki fungsi P,(n),selanjutnya ditulis P(n) saja, merupakan fungsi yang kontinu dari n. Untuk memenuhi dua kriteria dalam penurunan formula Gauss, yaitu (1) fungsi serata mungkin, (2) titik referensi no diambil sedekat mungkin dengan n yang ditinjau, maka untuk kriteria pertama diambil logaritmanya dan untuk memenuhi kriteria kedua diambil P(n) untuk n disekitar n,h dimana n_{maks}= n̄. Logaritma dari P(n) disekitar

n = n̄ adalah sebagai berikut

$$\text{Ln}P(n) = \text{Ln}P(\bar{n}) + \frac{\partial}{\partial n} \text{Ln}P(n)|_{n = \bar{n}}(n - \bar{n}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \text{Ln} P(n)|_{n = \bar{n}}(n - \bar{n})^2 + \dots$$

2. Energi Internal

Energi dalam suatu sistem merupakan jumlah energi dari masing-masing system yang tercakup di dalamnya, seperti : energi kinetik, energi potensial dan energi vibrasi. Sebagai contoh, energi internal dari sebatang besi mencakup energi kinetik dari electron konduksi, energi potensial dari atom-atom besi yang disebabkan oleh interaksi dengan atom-atom sekitar dan energi kinetik vibrasi disekitar posisi kesetimbangan.

Atom-atom dalam zat padat, mempunyai interaksi elektrostatis dengan tetangga terdekatnya. Atom-atom bergetar dan energi kinetik berubah menjadi energi potensial ujung-ujung getaran dan berubah menjadi energi kinetik pada titik-titik kesetimbangan. Secara rata-rata, setengah energi berbentuk energi

potensial ($\frac{1}{2} kr^2$) dan setengah energi berbentuk energi kinetik ($\frac{1}{2} mv^2$). Energi disimpan dalam bentuk energi kinetik dan energi potensial. Energi dapat pula disimpan dalam bentuk energi kinetik rotasi seperti elektron konduksi dalam logam, atau molekul dalam gas, atau barangkali dalam energi kinetik rotasi dari molekul poliatomik. Masing-masing atom dapat menyimpan energi potensial ($\frac{1}{2} kr^2$) dan energi kinetik ($\frac{1}{2} mv^2$).

Dalam kasus 3D, ada tiga cara untuk menyimpan energi potensial dari atom-atom pada zat padat. $E_p = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} Ky^2 + \frac{1}{2} Kz^2$ dan tiga cara menyimpan kinetik translasi $E_p = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} Ky^2 + \frac{1}{2} Kz^2$

Jika p melambangkan momentum dari molekul gas diatomik, maka

$$E_{Tranlasi} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

Disamping bertranslasi, atom-atom juga dapat berotasi. Jika I_y , dan I_z , menyatakan momen inersia dari molekul-molekul gas maka gas mempunyai "dua derajat kebebasan rotasi".

$$E_{Rotasi} = \frac{L_y^2}{2I_y} + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

2.1. Hukum Ke Satu Thermodinamika

Energi internal bersifat kekal dan tidak dapat dimusnahkan dan tidak pula diciptakan. Energi internal dapat berubah dari suatu bentuk ke bentuk lain. Ada tiga cara untuk mengubah energi internal, yaitu:

1. Dengan menambah atau mengambil kalor dari sistem.
2. Dengan melakukan kerja pada sistem atau sistem melakukan kerja pada lingkungan.
3. Dengan menambah atau mengambil partikel dari sistem.

Jika dE menyatakan perubahan energi internal dari sistem, dQ adalah jumlah kalor yang ditambahkan pada sistem, dW adalah kerja yang dilakukan pada sistem dan dN adalah perubahan (penambahan) partikel

pada sistem, maka hukum pertama termodinamika dapat ditulis $dE = dQ + dW + \mu dN$ dimana μ adalah potensial kimia. Perlu diperhatikan bahwa dE adalah diferensial eksak sehingga nilainya bergantung pada keadaan awal dan akhir proses. Sedangkan dQ dan dW adalah diderensial tak eksak sehingga nilainya bergantung kepada jalannya proses.

Densitas State dan Energi Internal

Jumlah state yang tersedia untuk sebuah sistem (state total) adalah perkalian antara jumlah state yang tersedia dengan komponen sistem secara individu

$$\Omega_0 = \prod_{i=1}^n \Omega_i$$

dimana Ω_0 adalah jumlah state yang tersedia pada sistem total dan Ω_i adalah jumlah state yang tersedia untuk setiap derajat kebebasan.

2.2. Entropi

Untuk sistem makroskopik, jumlah state yang tersedia sangat bergantung pada energi internalnya. Konsekuensinya, bila dua sistem berinteraksi dalam beberapa cara, jumlah state yang tersedia terhadap sistem terkombinasi dipengaruhi oleh distribusi energi di antara keduanya. Perubahan yang sangat kecil dalam distribusi energi menyebabkan perubahan yang sangat besar dalam jumlah state yang tersedia.

$$E_0 = E_1 + E_2$$

Bila sistem hanya berinteraksi secara termal, dan tidak secara mekanik dan definisi maka berlaku $dQ = dE = TdS$

Dari hubungan diatas, dapat didefinisikan temperatur sistem T

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{v,n} = \frac{1}{T}$$

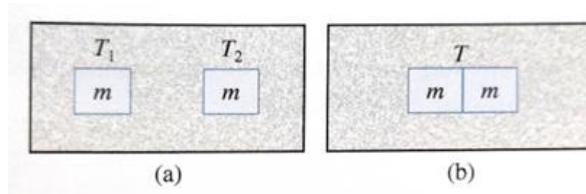
maka pada kondisi setimbang didapatkan

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s_0}{\partial E_1}\right)_{v,n} &= \left(\frac{\partial s_1}{\partial E_1}\right)_{v,n} + \left(\frac{\partial s_2}{\partial E_1}\right)_{v,n} \\ &= \left(\frac{\partial s_1}{\partial E_1}\right)_{v,n} - \left(\frac{\partial s_2}{\partial E_2}\right)_{v,n} = 0 \end{aligned}$$

Atau $\left(\frac{\partial s_1}{\partial E_1}\right)_{v,n} = \left(\frac{\partial s_2}{\partial E_1}\right)_{v,n} \Rightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$

Jadi dapat disimpulkan bila dua sistem dalam kesetimbangan termal, maka temperatur keduanya adalah sama.

Dalam termodinamika, sistem akan dideskripsikan dengan sejumlah besaran fisika yang menggambarkan keadaan sistem secara makroskopis. Besaran-besaran ini disebut sebagai besaran keadaan. Besaran fisis makroskopis ini dapat berupa besaran fisis rerata dari partikel-partikel dalam sistem atau berupa besaran fisis total seluruh partikel-partikel dalam sistem. contoh proses ireversibel, mari kita perhatikan kasus dua balok identik yang masing-masing bermassa m terbuat dari logam dengan kapasitas panas spesifik c . Awalnya satu blok bertemperatur T_1 , dan blok lainnya bersuhu T_2 dan seluruh sistem diisolasi secara termal dari sekelilingnya dan blok-blok tersebut diisolasi satu sama lain



Gambar 3 balok identic

Gambar 1(a)). Jika kedua balok dikontakkan (Gambar 1(b)), kalor akan mengalir dari yang lebih panas ke yang lebih dingin dan sistem akhirnya akan menetap pada temperatur $T = \frac{1}{2}(T_1+T_2)$. Perubahan entropi pada proses ini adalah

$$\Delta S = \int_{T_1}^T \frac{d'Q}{T} + \int_{T_2}^T \frac{d'Q}{T} = \int_{T_1}^T mc \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^T mc \frac{dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + mc \ln\left(\frac{T}{T_2}\right)$$

$$= mc \ln \left(\frac{T^2}{T_1 T_2} \right) = 2mc \ln \left(\frac{T}{\sqrt{T_1 T_2}} \right) = 2mc \ln \left(\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{\sqrt{T_1 T_2}} \right)$$

Dan dengan demikian

$$\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{\sqrt{T_1 T_2}} > 1 \Rightarrow \ln \left[\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{\sqrt{T_1 T_2}} \right] > 0 \text{ dan karenanya } \Delta S > 0$$

Dari proses serupa lainnya dalam sistem terisolasi menunjukkan bahwa dalam semua kasus seperti $\Delta S > 0$. Proses kebalikannya, dimana $\Delta S < 0$, tidak terjadi secara spontan dalam sistem terisolasi; misalnya, dua blok logam dalam kontak termal pada suhu yang sama tidak akan berubah secara spontan ke suhu yang berbeda.

2.3. Temperatur dan Energi Internal

Dengan menggunakan informasi sebelumnya, kita akan mengembangkan sebuah pemikiran untuk mengukur temperatur T . Entropi diukur dari jumlah state yang tersedia dan $1/T$ diukur dengan berbagai variasi sistem energi internal.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{v,n} = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{\partial E} (k \ln \Omega(E)) = \frac{1}{\partial E} (k \ln (K) E^{xn})$$

sehingga didapatkan $E = x \mu k T$

dimana sistem biasanya $X = \frac{1}{2}$, energi internal sistem dapat ditulis $E = \frac{1}{2} \mu k T$

$$U = Nf \frac{1}{2} kT \quad f = \frac{\text{derajat kebebasan}}{\text{Molekul}}$$

Monatomic gas $f = 3$

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT \quad C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} nR$$

Diatomic gas $f = 5$

$$U = \frac{5}{2} NkT = \frac{5}{2} nRT \quad C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{5}{2} nR$$

Energi Kinetik Molekul

$$PV = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} N m \overline{v^2} \right) \quad PV = NkT$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} N m \overline{v^2} \right) = NkT$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

Ekuipartisi Energi

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\frac{1}{2} m (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) = \frac{3}{2} kT$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v_i^2} = \frac{1}{2} kT$$

$$\frac{1}{2} kT = \text{Energi per derajat kebebasan}$$

2.4. Kerja dan Jumlah State yang Tersedia

Untuk sistem berinteraksi secara termal, mekanik dan difenisikan, perubahan energi internalnya berdasarkan hukum I Termodinamika dapat ditulis

$$dE = T dS - p dV + \mu dN$$

$$\text{atau } dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

$$\text{Dari hubungan ini didapat } \left[\frac{\partial S}{\partial E} \right]_{V,N} = \frac{1}{T}; \left[\frac{\partial S}{\partial V} \right]_{E,N} = \frac{p}{T}; \left[\frac{\partial S}{\partial N} \right]_{E,N} = -\frac{\mu}{T}$$

Berdasarkan hubungan antara entropi dan jumlah state yang tersedia ($S = k \ln \Omega$), tekanan sistem dapat didefinisikan

$$P = T \left[\frac{\partial S}{\partial V} \right]_{E,N} = kT \left[\frac{\partial \ln \Omega}{\partial V} \right]_{E,N} = kT \left[\frac{\Delta \ln \Omega}{\Delta V} \right]_{E,N}$$

$$= kT \left[\frac{\ln \Omega_2 - \ln \Omega_1}{\Delta V} \right]_{E,N} = \frac{kT}{\Delta V} \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

$$\text{Atau } \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = e^{\frac{p \Delta v}{kT}}$$

3. Peluang termodinamik suatu Keadaan makro

Bila terdapat sejumlah tingkat energi j yang memiliki energi ϵ_j dengan jumlah keadaan energi atau degenerasi pada masing-masing tingkat energi adalah g_j , maka untuk statistik Maxwell Boltzman bentuk peluang termodinamik suatu Keadaan makronya adalah

$$W_{MB} = N! \prod_j \frac{g_j^{N_j}}{N_j!}$$

untuk statistik Bose Einstein adalah

$$W_{BE} = \prod_j \frac{(g_j + N_j - 1)!}{(g_j - 1)! N_j!}$$

untuk statistik Fermi Dirac adalah

$$W_{FD} = \prod_j \frac{(g_j)!}{(g_j - 1)! N_j!}$$

LATIHAN SOAL

Kerjakan soal dibawah ini!

1. Pada titik a dalam ruang parameter $V - T$, sistem memiliki temperature $T_c < T_b$, volume $V_c < V_b$, dan energi total $U_a = 17q$. Degenerasi tingkat-tingkat energi sistem pada keadaan ini adalah $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$, dan $g_4 = 5$.
2. Lima partikel terdistribusi pada keadaan-keadaan energi dari empat tingkat energi yang perbedaan jarak energi satu dengan lainnya sama, $\epsilon_1 = \epsilon$, $g_1 = 1$, $\epsilon_2 = 2\epsilon$, $g_2 = 3$, $\epsilon_3 = 3\epsilon$, $g_3 = 4$, dan $\epsilon_4 = 4\epsilon$, $g_4 = 5$ sehingga total energi sistem $U = 12 \epsilon$. Hitunglah peluang termodinamika untuk setiap keadaan makro dan rata-rata bilangan okupasi untuk setiap tingkat (energi) apabila partike-partikel tersebut memenuhi
 - (a) statistik Bose-Einstein,
 - (b) statistik Fermi-Dirac, dan
 - (c) statistic Maxwell-Boltzmann!

UNIT - III

STATISTIK MAXWELL BOLTMAN

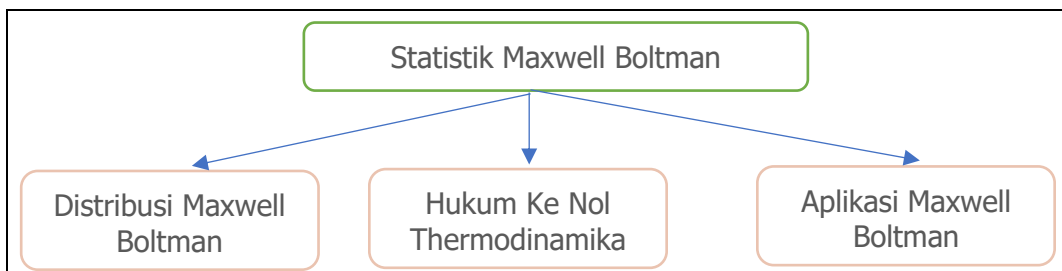
Metode Pembelajaran : Case Method

Waktu : 150 Menit

Sub CPMK : Mahasiswa mampu menerapkan teori statistik Maxwell Boltzmann pada sistem fisis (efek dopler, vibrasi kisi dalam kristal, pemuaian termal zat), gas ideal

A. Pendahuluan

Unit ini akan membahas ruang lingkup teori statistic Maxwell Boltzmann pada sistem fisis (efek dopler, vibrasi kisi dalam kristal, pemuaian termal zat), gas ideal.



B. Materi

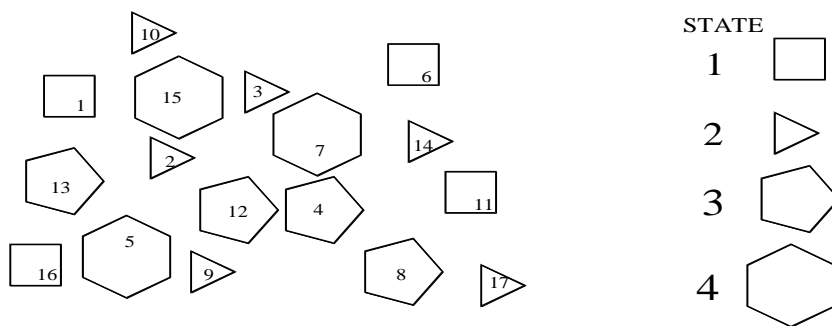
"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal". (Al Imran :190). Dalam ayat diatas kita diberi petunjuk, setidaknya tersirat beberapa makna antara lain adalah: alam semesta yang senantiasa berproses tanpa henti dan menyajikan banyak sekali gejala dalam seluruh dimensi ruang dan waktu yang terus berkembang.

1. Distribusi Maxwell Boltman

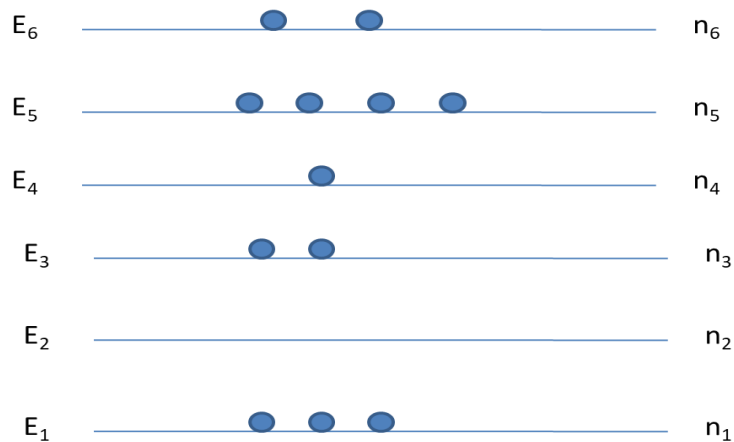
Tinjau partikel sebanyak N akan di distribusikan pada tingkat energi yang berbeda yaitu: $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ dengan partisi partikelnya $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i$
Prinsip kesamaan peluang apriori: "Bahwa semua keadaan tingkat energi mempunyai peluang yang sama untuk diisi asalkan jumlah partikel dan energi tetap"

Contoh :

1. sistem mempunyai 17 partikel dan tiap partikel mempunyai 4 keadaan



2. Distribusi 12 partikel dengan perbedaan tingkat energi



Berlaku untuk partikel identik yang dapat dibedakan.

- Identik \rightarrow struktur dan komposisi sama
- Dibedakan \rightarrow kondisi / keadaan partikel identik berbeda satu sama lain.

Contoh : molekul gas H_2, O_2 dll \rightarrow karena jarak berjauhan maka molekul/partikel tersebut dapat dibedakan.

- Distribusi spesifik molekul disebut konfigurasi system
- Peluang partisi partikel sebanding dengan jumlah perbedaan cara partikel yang dapat didistribusikan pada suatu tingkat energi partisi.
- Dari sejumlah N partikel maka jumlah cara mengisi pada tingkat E_1
 - ❖ Untuk memilih partikel pertama ada N cara
 - ❖ Untuk memilih partikel kedua ada (N-1) cara
 - ❖ Untuk memilih partikel ketiga ada (N-2) cara

Jumlah cara memilih tiga partikel dari satu-satu N partikel pada tingkat E_1 adalah:

$$N(N-1)(N-2) = N! / (N-3)! \quad \dots\dots\dots (1)$$

Karena kita memilih 3 dari satu kali ambil partikel maka persamaan (1) harus dibagi 3! sehingga: $N! / 3!(N-3)!$ Secara umum dapat ditulis:

$$N! / n_1!(N-n_1)! \quad \dots\dots\dots (2)$$

Persamaan ke dua (2) merupakan permutasi (konfigurasi) dari N partikel dengan mengambil n_1 partikel pada satu kali ambil.

Jumlah cara memilih n_2 untuk tingkat E_2

$$(N-n_1)! / n_2!(N-n_1-n_2)! \quad \dots\dots\dots (3)$$

Proses ini dapat berlangsung sampai tingkat energi setimbang.

Jumlah perbedaan cara yang dapat dibedakan yang dicapai untuk n_1, n_2, n_3, \dots

$$W = \{N! / n_1!(N-n_1)!\} \times \{(N-n_1)! / n_2!(N-n_1-n_2)!\} \times \dots\dots$$

Secara umum :

$$W = N! / n_1! n_2! n_3! \dots n_i! \quad \dots\dots\dots (4)$$

Dimana

W = faktor bobot konfigurasi

N! = cara berbeda untuk menyusun N molekul

$n_i!$ = Susunan dari n_i molekul dengan energi ϵ_i bersesuaian dengan konfigurasi yang sama

Jika terdapat g_i keadaan dengan energi E_i , banyaknya cara (kemungkinan menemukan partikel) satu partikel memiliki energi E_i adalah g_i . Banyaknya cara dua partikel memiliki energi E_i adalah $(g_i)^2$

Jika n_i partikel dapat ditemukan maka :

$$g_1^{n_1} \times g_1^{n_2} \dots = g_i^{n_i} \dots \dots \dots (5)$$

Total banyaknya cara N partikel dapat didistribusikan:

$$W = \{N! / n_1! n_2! n_3! \dots n_i!\} \{g_1^{n_1} \times g_1^{n_2} \dots \dots \dots g_i^{n_i}\} \dots \dots \dots (6)$$

Karena partikel indentik maka partikel tidak dapat diketahui keberadaannya, sebagai contoh partikel pada E_1 yaitu n_1 berpindah tingkat. Oleh karena itu $N!$ dipermutasikan diantara penempatan partikel yang mempunyai tingkat energi berlainan mempunyai bagian yang sama Maka persamaan (5) harus dibagi $N!$ sehingga menjadi:

$$W = \{g_1^{n_1} \times g_1^{n_2} \dots \dots \dots g_i^{n_i} / n_1! n_2! n_3! \dots n_i!\} \dots \dots \dots (7)$$

$$W = \prod_{i=1}^N \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \dots \dots \dots (8)$$

Persamaan (8) berkaitan dengan probabilitas distribusi Maxwell Boltzman. Maka harus menentukan distribusi mana yang berpeluang terbesar, yaitu distribusi yang menghasilkan harga W maksimum.

Tinjau molekul gas O_2 terisolasi berada dalam suatu bejana terdiri dari N molekul yang masing-masing n_i molekul menempati energi E_i dengan fungsi keadaan g_i . Pada saat tertentu molekul gas O_2 tersebut terdistribusi dalam tingkat energi berbeda sehingga tercapai kesetimbangan statistik.

Diasumsikan partikel tidak berinteraksi maka berlaku:

Jumlah total molekul

$$N = n_1 + n_2 + \dots = \sum_i^N n_i$$

Jumlah energi sistem

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots = \sum_i^N n_i E_i$$

Molekul gas O_2 akan memenuhi persamaan (8) dari distribusi Maxwell Boltzman, sehingga perlu dicari nilai maksimum dari persamaan (8). Untuk menyelesaikan logaritmik faktorial diperlukan pendekatan Stirling:

$$\ln n! = n \ln n - n \quad \text{untuk} \quad n \gg 1$$

Sehingga persamaan (7) menjadi

$$\ln W = \sum n_i \ln g_i - \sum \ln n_i! \quad (8)$$

Menentukan nilai maksimum dari persamaan (7) dengan pendekatan Stirling tidak masalah karena :

$$(\ln W)_{\text{maks}} = \ln W_{\text{maks}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial \ln W}{\partial n_i} = 0 = -\sum n_i \partial \ln n_i - \sum \ln n_i \partial n_i + \sum \ln g_i \partial n_i + \sum \partial n_i \quad (9)$$

karena $\partial \ln n_i = \frac{1}{n_i} \partial n_i$ maka $\sum \partial n_i = \sum n_i \partial \ln n_i$

Karena banyaknya molekul konstan $\sum \partial n_i = 0$ sehingga pers(9)

$$-\sum \ln n_i \partial n_i + \sum \ln g_i \partial n_i = 0 \quad (10)$$

Persamaan (10) harus memenuhi hukum kekekalan energi dan kekekalan jumlah partikel sehingga dari jumlah molekul dalam masing-masing tingkat energi tidak bebas satu terhadap yang lainnya tetapi harus memenuhi:

$$\sum \partial n_i = \partial n_1 + \partial n_2 + \partial n_3, \dots\dots\dots = 0 \quad (11)$$

$$\sum E_i \partial n_i = E_1 \partial n_1 + E_2 \partial n_2 + E_3 \partial n_3, \dots\dots\dots = 0 \quad (12)$$

Untuk memasukan persyaratan berbagai kedalam persamaan (10) digunakan metode pengali tak tentu Lagrange. Persamaan (11) dikalikan dan persamaan (12) dikalikan dengan alpha dan beta merupakan kuantitas yang bebas dari. Kemudian ditambahkan ke persamaan (10) maka diperoleh:

$$\sum (-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta E_i) \partial n_i = 0$$

persamaan tersebut harus memenuhi

$$(-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta E_i) \partial n_i = 0$$

sehingga diperoleh hukum distribusi M - B

$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta E_i} \quad (13)$$

Rumus ini menyatakan banyaknya molekul ni yang memiliki energi E_i dinyatakan dalam banyaknya keadaan ruang fase g_i yang memiliki energi E_i dan kuantitas α (α) dan β (β).

Dengan memasukan persamaan (13) ke jumlah total molekul $N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$

$$N = g_1 e^{-\alpha - \beta E_1} + g_2 e^{-\alpha - \beta E_2} + \dots$$

$$= e^{-\alpha} \{ \sum g_i e^{-\beta E_i} \} = Z e^{-\alpha} \dots (14a)$$

$$Z = \text{fungsi partisi} = \sum g_i e^{-\beta E_i} \dots (14b)$$

Dari pers(13) dan(14) maka

Hkm Distribusi Maxwell – Boltzman

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \dots (15)$$

Energi Total dan Energi Rata-rata

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots$$

$$U = \frac{N}{Z} \{ g_1 E_1 e^{-\alpha - \beta E_1} + g_2 E_2 e^{-\alpha - \beta E_2} + \dots \}$$

$$U = \frac{N}{Z} \{ \sum g_i E_i e^{-\beta E_i} \} \dots (16)$$

$$U_{ave} = \frac{1}{Z} \{ \sum g_i E_i e^{-\beta E_i} \} \dots (16b)$$

$$\text{Fungsi partisi } Z = \sum g_i e^{-\beta E_i}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \sum g_i E_i e^{-\beta E_i} \dots (17)$$

Dari pers(16) dan(17) maka

$$U = - \frac{N}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \dots (18)$$

Energi rata – rata

$$E_{ave} = \frac{U}{N} = - \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \dots (19)$$

Contoh :

Partikel suatu sistem hanya dapat berada dalam dua keadaan energi $E_1 = \epsilon$ dan $E_2 = -\epsilon$. Jika keduanya mempunyai kemungkinan ditemukan (keadaan) yang sama ($g_1 = g_2$) maka hitung energi rata-ratanya.

Jawab :

$$\text{Fungsi partisi } Z = \sum g_i e^{-\beta E_i} = g_1 e^{-\beta E_1} + g_2 e^{-\beta E_2}$$

karena $g_1 = g_2 = 1$

Energi rata – rata

$$E_{ave} = \frac{U}{N} = - \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = \frac{\varepsilon(e^{-\beta\varepsilon} - e^{+\beta\varepsilon})}{e^{-\beta\varepsilon} + e^{+\beta\varepsilon}} = \varepsilon \tanh(\beta\varepsilon)$$

1.1. Temperatur Pada Kesetimbangan Statistik

Dari persamaan (18) dan (19) bahwa energi fungsi β Parameter β merupakan karakteristik energi internal suatu sistem.

Dari persamaan (15) β mempunyai satuan J^{-1} atau eV^{-1} .

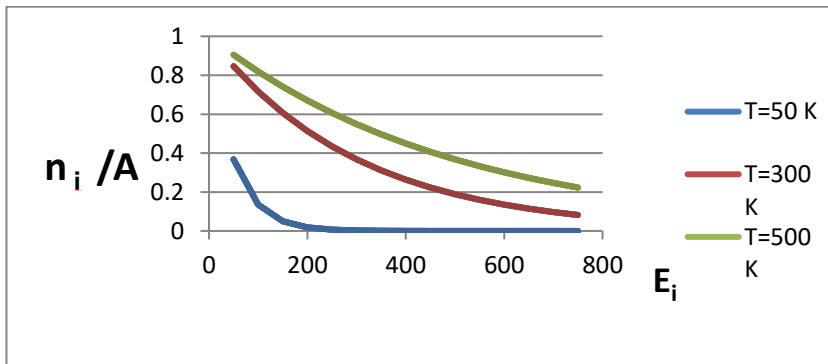
$$\beta \rightarrow kT = 1/\beta \quad \dots\dots\dots (20)$$

Dimana

k=tetapan Boltzman

T=temperatur absolut

Nol absolut ialah temperatur terendah pada derajat Kelvin(K)



Untuk T tertentu:

- E membesar maka n_i mengecil
- Pada T rendah \rightarrow hanya tingkat energi rendah yang ditempati
- Pada T tinggi \rightarrow populasi pada energi tinggi naik oleh adanya perpindahan partikel dari tingkat energi rendah ke tingkat energi tinggi
- Pada T nol Kelvin \rightarrow partikel hanya berkeliling disekitar energi rendah atau hanya tingkat energi rendah yang ditempati

1.2. Temperatur Efektif

Definisi temperatur pada statistik seperti pada persamaan (20) dan hanya dapat digunakan untuk sistem partikel dalam keadaan kesetimbangan statistik.

Untuk sistem tidak mencapai kesetimbangan statistik menggunakan temperatur efektif yaitu temperatur pada bagian kecil dari sistem dengan menganggap bawa bagian kecil sistem itu dalam keadaan setimbang Karena sistem tidak dalam kesetimbangan statistik maka β fungsi T sehingga:

$$\beta = \frac{1}{kT} \Rightarrow \partial\beta = -\frac{\partial T}{kT^2}$$
$$U = -N \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$$

maka energi sistem

$$U = kNT^2 \frac{\partial \ln(Z)}{\partial T}; U_{ave} = kT^2 \frac{\partial \ln(Z)}{\partial T} \dots (23)$$
$$Z = \text{fungsi partisi dari } M - B$$
$$= \sum g_i e^{-E_i/kT}$$

1.3. Kesetimbangan Termal

Tinjau suatu sistem terdiri dari 2 kelompok partikel yang masing-masing kelompok membentuk sub-sistem. Misal jumlah partikel tiap sub-sistem adalah N dan N' dengan tingkat energi E_i dan E'_i . Jika tidak ada reaksi antara partikel pada sub-sistem maka jumlah partikel tiap sub-sistem konstan, demikianhalnya dengan energi total sub-sistem konstan. Tapi energi tiap sub-sistem tidak kekal karena boleh berubah diantara sub-sistem.

$$N = \sum n_i = \text{tetap}; \quad N' = \sum n_j = \text{tetap}$$

$$U = \sum n_i E_i + \sum n_j E_j = \text{tetap}$$

maka peluang distribusi partikel

$$W = \left[\prod_{i=1}^N \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right] \left[\prod_{j=1}^{N'} \frac{g_j^{n_j}}{n_j!} \right]$$

Kesetimbangan Statistik tercapai

jika W_{maks} yaitu :

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \text{ dan } n_j = \frac{N'}{Z'} g_j e^{-\beta E_j} \dots (24)$$

2. Hukum Ke Nol Termodinamika

Jika dua sistem terpisah dalam keadaan kesetimbangan termal dengan sistem ketiga maka ketiga sistem itu dalam kesetimbangan termal satu sama lain. "Dua sistem partikel yang berbeda dan saling berinteraksi dalam kesetimbangan statistik harus mempunyai temperatur sama".

Hukum ini menyatakan bahwa sub-sistem merupakan kesetimbangan termal $\beta=1/kT$ sehingga persamaan (24) menjadi:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT} \text{ dan } n_j = \frac{N'}{Z'} g_j e^{-E_j/kT} \dots (25)$$

2.1. Temperatur Dan Hukum ke Nol Termodinamika

Tinjau dua sistem A1 dan A2 berinteraksi secara termal, membentuk system terkombinasi A0. Bila dua sistem berada dalam kesetimbangan, distribusi energi diantara mereka seperti entropi S_0 dari sistein terkombinasi berada pada nilai maksimum. Bila sistem hanya berinteraksi secara termal, dan tidak secara difusi maka berlaku

$$dQ = dE = TdS$$

Dari hubungan diatas, dapat didefinisikan temperatur sistem T

$$\left[\frac{\partial S}{\partial E} \right]_{V,N} = \frac{1}{T}$$

dimana V dan N adalah volume sistem dan jumlah partikel dianggap konstan.

Dengan menggunakan hubungan

$$S_0 = S_1 + S_2$$

dan (asumsi tidak ada perubahan energi internal sistem terkombinasi)

$$dE_1 = -dE_2$$

maka pada kondisi setimbang didapatkan

$$\left[\frac{\partial S_0}{\partial E_1} \right]_{V,N} = \left[\frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right]_{V,N} + \left[\frac{\partial S_2}{\partial E_1} \right]_{V,N}$$

$$\left[\frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right]_{V,N} - \left[\frac{\partial S_2}{\partial E_1} \right]_{V,N} = 0$$

Atau

$$\left[\frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right]_{V,N} = \left[\frac{\partial S_2}{\partial E_1} \right]_{V,N} \implies \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$$

Jadi dapat disimpulkan bila dua sistem dalam kesetimbangan termal, maka temperature keduanya adalah sama. Sekarang tinjau dua sistem A_1 dan A_2 , masing-masing setimbang termal dengan sistem ketiga, A_3 , maka didapat

$$T_1 = T_3 \text{ dan } T_2 = T_3$$

Jadi dapat disimpulkan jika dua sistem masing-masing setimbang termal dengan system ketiga, maka teperatur ketiganya adalah sama. Pemyataan ini dikenal dengan "hukum kenol termodinamika".

3. Aplikasi Maxwell Boltman

3.1. Gas Ideal

Pada gas ideal molekul bergerak translasi, gaya tarik-menarik dan energi rotasi / vibrasi diabaikan:

Energi tiap molekul gas

$$E_i = \frac{1}{2m} p_i^2 = \frac{1}{2} m v_i^2$$

Untuk volume yg besar E_i jadi kontinyu sehingga

$$Z = \int_0^{\infty} g(E) e^{-E/kT} dE \dots \dots (26)$$

$$n(E) = \frac{N}{Z} g(E) e^{-E/kT} \dots \dots (27)$$

$g(E)dE$ = jumlah keadaan molekul pada daerah E dan E+dE

Jumlah keadaan ini bertambah dengan adanya perbedaan arah momentum p untuk suatu energi. Dapat dibuktikan untuk volume V dengan jejari maksimum h jumlah keadaan molekul

$$g(E)dE = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE \dots (28)$$

maka fungsi partisi :

$$Z = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

$$Z = \frac{V (2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \dots \dots \dots (29)$$

Jumlah molekul dengan energi diantara E dan E+dE adalah $n(E)dE$ diperoleh dari pers(27)

$$g(E)dE = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE \dots (28)$$

maka fungsi partisi :

$$Z = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

$$Z = \frac{V (2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \dots \dots \dots (29)$$

a. Energi Total Dan Rata-Rata Gas Ideal

$$\text{Energi total } U = \int_0^{\infty} n(E) E dE = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-E/kT} E^{3/2} dE$$

PR selesaikan integral diatas $U = \frac{3}{2} NkT$

Energi rerata molekul $U_{ave} = \frac{U}{N} = \frac{3}{2} kT$

PR dengan menggunakan fungsi partisi hitung U dan U_{ave}

$$\text{Energi total } U = \int_0^{\infty} n(E) E dE = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-E/kT} E^{3/2} dE$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{3/2} dx = \frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad a = \frac{1}{kT}$$

$$U = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \frac{3(kT)^2}{4} \sqrt{\pi} (kT)^{1/2}$$

$$U = \frac{3}{2} NkT; \quad U_{ave} = \frac{U}{N} = \frac{3}{2} kT$$

b. Kecepatan Gas Ideal

Untuk menjabarkan kecepatan kita ubah $n(E)d(E)$ menjadi $n(v)dv$

$$n(E)dE = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE \dots (31)$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow dE = mv dv \dots (32)$$

Substitusi pers(32) ke pers(31)

$$n(v)dv = \frac{\pi N \sqrt{2}}{(\pi kT)^{3/2}} m^{3/2} v^2 e^{-m v^2 / 2kT} dv$$

$$n(v) = \frac{\pi N \sqrt{2}}{(\pi kT)^{3/2}} m^{3/2} v^2 e^{-m v^2 / 2kT} \dots (33)$$

Kecepatan rerata :

$$V_{ave} = \int_0^{\infty} \frac{n(v)v dv}{N} = \int_0^{\infty} \frac{\pi\sqrt{2}}{(\pi kT)^{3/2}} m^{3/2} v^3 e^{-m^2/2kT} dv$$

$$V_{ave} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \dots\dots\dots(34)$$

Kecepatan rms (root means quare)

$$V_{rms} = \int_0^{\infty} \frac{n(v)v^2 dv}{N} = \int_0^{\infty} \frac{\pi\sqrt{2}}{(\pi kT)^{3/2}} m^{3/2} v^4 e^{-m^2/2kT} dv$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \dots\dots\dots(35)$$

Vrms adalah harga rerata dari v² sehingga energi kinetik translasi suatu molekul gas ideal adalah :

$$\frac{1}{2} m(V_{rms})^2 = \frac{3}{2} kT$$

Kecepatan dengan peluang terbesar adalah:

$$\frac{dn(v)}{dv} = 0 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \dots\dots\dots(36)$$

3.2. Pemuaiian Maxwell Boltzman

Maxwell boltzman melihat pemuaiian sebagai substansi mikroskopik. Secara mikroskopik atom-atom dari suatu padatan tidak pernah diam, melainkan selalu bergetar di sekitar titik setimbangnya. Untuk menjelaskan fenomena tersebut secara mikroskopik, kita lihat untuk kasus benda berbentuk kristal.

Atom dalam kristal selalu bergerak di sekitar titik setimbang. Aproksimasi paling ideal untuk menjelaskan getaran atom – atom tersebut adalah menggunakan fungsi harmonik untuk potensial getaran, yaitu U(x) = cx² . Pendekatan ini cukup teliti jika simpangan atom di sekitar titik kesetimbangan sangat kecil dan kondisi ini biasanya diamati pada suhu yang sangat rendah. Dan sebaliknya

Pendekatan yang lebih teliti dapat diperoleh dengan menambahkan suku simpangan orde lebih dari dua, yaitu orde tiga dan empat. Oleh karena itu, aproksimasi yang lebih baik untuk potensial getaran, menjadi:

$$U(x) = cx^2 - gx^3 - fx^4$$

Pada suhu tinggi, getaran atom dapat dijelaskan dengan statistik Maxwell Boltzman. Simpangan rata-rata atom dari posisi kesetimbangan adalah :

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\beta U(x)} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta U(x)} dx}$$

Misalkan

pada suhu $T = 0$ jarak antar atom adalah a . Pada suhu T_0 , jarak antar atom menjadi $a + (3g/dc^2) kT_0$ dan pada suhu T sembarang jarak antar atom menjadi $a + (3g/dc^2) kT$. Jika terdapat N atom dalam arah memanjang maka panjang benda adalah :

- Pada suhu T_0 , $L_0 = N (a + (3g/dc^2) kT_0)$ (1)
- Pada suhu T , $L = N (a + (3g/dc^2) kT)$ (2)
- Pertambahan panjang benda menjadi

$$\Delta L = L - L_0 = N \frac{3g}{4c^2} k (t - t_0) \quad \text{..... (3)}$$

Umumnya akan selalu berlaku bahwa $a \gg (3g/dc^2) kT_0$. Dengan demikian persamaan (a) dapat di aproksimasi menjadi $L_0 = Na$ atau $N = L_0/a$.

Pertambahan panjang benda yang dinyatakan dalam persamaan (3) selanjutnya

dapat ditulis :

$$\Delta L = \frac{L_0}{a} \frac{3g}{4c^2} k (t - t_0)$$

Dimana : $\alpha = \frac{3gk}{4ac^2}$

LATIHAN SOAL

Kerjakan soal dengan teliti !

1. Satu meter kubik atom hidrogen pada tekanan 1 atm berisi sekitar $2,7 \times 10^{25}$ atom. Hitung banyaknya atom yang berada pada tingkat energi eksitasi pertama pada temperatur 0°C dan 10000°C .
2. Hitunglah energi rata-rata sistem bila energi tingkat energi j adalah ϵ_j dan ditempati oleh N_j partikel.
3. Tentukan $\ln W$ untuk statistik Maxwell-Boltzmann.



UNIT – IV

STATISTIK BOSE EINSTEIN

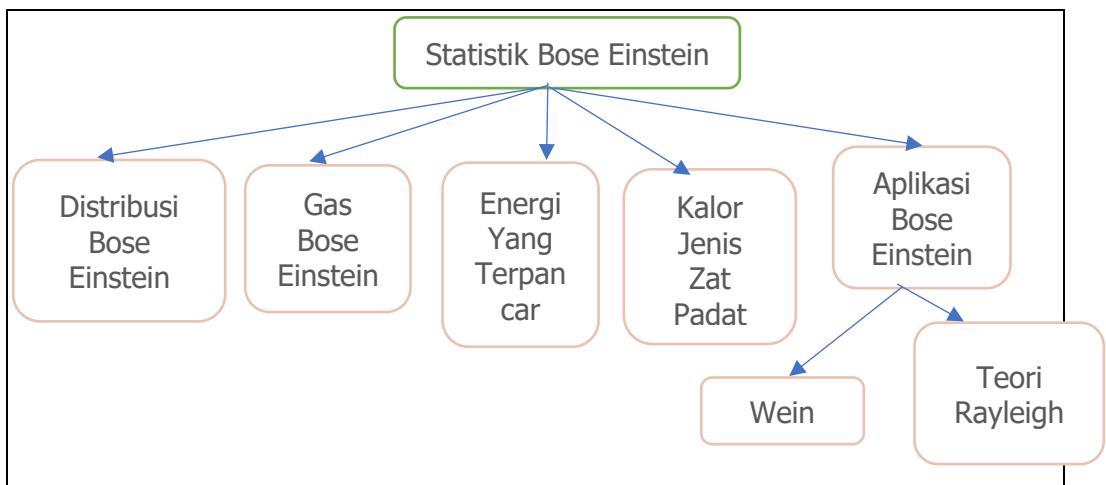
Metode Pembelajaran : Case Method

Waktu : 150 Menit

Sub CPMK : Mahasiswa mampu Memahami Bagaimana Proses Membangun statistik Bose Einstein serta Menentukan Parameter statistik Bose Einstein

A. Pendahuluan

Unit ini akan membahas Bagaimana Proses Membangun statistik Bose Einstein serta Menentukan Parameter statistik Bose Einstein



B. Materi

“Hanya kepada Allah lah tunduk/patuh segala apa yang ada di langit dan di bumi baik atas kesadarannya sendiri ataupun karena terpaksa, (dan sujud pula) bayang-bayangnya diwaktu pagi dan petang” (ar Raad :15) Dalam ayat ini Allah SWT mengingatkan kita bahwa apapun nama dan bentuk gejala yang ditunjukkan-Nya selalu mengikuti suatu sistem dengan hukum-hukum yang telah ditetapkanNya.

1. Distribusi Bose Einstein

Distribusi energi dengan peluang terbesar dari sebuah sistem boson yang identik tidak saling berinteraksi, bisa diperoleh dengan cara sebagai berikut berikut: Misalkan ada 3 buah keadaan dan 4 buah boson

KEJADIAN	I	II	III
1	●	●	● ●
2	●	● ●	●
3	● ●	●	●
4	● ●	● ●	
5	● ●		● ● ●
6		● ●	● ●
7	● ● ●	●	
8	● ● ●		●
9		●	● ● ●
10	●		● ● ●
11	●	● ● ●	
12		● ● ●	●
13	● ● ● ●		
14		● ● ● ●	
15			● ● ● ●

Gambar 4 Sistem Boson

Secara matematis dapat ditulis

$$W_s = \frac{[(g_s - 1) + n_s]!}{(g_s - 1)! n_s!}$$

Jika sistem mempunyai tingkat energi lebih dari 1 maka banyaknya cara penyusunan yang paling mungkin adalah

$$W = \prod_s w_s$$

$$W = \prod_s \frac{[(g_s - 1) + n_s]!}{(g_s - 1)! n_s!}$$

1.1. Konfigurasi Yang Paling Mungkin

Sama halnya dengan statistik Maxwell-Boltzman, konfigurasi yang paling mungkin dapat ditentukan dengan nilai n_s yang memberikan nilai maksimum untuk bobot W .

$$\sum_s \left(\frac{\partial \log w}{\partial n_s} + a + \beta \varepsilon_s \right) dn_s = 0$$

Karena maksimum, maka suku dalam kurung bernilai nol.

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} + a + \beta \varepsilon_s = 0$$

Dengan menggunakan formula Stirling didapatkan

$$\begin{aligned} \log w &= \sum_s \log w_s \\ &= \sum_s [(g_s - 1 + n_s) \log(g_s - 1 + n_s) - (g_s - 1) \log(g_s - 1) - n_s \log n_s] \end{aligned}$$

Untuk $\log w$ maksimum, maka

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} = \log(g_s - 1 + n_s) - \log n_s$$

Karena g_s dan n_s lebih besar, maka

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} = \log \left(\frac{g_s + n_s}{n_s} \right)$$

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} + a + \beta \varepsilon_s = 0$$

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} = \log \left(\frac{g_s + n_s}{n_s} \right)$$

$$\log \left(\frac{g_s + n_s}{n_s} \right) + a + \beta \varepsilon_s = 0$$

$$\frac{g_s}{n_s} + 1 = e^{-(a + \beta \varepsilon_s)}$$

$$\frac{g_s}{n_s} = e^{-(a + \beta \varepsilon_s)} - 1 \quad \text{atau} \quad n_s = \frac{g_s}{e^{-(a + \beta \varepsilon_s)} - 1}$$

1.2. Distribusi m Partikel

Andaikan kita mau mendistribusikan m_i partikel ke dalam g_i keadaan. Persoalan ini adalah persoalan kombinasi mengatur m_i partikel identik dan g_i-1 pembatas identik dalam satu garis lurus

$$\Omega = \prod_i \frac{(m_i + g_i - 1)!}{m_i!(g_i - 1)!}$$

$$\ln \Omega = \sum_i [\ln(m_i + g_i - 1)! - \ln m_i! - \ln(g_i - 1)!]$$

Gunakan pendekatan Stirling

$$\ln x! = x \ln x - x$$

Maka

$$\ln \Omega \approx \sum_i \left[\begin{array}{l} (m_i + g_i - 1) \ln(m_i + g_i - 1) \\ - (m_i + g_i - 1) - m_i \ln m_i + m_i \\ - (g_i - 1) \ln(g_i - 1) + (g_i - 1) \end{array} \right]$$

Karena $m_i \gg 1$ dan $g_i \gg 1$ maka persamaan diatas dapat menjadi :

$$\ln \Omega \approx \sum_i \left[\begin{array}{l} (m_i + g_i) \ln(m_i + g_i) \\ - m_i \ln m_i - (g_i) \ln(g_i) \end{array} \right]$$

Agar $\ln \Omega$ maksimum, haruslah $d(\ln \Omega) = 0$

$$d(\ln \Omega) = \sum_i dm_i \ln(m_i + g_i) + dm_i - dm_i \ln m_i - dm_i = 0$$

Maka

$$\sum_i \left(\ln \frac{m_i + g_i}{m_i} \right) dm_i = 0$$

Tambahkan factor berikut

$$\alpha \sum_i dm_i = 0 \quad \text{dan} \quad -\beta \sum_i \varepsilon_i dm_i = 0$$

Karena N adalah suatu konstanta, maka diferensialnya nol, $dN=0$

$$\sum_i dn_i = 0$$

Juga harus memenuhi hukum kekekalan energi

$$\sum_i \varepsilon_i m_i = E$$

Karena E harus tetap, maka diferensialnya nol, $dE = 0$

$$\sum_i \varepsilon_i dm_i = dE = 0$$

Untuk memaksimumkan $\ln \Omega$, diferensial berikut haruslah nol:

$$\sum_i \left(\ln \left(\frac{m_i + g_i}{m_i} \right) + \alpha - \beta \varepsilon_i \right) dm_i = 0$$

Dengan demikian

$$\ln \left(\frac{m_i + g_i}{m_i} \right) = -\alpha + \beta \varepsilon_i$$

Maka $\frac{m_i + g_i}{m_i} = e^{-\alpha} e^{\beta \varepsilon_i}$ atau $m_i = \frac{g_i}{e^{-\alpha} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$

Jika n_j adalah rata-rata banyaknya partikel di dalam setiap sel degenerasi, maka

$$m_j = n_j g_j$$

sehingga diperoleh

$$n_i = \frac{1}{e^{-\alpha} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Partikel yang memenuhi aturan statistik ini disebut Boson, contoh : foton

2. Gas Bose Einstein

Jika molekul dalam gas biasa memiliki momentum sudut $h/2\pi$, maka pasti boson dan akan memenuhi distribusi Bose-Einstein. Karena masing-masing keadaan diperbolehkan mengisi h^3 volume dari ruang fasa bobot tiap lembaran, keadaan yang mungkin ditempati d volume dari ruang fasa, adalah

$$g = \frac{d\Gamma}{h^3}$$

$$g(E)dE = \frac{d\Gamma}{h^3}$$

dimana

$$d\Gamma = 2\pi V(2m)^{3/2} E^{1/2} dE$$

sehingga

$$g(E)dE = \frac{2\pi V(2m)^{3/2} E^{1/2} dE}{h^3}$$

Banyaknya molekul yang mempunyai energy pada rentang ε sampai $\varepsilon + d\varepsilon$ adalah

$$n(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{h^3} \frac{2\pi(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon V}{\frac{1}{A} e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

Nilai parameter A dapat dicari dari kondisi

$$\int_0^{\infty} n(\varepsilon)d\varepsilon = N$$

$$A = \frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}}$$

$$\alpha = \log A = \log \left[\frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \right]$$

2.1. Radiasi Benda Hitam

Foton memiliki momentum sudut yang tidak terpisahkan dalam satuan $h/2\pi$. Maka secara alami akan berperilaku sebagai Boson dan memenuhi distribusi Bose-einstein. Terdapat dua poin penting mengenai radiasi ini.

- Karena foton mungkin dapat diserap dinding dan dipancarkan oleh dinding, maka atau $\sum_s dn_s = 0$ tidak berlaku sehingga $\alpha = 0$, sehingga $A = e^\alpha = 1$.
- Energi dari foton adalah $h\nu$ dimana ν adalah frekuensi radiasi, disebutkan bahwa jumlah mode getaran dalam rentang panjang gelombang λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah $(4\pi/\lambda^4) d\lambda$ per satuan volume.
Pada gas foton terdapat 2 arah polarisasi pada gelombang elektromagnet, arahnya tegak lurus terhadap arah rambat gelombang.

Oleh karena itu, jumlah yang diizinkan pada keadaan dalam rentang λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

$g(\lambda)$ adalah kerapatan dari keadaan. Dengan Distribusi Bose-Einstein

$$n_s = \frac{g_s}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Energi radiasi per satuan volume per satuan panjang gelombang disebut **Hukum Radiasi Menurut Planck**

$$E(\lambda) = n_\lambda(\lambda)h\nu$$

$$E(\lambda) = n_\lambda(\lambda)(hc/\lambda)$$

$$E(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc d\lambda}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

Untuk panjang gelombang yang Panjang disebut dengan Persamaan **Radiasi Dari Rayleigh Jeans**

$$e^{hc/\lambda kT} \cong 1 + hc/\lambda kT$$

maka,

$$E(\lambda)d\lambda \cong \frac{8\pi kT d\lambda}{\lambda^4}$$

Untuk panjang gelombang pendek disebut juga **Hukum Pergeseran Wien**

$$e^{hc/\lambda kT} \gg 1$$

maka,

$$E(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc d\lambda}{\lambda^5} (e^{-hc/\lambda kT}) d\lambda$$

3. Energi yang terpancar tiap satuan luas tiap satuan waktu

Jumlah foton yang terpancar pada rentang λ sampai $\lambda+d\lambda$

Per satuan luas dari lubang per satuan waktu adalah

$$n_{rad}(\lambda)d\lambda = n(\lambda)d\lambda \frac{c}{4}$$

$$n_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \frac{c}{4}$$

$$n_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi c d\lambda}{\lambda^4 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1 \right)}$$

Energi yang terpancar persatuan luas per satuan waktu

$$E_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi h c^2 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1 \right)}$$

Energi total yang terpancar per satuan volume

Pada temperature tetap adalah dengan cara mengintegalkan

Pers 4.21

$$E = \int_0^{\infty} E(\lambda) d\lambda$$

$$E = \int_0^{\infty} \frac{8\pi h c d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1 \right)} \text{ dengan mensubstitusi } t = hc/\lambda kT$$

$$E = \frac{8\pi h}{c^3} \left\{ \frac{kT}{h} \right\}^4 \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^t - 1}$$

$$E = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4$$

4. Kalor jenis zat Padat

Energi dari radiasi elektromagnetik terkuantisasi dalam bentuk foton sehingga energi gelombang elastis atau gelombang suara, dalam medium padat dapat dianggap dikuantisasi dalam bentuk fonon. Energi fonon dengan frekuensi f adalah hf dan karena fonon memiliki momentum sudut maka dapat dianggap sebagai gas Boson.

$$n(v)dv = \frac{g(v)dv}{\left(e^{hc/\lambda kT} - 1 \right)}$$

Agar persamaan $n(v) dv$ menjadi sederhana, maka diperlukan aproksimasi untuk $g(v) dv$ semacam pendekatan Debye

$$g(v)dv = Cv^2 dv \quad \text{untuk } v \leq v_m$$

$$g(v)dv = 0, \quad \text{untuk } v > v_m$$

Dimana C adalah konstant yang bergantung pada kecepatan gelombang transversal dan longitudinal. Frekuensi maksimum ditentukan berdasarkan fakta bahwa hanya ada 3 mode getaran.

$$3N = \int_0^{\infty} g(v)dv = \int_0^{v_m} Cv^2 dv$$

$$3N = \frac{1}{3} Cv_m^3$$

$$C = \frac{9N}{v_m^3}$$

5. Aplikasi Bose Einstein

Partikel identik tak dapat dibedakan dengan spin 0 dan kelipatan bilangan genap. Fungsi distribusi statistik Bose-Einstein

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1};$$

Banyaknya partikel pada rentang energi E dan E+dE :

$$n(E)dE = g(E)f(E)dE$$

$$U(E)dE = g(E)f(E)EdE$$

5.1. Teori Rayleigh dan Jeans

- Menghitung kerapatan gelombang berdiri didalam rongga benda hitam pada rentang frekuensi w and $w + dw$.
- Rongga radiasi benda hitam berbentuk kotak.
- Persyaratan mengharuskan gelombang pada ketiga dinding kotak adalah nol.

Banyaknya keadaan foton pada volume V

$$g(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

$$g(k)dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

$$g(\omega)d\omega = \frac{8V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

- Energi foton di dalam volume BBR berdasarkan teorema ekuipartisi energi

$$U(\omega)d\omega = \bar{\epsilon}g(\omega)d\omega = \frac{\bar{\epsilon}V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

- Rapat energi foton

$$\frac{U(\omega)d\omega}{V} = u(\omega)d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu$$

5.2. Rapat Energi Wein

$$u(\nu)d\nu = c_1 \nu^3 e^{-c_2 \nu / T} d\nu$$

Hukum pergeseran Wien menyatakan bahwa pancaran spektrum radiasi benda hitam per unit panjang gelombang, mempunyai puncak pada panjang gelombang λ_{\max} yang besarnya berbanding terbalik dengan temperatur benda

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4.96k} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

LATIHAN SOAL

Kerjakan Soal Dengan Teliti !

1. Tentukan $\ln W$ untuk statistik Bose-Einstein
2. Hitunglah energi rata-rata sistem bila energi tingkat energi j adalah π_j dan ditempati oleh N_j partikel.



UNIT – V

STATISTIK FERMI DIRAC

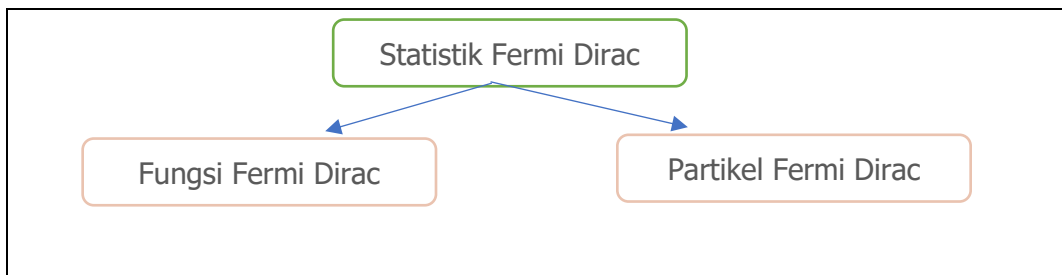
Metode Pembelajaran : Case Method

Waktu : 150 Menit

Sub CPMK : Mahasiswa mampu menganalisis bagaimana proses membangun statistik Fermi Dirac serta menentukan parameter statistik Fermi Dirac dan aplikasi fermi Dirac

A. Pendahuluan

Unit ini akan membahas bagaimana proses membangun statistik Fermi Dirac dengan menggunakan prinsip statistik murni, menjelaskan konsep gas elektron dalam logam, Menurunkan ungkapan energi kinetik rata-rata elektron dalam gas electron, menurunkan ungkapan kapasitas panas gas electron dan menjelaskan sifat paramagnetik dan konduktivitas listrik gas elektron



B. Materi

“Dan Dia {menundukan pula} apa yang Dia ciptakan untuk kamu di bumi ini dengan berlain-lainan macamnya, sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda kekuasaannya. (An Nahl :13). Secara harfiah memang kita melihat dan merasakan banyak wujud dan jenis benda yang diciptakan Allah SWT. Dibalik itu banyak juga yang tidak tampak dan berupa sifat atau potensi, antara lain seperti energi yang disediakan untuk manusia.

Pada bagian awal dalam kuliah ini menerangkan tentang dasar-dasar statistik dan fungsi distribusi partikel sebagai pengetahuan dasar dalam memahami penerapan statistik pada sistem partikel. Sistem yang tersusun oleh partikel-partikel tidak identik (terbedakan) dan mematuhi hukum-hukum fisika klasik dapat didekati dengan statistik klasik Maxwell-Boltzmann. Sedangkan pada sistem yang tersusun oleh partikel-partikel identik (tidak terbedakan), hukum-hukum fisika klasik tidak cukup memadai untuk merepresentasikan keadaan sistem dan hanya dapat diterangkan dengan hukum-hukum fisika kuantum.

Sistem semacam ini dapat didekati dengan statistik modern, yaitu statistik Fermi-Dirac dan Bose-Einstein. Statistik Fermi-Dirac sangat tepat untuk menerangkan perilaku partikel-partikel identik yang memenuhi larangan Pauli, sedangkan statistik Bose-Einstein sangat tepat untuk menerangkan perilaku partikel-partikel identik yang tidak memenuhi larangan Pauli.

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, statistik Fermi-dirac dirumuskan untuk assembli fermion, yaitu system kuantum dengan spin merupakan kelipatan ganjil dari $\hbar/2$. System ini memiliki satu sifat khas yaitu memenuhi prinsip eksklusi pauli. Berdasarkan prinsip ini maka tidak ada fermion yang boleh memiliki sekumpulan bilangan kuantum yang sama. Satu keadaan energy hanya boleh ditempati maksimum oleh dua fermion dengan syarat arah spin harus berlawanan.

Setelah memahami bagaimana statistik Fermi-dirac, kita harus memahami pula bagaimanakah aplikasi dari statistik yang memenuhi prinsip eksklusi pauli ini. Oleh sebab itu, pada makalah ini akan dibahas mengenai distribusi Fermi-dirac pada suhu 0 K, energi Fermi, distribusi Fermi-Dirac pada suhu $T > 0$ K, energi rata-rata electron dalam fungsi Fermi-Dirac, sampai teori bintang katai putih.

1. Fungsi Fermi Diract

1.1. Fungsi Distribusi Fermi Diract pada Suhu 0 K

fungsi distribusi Fermi Diract memiliki ciri menarik yang tidak dimiliki oleh distribusi statistik lainnya, yaitu distribusi Maxwell-Boltzman dan Bose-Einstein. Pada suhu 0 K, semua fermion terkumpul pada tingkat energi di bawah energi maksimum yang kemudian disebut dengan energi Fermi dengan kerapatan yang persis sama. Tiap keadaan energi diisi oleh dua fermion yang memiliki dua kemungkinan nilai yang berlawanan, yaitu +1/2 dan -1/2. Fermion tidak terdistribusi di atas energi Fermi yang merupakan energi batas maksimum, artinya di atas energi batas, keadaan energi kosong. Hal inilah yang menyebabkan fungsi distribusi Fermi Dirac tiba-tiba diskontinu pada energi batas tersebut.

Fungsi distribusi tersebut dapat dijelaskan dengan,

$$f(E) = \frac{1}{e^{-\alpha-\beta E} + 1} \dots\dots\dots (1)$$

Karena $\beta = -1/kT$ dan $E_F = \alpha kT$, maka

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E-E_F)/kT] + 1} \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan di atas, jika $E = E_F$ maka $f(E) = 1/2$ pada berapapun suhu assembli. E_F adalah energi Fermi. Dengan demikian dapat didefnisikan bahwa nergi Fermi sama dengan energi ketika fungsi distribusi memiliki nilai tepat setengah.

Ketika suhu assembli 0 K, berlaku:

- Jika $E > E_F$, maka

$$(E - E_F)/kT = \frac{(E-E_F)}{0} = \infty \dots\dots\dots (3)$$

Sehingga,

$$f(E > E_F, T = 0) = \frac{1}{e^{\infty} + 1} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

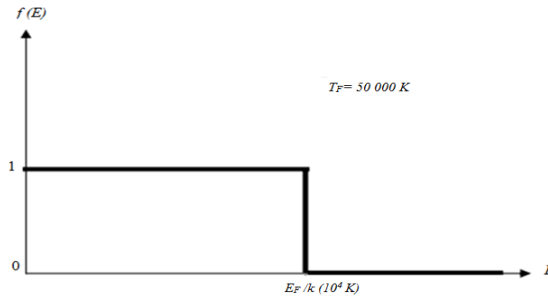
- Jika $E < E_F$, maka

$$(E - E_F)/kT = \frac{(E-E_F)}{0} = -\infty \dots\dots\dots (5)$$

Sehingga,

$$f(E < E_F, T = 0) = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Dari dua persamaan tersebut dapat disimpulkan bahwa pada suhu $T=0$, fungsi distribusi Fermi-Dirac bernilai 1 untuk semua energi di bawah energi Fermi dan bernilai nol untuk semua energi di atas energi Fermi, seperti yang tampak pada gambar di bawah ini.



Gambar fungsi Distribusi Fermi-Dirac pada suhu 0 K

1.2. Energi Fermi

Energi Fermi adalah energi maksimum yang ditempati oleh elektron pada suhu 0 K. Dengan prinsip larangan Pauli, fermion akan mengisi semua tingkat energi yang tersedia. Namun pada suhu 0 K, tidak ada satupun fermion yang menempati energi di atas energi Fermi seperti yang telah ditunjukkan oleh gambar fungsi distribusi Fermi Dirac pada suhu 0 K.

Untuk mendapatkan persamaan energi Fermi, kita dapat menghitung terlebih dahulu jumlah total fermion, yaitu

$$N = V \int_0^{\infty} n(E) dE \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$N = V \int_0^{\infty} g(E) f(E) dE \quad \dots\dots\dots (8)$$

Jumlah total fermion dapat dihitung dengan mudah pada suhu 0 K karena fungsi distribusi Fermi-Dirac memiliki bentuk yang sederhana. Jika perhitungan dilakukan pada $T=0$ maka

$$N = V \int_0^{E_F} g(E) f(E) dE + V \int_{E_F}^{\infty} g(E) f(E) dE \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$N = V \int_0^{E_F} g(E) \times 1 \times dE + V \int_{E_F}^{\infty} g(E) \times 0 \times dE \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$N = V \int_0^{E_F} g(E) dE \dots\dots\dots (11)$$

Rumus kerapatan keadaan per satuan volume, yaitu

$$g(E) = \frac{1}{h^3} 4\pi\sqrt{2}m^{3/2}E^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

Khusus untuk electron, karena satu keadaan dapat ditempati oleh dua fermion yang spin yang berlawanan, maka jumlah total fermion dapat dihitung,

$$N = V \int_0^{E_F} 2 \times \frac{1}{h^3} 4\pi\sqrt{2}m^{3/2}E^{1/2} dE \dots\dots\dots (13)$$

$$N = \frac{V}{h^3} 8\pi\sqrt{2}m^{3/2} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE \dots\dots\dots (14)$$

$$N = \frac{V}{h^3} 8\pi\sqrt{2}m^{3/2} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{3N}{8\pi V} = \left(\frac{2m}{h^2} E_F\right)^{3/2} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} = \frac{2m}{h^2} E_F \dots\dots\dots (17)$$

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \dots\dots\dots (18)$$

Persamaan tersebut di atas disebut dengan energi Fermi. Melalui hubungan suhu Fermi yang berbanding lurus dengan energi Fermi, maka dapat diperoleh pernyataan mengenai suhu Fermi pada suhu 0 K sebagai berikut

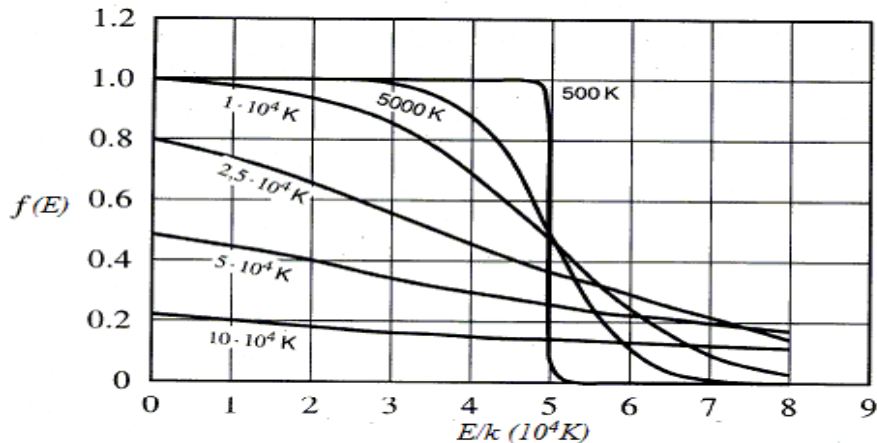
$$T_F = \frac{E_F}{k} \dots\dots\dots (19)$$

$$T_F = \frac{h^2}{2mk} \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \dots\dots\dots (20)$$

1.3. Fungsi Distribusi Fermi Dirac pada Suhu T > 0 K

Pada suhu T > 0 K, maka sudah ada fermion yang menempati tingkat energi di atas energi Fermi. Hal ini menyebabkan jumlah fermion yang menempati tingkat energi di bawah energi Fermi menjadi berkurang. Namun, tidak ada fermion yang memiliki energi yang jauh di atas energi Fermi dan belum ada pula fermion yang memiliki energi yang jauh di bawah energi Fermi. Akibatnya terjadi distorsi distribusi Fermi Dirac

hanya di sekitar energi Fermi saja. Distorsi tersebut hanya berada pada daerah yang ordenya sekitar kT di sekitar energy Fermi. Gambar di bawah ini adalah bentuk fungsi distribusi Fermi dirac pada berbagai suhu.



Gambar 5 Energi Fermi

1.4. Integral yang Mengandung Fungsi Fermi Dirac

Selanjutnya akan sering berhadapan dengan integral yang mengandung fungsi distribusi Fermi-Dirac. Misalkan saat menghitung energy rata-rata fermion, kita mengintegrasikan energy dikali kerapatan keadaan dikali fungsi Fermi-Dirac. Khusus untuk suhu diatas 0 K, integral yang melibatkan fungsi Fermi-Dirac sulit dilakukan. Suatu pendekatan perlu ditempuh untuk mendapatkan hasil integral secara analitik.

Pada bagian ini mencari bentuk umum integral yang berupa perkalian fungsi Fermi-Dirac dengan fungsi sembarang. Bentuk umum tersebut dapat diperoleh berkat beberapa kekhasan dari fungsi Fermi-Dirac. kita pecahkan integral bentuk umum berikut ini

$$I = \int_0^{\infty} \varphi(E)f(E)dE$$

Dimana $\varphi(E)$ sembarang fungsi dari E . selanjutnya mendefinisikan fungsi berikut ini.

$$\psi(E) = \int_0^E \varphi(E)dE$$

Dari definisi tersebut mendapatkan

$$d\psi = \varphi(E)dE$$

sehingga,

$$I = \int_0^\infty f(E)d\psi$$

Selanjutnya menggunakan dalil rantai untuk menguraikan integral. Dalil tersebut terbentuk $\int u dv = uv - \int v du$.

Dengan dalil ini maka persamaan menjadi

$$\begin{aligned} I &= [f(E)\psi(E)]_0^\infty - \int_0^\infty \psi \frac{df}{dE} dE \\ &= [f(\infty)\psi(\infty) - f(0)\psi(0)] - \int_0^\infty \psi \frac{df}{dE} dE \end{aligned}$$

Tetapi, berdasarkan definisi fungsi Fermi-Dirac dapatkan $f(\infty) = 0$ dan $f(0) = 1$. Selanjutnya berdasarkan definisi ψ pada persamaan sebelumnya didapat

$$\psi(\infty) = \int_0^\infty \varphi(E)dE, \text{ dan } \psi(0) = \int_0^0 \varphi(E)dE = 0$$

Dengan demikian persamaan menjadi

$$\begin{aligned} I &= [0x \int_0^\infty \varphi(E) dE - 1x0] - \int_0^\infty \psi \frac{dF}{dE} dE \\ &= - \int_0^\infty \psi \frac{dF}{dE} dE \end{aligned}$$

Selanjutnya kita uraikan $\psi(E)$ dalam deret Taylor di sekitar E_F hingga suku ketiga yaitu

$$\psi(E) = \psi(E_F) + \left. \frac{d\psi}{dE} \right|_{E_F} (E - E_F) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\psi}{dE^2} \right|_{E_F} (E - E_F)^2$$

Berdasarkan definisi $\psi(E)$ dalam persamaan sebelumnya maka kita dapatkan

$$\begin{aligned} \psi(E_F) &= \int_0^{E_F} \varphi(E)dE \\ \frac{d\psi}{dE} &= \frac{d\varphi}{dE} \text{ sehingga } \left. \frac{d\psi}{dE} \right|_{E_F} = \varphi(E_F) \\ \frac{d^2\psi}{dE^2} &= \frac{d\varphi}{dE} \text{ sehingga } \left. \frac{d^2\psi}{dE^2} \right|_{E_F} = \left. \frac{d^2\varphi}{dE^2} \right|_{E_F} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\psi(E) = \int_0^{E_F} \varphi(E)dE + \varphi(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} \left. \frac{d\varphi}{dE} \right|_{E_F} (E - E_F)^2$$

kemudian,

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \varphi(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} (E - E_F)^2 \right\} - \frac{df}{dE} dE \\
 &= - \int_0^{E_F} \varphi(E) dE - \int_0^{\infty} \frac{df}{dE} dE - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
 &= - \int_0^{E_F} \varphi(E) dE [f(\infty) - f(0)] - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
 &= - \int_0^{E_F} \varphi(E) dE [f(0) - f(1)] - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
 &= - \int_0^{E_F} \varphi(E) dE - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
 I &= \int_0^{E_F} \varphi(E) dE - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE
 \end{aligned}$$

1.5. Energi Rata-Rata Elektron

Untuk mencari beberapa besaran yang dimiliki fermion, pertama kita harus menghitung energi rata-rata elektron yang memenuhi persamaan

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E g(E) f(E) dE}{\int_0^{\infty} g(E) f(E) dE}$$

Kerapatan keadaan elektron (karena memiliki dua arah spin) memenuhi persamaan

$$g(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{h^3} E^{\frac{1}{2}}$$

Pada persamaan diatas tampak bahwa pembilang persamaan dapat diamati sebagai berikut

$$\varphi(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{h^3} E^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\varphi}{dE} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{h^3} x \frac{3}{2} E^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\varphi}{dE} = \frac{12\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}}{h^3}$$

$$\int_0^{E_f} \varphi(E)dE = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^{E_f} E^{\frac{3}{2}} dE$$

$$\int_0^{E_f} \varphi(E)dE = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{h^3} x \frac{2}{5} E_f^{\frac{5}{2}}$$

Dengan demikian

$$Pbl = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{h^3} x \frac{2}{5} E_F^{\frac{5}{2}} + \frac{12\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{h^3} E_F^{\frac{3}{2}} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6}$$

1.6. Kapasitas Kalor Logam

Jika terdapat N elektron dalam asembli maka energi total semua elektron pada sembarang suhu dapat diperoleh dari persamaan

$$\bar{E} = \frac{3}{5} E_F \left[\frac{1 + \left(\frac{15}{24}\right) \pi^2 \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{24}\right) \pi^2 \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2} \right]$$

$$U = N\bar{E}$$

$$U = \frac{3}{5}NE_F \left[\frac{1 + \left(\frac{15}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2} \right]$$

Jika suhu sangat kecil dibandingkan dengan suhu Fermi maka $kT \ll E_F$ sehingga persamaan diatas dapat diaproksimasi sebagai berikut

$$U = \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \left(\frac{15}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{3}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2 \right]^{-1}$$

$$U \approx \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \left(\frac{15}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{3}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2 \right]$$

Dimana telah menggunakan aturan binomial $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ untuk suku kedua. Karena $kT \ll E_F$ dapat mempertahankan perkalian hanya sampai suku yang mengandung T^2 .

Dengan asumsi ini maka persamaan diatas dapat diaproksimasi lebih lanjut menjadi

$$U \approx \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \left(\frac{15}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2 - \left(\frac{3}{24}\right)\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2 \right]$$

$$U \approx \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2 \right]$$

Akhirnya dapatkan kapasitas panas elektronik, yaitu kapasitas panas yang diperoleh dari sumbangan energi elektron, dengan sumbangan dari elektron adalah

$$C_e = \frac{dU}{dT}$$

$$C_e = \frac{3\pi^2 Nk^2}{5E_f} T$$

$$C_e = \gamma T$$

Dengan $\gamma = 3\pi^2 Nk^2 / 5E_f$

tampak dari persamaan diatas bahwa kapasitas kalor elektronik berubah secara linier terhadap suhu. Jika memiliki logam maka memiliki sekaligus assembly fonon (getaran atom) seta assembly fermion (elektron bebas). Akibatnya, kapasitas kalor logam mendapat kontribusi dari dua macam assembly tersebut.

Dengan demikian, pada suhu dibawah suhu Debye dan dibawah suhu fermi maka kapasitas panas logam memenuhi persamaan umum

$$C = \gamma T + AT^3$$

Suku pertama disumbangkan oleh elektron dan suku kedua disimbangkan oleh fonon. Persamaan diatas sudah dilakukan secara eksperimen.

Berdasarkan persamaan $C_e = \gamma T$

maka nilai γ kita dapat menentukan energi Fermi.

1.7. Fungsi distribusi Fermi Diract

Distribusi Fermi Dirac ini memiliki 2 ciri khas yaitu:

- Partikel-partikel dalam sistem tidak dapat dibedakan antara yang satu dengan yang lain.
- Satu status atau keadaan energi, hanya boleh diisi oleh satu partikel artinya tidak boleh diisi lebih dari satu partikel.

Bila dilihat dengan contoh sebuah partikel bebas bemassa m, dalam ruangan yang volume V, status energi partikel itu ditentukan oleh 3 bilangan kuantum yaitu (nx, ny, dan nz yang merupakan bilangan bulat

dari 0,1,2,3.... dan seterusnya. Tingkat energi partikel itu, ditentukan jumlah kuadrat dari n_x , n_y , dan n_z menurut persamaan:

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = (h^2 / 2m V^{2/3}) (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Sudah kita ketahui bahwa tingkat energi paling bawah hanya memiliki satu status energi, tingkat berikutnya memiliki 6 status energi dan seterusnya. Kita akan menggunakan lambang $N_1, 2, N_3, \dots$ dan seterusnya untuk menunjukkan jumlah partikel- partikel atau "bilangan populasi" pada tingkatan energi ke 1, 2, 3... dan seterusnya. Dengan cara ini maka energi total dalam kumpulan N elektron adalah:

$$U = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i N_i$$

Secara umum, peluang termodinamika W untuk setiap tingkat energi dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_i = \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

Dengan demikian secara umum untuk seluruh sistem peluang termodinamik total pada distribusi fermi - diract ini adalah

$$W_i = \prod_{i=1}^n \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

Konfigurasi dengan peluang terbesar dapat ditentukan dengan mencari W yang terbesar dengan kendala N dan U berharga tetap, seperti yang dilakukan waktu menurun rumus distribusi Maxwell- Boltzman. Sesuai dengan persamaan yang memperlihatkan hubungan antara Entropi S dan peluang termodinamika yaitu

$S = k \ln W$, maka entropi terbesar adalah Ketika $\ln W$ maksimum, maka

$$\ln W = \ln \prod_{i=1}^n \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

Dengan menggunakan dalil Stirling yakni:

$$\ln N! = N \ln N - N_2$$

2. Partikel Fermi Diract

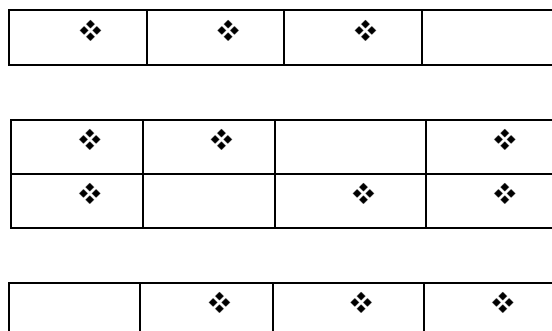
Dalam azas larangan Pauli “untuk atom yang memiliki lebih dari satu elektron, misalnya Natrium, elekton-elektron tidak berkumpul ditingkat energi rendah, karen amsing- masing status hanya boleh ditempati tidak lebih dari satu elektron. Tingkat paling rendah ($n = 1$) hanya boleh ditempati oleh dua elektron, yang satu spin nya keatas dan yang lainnya spinnya kebawah. Sedangkan tingkat energi berikutnya, ($n = 2$), akan ditempati oleh 8 elektron, dan seterusnya, tingkat energi ke - n akan diisi oleh $2n^2$ elektorn dengan konfigurasi yang didasarkan kepada azas larangan Pauli. Azas larangan Pauli, akan muncul dengan sendirinya, apabila kita memilih fungsi gelombang total yang anti simetrik. Partikelpartikel yang memiliki sifat seperti ini, misalnya elektron, proton dinamakan “partikel fermi” atau “Fermiun”.

Contoh:

Suatu sistem, terdiri dari 2 tingkatan energi, tingkatan ε_1 , dengan 4 keadaan energi, dan ditempati oleh 3 partikel sedangkan pada tingkatan ε_2 , dengan 3 keadaan energi, terdapat 2 partikel. Jika partikel memenuhi statistic fermi dirac gambarkan keadaan mikro yang mungkin.

Solusi :

ada 4 cara utnuk menempatkan 3 partikel pada tingkatan ε_1 dengan 4 keadaan, dan ada 2 cara untuk menempatkan 2 partikel yang terdapat pada tingkatan ε_2 , seperti yang dilihatkan pada gambar berikut ini: Tingkatan ε_1



Secara umum, peluang termodinamika W untuk setiap tingkat energi dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_i = \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

Dari contoh diatas berarti:

$$W_1 = 4! / 3! (4 - 3)! = 4, \text{ dan } W_2 = 2! / 3! (3 - 2)! = 3$$

Jika kedua tingkatan energi ini dikombinasikan, akan diperoleh peluang termodinamik total sebanyak:

$$W = W_1 \times W_2 = 4 \times 3 = 12$$

Jadi ada 12 cara yang mungkin untuk menggambar konfigurasi partikel pada kedua tingkatan energi itu.

LATIHAN SOAL

Kerjakan Soal dibawah ini dengan teliti !

1. Suatu sistem yang terdiri dari 5 partikel mematuhi statistik Fermi-Dirac. Terdapat empat tingkat energi yang diperhitungkan, yaitu $1 = 2$, $2 = 3$, $3 = 4$, dan $4 = 5$. Degenerasi masing-masing tingkat energi bergantung dari volume system V dan energi total sistem tergantung dari temperatur sistem T .
2. Tentukan $\ln W$ untuk statistik Fermi-Dirac
3. Dengan menggunakan $d\Gamma = 2\pi V (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$, $g_j \equiv d\Gamma/h^3$, $\beta = -1/kT$, tentukanlah $N_{FD}(\epsilon)d\epsilon$ untuk gas elektron yang memiliki dua kemungkinan spin, yaitu $+1/2$ dan $-1/2$. Gunakan pula hubungan bahwa $\alpha = \epsilon_F/kT$.
4. Suatu metal mempunyai energi Fermi $\epsilon_F = 4,0$ eV dan suhu $T = 400$ K.
5. Hitung cacah elektron bebas persatuan energi $n(E)$ untuk
 - (a) $E = \epsilon_F + kT$
 - (b) $E = \epsilon_F - kT$



UNIT – VI

PERSAMAAN KEADAAN

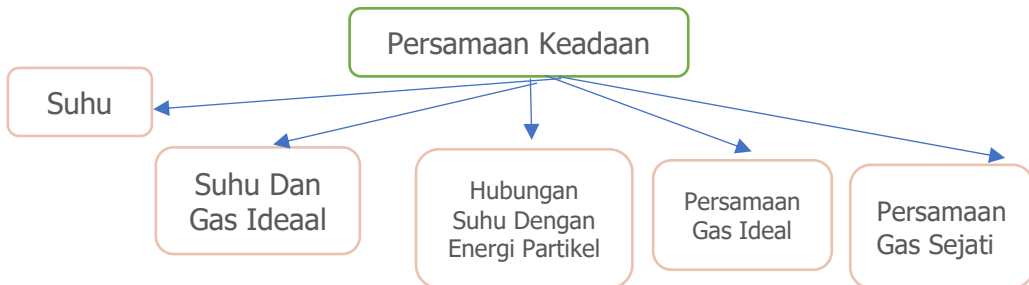
Metode Pembelajaran : Case Method

Waktu : 150 Menit

Sub CPMK : Mahasiswa memiliki wawasan tentang persamaan termodinamika yang menggambarkan keadaan materi di bawah seperangkat kondisi fisika

A. Pendahuluan

Unit ini akan membahas ruang lingkup fisika statistik, sebuah persamaan konstitutif yang menyediakan hubungan matematik antara dua atau lebih fungsi keadaan yang berhubungan dengan materi, seperti temperatur, tekanan, volume, dan energi dalam.



B. Materi

“Dan Dia {menundukan pula} apa yang Dia ciptakan untuk kamu di bumi ini dengan berlain-lainan macamnya, sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda kekuasaannya. (An Nahl :13)”. Secara harfiah memang kita melihat dan merasakan banyak wujud dan jenis benda yang diciptakan Allah SWT. Dibalik itu banyak juga yang tidak tampak dan berupa sifat atau potensi, antara lain seperti energi yang disediakan untuk manusia.

1. Suhu

Perasaan panas dan dingin yang kita rasakan melalui indra peraba, tetapi kita ketahui bahwa indra peraba ini tidak dapat dijadikan standar untuk menentukan suhu suatu benda dan tidak teliti walaupun sensor dalam indra peraba kita sangat sensitif. Oleh karena itu, untuk mengukur suhu suatu benda diperlukan alat ukur yang disebut termometer. Pengertian suhu secara sederhana adalah derajat panas atau dinginnya suatu benda, pembahasan selanjutnya dalam fisika statistik adalah bagaimana kelakuan partikel pendukung benda tersebut kalau suhunya tinggi. Suhu diukur dengan menggunakan termometer melalui pengamatan terhadap perubahan-perubahan beberapa sifat fisis, seperti perubahan panjang kolom cairan dalam tabung kapiler sebagai derajat panas atau derajat dinginnya suatu benda.

Untuk menentukan suhu lainnya dengan menggunakan termometer, mula-mula diamati perubahan sifat fisik dari termometer tersebut seperti perubahan volume, hambatan listrik atau ggl sel. Misalkan sifat fisik tersebut adalah X yang berupa perubahan volume, titik tetapnya adalah X_0 dan X_{100} . Perubahan nilai tersebut dalam setiap derajat dalam skala Celcius adalah:

$$\frac{x_{100} - x_0}{100}$$

Jika pada suhu tertentu termometer tersebut mempunyai nilai X maka perubahan nilai tersebut terhadap 0°C adalah $X - X_0$ maka suhu termometer tersebut diukur dalam skala celcius adalah:

$$t(0C) = 100 \frac{X - X_0}{X_{100} - X_0}$$

Secara mikroskopik suhu tersebut akan berubah terus karena kelakuan sistem secara mikroskopik selalu berubah, tetapi secara makroskopik hal tersebut tidak terukur dan kita menyebutnya bahwa termometer tersebut sudah berada dalam keseimbangan dengan benda yang diukur karena suhu benda dan suhu termometer sudah mencapai harga yang sama.

2. Suhu Gas Ideal

Dibandingkan dengan sifat zat yang lain, gas merupakan zat yang sangat peka terhadap perubahan suhu maka gas dapat digunakan untuk bahan termometer yang disebut dengan termometer gas dan digunakan untuk mengukur suhu gas. Jika volume ruangan (V) diubah tanpa mengubah suhu ruangan maka tekanan gas (p) juga akan berubah sedemikian rupa sehingga perkalian antara tekanan gas dengan volume ruangan adalah konstan. Pernyataan ini dikenal dengan Hukum Boyle, secara matematis ditulis sebagai berikut.

$$p \cdot V = \text{konstan (suhu konstan)} \dots\dots\dots (1)$$

Usaha untuk mempertahankan suhu agar tetap konstan dapat dilakukan dengan mencelupkan sistem tersebut dalam kolam air yang jauh lebih besar dari sistem tersebut dan mempertahankan suhu kolam air itu tetap konstan. Proses yang terjadi tanpa mengalami perubahan suhu disebut proses isothermal. Oleh karena itu, perkalian antara $p \cdot V$ untuk gas dengan massa tertentu akan memberi informasi suhu gas tersebut. Jadi, suhu gas dapat didefinisikan sebagai besaran yang sebanding dengan nilai perkalian $p \cdot V$. Jika notasi suhu gas adalah T maka pernyataan tersebut dapat ditulis secara matematis sebagai berikut:

$$p \cdot V = cT \dots\dots\dots (2)$$

dengan c adalah konstanta suhu gas yang bergantung pada massa gas yang ada. Misalkan gas berada pada suhu titik beku air T_0 , tekanan dan volumenya adalah p_0 dan V_0 dan gas berada pada titik didih air T_{100} , tekanan dan volume gasnya menjadi p dan V maka:

$$p_0 \cdot V_0 = cT_0 \text{ dan } p_1 \cdot V_1 = cT_{100} \dots\dots\dots (3)$$

Zat yang biasanya digunakan dalam termometer gas adalah hidrogen dan helium. Termometer gas memiliki nilai yang sama dengan termometer lainnya hanya pada titik tetap saja karena titik tetap adalah titik kalibrasi, pada suhu lainnya terdapat penyimpangan. Jika gas yang terdapat dalam suatu ruang yang volumenya V , mempunyai tekanan p , suhu gas tersebut adalah T dan ada

n mol partikel gas tersebut maka secara matematik dapat ditulis sebagai berikut.

$$pV = nRT \quad \dots\dots\dots (4)$$

Keadaan gas yang mengikuti persamaan (4) hanya gas pada suhu yang tinggi dengan kerapatan rendah. Jika suhu gas semakin turun dan kerapatan gas bertambah naik maka keadaan gas akan semakin menyimpang dari persamaan (4). Persamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk lain yang lebih baik dengan melihat jumlah partikel gas tersebut (N) dan bilangan Avogadronya adalah N_A maka jumlah mole gas tersebut ditunjukkan persamaan berikut ini.

$$n = \frac{N}{N_A} \quad \dots\dots\dots (5)$$

dengan melakukan substitusi persamaan (4) ke persamaan (5) maka didapat :

$$pV = N \left[\frac{R}{N_A} \right] T \quad \dots\dots\dots (6)$$

atau

$$pV = N k T \quad \dots\dots\dots (7)$$

3. Hubungan Suhu Dengan Energi Partikel

Dalam fisika statistik kita hanya akan mengkonsentrasikan pada gerak partikel sebagai individu yang bergerak tidak teratur (brownian). Tinjau suatu sistem partikel dengan massa masing-masing adalah m_1, m_2, m_3, \dots , dan kecepatannya adalah v_1, v_2, v_3, \dots maka energi rata-rata suatu partikel sistem tersebut adalah:

$$E_{k, \text{rerata}} = \frac{1}{N} \left[\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

dimana N merupakan jumlah total partikel. Jika semua partikel memiliki massa yang sama maka

$$E_{k, \text{rerata}} = \frac{1}{N} \left[\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] = \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{m} \sum \frac{1}{2} v_i^2 \right] = \frac{1}{2} m v_{rms}^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

di mana v_{rms} disebut *root-mean-square velocity* dan didefinisikan sebagai berikut.

$$v_{rms}^2 = \frac{1}{2} [\sum_i v_i^2] = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots \dots) \dots\dots\dots (10)$$

Jadi dapat dikatakan bahwa suhu dan energi kinetik rata-rata system bergantung pada sifat dari sistem tersebut. Jika suatu sistem mempunyai suhu yang sama secara keseluruhan sehingga energi kinetik rata-rata partikelnya ditemukan sama besar pada setiap daerah dalam sistem tersebut maka system tersebut dikatakan dalam keadaan kesetimbangan termal.

4. Persamaan Keadaan Gas Ideal

Jika sebuah partikel bertumbukan dengan sebuah partikel dinding maka yang terjadi adalah pertukaran momentum di antara kedua partikel tersebut. Pertukaran momentum ini akan disertai dengan dikerjakannya sebuah gaya oleh partikel tersebut pada partikel dinding pada titik tumbuknya. Gaya-gaya yang dikerjakan partikel pada dinding tidak sama karena energi kinetic partikel gas tersebut tidak sama, tetapi karena ada sejumlah besar tumbukan pada tiap bagian dinding maka efek keseluruhan dari gas dapat digambarkan dengan sebuah gaya rata-rata F yang bekerja pada semua luas dinding. Jika A adalah luasan tersebut maka tekanan gas p , didefinisikan sebagai gaya rata-rata persatuan luas

$$P = \frac{F}{A} \text{ atau } F = P \cdot A \dots\dots\dots (11)$$

Pada hampir semua gas, khususnya pada suhu tinggi dan kerapatan rendah, pengaruh gaya antara partikel relatif kecil; dan energi potensial internal gas dapat diabaikan apabila dibandingkan dengan energi kinetic pada partikel-partikel nya.

$$U = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = N \left[\frac{1}{2} v_{rms}^2 \right] = N E_{k, rerata} \dots\dots\dots (12)$$

Untuk menghitung tekanan yang dikerjakan oleh partikel-partikel gas pada dinding ketika partikel-partikel tersebut menabrak dinding adalah sebagai berikut.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{2Anmv^2 \cos^2 \theta}{A} = 2nmv^2 \cos^2 \theta \dots\dots\dots (13)$$

Jadi dalam hal ini n bukanlah jumlah total partikel gas persatuan volume tetapi hanya merupakan jumlah partikel bergerak ke arah yang telah disebutkan

$$P = 2 \left[\frac{1}{2} n \right] m v_{rms}^2 \dots\dots\dots (14)$$

Kecepatannya adalah $P = 2 \left[\frac{1}{2} n \right] m v_{rms}^2$ tetapi karena partikel-partikel bergerak dengan kecepatan yang berbeda, seharusnya digunakan nilai rata-rata $v_{x,rms}^2$

$$\text{di mana } v_{x,rms}^2 = v_{x,rms}^2 + v_{y,rms}^2 + v_{z,rms}^2$$

karena gas dianggap serba sama maka kecepatan partikel rata-ratanya adalah sama untuk setiap arah; artinya, kecepatan partikel terdistribusi secara isotropis. Jadi,

$v_{x,rms}^2 = v_{y,rms}^2 = v_{z,rms}^2$ dan karena itu $v_{x,rms}^2 = v_{y,rms}^2 = v_{z,rms}^2$ dengan melakukan substitusi ke persamaan p didapat

$$v_{x,rms}^2 = v_{y,rms}^2 = v_{z,rms}^2 \dots\dots\dots (15)$$

Berdasarkan definisi, suatu gas ideal tidak mempunyai energi potensial sehingga energi internal total suatu gas ideal dengan N partikel adalah:

$$U = N E_{k, \text{rerata}} = \frac{3}{2} kNT \dots\dots\dots (16)$$

5. Persamaan Gas Sejati

Persamaan gas ideal seperti yang telah dibahas di atas menggambarkan kelakuan gas di mana di dalam gas tidak terdapat gaya interaksi antar partikel dan partikel-partikel dianggap sebagai titik massa, oleh karena itu persamaan ini merupakan pendekatan yang baik untuk gas sejati hanya sejauh pengaruh gaya antarpartikel dan ukuran partikel diabaikan. Keadaan ideal ini muncul hanya pada suhu tinggi atau kerapatan rendah atau keduanya.

$$\frac{dA}{dt} = m \frac{dv}{dt} r + m v \frac{dr}{dt} = m a \cdot r + m v^2 \dots\dots\dots (17)$$

Jika diambil rata-ratanya akan didapat

$$\left[\frac{dA}{dt} \right]_{\text{rata-rata}} = (F \cdot r)_{\text{rata-rata}} + 2(E_k)_{\text{rata-rata}} \dots\dots\dots (18)$$

dalam selang r , rata-rata waktu setiap besaran $f(t)$ yang bergantung pada waktu didefinisikan dengan

$$f(t)_{rata-rata} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \quad \dots\dots\dots (19)$$

Dalam hal ini maka

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{rata-rata} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dA = \frac{A-A_0}{\tau} \quad \dots\dots\dots (20)$$

Demikian pula dengan gerakan bumi yang mengelilingi matahari, oleh karena itu $(dA/dt)_{rata-rata} = 0$ sehingga persamaan

$$(E_k)_{rata-rata} = -\frac{1}{2}(F \cdot r)_{rata-rata} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ini adalah teori varial untuk partikel dan besaran $(F \cdot r)$ rata-rata disebut *varial partikel*.

Perhatikan suatu sistem yang terdiri atas dua partikel masing-masing bermassa m_1 dan m_2 sehingga besaran skalar A didefinisikan sebagai berikut.

$$A = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2$$

Jika besaran skalar A diturunkan terhadap waktu maka didapat

$$\frac{dA}{dt} = (m_1 a_1 \cdot r_1 + m_2 a_2 \cdot r_2) + (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \quad \dots\dots\dots (22)$$

Bagian terakhir di kanan tanda sama dengan merupakan dua kali energi kinetik sistem sehingga sistem dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dA}{dt} = (m_1 a_1 \cdot r_1 + m_2 a_2 \cdot r_2) + (2E_k) \quad \dots\dots\dots (23)$$

Anggaplah gaya luar yang bekerja pada partikel 1 adalah F_1 dan gaya internal pada partikel 1 oleh partikel 2 adalah F_{12} , sedangkan gaya luar yang bekerja pada partikel 2 adalah F_2 dan gaya internal oleh partikel 1 adalah F_{21} .

$$\frac{dA}{dt} = (f_1 \cdot r_1 + f_2 \cdot r_2 + f_{12} \cdot r_{12}) + (2E_k) = 2E_k + B \quad \dots\dots\dots (24)$$

Untuk gas ideal $E_{rata-rata} = 3/2 kT$ jika hal ini dihubungkan dengan $E_{rata-rata}$ gas sejati maka Energi kinetik rata-rata partikel suatu gas sejati dengan suhu mutlak gas sehingga gas yang berisi N partikel adalah $E_k \text{ rerata} = N (3/2 kT)$ sehingga persamaan menjadi

$$pV = kNT + \frac{1}{3} \left[\sum_{\substack{\text{semua} \\ \text{pasangan}}} f_{ij} r_{ij} \right]_{\text{rata-rata}}$$

Di mana

F_{ij} adalah gaya antar partikel ke i dan j

r_{ij} adalah vector jarak antar partikel.

LATIHAN SOAL

Kerjakan soal dengan teliti !

1. Tunjukkan bahwa dalam suatu gas sejati, energi kinetik partikel berpasangan dengan energi potensial rata-ratanya, yaitu:

$$(E_k)_{rata-rata} = -\frac{1}{2}n(E_p)_{rata-rata}$$

2. Jika kecepatan bunyi dalam gas sama dengan $v_{rata-rata}$ maka tunjukkan bahwa laju bunyi dalam gas ideal akan bergantung pada temperatur.



UNIT VII

TEORI ENSAMBEL

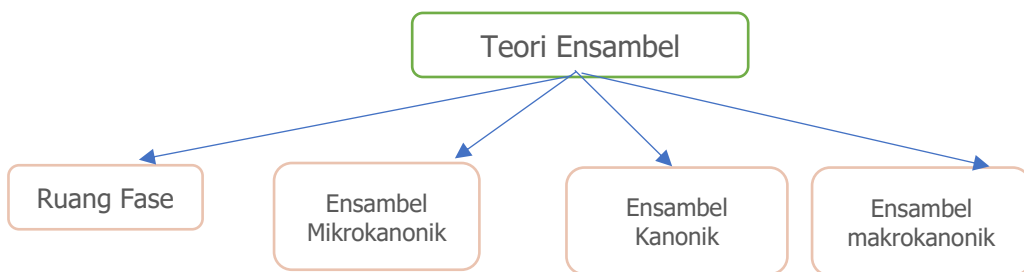
Metode Pembelajaran : Case Method

Waktu : 150 Menit

Sub CPMK : Mahasiswa memiliki wawasan dan pengetahuan tentang ruang lingkup teori ensambel

A. Pendahuluan

Unit ini akan membahas ruang lingkup ruang fasa, ensambel mikrokanonik, ensambel kanonik dan ensambel makrokanonik.



B. Materi

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal". (Al Imran :190). Dalam ayat diatas kita diberi petunjuk, setidaknya tersirat beberapa makna antara lain adalah: alam semesta yang senantiasa berproses tanpa henti dan menyajikan banyak sekali gejala dalam seluruh dimensi ruang dan waktu yang terus berkembang

1. Ruang Fase

Dalam sistem terisolasi, semua kemungkinan Keadaan mikro berada ada permukaan energi. Kesemua keadaan mikro ini secara prinsip telah

diasumsikan memiliki keboleh jadian yang sama. Kita telah asumsikan bahwa semua keadaan mikro pada permukaan energi dari suatu sistem tertutup, dianggap memiliki probabilitas yang sama. Asumsi ini adalah postulat dasar dari mekanika statistik. Untuk sistem yang tidak terisolasi, dapat saja terjadi keadaan-keadaan mikro dengan energi tertentu lebih mungkin dibanding keadaan-keadaan mikro dengan energi yang lain. Sehingga keadaan mikro tidak dapat lagi dianggap sama, tetapi harus dikalikan dengan suatu fungsi bobot $\rho(q_i, p_i)$ yang bergantung pada energi keadaan tersebut. Jadi untuk setiap titik ruang fase (q_i, p_i) , terdapat suatu fungsi bobot $\rho(q_i, p_i)$ yang dapat diinterpretasikan sebagai rapat probabilitas bagi sistem makro untuk mencapai keadaan titik ruang fase tersebut. Jadi untuk suatu sistem terisolasi, ρ akan lenyap diluar permukaan energi, dan akan bernilai konstan pada permukaan energi. Rapat probabilitas ρ disebut juga dengan rapat ruang fase, dan dapat dinormalkan sehingga

$$\int d^{3N} q d^{3N} p \rho(q_i, p_i) = 1 \dots\dots\dots(1)$$

Untuk sebarang observabel $f(q_i, p_i)$, seperti misalnya energi total $H(q_i, p_i)$ atau momentum sudut $L(q_i, p_i)$, maka secara umum kita akan mengamati nilai Untuk sebarang observabel $f(q_i, p_i)$, secara umum kita dapat memperoleh nilai rerata

$\langle f \rangle$ yang mana setiap keadaan mikro (q_i, p_i) menyumbang sesuai dengan bobotnya $\rho(q_i, p_i)$

$$\langle f \rangle = \int d^{3N} q d^{3N} p f(q_i, p_i) \rho(q_i, p_i) \dots\dots\dots(2)$$

Karena setiap titik di ruang fase (q_i, p_i) dapat diidentifikasi dengan sebuah kopi dari sistem dengan keadaan mikroskopik tertentu, maka pers. (2) tidak lain adalah rerata meliputi suatu set kopi identik sistem semacam itu, atau meliputi seluruh anggota ensambel. Sehingga kuantitas $\langle f \rangle$ disebut sebagai rerata ensambel dari kuantitas f . Untuk sistem yang terisolasi, ρ diberikan oleh

$$\rho_{mk(q_i, p_i)} = \frac{1}{\sigma} \delta[E - H(q_i, p_i)] \dots\dots\dots(3)$$

Rapat ruang fase untuk suatu sistem terisolasi terkait dengan suatu ensambel yang disebut sebagai ensambel mikrokanonik. Konstanta dalam persamaan di atas ditentukan dari normalisasi

$$\int d^{3N} q d^{3N} p \rho_{mk} = \text{konstanta} \int d^{3N} q d^{3N} p = 1$$

Rerata ensambel untuk sebuah sistem yang setimbang termodinamik harus independen terhadap waktu, maka rapat ruang fase tidak boleh secara eksplisit bergantung pada waktu. Ensambel seperti ini ($\partial\rho/\partial t = 0$) disebut sebagai ensambel yang stasioner. Akan tetapi konsep ruang fase dapat juga digunakan untuk mendeskripsikan proses dinamik. Untuk itu kita membolehkan ketergantungan waktu secara eksplisit pada rapat ruang fase $\rho(q_i, p_i, t)$, walau untuk termodinamika kita hanya membutuhkan ensambel yang tak tergantung pada waktu.

Bila suatu saat t_0 suatu sistem berada pada suatu keadaan mikro (q_i, p_i) , maka dengan berjalannya waktu sistem ini akan berevolusi ke keadaan mikro yang lain $(q_i(t), p_i(t))$. Sepanjang lintasan ruang fase, rapat ruang fasenya berubah dengan waktu. Perubahannya dapat secara umum dituliskan sesuai

$$\frac{d}{dt} \rho(q_i(t), p_i(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(q_i(t), p_i(t), t) + \{\rho, H\}$$

Kelajuan sistem mengalir keluar dari suatu volume berhingga ω diberikan oleh fluks yang melalui permukaan pembatas volume

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} d\omega \rho = - \int_{\sigma} \rho(\vec{v}, \vec{n}) d\sigma$$

2. Ensambel Mikrokanonik

Kecepatan 'fluida', yang diberikan oleh vektor (\dot{q}_i, \dot{p}_i) . Menurut hukum Gauss, dapat ditulis sebagai

$$\int_{\omega} d\omega \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) = 0$$

Dimana divergensi diatas

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (\rho q_i + \frac{\partial}{\partial p_i} (\rho p_i)) \right)$$

Sehingga sepanjang lintasan ruang fase, persamaan kontinuitas berlaku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

dengan menggunakan persamaan gerak Hamiltonan, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) \end{aligned}$$

Atau

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \{\rho, H\}$$

Untuk ensambel stasioner, yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu ($\partial \rho / \partial t = 0$), sehingga diperoleh

$$\{\rho, H\} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

Seperti yang kita ketahui dari mekanika klasik, ini berarti bahwa ρ adalah konstanta gerak dan hanya bergantung pada kuantitas yang kekal. Secara umum keadaan mikro ini berbeda satu sama lain, tetapi kesemuanya berada pada permukaan energi.

Setiap elemen permukaan ini mengandung sejumlah n_i sistem (sub ensambel). Bila kita memilih elemen permukaannya cukup kecil, maka setiap elemen terkait dengan satu Keadaan mikro. Tinjau suatu $\Delta \sigma_i$, yang mengandung n_i buah keadaan mikro (sistem). Untuk keseluruhan tentunya terpenuhi

$$N = \sum_i n_i$$

Jumlah sistem n_i dalam suatu elemen permukaan tertentu $\Delta \sigma_i$ terkait dengan bobot keadaan mikro tersebut dalam ensambel. Kuantitas n_i / N dapat diinterpretasikan sebagai probabilitas suatu keadaan mikro i di $\Delta \sigma_i$. Probabilitas $p_i = n_i / N$ terkait dengan $\rho(q_i, p_i) d^3 N q d^3 N p$ dalam formulasi kontinu.

Penghitungan total jumlah konfigurasi untuk suatu distribusi tertentu $\{n_i\}$ hanyalah masalah kombinatorial. Ada $N!$ beda cara untuk melabeli system-system yang ada, tetapi untuk setiap cara ada $n_i!$ pertukaran di setiap sel ruang fase yang tidak memberi kasus yang berbeda. Sehingga total jumlah konfigurasi $w\{n_i\}$ untuk menghasilkan suatu distribusi tertentu $\{n_i\}$ diberikan oleh

$$W\{n_i\} = \frac{N!}{\prod_i n_i!}$$

Misalkan ω_i adalah probabilitas mendapatkan sebuah sistem ada pada elemen permukaan $\Delta\sigma_i$, maka probabilitas untuk mendapatkan n_i buah sistem di $\Delta\sigma_i$ adalah $(\omega_i)^{n_i}$, karena system dalam ensambel independen secara statistik satu dari yang lainnya. Sehingga

$$W_{Tot}\{n_i\} = N! \prod_i \frac{(\omega_i)^{n_i}}{n_i!}$$

Untuk itu kita akan mencari maksimum dari $\ln W_{tot}\{n_i\}$ yang secara prinsip sama dengan maksimum dari $W_{tot}\{n_i\}$. Untuk $N \rightarrow \infty$, semua $n_i \rightarrow \infty$, sehingga semua faktor pada logaritma dapat didekati dengan pendekatan Stirling $\ln n! \approx n \ln n - n$

$$\begin{aligned} \ln W_{tot} &= \ln N + \sum_i (n_i \ln \omega_i - \ln n_i!) \\ &= N \ln N - N + \sum_i (\ln n_i - \ln \omega_i - (n_i \ln n_i - n_i)) \end{aligned}$$

Untuk memaksimalkannya maka total diferensialnya harus lenyap, sehingga

$$d \ln W_{tot} = -\sum_i (\ln n_i - \ln \omega_i) dn_i = 0$$

akan tetapi karena $\{n_i\}$ terkait satu dengan yang lain, maka kita harus menggunakan metode pengali Lagrange, dengan menambahkan diferensial

$$\lambda dN = \lambda \sum_i dn_i = 0$$

sehingga

$$\sum_i (\ln n_i - \ln \omega_i - \lambda) dn_i = 0$$

sebagai kondisi untuk memaksimalkan $\ln W_{tot}$. Karena sekarang dn_i sudah saling independen, maka untuk setiap koefisiennya kita dapatkan syarat

$$\ln n_i = \tau + \ln w_i$$

Berarti $n_i = w_i e^\tau = \text{Konstan}$

3. Ensambel Kanonik

Untuk sistem tertutup, energi sistem E_i tidak konstan sehingga setiap titik ruang fase dapat merupakan keadaan mikro yang mungkin bagi sistem. Ensambel yang terkait dengan sistem tertutup disebut sebagai ensambel kanonik. Dalam penjabaran di bawah ini, akan digunakan hasil-hasil yang telah diperoleh pada kasus ensambel mikrokanonik. Bila sel ini cukup kecil, maka masing-masing akan terkait dengan satu keadaan mikro i . Setiap sistem dari N sistem pada saat tertentu, berada dalam keadaan mikro tertentu (q_i, p_i) . Misalkan setiap elemen sel $\Delta\omega_i$ mengandung sejumlah n_i sistem. Keseluruhannya memenuhi $N = \sum_i n_i$

Dalam keadaan setimbang termodinamis, walau energi sistem tidak tetap, akan ada nilai rerata energi yang kita simbolkan dengan U dan nantinya diidentifikasi sebagai energi dalam sistem. Jadi U adalah rerata statistik dari semua nilai energi yang mungkin, sehingga

$$U = \langle E_i \rangle = \sum_i p_i E_i$$

$$\text{Atau dengan } p_i = \frac{n_i}{N} \text{ dapat ditulis } NU = \sum_i n_i E_i$$

Total jumlah cara $W\{n_i\}$ untuk menghasilkan suatu distribusi tertentu $\{n_i\}$ diberikan oleh

$$W_{Tot}\{n_i\} = N! \prod_i \frac{(w_i)^{n_i}}{n_i!}$$

dengan ω_i adalah probabilitas mendapatkan satu keadaan mikro di dalam sel elemen $\Delta\omega_i$. Untuk $N \rightarrow \infty$, semua $n_i \rightarrow \infty$, sehingga semua faktor dapat didekati dengan pendekatan Stirling.

$$\ln W\{n_i\} = N \ln N - N + \sum_i (n_i \ln n_i - n_i) - n_i \ln \omega_i$$

dengan memakai fakta bahwa probabilitas ω_i untuk sel ruang fase yang sama kurangnya, akan bernilai sama, maka diperoleh

$$p_i = \frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$$

Kuantitas yang ada dalam penyebut persamaan di atas didefinisikan sebagai fungsi partisi kanonik, yaitu $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$

Untuk menentukan faktor β , kita gunakan konsep dalam ensambel mikro kanonik yang dianggap juga berlaku pada sembarang ensambel, yaitu entropi sebagai

rerata ensambel adalah $S = \langle -k \ln \rho \rangle$

$$S = \langle -k \ln \rho \rangle = \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p \rho_c(q_i, p_i) (-k \ln \rho_c(q_i, p_i))$$

Untuk bentuk spektrum energi kontinu

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p e^{-\beta H(q_i, p_i)}$$

4. Ensambel Makrokanonik

Hasil yang kita peroleh ketika menjabarkan ensambel kanonik dan mikrokanonik, dapat kita gunakan untuk mendapatkan distribusi untuk kasus makrokanonik. Jadi dengan logika yang sama, akan kita dapatkan bahwa total probabilitas untuk suatu distribusi diberikan oleh

$$W\{n_i, N\} = N! \prod_{i,N} \frac{(w_i, N)^{n_i, N}}{n_i, N!}$$

Untuk mendapatkan distribusi yang paling terbolejadi, dicari nilai ekstrim dari logaritma

$$\ln W\{n_i, N\} = N \ln N - N + \sum_{i,N} (n_{i,N} \ln n_{i,N}) - n_{i,N} \ln \omega_{i,N}$$

Untuk kasus dengan spektrum energi kontinu, persamaan ini menjadi rapat ruang fase makrokanonik

$$\rho_{M K(N_i, p_i, q_i)} = \frac{e^{-\beta H(q_i, p_i) + \alpha N}}{\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p e^{-\beta H(q_i, p_i) - \mu N}}$$

Analog dengan kasus ensambel kanonik, bagian penyebut persamaan di atas didefinisikan sebagai fungsi partisi makrokanonik

$$Z = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p e^{-\beta H(q_i, p_i) - \mu N}$$

Nilai β dan α dapat ditentukan melalui formulasi entropi sebagai rerata ensambel dari logaritma rapat ruang fase $S = -k \ln \rho$. Kita peroleh

$$S_{(\beta, V, \alpha)} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p \rho_{M,K} [k \ln Z + k\beta H(q_i, p_i) - k\alpha N]$$

Untuk sistem partikel tak terbedakan, seperti pada kedua ensambel lainnya, kita harus menambahkan faktor koreksi Gibbs $1/N!$, sehingga fungsi partisinya menjadi

$$Z_{(T, V, \mu)} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p e^{(-\beta H(q_i, p_i) - \mu N)}$$

5. Aplikasi ensambel kanonik untuk gas tak ideal

Bagian ini akan membahas satu contoh aplikasi ensemble kanonis untuk gas tak ideal, yaitu untuk kasus interaksi antar molekul tak dapat diabaikan. Molekul - molekul yang ditinjau adalah molekul semi-klasik. Energi sistem gas ini ditentukan oleh komponen yang bergantung pada momentum dan posisi molekul-molekulnya. Jika dianggap bahwa energi interaksi antara dua buah molekul tidak bergantung pada momentum kedua buah molekul yang berinteraksi dan juga tidak bergantung pada posisi molekul-molekul lain, maka energi total sistem dapat dituliskan sebagai:

$$U = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^N (p^2 x_j + p^2 y_j + p^2 z_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{1 > j} U_{ij}$$

Pemanfaat Konsep-Konsep Ensambel

Yaitu sistem yang Hamiltonannya invarian terhadap sebarang pelabelan koordinat dan momentumnya, atau invarian terhadap permutasi label partikelnya. Misalnya, Hamiltonan gas ideal klasik.

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} = \sum_{i=1}^N \frac{|\vec{p}_{p_i}|^2}{2m}$$

memenuhi syarat ini (P_i melambangkan sebarang permutasi dari indeks i). Contoh Hamiltonan yang tidak memenuhi syarat ini, misalnya adalah bila

untuk setiap partikel, energi potensialnya berbeda, yang secara eksplisit bergantung ada label partikel

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega^2 (\vec{r}_i - \vec{b}_i)^2$$

Suku kedua persamaan di atas mengandung faktor \vec{b}_i yang spesifik untuk setiap partikel, sehingga permutasi indeks i jelas akan mengubah suku ini.

Probabilitas mendapat suatu sistem dalam sebarang sel ruang fase, untuk kasus terbedakan dan tak terbedakan, sama. Karena faktor $N!$ dari rapat ruang fase meniadakan factor $N!$ dari elemen volume. Ini merupakan konsekuensi dari normalisasi $\int d^{6N} w = 1$

$$\begin{aligned} d^{6N} w &= \rho d(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \frac{d^{3N} q d^{3N} p}{h^{3N}} \\ &= \rho n d(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \frac{d^{3N} q d^{3N} p}{N! h^{3N}} \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL

Kerjakan dengan teliti

1. Hitunglah volume ruang fase yang dibatasi permukaan energi, untuk suatu sistem partikel gas ultra relativistik dengan jumlah partikel N dan energi E konstan. Diketahui Hamiltonannya diberikan oleh $H = \sum_i^N |\vec{p}|c$ dengan c adalah kecepatan cahaya
2. Setelah anda mempelajari empat jenis ensambel, cobalah untuk membuat ensambel baru yang terkait dengan suatu sistem, yang mana sistem dapat: bertukar energi dengan lingkungan dan berada pada kesetimbangan termal pada suhu T , partikel dapat keluar masuk ke dalam sistem dan berada pada kesetimbangan potensial kimia μ , volume dapat berubah-ubah dan berada dalam kesetimbangan mekanik dengan tekanan P . Tunjukkan bahwa tidak ada besaran potensial termodinamik yang terkait dengan 'fungsi partisi' yang anda peroleh dari ensambel semacam ini.

UNIT VIII

TEORI KINETIK GAS

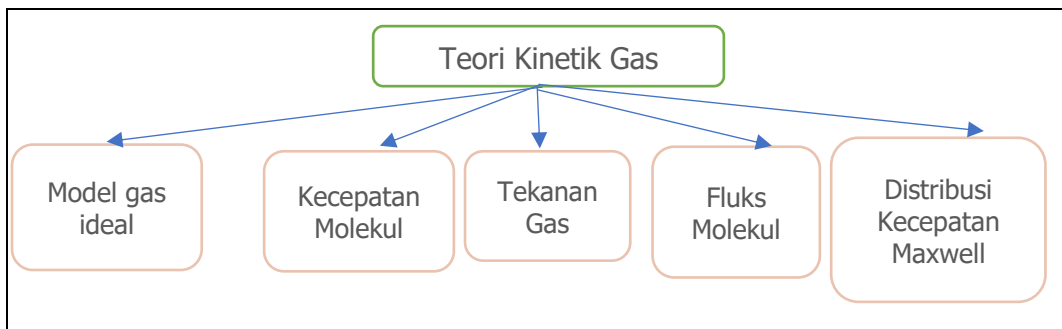
Metode Pembelajaran : Case Method

Waktu : 150 Menit

Sub CPMK : Mahasiswa memiliki wawasan dan pengetahuan tentang teori kinetic gas dalam mekanika statistik

A. Pendahuluan

Unit ini membahas tentang model gas ideal, kecepatan molekul, tekanan gas, fluks molekul dan distribusi kecepatan maxwell



B. Materi

“Dan di bumi ini terdapat bagian-bagian yang berdampingan, dan kebun-kebun anggur, tanaman-tanaman dan pohon korma yang bercabang dan yang tidak bercabang, disirami dengan air yang sama. Kami melebihkan sebahagian tanam-tanaman itu atas sebahagian yang lain tentang rasanya. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang berfikir.” (QS: Ar Rad: 4). Secara harfiah diartikan sebagai berdekatan dalam dimensi tempat, sebagai daerah, wilayah, negara dsb. Yang mempunyai potensi baik sumber daya alam maupun sumber daya manusianya yang mengolah, mengembangkan dan

meningkatkan.. Berikutnya potensi tersebut saling dipertukarkan baik dari sisi keunggulan komparatif maupun kompetitif.

1. Model Gas Ideal

- Terdiri atas partikel (atom atau molekul) yang jumlahnya besar
- Partikel-partikel tersebut tersebar merata dalam seluruh ruang
- Partikel-partikel tersebut bergerak acak ke segala arah
- Jarak antar partikel jauh lebih besar dari ukuran partikel
- Tidak ada gaya interaksi antar partikel kecuali bila bertumbukan
- Semua tumbukan (antar partikel atau dengan dinding) bersifat lenting sempurna dan terjadi dalam waktu yang sangat singkat
- Hukum Newton tentang gerak berlaku

Persamaan gas ideal

$$PV = nRT = Nk_B T$$

Dimana $n = \frac{N}{N_A}$

P = Tekanan gas [$\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$]

V = Volume gas [m^3]

n = Jumlah mol gas [mol]

N = Jumlah partikel gas

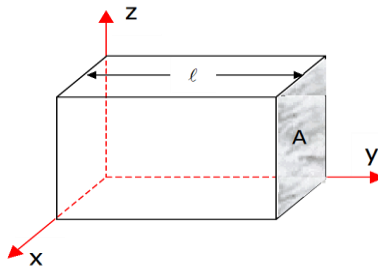
N_A = Bilangan Avogadro =

R = Konstanta umum gas = $8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

k_B = Konstanta Boltzmann = $1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

T = Temperatur mutlak gas [K]

1.1. Tekanan Gas Ideal



Tinjau N buah partikel suatu gas ideal dalam kotak, masing-masing dengan kecepatan:

$$\bar{v}_1 = v_{x1}\hat{i} + v_{y1}\hat{j} + v_{z1}\hat{k}$$

$$\bar{v}_2 = v_{x2}\hat{i} + v_{y2}\hat{j} + v_{z2}\hat{k}$$

Tinjau untuk 1 (satu) partikel

- Kecepatan partikel mula-mula $\bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$
- Kecepatan partikel setelah menumbuk dinding kanan (asumsi: tidak ada tumbukan antar partikel):

$$\bar{v}' = v_x\hat{i} - v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

- Perubahan momentum partikel

$$\Delta\bar{p} = m\bar{v}' - m\bar{v} = -2mv_y\hat{j}$$

- Selang waktu partikel tersebut dua kali menumbuk dinding kanan:

$$\Delta t = \frac{2\ell}{v_y}$$

- Besarnya momentum yg diberikan partikel pada dinding kanan tiap satuan waktu

$$\frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} = \frac{2mv_y^2}{2\ell}\hat{j} = \frac{mv_y^2}{\ell}\hat{j}$$

- Besarnya momentum total yg diberikan N buah partikel pada dinding kanan tiap satuan waktu

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = \frac{m}{\ell} (v_{y1}^2 + v_{y2}^2 + \dots + v_{yN}^2) \hat{j}$$

- Tekanan gas pada dinding kanan

$$P = \frac{\Delta p}{A \Delta t} = \frac{m}{A \ell} (v_{y1}^2 + v_{y2}^2 + \dots + v_{yN}^2) = \frac{mN}{V} \overline{v_y^2}$$

Tetapi

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad \text{dan} \quad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

$$\text{Sehingga} \quad \overline{v_y^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

1.2. Temperatur Gas Ideal

$$\text{Dari persamaan} \quad P = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} \overline{v^2}$$

Dapat di peroleh hubungan $T = 1/3 m \overline{v^2} / k_B$ atau $\overline{v^2} = 3k_B T / m$
sehingga

$$T = \frac{2}{3k_B} \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3k_B} \langle EK \rangle$$

→ disebut energi kinetic translasi partikel gas

1.3. Energi Dalam Gas Ideal

$$\text{Kapasitas kalor pada volume tetap:} \rightarrow C_V = \frac{3}{2} nR$$

$$\text{atau kapasitas kalor pd tekanan tetap:} \rightarrow C_P = \frac{5}{2} nR$$

Perbandingan C_P dan C_V adalah suatu konstanta

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} = 1,67$$

2. Kecepatan Molekul

Asumsi Dasar

- Suatu volume makroskopik berisi jumlah molekul sangat banyak.
- Jarak antar molekul jauh lebih besar dibandingkan dengan ukuran molekul
- Tidak ada gaya antara molekul kecuali berkaitan dengan tumbukan
- Tumbukan yang terjadi elastik.

Ketika tidak ada gaya eksternal maka:

- Molekul terdistribusi merata di dalam kontener (wadah).
- Arah kecepatan molekul terdistribusi merata.

Fraksi molekul dengan rentang kecepatan

v to $v + dv$ adalah $f(v) dv$

$f(v)$ adalah densitas peluang

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vf(v)dv \quad \text{kecepatan rerata}$$

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v)dv \quad \text{kecepatan kuadrat rerata}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} \quad \text{kecepatan kuadrat rerata akar}$$

Berbagai kecepatan molekul

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vf(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v)dv = \frac{3kT}{m}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

3. Tekanan Gas

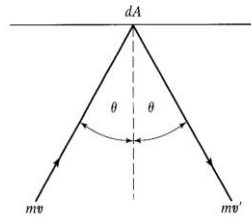


Figure 11.4 Change in momentum of a molecule striking a surface element dA .

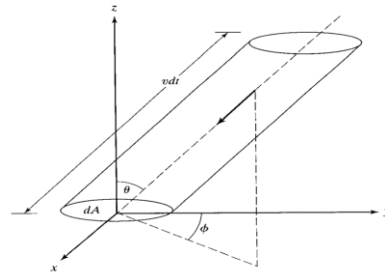


Figure 11.2 Slant cylinder geometry used to calculate the number of molecules that strike the area dA in time dt .

Gambar. 1. Tekanan Gas

$$P = \frac{F}{A} = \frac{dF}{dA} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\Delta p = mv \cos \theta - (-mv \cos \theta)$$

$$\Delta p = 2mv \cos \theta$$

$$\frac{dp(v, \theta, \phi)}{dt} = 2mv \cos \theta \frac{dN(v, \theta, \phi)}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = \iiint 2mv \cos \theta \frac{dN(v, \theta, \phi)}{dt} dv d\theta d\phi$$

$$\frac{dp}{dt} = \iiint 2mv \cos \theta \frac{dN(v, \theta, \phi)}{dt} dv d\theta d\phi$$

$$\frac{dN(v, \theta, \phi)}{dt} = \left(\frac{n dA}{4\pi} \right) [v f(v) dv] \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2mn dA}{4\pi} \int_0^\infty v^2 f(v) dv \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\frac{dp}{dA dt} = P = \frac{2mn}{4\pi} \left(\overline{v^2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (2\pi) = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}$$

Hukum gas ideal

$$P = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}$$

$$PV = \frac{1}{3} n V m \overline{v^2} = \frac{1}{3} N m \overline{v^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} N m \overline{v^2} \right)$$

$$PV = nRT \quad n = \frac{N}{N_A}$$

$$PV = \frac{N}{N_A} RT = NkT \quad k = \frac{R}{N_A}$$

4. Fluks Molekul

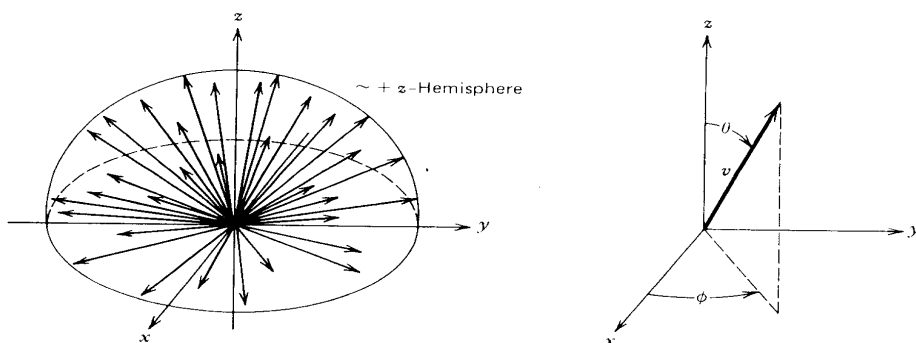


Figure 19.1 At any instant, half of the gas molecules are moving in the positive z -direction, with their velocities distributed uniformly over all directions in the positive z -hemisphere ($\theta < \pi/2$).

Gambar.6 Fluks Molekul

$$\underline{n} = \frac{N}{V}$$

$$dN(v, \theta, \phi) = (dA \cos \theta)(v dt) \underline{n} f(v) dv \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{4\pi}$$

$$\frac{dN(v, \theta, \phi)}{dt} = \left(\frac{\underline{n} dA}{4\pi} \right) [vf(v) dv] \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

$$\frac{dN(v, \theta, \phi)}{dA dt} = d\Phi = \left(\frac{\underline{n}}{4\pi} \right) [vf(v) dv] \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

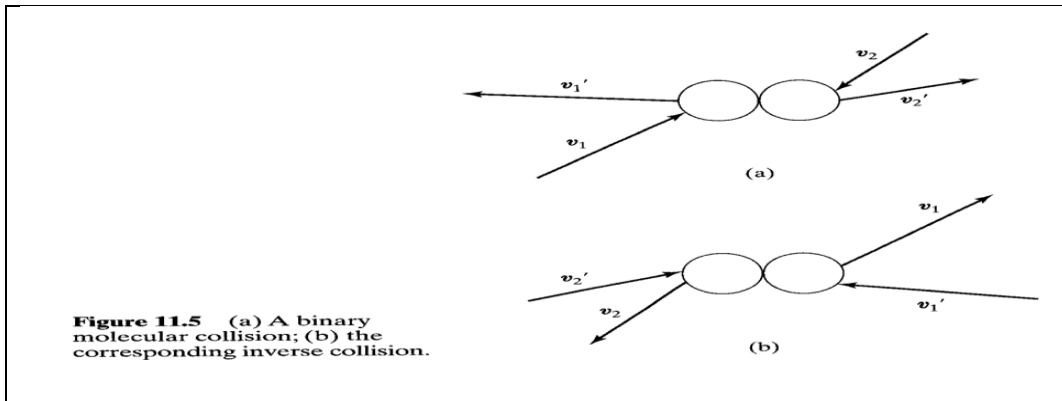
$$\Phi = \frac{\underline{n}}{4\pi} \int_0^\infty vf(v) dv \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\Phi = \frac{\underline{n}}{4\pi} (\bar{v}) \left(\frac{1}{2} \right) (2\pi) = \frac{1}{4} \underline{n} \bar{v}$$

5. Distribusi Kecepatan Maxwell

Tinjau gas pada kesetimbangan. Jumlah molekul pada suatu rentang kecepatan tidak berubah. Tumbukan menyebabkan molekul individu berubah kecepatannya, tetapi distribusi tidak berubah. Untuk setiap tumbukan yang merubah distribusi ada sesuatu yg merubahnya kembali.

Misal : $F(\vec{v})d\vec{v} =$ jumlah antara \vec{v} and $\vec{v} + d\vec{v}$



Gambar. 7 Tumbukan Molekul

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

Peluang suatu tumbukan $\propto F(\vec{v}_1)F(\vec{v}_2)$

Peluang tumbukan kebalikannya $\propto F(\vec{v}_1')F(\vec{v}_2')$

$$F(\vec{v}_1)F(\vec{v}_2) = F(\vec{v}_1')F(\vec{v}_2')$$

Tumbukan elastik

$$\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 = \vec{v}_1'^2 + \vec{v}_2'^2$$

Maka : $F(\vec{v}) = Ae^{-\alpha \vec{v} \cdot \vec{v}}$ *Distribusi Maxwell*

$N(v)dv =$ Number of speeds from v to $v + dv$

$$N(v)dv = Ae^{-\alpha v^2} 4\pi v^2 dv$$

$$N = \int_0^\infty N(v)dv = 4\pi A \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv$$

$$\frac{3}{2} NkT = \frac{1}{2} m \int_0^\infty v^2 N(v)dv = \text{energi kinetik}$$

$$\frac{3NkT}{m} = 4\pi A \int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv$$

Untuk evaluasi konstanta

$$I_2 = \int_0^{\infty} v^2 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} v^4 e^{-\alpha v^2} dv = -\frac{\partial I_2}{\partial \alpha} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}$$

$$\frac{3kT}{m} = \frac{I_4}{I_2} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}} = \frac{3}{2\alpha}$$

Jadi Distribusi maxwell

$$\alpha = \frac{m}{2kT} \quad A = N \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{-3/2} = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

$$N(v)dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

$$f(v)dv = \frac{N(v)dv}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

LATIHAN SOAL

1. Jelaskan
 - a. Tabulasikan nilai-nilai bilangan kuantum n_x , n_y , dan n_z untuk dua belas tingkat energi terendah dari suatu partikel bebas yang berada dalam sebuah wadah dengan volume V ! Nilai n_x , n_y , dan $n_z = 0, 1, 2, 3, ..$ (tetapi tidak boleh semuanya bernilai nol bersama-sama).
 - b. Bagaimana degenerasi dari tiap tingkat (energi)?
 - c. Hitunglah energi pada tiap tingkat dalam satuan $h^2 / (8mV^{2/3})$!
 - d. Apakah tingkat-tingkat energi tersebut memiliki perbedaan energi yang sama satu sama lain?
2. Gas diatomik memiliki dua macam gerak, yaitu gerak rotasi dan gerak translasi, energi dalam sistem tersebut adalah U jika kapasitas panas dalam tekanan tetap (C_p) dan pada volume tetap (C_v) maka tentukan besarnya tersebut untuk gas diatomic?
3. Terdapat 30 partikel terbedakan yang terdistribusi pada tiga tingkat energi yang tidak terdegenerasi, yang dilabelkan dengan 1, 2, 3, sehingga $N_1 = N_2 = N_3 = 10$. Energi pada masing-masing tingkat energi adalah $q_1=2$ eV, $q_2 = 4$ eV, dan $q_3=6$ eV.
 - a. Bila terjadi perubahan bilangan okupasi pada tingkat 2, di mana $dN_2 = -2$, tentukan dN_1 dan dN_3 sehingga $dU = 0$!
 - b. Hitunglah peluang termodinamika keadaan makro sebelum dan sesudah perubahan terjadi !
4. Tunjukkan bahwa rumusan entropi statistik Bose-Einstein dalam batasan klasik ($g_j \gg N_j \gg 1$) akan tereduksi menjadi $S \approx k \sum_j [N_j \ln N_j / g_j + N_j]$. Gunakan aproksimasi Stirling.
5. Misalkan terdapat sebuah sistem dengan N partikel terbedakan. Partikepartikel tersebut terdistribusi dalam dua tingkat energi tak terdegenerasi. Bilangan okupasi pada tingkat energi 1 adalah N_1 dan partikel-partikel lain berada pada tingkat energi 2.

- a. Tuliskan peluang termodinamika untuk sistem ini.
 - b. Tuliskan entropi sistem ini (dalam variabel N , N_1 , dan konstanta Boltzmann k)
6. Sebuah sistem yang terdiri dari N partikel terbedakan terdistribusi dalam dua tingkat energi yang tak terdegenerasi. Tingkat pertama memiliki energi nol sedangkan tingkat energi kedua memiliki energi φ . Sistem ini berada dalam kesetimbangan termal dengan sebuah reservoir pada temperatur T . Tentukan: (dalam variabel φ , T , N , dan konstanta Boltzmann k)
- a. fungsi partisi.
 - b. fraksi dari N_1/N dan N_2/N dari partikel dalam setiap keadaan,
 - c. Energi internal sistem U (atau E), dan (d) rata-rata energi sebuah partikel.
7. Enam partikel tak-terbedakan yang mematuhi statistik Fermi-Dirac terdistribusi dalam lima tingkat energi, $\varphi_j = (j - 1)\varphi$; $j = 1, 2, \dots, 5$. Setiap tingkat energi memiliki degenerasi dengan $g_j = 3$. Energi total system adalah $U = 6\varphi$.
- a. Tabulasikan nilai-nilai bilangan okupasi pada setiap tingkat energi untuk keadaan-keadaan makro yang mungkin bagi system ini,
 - b. hitunglah peluang termodinamika untuk tiap-tiap keadaan makro,
 - c. tentukan bilangan okupasi rata-rata dari tiap tingkat energi.
8. Dengan degenerasi tingkat-tingkat energi sistem pada $T_b = T_a$ dan $V_b < V_a$ adalah $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$, dan $g_4 = 5$ maka dapat diperoleh penempatan yang mungkin bagi kelima partikel.
9. Dengan menggunakan ensambel makrokanonik, hitunglah Entropi, potensial kimia, dan kapasitas panas volume konstan, untuk gas ultrarelativistik yang berada dalam wadah bervolume V . Ingat bahwa setiap partikel gas ultrarelativistik memiliki energi kinetik yang diberikan oleh $E = |\vec{p}|c$, dengan \vec{p} adalah momentum dan c adalah kecepatan cahaya.
10. Suatu kristal terdiri dari N titik kisi kristal. Setiap titik kisi dapat dihuni oleh satu partikel tapi dapat juga kosong. Setiap partikel yang menghuni titik kristal memiliki energi ϵ , dan memiliki besar momen magnetik μ . Dalam

- medan magnet luar H , momen magnet setiap partikel hanya dapat memiliki dua orientasi (paralel atau antiparalel terhadap arah medan)
- a. Carilah fungsi partisi kanonik untuk titik-titik kisi kristal ini
 - b. Carilah rerata energi system
 - c. Carilah magnetisasi M sistem ini
11. Menentukan peluang termodinamika antara statistik Maxwell-Boltzmann, statistik Bose- Einstein dan statistik Fermi-Dirac, jika masing-masing cell terdiri dari 6 kompartemen
 12. Tuliskan langkah-langkah yang harus anda kerjakan, bila anda diminta untuk mencari suhu sistem sebagai fungsi energi dari suatu sistem N buah partikel yang memiliki energi tetap E dan berada dalam wadah bervolume V . Jelaskan juga jenis ensambel yang harus digunakan.
 13. Suatu sistem terdiri dari 3 partikel terbedakan, misalnya a, b, dan c yang tersebar kedalam dua tingkat energi, ϵ_1 dan ϵ_2 . Jika sistem tidak tergenerasi, atau jumlah keadaan untuk tiap tingkat energi adalah satu maka :
 - a. Tunjukkan keadaan makro yang mungkin
 - b. Tunjukkan keadaan mikro untuk setiap keadaan makro
 - c. Tentukan peluang termodinamik untuk setiap keadaan makro
 - d. Tentukan peluang termodinamik system
 14. Sebuah ruang fase terdiri dari 2 cell, masing-masing sell berisi enam kompartemen. Ke dalam ruang fase tersebut didistribusikan 4 buah partikel. Tentukanlah:
 - a. Probabilitas termodinamika untuk makrostate $N_i = 4, N_j = 0, N_i = 1, N_j = 3, N_i = 2, N_j = 2, N_i = 0, N_j = 4$,
 - b. Tentukan peluang thermodinamika maksimum, tunjukkan susunannya dengan gambar
 15. Pada suatu ruang fase terdapat 6 titik fase yang tersebar dalam 3 cell yaitu : cell 1 berisi 2 titik fase, cell 2 berisi 1 titik fase, cell 3 berisi 3 titik fase. Masing-masing cell terdisi dari 6 kompartemen.

- a. Tentukanlah perbandingan peluang termodinamika antara statistik Maxwell Boltzmann, statistik Bose-Einstein dan statistik Fermi-Dirac!
 - b. Tentukanlah peluang termodinamika antara statistik Maxwell-Boltzmann, statistik Bose-Einstein dan statistik Fermi-Dirac, jika masing-masing cell terdiri dari 6 kompartemen
16. Alam semesta kita dilingkupi oleh radiasi benda hitam 3 K. Dalam pandangan sederhana, radiasi ini timbul dari ekspansi adiabatik dari banyak awan foton yang diproduksi pada saat 'big-bang'.
- a. Mengapa ekspansinya sekarang bersifat adiabatik, bukan, misalnya, isothermal?
 - b. Jika dalam 10¹⁰ tahun berikutnya alam semesta mengembang sebanyak faktor dua, apa yang terjadi dengan temperatur dari radiasi benda hitam tersebut?
17. Gunakan persamaan tekanan kinetik gas umum $P = 1/3 n (pu)$ pada gas foton dan ujlilah bahwa hasil yang diperoleh akan cocok dengan hubungan Boltzmann
- $$P = nkT .$$
18. Pertimbangkan gas ideal Bose dalam ensemble grand kanonik. Pelajari fluktuasi jumlah partikel N dan energi total E . Jelaskan apa yang terjadi ketika gas tersebut terdegenerasi tinggi.
19. Tunjukkan bahwa dalam ensemble kanonik, fluktuasi energi sebesar $\Delta E = \sqrt{kT^2 C_v}$



DAFTAR PUSTAKA

- A. J. Pointon, "An Introduction to Statistical Physics for Students", Longmans First Print, (1967).
- F. Reif. (1965). *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. New York: McGraw Hill Book Company.
- Francis W. Sears and Gerhard L. Salinger, "Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Thermodynamics", Addison-Wesley, Third Edition, Fifth Print, (1980)
- Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics* 7th ed., New York: John Wiley & Sons (1996)
- Mary L. Boas, "Mathematical Methods in the Physical Sciences", John Wiley & Sons, New York, Second Edition, (1983)
- M. Alonso & E.J. Finn. (1979). *Fundamentals University Physics*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
- Sears & Salinger. (1976). *Thermodynamics, Kinetic Theory and Statistical Thermodynamics*. Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company.

GLOSARIUM

Atom adalah unit terkecil dari suatu unsur kimia , batas fisika klasik pada panjang skala kecil

Determinisme adalah fisika klasik sebagian besar deterministic

Dip (δ) adalah sudut yang arah intensitas medan magnet total bumi dengan membuat garis horizontal di meridian magnetik di tempat itu.

Energi bebas adalah jumlah pekerjaan mekanis yang dapat diekstraksi dari sistem

Entropi adalah suatu sifat atau keadaan sistem.

Entropi suatu sistem adalah suatu besaran yang sebanding dengan logaritma peluang partisi yang bersesuaian dengan keadaan system tersebut

Gas ideal adalah merupakan suatu gas di mana gaya antarpartikelnya diabaikan dan partikel-partikel tersebut dapat diperlakukan sebagai titik-titik massa.

Gelombang adalah gangguan yang menyebar secara periodik mengulangi, sering mentransfer energi

Hamiltonian Mekanik adalah sebuah reformulasi mekanika Lagrangian

Hukum Joule adalah persamaan untuk panas yang dihasilkan oleh arus yang mengalir dalam suatu konduktor

Ideal gas adalah gas yang terdiri dari partikel identik volume yang dapat diabaikan, dengan tidak ada gaya antar molekul

Inersia adalah sebuah konsep historis yang digunakan untuk menggambarkan besar, benda bergerak

Konduksi panas adalah suatu proses di mana dua sistem (atau dua bagian dari sistem yang sama) pada suhu yang berbeda saling menukar energi, energi itu secara rata-rata dipindahkan melalui tumbukan partikel dari sistem yang suhunya lebih tinggi ke sistem yang suhunya lebih rendah.

Konstanta Boltzmann adalah suhu berhubungan fisik konstan untuk energi

Kristal adalah memesan reguler atom, molekul, atau ion

Lagrangian adalah fungsi menggambarkan persamaan gerak untuk system

Lagrangian Mekanika adalah sebuah reformulasi abstrak mekanika klasik

Makroskopik adalah atribut yang digunakan untuk objek dan proses diamati dengan mata telanjang

Mekanika klasik adalah satu set hukum yang menggambarkan gerak tubuh mereka dan agregasi

Mekanika Kuantum adalah teori yang memisahkan fisika klasik dan modern

Molekul adalah sekelompok atom bergabung dengan ikatan kimia

Momentum adalah produk dari massa dan kecepatan

Medan Magnet adalah ruang di sekitar sebuah magnet atau arus dalam yang mempengaruhi magnet dapat dideteksi atau berpengalaman.

Mekanika Statistik adalah penerapan statistik matematika untuk gerakan kolektif populasi besar partikel

Newtonian Mekanik adalah perumusan pertama dari mekanika klasik

Persamaan Maxwell adalah empat persamaan yang menggambarkan medan listrik dan magnetik, dan interaksi mereka dengan materi

Proses *Reversibel*, Apabila suatu proses atau proses terjadi dengan sangat lambat sehingga pada tiap langkah proses, sistem tersebut hanya mengalami sedikit gangguan maka dapat diasumsikan bahwa sistem setiap saat berada dalam keadaan setimbang secara statistik, serta tidak ada gaya disipasi seperti gesekan.

Proses *Irreversibel* terjadi apabila, selama sistem menyimpang jauh dari keadaan setimbang, besar-besaran statistik seperti tekanan dan suhu tidak dapat ditentukan, akhir dari proses sistem berada dalam keseimbangan baru yang ditandai tekanan, volume dan suhu tertentu yang berbeda dari keadaan awal

Semi klasik adalah mengacu pada kombinasi dari mekanika klasik dan mekanika kuantum

Termodinamika adalah studi proses termal dalam sistem fisik

Teori relativitas khusus adalah sebuah teori yang diterbitkan pada 1905 oleh Albert Einstein yang menggantikan gagasan Newton tentang ruang dan waktu

Velocity adalah laju perubahan posisi terhadap waktu dan kecepatan

X-ray adalah suatu bentuk dari radiasi elektromagnetik pengion dan magnetical suasana yang



LAMPIRAN

Beberapa Tetapan Fisika

Kecepatan cahaya	c	$3,00 \times 10^8$ m/det $1,86 \times 10^5$ mi/det
Hubungan energy	c^2	$8,99 \times 10^{16}$ J/kg
Massa		9,31 Mev/u
Tetapan gravitasi	G	$6,67 \times 10^{-11}$ N.m ² /kg ² $3,44 \times 10^{-8}$ lb.kaki ² /lb ²
Tetapan gas umum	R	8,31 J/mol.K 0,08231 atm/mol.K
Tetapan rembesan	μ_0	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m
Tetapan Avogadro	N_0	$6,02 \times 10^{23}$ mol/mol
Tetapan boltzman	k	$1,38 \times 10^{-23}$ J/mol.K $8,63 \times 10^{-5}$ eV/mol.K
Tetapan Plank	h	$6,63 \times 10^{-34}$ J.det $4,14 \times 10^{-15}$ eV.sec
Muatan elementer	e	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Massa diam electron	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Muatan electron	e/m_e	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg
Ke massa rasio		
Massa diam proton	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg

Beberapa Sifat Fisika

Udara (kering, pada 20 °C dan 1 atm)

Berat jenis	$1,29$ kg/m ³
Panas khusus pada tekanan	$1,00 \times 10^3$ J/kgK
Rasio dari panas khusus	1,40
Kecepatan suara	331 m/detik 1090 kaki/det
Air	$1,00 \times 10^3$ kg/m ³
Kecepatan suara	1460 m/detik 4790 kaki /detik
Indeks refraksi = 4890 Å	1,33
Panas Fusi (0°C)	$3,33 \times 10^5$ J/kg 79,7 cal/gm
Panas vaporisasi (100°C)	$2,26 \times 10^6$ J/kg 539 cal/gm
Bumi	
Massa	$5,98 \times 10^{24}$ Kg
Radius rata-rata	$6,37 \times 10^6$ m
Titik bumi-jarak	3960 mi
Matahari	$1,49 \times 10^8$ km

Titik bumi – jarak	$9,29 \times 10^7$ km
Bulan	$3,80 \times 10^5$ Km
Gravitasi standart	$2,39 \times 10^5$ km
	9,81 m/detik ²
	32,2 kaki/detik ²
Atmosfer standart	$1,01 \times 10^5$ Pa
	14,6 lb/inci ²
	760 mm-hg
	29,9 in-Hg

Tabel konversi

Panjang

1 in	= 2,54 cm
1 m	= 39,37 in
1 ft	= 0,3048 m
12 in	= 1 ft
3 ft	= 1 yd
1 yd	= 0,9144 m
1 km	= 0,621 mi
1 mi	= 1,61 km
1 mi	= 5280 ft
1 A	= 10^{-10} m
1 muim = 1 mui	= 10^{-6} m = 10^{-4} A
1 tahun cahaya	= $9,46 \times 10^{12}$ km

Luas

1 m ²	= 10^4 cm ²	= 10,76 ft ²
1 ft ²	= 0,0929 m ²	= 144 in ²
1 in ²	= 6,452 cm ²	
1 are	= 43,6 ft ²	
1 mm ²	= 640 are	

Volume

1 m ³	= 10^6 cm ³	= $6,102 \times 10^4$ in ³
1 ft ³	= 1728 in ³	= $2,83 \times 10^{-2}$ m ³
1 liter	= 1000 cm ³	= 1,0576 qt = 0,0353 ft ³
1 ft ³	= 7,481 gal	= 28,32 liter
1 gallon (UK)	= 4,546 Liter	
1 gallon (US)	= 3,785 Liter	
1 galllon (Indonesia)	= 4 Liter	
1 barell (US)	= 42 gallon (US) = 34,97 gallon (UK)	

Massa

1000 kg	= 1 t (metric ton)
1000 kg	= 1 kg
1 slug	= 14,59 kg

1 amu = $1,66 \times 10^{-27}$ kg
 1 Pound = 0,4536 kg
 1 ounce = $28,35 \times 10^{-3}$ kg

Gaya

1 N = 10^5 dyne = 0,225 lb
 1 lb = 4,45 N
 1 ton = 2000 lb
 1 Dyne = 10^{-5} N = $72,33 \times 10^{-6}$ lb
 1 pound = $4,448 \times 10^3$ = 4,448 N = 32,17 lb
 1 kilogram gaya = $980,7 \times 10^3$ dyne = 9,807 N

Kecepatan

1 mil/h = 1,47 ft/s = 0,447 m/s
 1 m/s = 100 cm/s = 3,281 ft / s
 1 mil/min = 60 mil / h = 88 ft / s
 1 knoot = 1,688 ft/s = 1,852 km/jam
 1 ft / s = 1,097 km / jam = 0,5925 knot

Percepatan

1 m / s² = 3,28 ft / s² = 100 cm/s²
 1 ft / s² = 0,3048 m/s² = 30,48 sm / s²

Tekanan

1 bar = 10^5 N/m² = 14,50 lb/in²
 1 atm = 760 mmhg = 76,0 cmhg
 1 atm = 14,7 lb/in² = $1,013 \times 10^5$ n/m²
 1 pascal = 1 N/m² = $9,869 \times 10^{-6}$ atm = $750,1 \times 10^{-6}$ cmHg
 1 lb/in² = $68,05 \times 10^{-3}$ atm = 5,172 cmHg

Waktu

1 tahun = 365 hari = $3,16 \times 10^7$ s
 1 hari = 24 jam = $1,44 \times 10^3$ menit = $8,64 \times 10^4$ s

Energi

1 J = 0,7376 ft.lb = 10^7 erg.s
 1 cal = 4,184 J
 1 Btu = 252 cal = 778 ft.lb
 1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J
 931,5 MeV = 1 amu

Daya

1 hp = 550 ft.lb/s = 0,746 kW
 1 W = 1 J/s = 0,738 ft.b/s
 1 kW = 1000 Watt

1 BTU	= 10,55 x 10 ⁹ erg	= 777,9 ft.lb	=1055 J
1 Joule	= 948,1 x 10 ⁻⁶ BTU	= 10 ⁻⁷ erg	=0,7376 ft.lb
1 kalori	= 3,968 x 10 ⁻³ BTU	= 41,86 x 10 ⁶ erg	= 3,087 ft.lb

Massa Jenis

1 slug/ft ³	= 515,4 kg/m ³	= 0,5154 gr/cm ³	= 32,17 lb/ft ³
1 kg/m ³	= 1 kg/m ³	= 10 ⁻³ gr/cm ³	
1 pound/ft ³	= 16,02 kg/m ³	= 16,02 x 10 ⁻³ gr/cm ³	=1lb/ft ³
1 pound/in ³	= 53,71 slug/ft ³	= 27680 kg/m ³	

Daftar Nilai Pendekatan Kekuatan Bahan

Bahan	Modulus Elastisitas (N/m ²)	Batas Elastis (N/m ²)	Modulus Geser (N/m ²)	Modulus Bulk (N/m ²)
Alumunium	7.10 ¹⁰	1,3 . 10 ⁸	2,37 . 10 ¹⁰	7,7 . 10 ¹⁰
Kuningan	13,1 . 10 ¹⁰	3,8 . 10 ⁸	3,52 . 10 ¹⁰	6,1 . 10 ¹⁰
Tembaga	12,5 . 10 ¹⁰	8 . 10 ⁸	4,25 . 10 ¹⁰	4,24 . 10 ¹⁰
Besi Tuang	9,4 . 10 ¹⁰	7,7 . 10 ⁸	-----	9,6 . 10 ¹⁰
Timah Hitam	1,6 . 10 ¹⁰	-----	0,54 . 10 ¹⁰	0,8 . 10 ¹⁰
Baja	20 . 10 ¹⁰	1,7 . 10 ⁸	8,04 . 10 ¹⁰	8,04 . 10 ¹⁰
Karet	14 . 10 ¹⁰	-----	1 . 10 ¹⁰	-----
Tungsen	35 . 10 ¹⁰	-----	14,8 . 10 ¹⁰	-----

Daftar Kekutan Patah Dalam N/m²

Bahan	Tarik	Tekan	Geser
Alumunium	1,2 . 10 ⁸	-----	9,3 . 10 ⁷
Kuningan	1,8 . 10 ⁸	7,7 . 10 ⁷	1,4 . 10 ⁸
Tembaga	3,1 10 ⁸	3 . 10 ⁷	-----
Besi Tuang	1,5 . 10 ⁸	7,8 . 10 ⁷	1,7 . 10 ⁸
Besi Kasar	3,1 . 10 ⁸	3,1 . 10 ⁸	2,5 . 10 ⁸
Baja Sedang	4,7 . 10 ⁸	4,1 . 10 ⁸	3,7 . 10 ⁸
Baja Keras	10,8 . 10 ⁸	8,3 . 10 ⁸	7.10 ⁸
Beton	1,8 . 10 ⁸	1,3 . 10 ⁸	-----

Daftar Partikel

Partikel	Simbol	Muatan	Massa (kg)
Proton	P	+ P	1,6726485 x 10 ⁻²⁷
Neutron	N	0	1,6749543 x 10 ⁻²⁷
Elektron	S	e	9,109534 x 10 ⁻³¹

DAFTAR RIWAYAT PENULIS



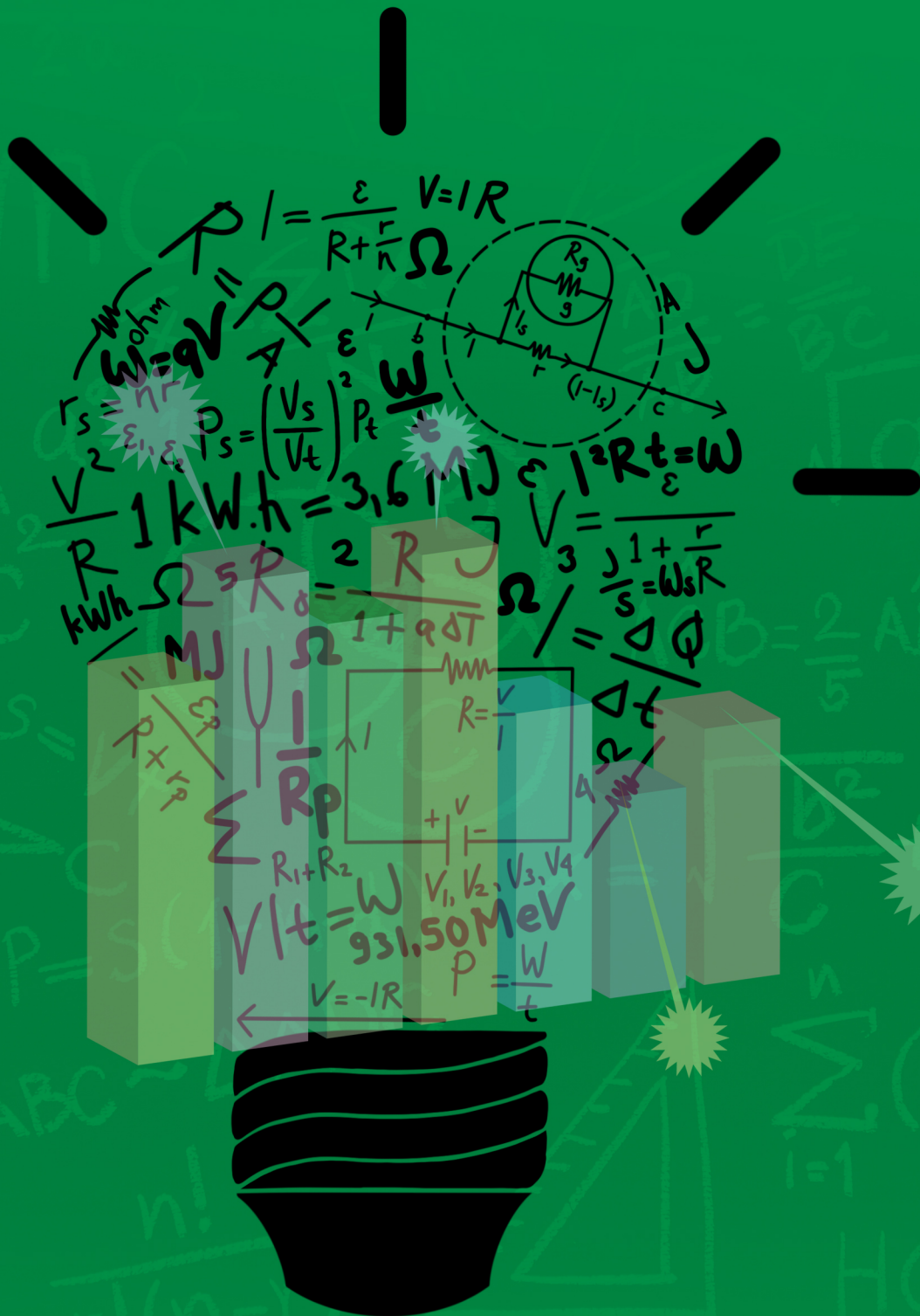
Imas Ratna Ermawati, Dr , M.Pd. Lahir di Jakarta, pada tahun 1968 adalah dosen tetap Imas Ratna Ermawati, Dr , M.Pd. Lahir di Jakarta, pada tahun 1968 adalah dosen tetap persyarikatan Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA. Menyelesaikan pendidikan S-1 dari jurusan Fisika, Universitas Nasional di Jakarta pada tahun 1992 dan lulus dari program Magister Pendidikan(Teknologi Pendidikan) Universitas Negeri Jakarta pada tahun 2005,dan lulus program Doktor Universitas Pakuan Bogor tahun 2021 Saat ini adalah staf pengajar pada jurusan Pendidikan Fisika ,Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA (UHAMKA) dan mengajar mata kuliah Fisika dasar, kalkulus, fisika matematika , fisika statistik dan aljabar linier.Imas Ratna E aktif dalam bidang pendidikan dan pelatihan untuk kepala sekolah dan guru – guru, baik di sekolah menengah atas maupun sekolah dasar. Juga terlibat sebagai asesor pada kegiatan sertifikasi guru rayon 37 UHAMKA sejak tahun 2009 sampai sekarang. Selain itu juga aktif membimbing mahasiswa dalam kegiatan Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) baik bidang penelitian maupun pengabdian kepada masyarakat , mulai tahun 2000 sampai sekarang.



Sugianto, M.Si. Lahir di Sibe, pada tahun 1985 adalah dosen tetap persyarikatan Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA. Menyelesaikan pendidikan S-1 dari jurusan Fisika, Universitas Tadulako di Sulawesi pada tahun 2009 dan lulus dari program Magister Biofisika Institut Pertanian Bogor pada tahun 2014 .Saat ini adalah staf pengajar pada jurusan Pendidikan Fisika ,Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA (UHAMKA) dan mengajar mata kuliah Fisika dasar, Fisika Kuantum, fisika statistik dan gelombang optik. Sugianto aktif dalam bidang pendidikan dan pelatihan untuk guru – guru, baik di sekolah menengah atas. Selain itu juga aktif membimbing mahasiswa dalam kegiatan Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) baik bidang penelitian maupun pengabdian kepada masyarakat , mulai tahun 2015 sampai sekarang.



Tri Isti Hartini, Dr,M.Pd. Lahir di Jakarta, pada tahun 1976 adalah dosen tetap persyarikatan Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA. Menyelesaikan pendidikan S-1 dari jurusan Pendidikan Fisika, Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA pada tahun 2010 dan lulus dari program Magister Pendidikan fisika Univeristas Negeri Surabaya pada tahun 2009, dan lulus program Doktor Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2021 . Saat ini adalah staf pengajar pada jurusan Pendidikan Fisika dan sebagai unit penjamin mutu, Universitas Muhammadiyah Prof DR HAMKA (UHAMKA) dan mengajar mata kuliah Fisika dasar, mekanika, thermodinamika , fisika statistic dan metode penelitian. Tri Isti Hartini juga aktif dalam bidang pendidikan dan pelatihan untuk kepala sekolah dan guru – guru, baik di sekolah menengah atas maupun sekolah dasar. Juga terlibat pada kegiatan sertifikasi guru rayon 37 UHAMKA sejak tahun 2009sampai sekarang. Selain itu juga aktif membimbing mahasiswa dalam kegiatan Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) baik bidang penelitian maupun pengabdian kepada masyarakat , mulai tahun 2011 sampai sekarang.



EL-MARKAZI



0823-7733-8990



www.elmarkazi.com

www.elmarkazistore.com



@penerbitelmarkazi

Non Fiksi

ISBN 978-623-331-498-5



9 786233 314985