A. Sessu

Pengantar MATEMATIKA EKONOMI

BUMI AKSARA

BA 01.39.2566

PENGANTAR MATEMATIKA EKONOMI

Oleh : **Dr. H.A. Sessu, M.Si.**
Editor : **Restu Damayanti**

Diterbitkan oleh PT Bumi Aksara
Jl. Sawo Raya No. 18
Jakarta 13220

BUMI AKSARA

Cetakan pertama, November 2014
Perancang kulit, Eni Suharti
Desain layout, Surya Ely S.
Dicetak oleh Sinar Grafika Offset

ISBN: 978-602-217-290-1

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Dr. A. Sessu, M.Si
Pengantar Matematika Ekonomi untuk Pendidikan/oleh A. Sessu; editor, Restu Damayanti. -- Cet . 1 . -- Jakarta: Bumi Aksara, 2014.
xii, 226 hlm.; 23 cm.

ISBN 978-602-217-290-1

1. Analisis Data Penelitian dengan Statistik. I. Judul.
II. Restu Damayanti.

519.5

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah Yang Maha Kuasa yang menjadikan segalanya, karena atas pertolongan dan petunjuk-Nyalah penulis diberikan kesehatan dan kekuatan sehingga dapat menyelesaikan buku ini, walaupun masih jauh dari kesempurnaan. Mudah-mudahan pada masa mendatang penulis dapat lebih menyempurnakannya. Insya Allah, amin.

Perkembangan berbagai bidang ilmu ekonomi pada beberapa dekade terakhir ini di antaranya, ilmu ekonomi makro, ekonomi mikro, ekonometrika, dan lain sebagainya selalu diikuti oleh berbagai formula matematika. Bahkan perkembangan ilmu komputer pun telah menembus daerah kekuasaan ilmu ekonomi. Pembicaraan berbagai teori ekonomi, selalu tidak terlepas dari pengaruh formula-formula matematika. Agak berbeda dengan matematika murni, dalam matematika yang diterapkan dalam ilmu ekonomi berfungsi sebagai alat penolong analisis. Bahasa matematika yang sederhana adalah alat penolong yang sangat baik bagi kepentingan kemajuan ilmu ekonomi itu sendiri.

Buku ini, *Pengantar Matematika Ekonomi*, ditulis karena merupakan alat yang dapat membantu dalam pengembangan berbagai bidang ilmu ekonomi, dan semua bab dalam buku ini penulis menganggapnya sangat berkaitan dengan ilmu ekonomi.

Akhirnya, diharapkan bahwa buku ini bisa menambah referensi buku matematika ekonomi yang ada di kepustakaan Indonesia dewasa ini, dan bisa pula membantu para mahasiswa yang ingin mempelajarinya, serta dapat membantu semua pihak yang berkeinginan memperdalam pengetahuannya di bidang teori ekonomi.

Perbaikan buku ini sangat diharapkan dengan adanya kritik, saran, nasihat, dan berbagai petunjuk oleh pembaca yang sifatnya memperbaiki agar buku ini bisa sempurna. Semoga buku ini bisa berguna untuk semua, bangsa dan negara Republik Indonesia.

Jakarta, Juli 2014

Dr. A. Sessu, M.Si.

DAFTAR ISI

Bab 1

ALJABAR MATRIKS

A. MATRIKS

Matriks adalah suatu susunan unsur-unsur berbentuk empat persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom dan diletakkan dalam kurung biasa atau kurung siku, susunan unsur yang mendatar disebut baris dan susunan unsur yang menurun disebut kolom atau lajur. Misalnya:

$$\text{Matriks } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{ij} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks A disebut matriks $m \times n$, karena mempunyai banyak baris m dan banyak kolom n. Pada penulisan matriks dilambangkan dengan huruf besar dan unsur-unsur ditulis dengan huruf kecil. Unsur a_{ij} matriks terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j. Perlu diingat bahwa matriks tidak mempunyai nilai numerik.

Apabila matriks dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari maka dapat dicontohkan bahwa jika seseorang melakukan penelitian mengenai permintaan beras (dalam ton) di Sulawesi Selatan pada tahun 2005–2009 diperoleh data-data sebagai berikut.

Tahun/Jenis Beras	Isnyur	Kepala	Pandan Wangi
2005	54.300	25.345	34.675
2006	60.564	32.564	43.780
2007	64.342	35.235	42.562
2008	69.780	43.350	47.890
2009	73.540	50.350	52.870

Angka-angka yang ada pada tabel di atas menunjukkan data-data permintaan tiga jenis beras di Sulawesi Selatan dari tahun 2005–2009 dan dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 54.300 & 25.345 & 34.675 \\ 60.564 & 32.564 & 43.780 \\ 64.342 & 35.235 & 42.562 \\ 69.780 & 43.350 & 47.890 \\ 73.540 & 50.350 & 52.870 \end{pmatrix}$$

B. BEBERAPA PENGERTIAN DAN ISTILAH DALAM MATRIKS

Sebelum mempelajari masalah operasi aljabar atas dua matriks, perlu dipahami terlebih dahulu beberapa pengertian dan istilah yang berkaitan dengan matriks.

1. Pengertian Baris, Kolom, dan Elemen Sebuah Matriks

Pengertian baris, kolom, dan elemen suatu matriks dapat diungkapkan sebagai berikut.

Baris dari suatu matriks adalah bagian susunan bilangan yang dituliskan mendatar atau horizontal dalam matriks.

Kolom dari suatu matriks adalah bagian yang dituliskan tegak atau vertikal dalam matriks.

Elemen atau unsur suatu matriks adalah bilangan-bilangan (*real* atau kompleks) yang menyusun matriks itu.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, tentukan:

a. Baris pertama, kedua, ketiga, keempat, beserta elemen-elemen pada baris-baris tersebut.

b. Kolom pertama, kedua, ketiga, beserta elemen-elemen pada kolom-kolom tersebut.

c. Elemen baris kedua kolom pertama dan elemen pada baris keempat kolom ketiga.

Jawab:

a. Baris-baris beserta elemen-elemen dari matriks A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Baris pertama dengan elemen-elemen 2, 1, dan 5.} \\ \Rightarrow \text{Baris kedua dengan elemen-elemen -3, 2, dan 4.} \\ \Rightarrow \text{Baris ketiga dengan elemen-elemen 4, -2, dan 1.} \\ \Rightarrow \text{Baris keempat dengan elemen-elemen 6, -3, dan 2.} \end{array}$$

b. Kolom-kolom beserta elemen-elemen dari matriks A:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{i} & \text{ii} & \text{iii} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

⇒ (i) Kolom pertama dengan elemen-elemen 2, -3, 4, 6.

⇒ (ii) Kolom kedua dengan elemen-elemen 1, 2, -2, -3.

⇒ (iii) Kolom ketiga dengan elemen-elemen 5, 4, 1, 2.

c. Elemen-elemen dari matriks A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

→ Elemen pada baris kedua kolom pertama adalah –3.

→ Elemen pada baris keempat kolom ketiga adalah 2.

2. Pengertian Ordo Matriks

Banyak baris dan kolom dari suatu matriks menentukan ordo atau ukuran bagi matriks itu.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 15 \\ 16 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa banyak baris matriks A adalah 2 dan banyak kolomnya adalah 3. Dalam hal demikian, matriks A dikatakan berordo atau berukuran 2×3 dan dituliskan dengan menggunakan notasi: $A_{2\times 3}$. Bilangan 2×3 yang dituliskan agak ke bawah disebut sebagai subskrip atau indeks. Jika diamati lebih lanjut, banyak elemen dalam matriks A ditentukan oleh $2 \times 3 = 6$, yaitu merupakan hasil kali dari banyak baris dengan banyak kolom dari matriks A.

Berdasarkan uraian di atas dapat diambil kesimpulan berikut.

a. Ordo atau ukuran dari suatu matriks ditentukan oleh banyak baris dan kolom dari matriks tersebut.

b. Banyak elemen atau banyak unsur dari suatu matriks ditentukan oleh hasil kali banyak baris dengan banyak kolom dari matriks tersebut.

Misalnya, matriks A terdiri atas m baris dan n kolom, maka matriks A dikatakan berordo $m \times n$ dan ditulis sebagai $A_{m\times n}$. Banyak elemen matriks A adalah $(m \times n)$ buah dengan elemen-elemen matriks itu dilambangkan sebagai a_{ij} (i dari 1 sampai dengan m dan j dari 1 sampai dengan n). Secara umum, matriks A ditulis dengan notasi berikut.

Banyak kolom = n

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{banyak baris} = m$$

3. Jenis Matriks

a. *Matriks Baris*

Misalkan suatu matriks berordo $m \times n$ dengan nilai $m = 1$ sehingga diperoleh matriks yang berordo $1 \times n$. Matriks $1 \times n$ terdiri atas satu baris dan memuat n elemen. Matriks yang berciri seperti ini disebut matriks baris. Berikut ini diberikan beberapa contoh dari matriks baris.

$A = (4\ 1)$, merupakan matriks baris yang terdiri atas dua elemen.

$B = (5\ {-2}\ 3)$, merupakan matriks baris yang terdiri atas tiga elemen.

b. *Matriks Kolom atau Matriks Lajur*

Jika suatu matriks berordo $m \times n$ dengan nilai $n = 1$, maka diperoleh matriks yang berordo $m \times 1$. Matriks $m \times 1$ terdiri atas satu kolom dan memuat m elemen. Matriks yang berciri seperti ini disebut matriks kolom atau matriks lajur. Berikut ini diberikan beberapa contoh dari matriks kolom.

$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ merupakan matriks kolom yang terdiri atas dua elemen.

$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ merupakan matriks kolom yang terdiri atas tiga elemen.

c. *Matriks Persegi*

Misalnya, suatu matriks berordo $m \times n$ dengan nilai $m = n$, sehingga diperoleh matriks berordo $n \times n$ dan untuk selanjutnya disingkat dengan matriks berordo n saja. Pada matriks berordo n, banyak baris

= banyak kolom. Matriks yang berciri demikian disebut sebagai matriks persegi yang berordo n. Berikut ini diberikan beberapa contoh dari matriks persegi.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ merupakan matriks persegi berordo dua.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ merupakan matriks matriks persegi berordo tiga.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{Diagnosis Samping (DS)} \\ \\ \longleftarrow \text{Diagnosis Utama (DU)} \end{matrix}$$

Dalam suatu matriks persegi, elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{11} dengan elemen a_{mn} dinamakan sebagai diagonal utama (disingkat dengan DU), sedangkan elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{n1} dengan elemen a_{1n} dinamakan sebagai diagonal samping (disingkat dengan DS). Diagonal utama (DU) dan diagonal samping (DS) dari suatu matriks persegi dapat ditampilkan dalam bentuk bagan sebagaimana diperlihatkan pada gambar di atas. Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan letak elemen-elemen pada diagonal utama dan letak elemen-elemen pada diagonal samping dari suatu matriks persegi.

$$\text{Matriks } S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \nearrow \text{Diagnosis Samping (DS)} \\ \\ \searrow \text{Diagnosis Utama (DU)} \end{matrix}$$

Elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama adalah 1, 2, dan 8; sedangkan elemen-elemen yang terletak pada diagonal samping adalah 1, 2, dan 5.

d. Matriks Segitiga

Misalkan suatu matriks persegi berordo n dengan elemen-elemen matriks yang berada di bawah diagonal utama atau di atas diagonal utama semuanya bernilai nol. Matriks yang berciri demikian dinamakan matriks segitiga. Berikut ini diberikan dua contoh matriks segitiga.

1) Matriks segitiga dengan elemen-elemen di bawah diagonal utama semuanya bernilai nol disebut matriks segitiga atas.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Matriks segitiga dengan elemen-elemen di atas diagonal utama semuanya bernilai nol disebut matriks segitiga bawah.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

e. Matriks Diagonal dan Matriks Identitas

Misalkan suatu matriks persegi berordo n dengan elemen-elemen matriks yang berada di bawah dan di atas diagonal utama semuanya bernilai nol. Ini berarti bahwa elemen-elemen matriks semuanya bernilai nol, terkecuali elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama. Matriks yang berciri demikian dinamakan matriks diagonal, sebagaimana ditunjukkan dalam beberapa contoh berikut ini.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ merupakan matriks diagonal berordo dua.

$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ merupakan matriks diagonal berordo tiga.

Sekarang jika suatu matriks diagonal berordo n dengan elemen-elemen pada diagonal utama semuanya bernilai 1 maka matriks diagonal semacam ini dinamakan matriks identitas atau matriks satuan. Matriks identitas berordo n dilambangkan dengan I_n dan matriks ini akan lebih sering dijumpai dalam pembahasan pasal-pasal selanjutnya. Berikut adalah beberapa contoh matriks identitas.

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan matriks identitas berordo dua.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan matriks identitas berordo tiga.

f. Matriks Datar dan Matriks Tegak

Misalkan suatu matriks berordo $m \times n$ dengan $m < n$, ini berarti banyak kolom lebih banyak dibandingkan dengan banyak baris. Oleh karena lebih panjang kolom dibandingkan dengan baris, maka susunan elemen-elemennya akan memanjang atau mendatar. Matriks yang berciri demikian disebut dengan matriks datar.

Sebaliknya, jika $m > n$ maka lebih banyak baris dibandingkan dengan banyak kolom sehingga susunan elemen-elemennya membentuk persegi panjang tegak. Matriks yang berciri demikian disebut sebagai matriks tegak. Berikut ini adalah contoh matriks datar dan matriks tegak.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ merupakan matriks datar.

$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ merupakan matriks tegak.

g. Transpose Suatu Matriks

Pengertian transpose matriks masih berkaitan dengan ordo, baris, kolom, dan elemen-elemen dalam suatu matriks. Transpose atau putaran matriks A dapat dituliskan dengan menggunakan salah satu lambang sebagai berikut.

A' atau A^t atau $\tilde{A}$

(dibaca: A aksen atau A transpose atau putaran A)

1) *Definisi Transpose Suatu Matriks*

Transpose dari matriks A berordo $m \times n$ adalah sebuah matriks A' berordo $n \times m$ yang disusun dengan proses sebagai berikut.

Baris pertama matriks A ditulis menjadi kolom pertama dalam matriks A'.

Baris kedua matriks A ditulis menjadi kolom kedua dalam matriks A'.

Baris ketiga matriks A ditulis menjadi kolom ketiga dalam matriks A', …., demikian seterusnya.

Baris ke-m matriks A ditulis menjadi kolom ke-m dalam matriks A'.

Jika $P = (2\ \ 3\ \ 4)$ maka transpose dari P adalah $P' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Jika $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ maka transpose dari Q adalah $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Jika $R = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -3 & 2 & 7 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ maka transpose dari R adalah

$R' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ maka transpose dari A adalah

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Contoh:

Perhatikan kembali matriks A pada contoh di atas. Ternyata transpose dari matriks A sama dengan matriks A itu sendiri, ditulis $A' = A$. Matriks A yang berciri demikian disebut matriks simetris atau matris setangkup.

Dengan demikian, matriks simetris atau matriks setangkup dapat didefinisikan sebagai berikut.

2) *Definisi Matriks Simetris atau Matriks Setangkup*

Misalkan matriks A adalah matriks persegi berordo n. Matriks A disebut matriks simetris atau matriks setangkup jika dan hanya jika elemen-elemen yang letaknya simetris terhadap diagonal utama bernilai sama, ditulis:

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ dengan } i \neq j$$

Sebagai akibat dari definisi di atas, jika A adalah matriks simetris maka transpose dari matriks A sama dengan A itu sendiri atau $A' = A$.

4. Kesamaan Dua Matriks

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$), jika dan hanya jika:

a. ordo matriks A sama dengan ordo matriks B;

b. semua elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh:

a. Untuk matriks-matriks berikut ini, tentukan matriks-matriks mana saja yang sama.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jawab:

Matriks A dan B berordo sama, tetapi elemen-elemen yang seletak tidak sama. Jadi, A tidak sama dengan B, ditulis $A \neq B$.

Matriks A dan C berordo sama dan elemen-elemen yang seletak juga sama. Jadi, A sama dengan C, ditulis $A = C$.

Matriks B dan C berordo sama, tetapi elemen-elemen seletak tidak sama. Jadi, B tidak sama dengan C, ditulis $B \neq C$.

Kesamaan dua matriks seringkali dapat digunakan untuk menentukan nilai peubah atau variabel yang ada pada elemen-elemen suatu matriks.

b. Misalkan diketahui matriks A dan matriks B sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3x & 2y \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Jika matriks A sama dengan B, tentukan nilai x dan y.

Jawab:

Matriks A berordo 2×2 dan matriks B juga berordo 2×2, sehingga ordo matriks A = ordo matriks B. Ini berarti syarat perlu bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi.

Syarat cukup bagi kesamaan matriks A dan matriks B adalah semua elemen yang seletak harus bernilai sama, sehingga diperoleh hubungan:

$3x = 9 \leftrightarrow x = 3$

$2y = 14 \leftrightarrow y = 7$

Jadi, jika A = B maka nilai $x = 3$ dan nilai $y = 7$.

c. Jika diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 3x+2y & 6 \\ 2x+4y & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 12 & 2x+y+z \end{pmatrix}$$

Tentukan nilai x, y, z dengan A = B

Penyelesaian:

$$A = B$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2y & 6 \\ 2x+4y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 12 & 2x+y+z \end{pmatrix}$$

Maka, $3x + 2y = 10 \quad 6 = 6$

$2x + 4y = 12 \quad 4 = 2x + y + z$

$$\begin{array}{lll} 3x + 2y = 10 \times 2 & 6x + 4y = 20 & 2x + 4y = 12 \\ 2x + 4y = 12 \times 1 & \underline{2x + 4y = 12} - & 2(2) + 4y = 12 \\ & 4x = 8 & y = 2 \\ & x = 2 & \end{array}$$

$4 = 2x + y + z$

$4 = 2(2) + 2 + z$

$z = -2$

C. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN DUA MATRIKS

1. Penjumlahan Dua Matriks

a. *Definisi Penjumlahan Dua Matriks*

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Jika matriks C adalah jumlah matriks A dengan matriks B atau $C = A + B$, maka matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen ditentukan oleh:

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j)$$

Contoh 1:

Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Tentukan jumlah matriks A dan matriks B.

Jawab:

Jumlah matriks A dan matriks B ditentukan oleh:

$$A + B = \begin{pmatrix} 10+2 & 4+3 \\ 5+1 & 8+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, jumlah matriks A dan matriks B adalah $A + B = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Contoh 2:

Diketahui matriks-matriks:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Tentukan bahwa:

a. $O + A = A$

b. $A + O = A$

Jawab:

Matriks O dan matriks A berordo sama, sehingga $O + A$ dan $A + O$ terdefinisi.

a. $O + A = \begin{pmatrix} 0+2 & 0+3 \\ 0+1 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = A$

Jadi, $O + A = A$

b. $A + O = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 1+0 & 7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = A$

Jadi, $A + O = A$

Meskipun bukan merupakan bukti, tetapi contoh menunjukkan berlakunya sifat penjumlahan matriks sebagai berikut.

$$O + A = A + O = A$$

Matriks O yang berciri seperti itu dinamakan sebagai matriks nol, yaitu suatu matriks yang semua elemennya adalah nol.

b. *Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks*

Misalkan A, B, C, dan O adalah matriks-matriks yang berordo sama, maka dalam penjumlahan matriks:

1) Bersifat komutatif: $A + B = B + A$
2) Bersifat asosiatif: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) Terdapat sebuah matriks identitas, yaitu matriks O yang bersifat: $A + O = O + A = A$
4) Semua matriks A mempunyai lawan atau negatif $-A$ yang bersifat:

   $A + (-A) = O$

Pada sifat 4, matriks $-A$ seringkali disebut sebagai invers aditif atau invers penjumlahan bagi matriks A.

2. Pengurangan Dua Matriks

a. *Definisi I Pengurangan Dua Matriks*

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks B, ditulis:

$$A - B = A + (-B)$$

Karena pengurangan matriks A dengan matriks B atau $A - B$ ditentukan sebagai jumlah matriks A dengan lawan matriks B, maka syarat agar $A - B$ terdefinisi adalah matriks A dan matriks B harus mempunyai ordo yang sama.

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

maka $A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Jika $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

maka $P - Q = P + (-Q) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

b. *Definisi II Pengurangan Dua Matriks*

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ dan masing-masing mempunyai elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Jika matriks C adalah hasil pengurangan matriks A dengan matriks B atau $C = A - B$ maka matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen ditentukan oleh:

$$C_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j\text{)}$$

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

maka $A - B = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Jika $C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

maka $C - D = \begin{pmatrix} 3-1 & -5-(-10) \\ 4-6 & 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Pengurangan dua matriks sering kali dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan matriks yang berbentuk $X + A = B$, dengan A dan B adalah matriks-matriks yang diketahui, sedangkan X adalah matriks yang dipertanyakan. Dari hubungan $X + A = B$ maka:

$$X = B - A$$

Jadi, matriks X merupakan pengurangan matriks B dengan matriks A. Contoh:

Diketahui matriks-matriks: $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Jika X adalah matriks yang berordo 2×2 dan berlaku hubungan $X + A = B$, tentukan matriks X.

Jawab:

Karena $X + A = B$, maka $X = B - A$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks X yang memenuhi hubungan $X + A = B$ adalah:

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$$

D. PERKALIAN SUATU BILANGAN REAL TERHADAP MATRIKS

1. Definisi Perkalian Suatu Bilangan Real terhadap Matriks

Misalkan A adalah suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Jika matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k terhadap matriks A, ditulis C = kA, maka matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen matriks C ditentukan oleh:

$$C_{ij} = kA_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j)$$

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka $2A = \begin{pmatrix} 2 \times 2 \\ 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Jika $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ maka $\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 4 & \frac{1}{2} \times 6 \\ \frac{1}{2} \times (-2) & \frac{1}{2} \times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Jika $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ maka $-3C = \begin{pmatrix} (-3) \times (1) & (-3) \times (-3) & (-3) \times (-2) \\ (-3) \times (2) & (-3) \times (4) & (-3) \times (5) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ -6 & -12 & -15 \end{pmatrix}$$

2. Sifat-Sifat Perkalian Suatu Bilangan Real terhadap Matriks

Misalkan p dan q adalah bilangan-bilangan real, A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$ maka perkalian bilangan real dengan matriks memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

a. $(p + q)A = pA + qA$
b. $P(A + B) = pA + pB$
c. $p(qA) = (pq)A$
d. $1A = A$
e. $(-1)A = -A$

Contoh:

Diketahui matriks-matriks: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 18 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Tentukanlah matriks X berordo 2×2 yang memenuhi persamaan $3X + 2B = 4A$.

Jawab:

Kita tentukan terlebih dahulu matriks 4A dan matriks 2B sebagai berikut.

$4A = 4\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ dan $2B = 2\begin{pmatrix} 18 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$

Dari persamaan $3X + 2B = 4A$, diperoleh:

$$3X = 4A - 2B$$

$$3X = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, matriks X ditentukan dengan menggunakan hubungan $X = \frac{1}{3}(3X)$ sehingga diperoleh: $X = \frac{1}{3}(3X) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -24 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Jadi, matriks X adalah $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

E. PERKALIAN DUA MATRIKS

Pada bagian ini akan dipelajari bagaimana cara menentukan perkalian suatu matriks terhadap matriks lain, syarat-syarat apa saja yang harus dipenuhi agar perkalian kedua matriks itu ada atau terdefinisi, serta sifat-sifat apa saja yang berlaku dalam perkalian dua matriks. Pembicaraan diawali dengan membahas perkalian matriks berordo $m \times n$ terhadap matriks berordo $n \times 1$.

1. Perkalian Matriks Berordo $m \times n$ terhadap Matriks Berordo $n \times 1$

Misalkan $A = (a_{11}\ a_{12}\ a \ldots a_{1n})$ adalah matriks baris berordo $m \times 1$,

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ → B adalah matriks kolom berordo $n \times 1$.

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks A terhadap matriks B atau $C = AB$ maka: matriks C berordo 1 x 1, dalam hal ini C adalah sebuah *scalar*.

Matriks C ditentukan oleh:

$$C = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \ldots + a_{1n}b_{n1})$$

Perkalian matriks baris berordo $n \times 1$ terhadap matriks kolom berordo $n \times 1$ menghasilkan suatu matriks yang berordo 1×1. Ordo 1×1 ini diperoleh dengan cara merangkaikan $1 \times$ dengan $\times 1$ dalam bentuk $1 \times \ \times 1$ kemudian bagian dihilangkan sehingga bentuknya menjadi 1×1. Selain itu, banyak kolom dari matriks A adalah n dan banyak baris dari matriks B juga n. Ini berarti banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Matriks A dan matriks B yang berciri demikian dikatakan dua matriks yang sepadan untuk dikalikan.

Sebaliknya, jika banyak kolom matriks A tidak sama dengan banyak baris matriks B maka dua matriks itu tidak sepadan untuk dikalikan sehingga perkalian matriks A terhadap matriks B atau AB tidak ada atau tidak didefinisikan.

Contoh:

Jika $A = (a\ b)$ dan $B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ maka $AB = (a\ b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ac + bd)$

Jika $A = (4\ -2)$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

maka $AB = (4\ -2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (4 \times 3 + (-2) \times 1) = (10)$

Jika $A = (a\ b\ c)$ dan $B = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ maka $AB = (a\ b\ c)\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = (ap + bq + cr)$

Jika $A = (3\ 4\ -2)$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ maka

$$AB = (3\ \ 4\ \ -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = (3 \times 4 + 4 \times 5 + (-2) \times (-6)) = (44)$$

2. Perkalian Matriks Berordo n terhadap Matriks Berordo $n \times 1$

Misalkan A adalah matriks berordo n dan B adalah matriks kolom berordo $n \times 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks A terhadap matriks B atau $C = AB$ maka matriks C berordo $m \times n \leftrightarrow n \times 1$ atau $m \times 1$ dalam hal ini C adalah suatu matriks kolom. Matriks C ditentukan oleh:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & + & a_{12}b_{21} & + & a_{13}b_{31} & + & \dots & + & a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} & + & a_{22}b_{21} & + & a_{23}b_{31} & + & \dots & + & a_{2n}b_{n1} \\ a_{31}b_{11} & + & a_{32}b_{21} & + & a_{33}b_{31} & + & \dots & + & a_{3n}b_{n1} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}b_{11} & + & a_{m2}b_{21} & + & a_{m3}b_{31} & + & \dots & + & a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

Beberapa hal yang perlu dijelaskan dalam definisi perkalian matriks di atas adalah sebagai berikut.

Perkalian matriks berordo n terhadap matriks berordo $n \times 1$ menghasilkan matriks yang berordo $n \times 1$, yaitu sebuah matriks kolom yang berordo $n \times 1$.

Matriks A yang berordo n dan matriks B berordo $n \times 1$. Ini berarti banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B atau matriks A sepadan matriks B sehingga perkalian matriks AB ada hasilnya atau terdefinisi. Dalam hal banyak kolom matriks A tidak sama dengan banyak baris matriks B atau matriks A tidak sepadan matriks B, maka perkalian matriks AB tidak ada hasilnya atau tidak terdefinisi.

Hasil perkalian matriks A berordo n terhadap matriks B berordo $n \times 1$ yang sepadan diperoleh dengan cara mengalikan masing-masing baris dari matriks A terhadap kolom dari matriks B. Proses pengerjaan perkalian matriks semacam ini dikenal sebagai proses pengerjaan baris pada kolom.

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ maka $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, maka

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-4) + 2 \times 8 \\ (-4) \times (-4) + 6 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, maka

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}$$

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, maka

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 5 \\ 6 \times 2 + (-5) \times (-1) + 4 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 37 \end{pmatrix}$$

3. Perkalian Matriks Berordo $m \times n$ terhadap Matriks Berordo $n \times p$

a. *Definisi Perkalian Matriks Berordo $m \times n$ terhadap Matriks Berordo $n \times p$*

Hasil perkalian matriks A berordo $m \times n$ terhadap matriks B berordo $n \times p$ adalah suatu matriks baru yang berordo $m \times n \leftrightarrow n \times p$ atau $m \times p$. Lalu timbul pertanyaan, bagaimana cara menentukan elemen-elemen dari matriks hasil perkalian itu? Elemen-elemen dari matriks hasil perkalian tersebut dapat ditentukan melalui proses pengerjaan baris pada kolom, sebagaimana dijelaskan dalam definisi berikut ini. Misalkan A adalah matriks berordo $m \; x \; n$, dan B adalah matriks yang berordo $n \; x \; p$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

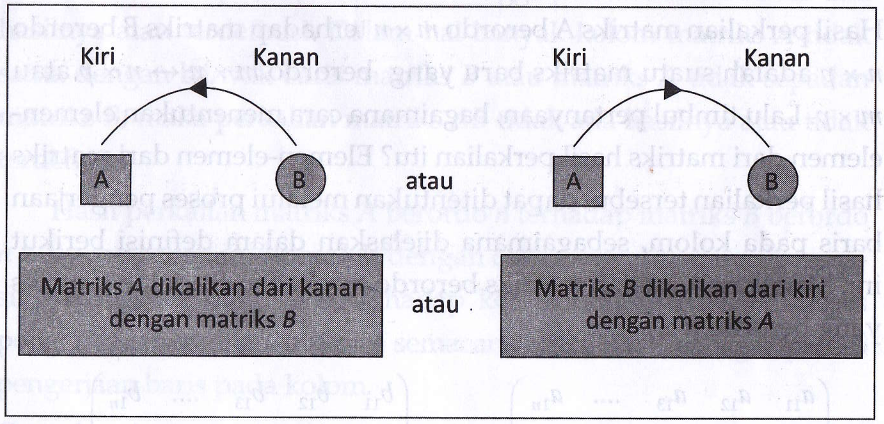
Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks A terhadap matriks B atau $C = AB$, maka matriks C berordo $m \times n \leftrightarrow n \times p$ atau $m \times p$.

Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j (ditulis: C_{ij}) diperoleh dengan cara mengalikan elemen-elemen baris ke-i dari matriks A terhadap elemen-elemen kolom ke-j dari matriks B, kemudian masing-masing dijumlahkan. Pernyataan ini ditulis sebagai:

$$C_{ij} = \Sigma_k^n \, a_{ik} b_{kj}$$

Perkalian matriks A terhadap matriks B menghasilkan AB, matriks A disebut pengali kiri matriks B, atau matriks B disebut pengali kanan matriks A. Oleh karena itu, perkalian matriks A terhadap matriks B yang menghasilkan AB dapat dinyatakan sebagai matriks A dikalikan dari kanan dengan matriks B, atau matriks B dikalikan dari kiri dengan matriks A.

Pernyataan di atas barang kali lebih mudah divisualisasikan dengan menggunakan bagan sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut ini.



Contoh:

Diketahui matriks: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1) Tentukan AB dan BA.
2) Apakah $AB = BA$?

Jawab:

1) Matriks A berordo 2×2 dan matriks B berordo 2×2 atau matriks A sepadan untuk dikalikan terhadap matriks B. Hasil perkalian matriks AB ditentukan oleh:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-12 & 6+3 \\ 4+20 & 12-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriks B berordo 2×2 dan matriks A berordo 2×2 atau matriks B sepadan untuk dikalikan terhadap matriks A. Hasil perkalian matriks BA ditentukan oleh:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+12 & -6+30 \\ 4-2 & -12-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 24 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}$$

2) Dari hasil perhitungan di atas tampak bahwa:

$$AB = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \text{ dan } BA = \begin{pmatrix} 14 & 24 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}$$

Hubungan menunjukkan bahwa perkalian matriks pada umumnya tidak komutatif.

b. *Sifat-Sifat Perkalian Dua Matriks atau Lebih yang Sepadan*

1) Perkalian matriks pada umumnya tidak komutatif.

   $AB \neq BA$ (kecuali untuk matriks-matriks khusus).

2) Perkalian matriks bersifat asosiatif.

   $(AB)C = A(BC)$

3) Perkalian matriks bersifat distributif.

   Distributif kiri : $A(B+C) = AB + AC$

   Distributif kanan : $(B+C)A = BA + CA$

4) Dalam perkalian matriks yang hanya memuat matriks-matriks persegi dengan ordo yang sama, terdapat sebuah matriks identitas yakni matriks satuan I yang bersifat $IA = AI = A$.
   a) Jika $AB = O$, belum tentu $A = O$ atau $B = O$.
   b) Jika $AB = AC$, belum tentu $B = C$.
5) Jika p dan q adalah bilangan-bilangan real serta A dan B adalah matriks-matriks, maka berlaku hubungan $(pA)(qB)=(pq)(AB)$.
6) Jika A^t dan B^t berturut-turut adalah transpose dari matriks A dan matriks B, maka berlaku hubungan $(AB)^t = B^tA^t$.

4. Perpangkatan dalam Matriks Persegi

Misalkan A adalah suatu matriks persegi, maka

$A^2 = AA$

$A^3 = A^2A = AA^2$

$A^4 = A^3A = AA^3$ ..., demikian seterusnya

$$A^n = A^{n-1}A = AA^{n-1}$$

Agar lebih memahami dan terampil dalam menentukan perpangkatan suatu matriks persegi, simaklah beberapa contoh berikut.

Contoh 1:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

a. Tentukanlah A^2, A^3, dan A^4.

b. Tentukanlah $A^3 - 4A^2 + A - 4I$, dengan I matriks satuan berordo 2.

Jawab:

a. $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$

$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -17 \\ 34 & -111 \end{pmatrix}$

$A^4 = AA^3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & -17 \\ 34 & -111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 60 \\ -120 & 521 \end{pmatrix}$

b. Berdasarkan beberapa hasil perhitungan pada bagian a dan matriks satuan I berordo 2 adalah

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka diperoleh:

$$A^3 - 4A + A - 4I = \begin{pmatrix} 25 & -17 \\ 34 & -111 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^3 - 4A + A - 4I = \begin{pmatrix} 25 & -17 \\ 34 & -111 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 8 \\ -16 & 92 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^3 - 4A + A - 4I = \begin{pmatrix} -4 & -26 \\ 52 & -212 \end{pmatrix}$$

Jadi, $A^3 - 4A + A - 4I = \begin{pmatrix} -4 & -26 \\ 52 & -212 \end{pmatrix}$

Contoh 2:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Hitung:
a. 3B' + 2A
b. 2B–A²
c. A.B
d. B.C
e. C.A

Jawab:

a. $3B' + 2A = 3\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -8 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$

b. $2B - A^2 = 2\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16+4 & -8-6 \\ -8-6 & 4+9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & -14 \\ -14 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & 6 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$

c. $A.B=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12-2 & 16+10\\ -6+3 & -8-15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 26\\ -3 & -23\end{bmatrix}$

d. $B.C=\begin{bmatrix}-3 & -4\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12-8 & -3+4 & 6+12\\ 4+10 & -1-5 & 2-15\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4 & 1 & 18\\ 14 & -6 & -13\end{bmatrix}$

e. $C.A=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}=$ *Tidak dapat diselesaikan karena banyaknya kolom pada matriks 1 tidak sama dengan banyaknya baris matriks 2.*

Contoh 3:

Diketahui $M=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

Tentukan $M^t + M^2$!

Jawab:

$$M^t=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$M^2=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16+6-1 & 8+4-1 & -4+2-3\\ 12+6+1 & 6+4+1 & -3+2+3\\ 4+3+3 & 2+2+3 & -1+1+9\end{bmatrix}$$

$$M^2=\begin{bmatrix}21 & 11 & -5\\ 19 & 11 & 2\\ 10 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

$$M^t+M^2=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}21 & 11 & -5\\ 19 & 11 & 2\\ 10 & 7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25 & 14 & -4\\ 21 & 13 & 3\\ -9 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

F. INVERS MATRIKS

1. Dua Matriks Saling Invers

Misalkan A dan B masing-masing adalah matriks persegi berordo 2 dan berlaku hubungan.

$$AB = BA = I$$

Maka A adalah invers B atau B adalah invers A atau A dan B merupakan dua matriks yang saling invers.

Ungkapan matriks A adalah invers matriks B ditulis $A = B^{-1}$ dan matriks B adalah invers matriks A ditulis $B = A^{-1}$. Notasi A^{-1} tidak diartikan sebagai sebab dari pembagian aljabar matriks atau tidak didefinisikan adanya operasi pembagian.

Contoh:

Diketahui matriks-matriks:

$A=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}$ dan $B=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -7 & 9\end{pmatrix}$

Tunjukkan bahwa matriks A dan matriks B merupakan dua matriks yang saling invers.

Jawab:

Untuk menunjukkan bahwa matriks A dan matriks B merupakan dua matriks yang saling invers, cukup ditunjukkan bahwa $AB = BA = I$.

$$AB=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -5\\ -7 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -7 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, jelas bahwa berlaku hubungan $AB = BA = I$. Jadi, matriks A dan matriks B adalah dua matriks yang saling invers.

2. Determinan Matriks Persegi Berordo 2

Invers dari suatu matriks persegi berkaitan dengan determinan dari matriks persegi itu sendiri. Oleh karena itu, perlu dipahami terlebih dahulu pengertian determinan suatu matriks.

Setiap matriks persegi mempunyai padanan dengan suatu determinan yang elemen-elemennya tepat sama dengan elemen-elemen matriks persegi itu. Determinan dari suatu matriks A dilambangkan sebagai:

det A atau $|A|$

Determinan dari suatu matriks persegi berordo 2 dapat ditentukan melalui definisi berikut ini.

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Yang dimaksud dengan determinan dari matriks A: det $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Nilai dari determinan matriks A ditentukan oleh:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

Berdasarkan definisi di atas tampak bahwa determinan suatu matriks adalah suatu fungsi yang daerah asalnya adalah elemen-elemen dari suatu matriks persegi berordo 2 dan wilayah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real.

Misalkan:

a. Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ maka $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4 - 5 \times 2) = 2$

b. Jika $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ maka $\det B = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (7 \times 3 - 5 \times 4) = 1$

c. Jika $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ maka $\det C = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$

$= \{(-3) \times (-4) - (-1) \times (2)\} = 14$

3. Determinan Matriks Persegi Berordo 3

Misalkan matriks $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, dapat diselesaikan dengan dua cara berikut.

a. *Dengan Cara Sarrus*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Misalkan matriks $P = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$, maka nilai determinan matriks P adalah:

$$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 5 & 6 \end{matrix} = (10 + 60 - 24) - (100 + 48 - 3) = -99$$

b. *Dengan Cara Kofaktor*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Jika determinan ordo 4×4, misalnya: $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

$$A_{1,1} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

4. Menentukan Invers Matriks Persegi Berordo 2

a. *Menentukan Invers Matriks Persegi Berordo 2 yang Determinannya = 1*

Elemen-elemen matriks invers A^{-1} diperoleh dari elemen-elemen matriks A melalui algoritma sebagai berikut.

1) Elemen-elemen pada diagonal utama dipertukarkan.
2) Tanda elemen-elemen pada diagonal samping diganti dengan lawannya.

Contoh:

Tentukanlah invers dari setiap matriks berikut ini.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Jawab:

1) Determinan matriks $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ adalah $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (4 \times 7 - 3 \times 9) = 1$

Jadi, inversnya adalah $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2) Determinan matriks $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ adalah $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$= \{(-4) \times \frac{1}{2} - (3) \times (-1)\} = 1$

Jadi, inversnya adalah $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

b. *Menentukan Invers Matriks Persegi Berordo 2 yang Determinannya ≠ 1*

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan nilai det A $(ad - bc)$ maka rumus invers dari matrik A ditentukan oleh

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dengan syarat bahwa det $A = (ad - bc) \neq 0$.

1) *Membuktikan rumus invers matriks persegi berordo 2*

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan nilai det $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $= ad - bc$.

Berdasarkan algoritma yang telah dipelajari, invers dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Untuk menunjukkan bahwa matriks A^{-1} merupakan invers dari matriks A, cukup dibuktikan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

a) Jika matriks A dikalikan dari kanan dengan matriks A^{-1} maka diperoleh hubungan:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) Jika matriks A dikalikan dari kiri dengan matriks A^{-1} maka diperoleh hubungan:

$$A^{-1}A\left\{\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hasil-hasil perhitungan di atas secara jelas menunjukkan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Jadi, terbukti bahwa:

Invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah:

Matriks $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dengan syarat $(ad - bc) \neq 0$ atau det $A \neq 0$.

2) *Invers matriks berordo 3 × 3*

Misalkan suatu matriks P berordo 3×3 maka invers matriks P adalah:

$P^{-1} = \dfrac{1}{|P|}$ adjoin P, atau $P^{-1} = \dfrac{1}{|P|}\bar{P}$

Adjoin P adalah transforse dari matriks kofaktor matriks P.

Misalkan matriks:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Pertama-tama hitung nilai determinan matriks P:

$$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 5 & 6 \end{matrix} = (10 + 60 - 24) - (100 + 48 - 3) = -99$$

Kemudian dilanjutkan perhitungan nilai matriks adjoin dari matriks P. Matriks kofaktor dari matriks P adalah:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & 21 & 31 \\ -21 & 18 & 3 \\ -8 & -12 & -13 \end{bmatrix}$$ maka invers matriks P adalah:

$$P^{-1} = -\frac{1}{99}\begin{bmatrix} -19 & -21 & -8 \\ 21 & 18 & -12 \\ 31 & 3 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{99} & \frac{7}{33} & \frac{8}{99} \\ -\frac{7}{33} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{33} \\ -\frac{31}{99} & -\frac{1}{33} & \frac{13}{99} \end{bmatrix}$$

3) *Pemakaian invers dalam menyelesaikan persamaan*

Contoh 1:

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan unsur-unsur matriks x yang memenuhi:

a) $X.A = B \rightarrow X = B.A^{-1}$

b) $A.X = B \rightarrow X = A^{-1}.B$

Jawab:

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

a) $x = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} - \frac{4}{3} & -8 + 2 \\ 5 - \frac{2}{3} & -6 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & -6 \\ \frac{13}{3} & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 16 & -18 \\ 13 & -15 \end{bmatrix}$$

b) $x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 20 - 18 & 10 - 6 \\ -8 + 9 & -4 + 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Dapat disimpulkan $B.A^{-1} \neq A^{-1}.B$

Contoh 2:

Tentukan penyelesaian persamaan berikut dengan cara matriks

a) $4x - 3y = 10$
$2x + 2y = 12$

b) $3x + 2y + z = 14$
$2x + 4y - 2z = 4$
$x + 3y + 2z = 20$

Jawab:

a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 20+36 \\ -20+48 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 56 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Maka, $x = 4$ dan $y = 2$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix} = (24-4+6)-(4-18+8) = 32$

$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

Maka, $A^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 14 & -1 & -8 \\ -6 & 5 & 8 \\ 2 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 14 & -1 & -8 \\ -6 & 5 & 8 \\ 2 & -7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 196 & -4 & -160 \\ -84 & +20 & +160 \\ 28 & -28 & +160 \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 32 \\ 96 \\ 160 \end{bmatrix}$

Maka nilai $x = 1, y = 3$ dan $z = 5$

Contoh 3:

Hitunglah nilai dari persamaan linear di bawah ini dengan metode matriks!

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 5 \\ \frac{-1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

Jawab:

Ubah persamaan linear ke bentuk matriks ordo 3×3:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{matrix}$

$\det(A) = (3-1+4)-(3+2-2) = 3$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)$, untuk $n > 2$

$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{21} & K_{31} \\ -K_{12} & K_{22} & -K_{32} \\ K_{13} & -K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -3 & -5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{3}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{-5}{3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x^{-1}\\ y^{-1}\\ z^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{3}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{-5}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}+\frac{15}{3}+\frac{4}{3}\\ \frac{15}{3}-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}-\frac{15}{3}-\frac{5}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 2\\ -5\end{bmatrix}$$

$$\therefore x=\frac{1}{8};\ y=\frac{1}{2};\ z=-\frac{1}{5}$$

5. Pemakaian Matriks dalam Ekonomi

Hasil kali vektor baris $a = [a_i]$ dan vektor lajur $b = [b_i]$ ialah

$$ab=[a_1, a_2, \dots a_n]\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

Contoh 1:

Seseorang pergi ke pasar buah-buahan dan membeli jeruk 20 buah, sawo 30 buah, mangga 25 buah, nanas 5 buah, pepaya 4 buah, dan durian 6 buah, yang harga berturut-turut 25, 5, 20, 40, 45, dan 100 rupiah. Hitunglah jumlah uang yang dibayarnya! Jumlah buah merupakan matriks baris A dan harganya merupakan matriks lajur B.

Jawab:

$$AB=[20\ \ 30\ \ 25\ \ 5\ \ 4\ \ 6]\begin{bmatrix}25\\ 5\\ 20\\ 40\\ 45\\ 100\end{bmatrix}$$

$$=20.25+30.5+25.20+5.40+4.45+6.100=\text{Rp}2.130{,}00$$

Contoh 2:

Untuk memenuhi suatu pasaran, seorang pengusaha perabot memproduksi 20 meja, 100 kursi, dan 10 lemari buku. Diperlukan 10 satuan bahan dan 8 jam buruh untuk membuat satu meja, 4 satuan bahan dan 5 jam buruh untuk membuat satu kursi, serta 30 satuan bahan dan 25 jam buruh untuk membuat satu lemari buku. Hitunglah biaya total produksi jika harga bahan Rp50,00 per satuan dan harga tenaga buruh Rp100,00 per jam!

Jawab:

Dianggap jumlah-jumlah perabot yang diproduksi sebagai matriks baris A banyaknya bahan dan tenaga buruh sebagai matriks B, dan harganya sebagai vektor lajur C maka biaya produksinya adalah:

$$ABC=[20\ \ 100\ \ 10]\begin{bmatrix}10 & 8\\ 4 & 5\\ 30 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\ 100\end{bmatrix}=[900\ \ 910]\begin{bmatrix}50\\ 100\end{bmatrix}=\text{Rp}136.000{,}00$$

Contoh 3:

Sebuah perusahaan mempunyai perencanaan kerja selama 3 bulan akan memproduksi 3 jenis barang. Pada bulan pertama memproduksi 3 buah jenis barang pertama, 2 buah jenis barang kedua dan 1 jenis barang ketiga dengan biaya 11 satuan. Bulan kedua memproduksi 1 buah jenis barang pertama, 4 buah jenis barang kedua dan 2 buah jenis barang ketiga dengan biaya 12 satuan. Bulan ketiga memproduksi 2 buah jenis barang pertama, 1 buah jenis barang kedua dan 3 buah jenis barang ketiga dengan biaya 14 satuan. Tentukan besarnya biaya barang pertama, kedua, dan ketiga.

Jawab:

Keterangan: x = barang pertama
y = barang kedua
z = barang ketiga

Persamaannya adalah:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 11 \\ x + 4y + 2z &= 12 \\ 2x + y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Matriks koefisien variabel = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Nilai determinan matriks koefisien variabel = $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

$$= \{(3 \times 4 \times 3) + (2 \times 2 \times 2) + (1 \times 1 \times 1) - (2 \times 1 \times 3) + (3 \times 2 \times 1) + (1 \times 4 \times 2)\}$$

$$= (36 + 8 + 1) - (6 + 6 + 8) = 45 - 20 = 25$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -5 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -5 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/25 & -5/25 & 0 \\ 1/25 & 7/25 & -5/25 \\ -7/25 & 1/25 & 10/25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (10/25)(11) + (-5/25)(12) + (0)(14) \\ (1/25)(11) + (7/25)(12) + (-5/25)(14) \\ (-7/25)(11) + (1/25)(12) + (10/25)(14) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Kesimpulan:

Jadi, nilai barang pertama adalah 2, nilai barang kedua adalah 1, dan nilai barang ketiga adalah 3.

Latihan Soal

1. Apabila pada suatu perekonomian ditentukan fungsi pasar komoditi $Y = 300 - 10r$ dan fungsi pasar uang $Y = 100 + 10r$, di mana Y = pendapatan dan r = tingkat suku bunga. Tentukanlah tingkat suku bunga dan pendapatan dengan cara matriks!

2. Jika ditentukan fungsi permintaan dan fungsi penawaran gabah di suatu daerah $Q = 2000 - 3P$ dan $Q = -500 + 2P$, di mana Q = jumlah permintaan dan penawaran gabah, P = harga gabah. Tentukan jumlah permintaan, jumlah penawaran, dan harga dengan cara matriks dan determinan!

3. Diketahui persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2P & 1 \\ 1 & q+1 \end{pmatrix}$$

Tentukan nilai $p + q$ yang memenuhi persamaan tersebut!

4. Diketahui matriks $K = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 4 & b \\ 8 & 3c & 11 \end{pmatrix}$ dan $L = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2a \\ 8 & 4b & 11 \end{pmatrix}$

Jika matriks $K = L$, tentukan nilai c!

5. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 6 & p \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Jika determinan A = determinan B ($|A| = |B|$). Tentukan nilai p yang memenuhi pernyataan tersebut!

6. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Jika matriks $C = A.B$. Tentukan nilai determinan matriks C!

7. Jika matriks $P = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$. Tentukan invers dari matrik P (P^{-1})!

8. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

   Jika $A.X = B$, tentukan unsur-unsur matriks X!

9. Tentukan matriks X berordo (2×2) yang memenuhi persamaan:

   $X.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

10. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

    Tentukan hasil kali $A^{-1}.B$!

11. Jika $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

    Tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan tersebut!

Bab 2

HITUNG DIFERENSIAL

A. PENDIFERENSIALAN FUNGSI PEUBAH SATU

Kita tinjau suatu fungsi $f(x)$ dalam interval di mana ia kontinu. Laju perubahan sesaatnya, yaitu di suatu titik x-nya dinamakan hasil bagi diferensial atau turunan fungsi itu yang dilambangkan:

$\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{df}{dx}$ atau f', $D \times f$, atau Df.

Atau didefinisikan dengan suatu limit, yaitu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Jika $f(x)$ dinamakan y, maka turunannya dituliskan:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ atau } y' \text{ atau } D_x y \text{ atau } Dy$$

Adapun Δ, d, $\frac{d}{dx}$ atau D dapat dipandang juga sebagai operator yang jika dikenakan pada suatu peubah atau fungsi memberikan suatu hasil tertentu sesuai definisi, misalnya:

1. Δf = diferensi f
2. Df = diferensial f
3. $\frac{d}{dx}$ = turunan $f = Df$

Operator $\frac{d}{dx} = Dx = D$ ialah operator yang jika dikalikan atau dikenakan pada suatu fungsi $y = f(x)$ memberikan turunan fungsi itu ke x.

Operator ada kalanya dapat dijumlahkan atau dikalikan secara formal, misalnya $\frac{d}{dx} \times \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}$ atau $D.D = D^2$ yang juga merupakan suatu operator yang jika dikenakan pada suatu fungsi $f(x)$ memberikan turunan keduanya $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $D^2 f$.

1. Fungsi-Fungsi Dasar

Akan dijabarkan turunan berbagai fungsi dasar, yaitu fungsi pangkat, eksponen, logaritma, trigonometri dan inversnya, serta hiperbolik dan inversnya seperti berikut ini.

a. $Dx^n = n\,x^{n-1}$
b. $D^a \log x = \frac{1}{x 1na}$
c. $D 1n\, x = \frac{1}{x}$
d. $D\,a^x = a^x\, 1n\, a$
e. $D\,e^x = e^x$
f. $D \sin x = \cos x$
g. $D \cos x = -\sin x$
h. $D \operatorname{tg} x = \sec^2 x$
i. $D \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$
j. $D \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
k. $D \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
l. $D \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$
m. $D \operatorname{cotg}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$
n. $D \sinh x = \cosh x$
o. $D \cosh x = \sinh x$
p. $D \operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$
q. $D \operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cosech}^2 x$
r. $D \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
s. $D \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
t. $D \operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$
u. $D \operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$ (2.1)

2. Kaidah-Kaidah Pendiferensialan

Kita jabarkan terlebih dahulu kaidah-kaidah diferensiasi tetapan, jumlah selisih, hasil kali, dan hasil bagi fungsi, kebalikan fungsi, fungsi rangkai *(komposit)*, fungsi balik *(invers)*, serta fungsi parameter seperti berikut.

$u = f(x)$; $v = g(x)$; $y = F(u)$; dan $D = D\frac{d}{x^{-}dx}$;

$D_u = \frac{d}{du}$; $D_y = \frac{d}{dy}$; $D_t = \frac{d}{dt}$; $y = f(t)$ dan $x = f(t)$,

maka

a. $Dc = 0$ tetapan
b. $D(u+v) = Du + Dv$ jumlah
c. $D(u-v) = Du - Dv$ selisih
d. $D(uv) = uDv + vDu$ hasil kali
e. $D(cu) = cDu$ hasil kali
f. $D\frac{u}{v} = \frac{vDu - uDv}{v^2}$ hasil bagi
g. $D\frac{1}{v} = \frac{-Dv}{v^2}$ kebalikan

h. $D_x y = D_u y . D_x u$ komposit

i. $D_x y = \frac{1}{D_y x}$ invers

j. $D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}$ parameter (2.2)

Ketiga rumus terakhir di atas dapat ditulis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Penjabaran kaidah-kaidah pendiferensialan adalah berdasarkan definisi turunan (1.1).

a. $Dc = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = 0$ karena c konstanta dan $c = 0$

b. $$D(u+v) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(u+v)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = Du + Dv \quad (2.3)$$

c. $D(u-v) = Du - Dv$ (2.4)

Adalah tersimpul dari (1.3) karena pengurangan = penjumlahan dengan besaran negatifnya.

d. $$D(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (u+\Delta u)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} = uDv + vDu \quad (2.5)$$

e. $D(cu) = cDu$ (2.6)

Adalah hal khusus (2.5) karena $v = c$ maka $Dv = 0$ dan (2.5) memberikan (2.6).

f. $$D\left[\frac{u}{v}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v} = \frac{vDu - uDv}{v^2} \quad (2.7)$$

g. $D\frac{1}{v} = \frac{Dv}{v^2}$ (2.8)

Adalah hal khusus dari (2.7).

Dengan $u = 1$, maka $Du = 0$ dan (2.7) menjadi (2.8).

h. Fungsi komposit adalah *fungsi dari fungsi*, misalnya:

$Y = F(u)$ sedang $u = f(x)$ sehingga y adalah juga fungsi x.

$Y = F[f(x)]$

Turunan y diperoleh dengan kaidah rantai, kaidah fungsi komposit, atau kaidah fungsi dari fungsi.

$D_x y = D_u y \,.\, D_x u$ (2.9)

atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ (2.9a)

Kaidah ini seakan-akan mudah dijabarkan karena perubahan Δx akan menyebabkan perubahan Δu yang akan menyebabkan lagi perubahan Δy dan kalau $\Delta x \to 0$ maka $\Delta u \to 0$, dan $\Delta y \to 0$.

Untuk $\Delta u \neq 0$, maka dapat ditulis $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$

Ketika limit $\Delta x \to 0$ menjadi kaidah rantai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Namun ada kemungkinan bahwa untuk sebarang perubahan Δx, $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$, sehingga pembagian dengan Δu tidak didapat.

Diperlukan bukti yang lebih umum dengan menggunakan pengertian infinitesimal dan turunan sebagai suatu limit:

$D_u y. = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ berarti $\frac{\Delta y}{\Delta u} = D_u y + a$ (1)

Di mana a = infinitesimal. Dalam rumus (1) ini ada pembagian dengan Δu sehingga $\Delta u \neq 0$.

Jika $\Delta u \to 0$, maka $a \to 0$, ditulis:

$\Delta y = (D_u\, y + a)\, \Delta u$ (2)

Maka berlaku juga untuk $\Delta u = 0$, dan sebarang a karena pada $\Delta u = 0$, $\Delta y = 0$, sehingga (2) adalah indentitas 0 = 0. Rumus (2) dibagi dengan Δx dan diambil limitnya maka diperoleh:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_u y \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} a \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$D_x y = D_u y D_x u$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

Perluasan kaidah rantai ketiga atau lebih fungsi adalah mudah, jika $y = F(u)$; $u = f(v)$; $v = g(x)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \qquad (2.10)$$

i. Jika y adalah fungsi x maka x adalah fungsi invers y, misalnya:

$y = 2x + 6$ $\quad x = \frac{1}{2}y + 3$

$y = x^{2/3}$ $\quad x = y^{3/2}$

$y = e^x$ $\quad x = \ln y$

$y = \sin x$ $\quad x = \sin^{-1} y$

Pada umumnya: $y = f(x)$, $x = g(y)$

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} \qquad (2.11)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad (2.11a)$$

Bukti:

$x = g(y)$ didiferensialkan ke x dengan pemahaman bahwa y adalah fungsi x memberikan dengan kaidah rantai:

$1 = D_y g(y)\, D_x y = D_y x D_x y$

$$1 = \frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} \qquad (2.11b)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$D_x y = \frac{1}{D_y x}$

Suatu fungsi dapat diberikan juga dalam bentuk parameter, misalnya:

$(x = 5t$ (1)

$(y = 10t - 5t^2$ (2)

Turunan $D_x y = \frac{dy}{dx}$ dapat diperoleh dengan mengeliminasi t sehingga memperoleh $y = f(x)$ dan mengambil turunannya.

$t = x/5$ disubstitusikan dalam (2) memberikan $y = 2x - \frac{1}{5}x^2$ yang pendiferensialannya memberikan $D_x y = \frac{dy}{dx}$. Namun, turunan ini dapat juga diperoleh langsung dari (1) dan (2) yang pada umumnya adalah ($x = f(t)$, $(y = g(t)$

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} \qquad (2.12)$$

$$\text{atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad (2.12a)$$

Bukti:

Jika $\Delta t \to o$, maka $\Delta x \to 0$ dan $\Delta y \to 0$ sehingga:

$$D_x y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta t}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x/\Delta t} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta t}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x/\Delta t} = \frac{D_t y}{D_t x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

3. Fungsi-Fungsi Dasar Lanjutan

Berikut ini adalah penjabaran turunan-turunan fungsi dasar.

a. Fungsi pangkat

$Y = f(x) = x^n$

Fungsi ini adalah suatu parabola umum untuk $n > 0$ atau hiperbola umum untuk $n < 0$ sebagai berikut.

$$D_x y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Dengan binomium Newton menjadi:

$$D_x y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ...}{\Delta x} = nx^{n-1} \qquad (2.13)$$

n = bilangan real

b. Fungsi logaritma bilangan pokok sebarang

Dalam perubahan sebelumnya telah dikatakan bahwa dalam analisis gejala alam dan matematika banyak timbul suatu limit yang nilainya e = 2,718 28 .... yaitu

$$e = \lim_{\delta \to 0}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lim_{n \to \infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \qquad (1)$$

Misalnya, pada radioaktivitas, tekanan barometer, absorpsi, berbagai jenis pertumbuhan, bunga majemuk kontinu, pertambahan penduduk kontinu, dan lain-lain.

Limit ini timbul juga pada pendiferensialan suatu fungsi logaritma, misalnya:

$$D\,{}^a\log x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}^a\log(x+\Delta x) - {}^a\log x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}^a\log(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x}{\Delta x}\,{}^a\log(1+\frac{\Delta x}{x})}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}^a\log(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}}{x}$$

$$= \frac{{}^a\log c}{x}$$

Mengingat limit (1), karena:

$${}^a\log e = \frac{1}{{}^e\log a} = \frac{1}{1n\,a}$$

$$D\,{}^a\log x = \frac{1}{x\,1n\,a} \qquad (2.14)$$

c. Fungsi logaritma bilangan pokok e

Bila $a = e$, maka rumus (2.14) menjadi $D\ 1n\ x = \frac{1}{x}$ (2.15)

d. Fungsi eksponen bilangan pokok sebarang $Y = f(x) = a^x$

Mencari turunannya lebih mudah dengan mengambil logaritmanya dan menggunakan kaidah rantai (2.9) dan rumus (2.15).

$Ln\ y = x\ 1n\ a$

$D_y\ 1n\ y\ D_x\ y = 1n\ a$

$\frac{1}{y} D_x\ y = 1n\ a$

$D_n\ y = a^x\ 1n\ a$

$$D\ a^x = a^x\ 1n\ a \qquad (2.16)$$

Rumus ini dapat diperoleh juga dengan kaidah pendiferensialan fungsi invers (2.11) dan rumus (2.14).

$y = a^x,\ x = {}^a\log y$

$$D_y\ x = \frac{1}{y\,1n\,a} = \frac{1}{D_y\ x}$$

$D\ a^x = a^x\ ln\ a$

Di mana tak mungkin timbul salah paham maka D_x kita singkatkan D.

e. Fungsi eksponen bilangan pokok e

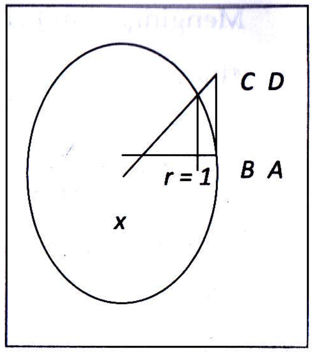
$y = e^x$

Ini hal khusus dari $y = a^x$.

Dengan $a = e$, maka (2.16) menjadi

$$D\ e^x = e^x \qquad (2.17)$$

f. Fungsi trigonometri $y = \sin x$



Untuk menghitung $D \sin x$, maka perlu dibuktikan dahulu bahwa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pada gambar di samping, tergambar lingkaran dengan radius $r = 1$.

Sudut x dalam radial = busur AC; $\sin x = BC/1 = BC$; $\text{tg } x = AD/1 = AD$

$BC < AC < AD$

$\sin x < x < \text{tg } x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} = 1 < \frac{\sin x}{x} \cos x$$

Karena $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ sedang $\dfrac{\sin x}{x} < 1$ tetapi $> \cos x$,

maka $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Buat sudut kecil $x \to 0$, maka

$\sin x \approx x \approx \text{tg } x$

$BC \approx AC \approx AD$

$y = f(x) = \sin x$

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

Dengan rumus $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

Menjadi $\Delta y = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}$

Sehingga $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$

$$D \sin x = \cos x \qquad (2.18)$$

g. Fungsi trigonometri $y = \cos x$

$y = \cos x = \sin(90° - x)$

$D \cos x = D \sin(90° - x)$

Dengan rumus (2.18) dan kaidah rantai: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

menjadi:

$D \cos x = \cos(90° - x) . (-1)$

$= -\cos(90° - x) = -\sin x \qquad (2.19)$

h. Fungsi trigonometri $y = \text{tg } x$

$$y = \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Digunakan kaidah pendiferensialan hasil bagi:

$$D \text{ tg } x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (2.20)$$

$$= \sec^2 x \qquad (2.20a)$$

i. Fungsi trigonometri $y = \text{cotg } x$

$$y = \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Digunakan kaidah pendiferensialan hasil bagi (2.7):

$$D \text{ cotg } x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (2.21)$$

$$= -\text{cosec}^2 x \qquad (2.21a)$$

j. Fungsi trigonometri invers $y = \sin^{-1} x$

$y = \sin^{-1} x$

$x = \sin y$

$D_y x = \cos y$

Dengan kaidah (1.11):

$$D_x y = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$D \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (2.22)$$

k. Fungsi trigonometri $y = \cos^{-1} x$

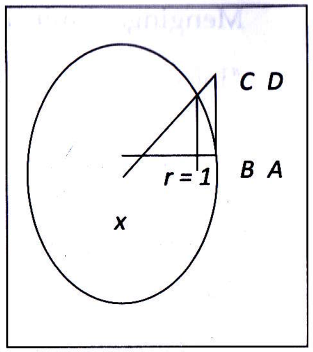
$y = \cos^{-1} x$

$x = \cos y$

$D_y x = -\sin y$

f. Fungsi trigonometri $y = \sin x$

Untuk menghitung $D \sin x$, maka perlu dibuktikan dahulu bahwa:



$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pada gambar di samping, tergambar lingkaran dengan radius $r = 1$.

Sudut x dalam radial = busur AC; $\sin x = BC/1 = BC$; $\text{tg } x = AD/1 = AD$

$BC < AC < AD$

$\sin x < x < \text{tg } x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} = 1 < \frac{\sin x}{x} \cos x$$

Karena $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ sedang $\frac{\sin x}{x} < 1$ tetapi $> \cos x$,

maka $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Buat sudut kecil $x \to 0$, maka

$\sin x \approx x \approx \text{tg } x$

$BC \approx AC \approx AD$

$y = f(x) = \sin x$

$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$

Dengan rumus $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

Menjadi $\Delta y = \cos (x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos (x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$

$$D \sin x = \cos x \qquad (2.18)$$

g. Fungsi trigonometri $y = \cos x$

$y = \cos x = \sin (90° - x)$

$D \cos x = D \sin (90° - x)$

Dengan rumus (2.18) dan kaidah rantai: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

menjadi:

$D \cos x = \cos (90° - x). (-1)$

$$= -\cos (90° - x) = -\sin x \qquad (2.19)$$

h. Fungsi trigonometri $y = \text{tg } x$

$y = \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Digunakan kaidah pendiferensialan hasil bagi:

$$D \text{ tg } x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (2.20)$$

$$= \sec^2 x \qquad (2.20a)$$

i. Fungsi trigonometri $y = \text{cotg } x$

$y = \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Digunakan kaidah pendiferensialan hasil bagi (2.7):

$$D \text{ cotg } x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (2.21)$$

$$= -\text{cosec}^2 x \qquad (2.21a)$$

j. Fungsi trigonometri invers $y = \sin^{-1} x$

$y = \sin^{-1} x$

$x = \sin y$

$D_y x = \cos y$

Dengan kaidah (1.11):

$D_x y = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$

$$D \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (2.22)$$

k. Fungsi trigonometri $y = \cos^{-1} x$

$y = \cos^{-1} x$

$x = \cos y$

$D_y x = -\sin y$

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$D \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.23}$$

l. Fungsi trigonometri invers $y = \mathrm{tg}^{-1} x$

$y = \mathrm{tg}^{-1} x$

$x = \mathrm{tg}\, y$

$D_y x = \sec^2 y$

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} = -\frac{1}{\sec^2 y} = -\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y}$$

$$D\ \mathrm{tg}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \tag{2.24}$$

m. Fungsi trigonometri invers $y = \mathrm{cotg}^{-1} x$

$y = \mathrm{cotg}^{-1} x$

$x = \mathrm{cotg}\, y$

$D_y x = -\mathrm{cosec}^2 y$

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} = -\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\mathrm{cotg}^2 y}$$

$$D\ \mathrm{cotg}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \tag{2.25}$$

n. Fungsi hiperbolik $y = \sinh x$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D_x y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$D\ \sinh x = \cosh x \tag{2.26}$$

o. Fungsi hiperbolik $y = \cosh x$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$D_x y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D \cosh x = \sinh x \tag{2.27}$$

p. **Fungsi hiperbolik y = tgh x**

$$y = \mathrm{tgh}\ x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Dengan kaidah pendiferensialan hasil bagi (2.7):

$$D_x y = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \mathrm{sech}^2\, x$$

$$D\ \mathrm{tgh}\ x = \mathrm{sech}^2\, x \tag{2.28}$$

Adapun dari definisi sinh x dan cosh x tersimpul:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1$$

Dengan analog $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

q. Fungsi hiperbolik y = cotgh x

$$y = \mathrm{cotgh}\ x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$D_x y = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$D\ \mathrm{cotgh}\ x = -\mathrm{cosech}^2\, x \tag{2.29}$$

r. Fungsi hiperbolik invers $y = \sinh^{-1} x$

$y = \sinh^{-1} x$

$x = \sinh y$

$$D_x y = \cosh y = \frac{1}{D_x y}$$

$$D_x y = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$$

$$D\ \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{2.30}$$

s. Fungsi hiperbolik invers $y = \cosh^{-1} x$

$y = \cosh^{-1} x$

$x = \cosh y$

$$D_x y = \sinh\ y = \frac{1}{D_x y}$$

$$D_x y = \frac{1}{\sinh\ y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$$

$$D\ \cosh^{-1} x = \frac{1}{x^2 - 1} \qquad (2.31)$$

t. Fungsi hiperbolik invers $y = \text{tgh}^{-1} x$

$y = \text{tgh}^{-1} x$

$x = \text{tgh } y$

$$D_x y = -\text{sech } x = \frac{1}{D_x y}$$

$$D_x y = \frac{1}{\text{sech } y} = \frac{1}{1 - \text{tgh}^2 y}$$

$$D\ \text{tgh}^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2} \qquad (2.32)$$

u. Fungsi hiperbolik invers $y = \text{cotgh}^{-1} x$

$y = \text{cotgh}^{-1} x$

$x = \text{cotgh } y$

$$D_x y = -\text{cosech } x = \frac{1}{D_x y}$$

$$D_x y = -\frac{1}{\text{cosech } x} = 1 - \frac{1}{1 - \text{cotgh}^2 x}$$

$$D\ \text{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2} \qquad (2.33)$$

Turunan fungsi trigonometri dan hiperbolik serta inversnya dapat dipakai sebagai bantuan pada pengintegralan. Dengan mengetahui turunan-turunan fungsi dasar serta kaidah-kaidah pendiferensialan, maka fungsi-fungsi yang lebih rumit dapat didiferensialkan.

4. Cara Pendiferensialan Implisit dan Logaritmik

a. *Pendiferensialan Implisit*

Kalau fungsi antara x dan y diberikan dalam bentuk $f(x,y) = 0$, di mana y tidak terucapkan eksplisit dalam x, maka fungsi itu dinamakan fungsi implisit. Mengucapkan y secara eksplisit dalam x kerap tidak mudah sehingga mencari turunan Dy dengan mengucapkan dahulu y secara eksplisit dalam x adalah sukar, namun juga tidak perlu bila dipakai pendiferensialan implisit yang kaidahnya sebagai berikut.

Diferensialkan kedua ruas $f(x,y) = 0$ ataupun $f(x,y) = g(x,y)$ ke x dan pecahkanlah persamaan hasil untuk memperoleh $Dy = dy/dx$. Turunan yang diperoleh lazimnya terucapkan dalam x dan y. Dalam menggunakan kaidah ini kerap harus digunakan turunan fungsi pangkat.

$$D_x y^n = n y^{n-1D} xy \text{ atau } \frac{dy^n}{dx} = n\, y^{n-1} \frac{dy}{dx}$$

Contoh:

1) $x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$$2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y \right) - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 4y}$$

2) $x^3 + y^3 = 3xy$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3x\frac{dy}{dx} + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

3) $x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3 = 10$

$$3x^2 - \left(3x^2\frac{dy}{dx} + 6xy \right) + \left(6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 \right) - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{3x^2 - 6xy + 3y^2} = 1$$

b. *Pendiferensialan Logaritmik*

Memperoleh turunan suatu fungsi $y = f(x)$ adalah kerap lebih mudah dengan mengambil terlebih dahulu logaritma kedua ruas persamaan. Cara ini dinamakan cara pendiferensialan logaritmik.

Contoh:

1) $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

$$1ny = \tfrac{1}{2}\ 1n(1-x^2) - \tfrac{1}{2}\ 1n(1+x^2)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}\cdot -2x - \tfrac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}2x$$

$$= \frac{-x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{-x-x^3-x+x^3}{1-x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(1-x^2)(1+x^2)}$$

2) $y = x^x$

$$1ny = x\ 1nx$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + 1nx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1+1nx)$$

3) $1ny = 1nu - 1nv$

$$\frac{1}{y}Dy = \frac{1}{u}Du - \frac{1}{v}Dv$$

$$Dy = \frac{u}{v}\left(\frac{1}{u}Du - \frac{1}{v}Dv\right)$$

$$Dy = \frac{vDu - uDv}{v^2}$$

Yang merupakan kaidah pendiferensialan hasil bagi (2.7).

5. Turunan Orde Tinggi

Turunan pertama dari fungsi:

$$y = f(x) \text{ ke } x\ Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f' = y'$$

pada umumnya juga suatu fungsi x. Bilamana fungsi f' didiferensialkan lagi, maka diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$, yaitu:

$$D^2 f = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} = f'' = y''$$

Turunan kedua f'' didiferensialkan lagi maka diperoleh turunan ketiga, yaitu:

$D^3 f = \dfrac{d^3y}{dx^2} = f'' = y'''$ dan seterusnya, sehingga turunan ke-n adalah:

$$D^n f = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)} = y^{(n)}$$

Contoh:

a. $y = x^n$ $\qquad y'' = n\,(n-1)\,x^{n-2}$
$y' = nx^{n-1}$ $\qquad y''' = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}$ dan seterusnya

b. $y = x^3$ $\qquad y''' = 6$
$y' = 3x^2$ $\qquad y^{(4)} = 0 = y^{(5)}$ dan seterusnya.
$y'' = 6x$

c. $y = e^x$ $\qquad y'' = e^x$
$y' = e^x$ $\qquad y'''$ = dan seterusnya = e^x

d. $y = \sin x$ $\qquad y(4) = \sin x$
$y' = \cos x$ $\qquad y(5) = \cos x$
$y'' = -\sin x$ $\qquad y(6) = -\sin x$ dan seterusnya
$y''' = -\cos x$

Berikut ini adalah contoh-contoh pendiferensialan.

a. $y = 6x^2 - 7$
$y' = 6.2x = 12x$

b. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

c. $y = (2x-5)^3$
$y' = 3\,(2x-5)^2\,D\,(2x-5) = 6\,(2x-5)^2$

d. $y = \dfrac{3x}{2x-5}$

$y' = \dfrac{(2x-5)3 - 3x.2}{(2x-5)^2} = -\dfrac{15}{(2x-5)^2}$

e. $y = \left[\dfrac{2x+3}{3x+5}\right]^3$

$y' = 3\left[\dfrac{2x+3}{3x+5}\right]^2 \cdot \dfrac{(3x+5)2-(2x+3)3}{(3x+5)^2} = \dfrac{3(2x+3)^2}{(3x+5)^4}$

f. $y = \dfrac{x^4 - 2x + 7}{3x} = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{3}x^{-1}$

$y' = x^2 - \dfrac{7}{3}x^{-2} = \dfrac{3x^4 - 7}{3x^2}$

Atau dengan kaidah pendiferensialan hasil bagi.

g. $y' = \dfrac{3x(4x^3-2)-(x^4-2x+7)3}{9x^2} = \dfrac{4x^4 - 2x - x^4 + 2x - 7}{3x^2} = \dfrac{3x^4-7}{3x^2}$

h. $y = 1n(3x+5)$

$y' = \dfrac{1}{3x+5} D(3x+5) = \dfrac{3}{3x+5}$

i. $y = 1n\, x^2\sqrt{x^2-5} = 2\ 1n\ x + \dfrac{1}{2}1n(x^2-5)$

$y' = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{x^2-5}\ 2x = \dfrac{3x^2-10}{x^3-5x}$

j. $y = 1n\dfrac{3}{x} = 1n\ 3 - 1n\ x$

$y' = -\dfrac{1}{x}$

k. $y = x\ 1n\ x$

$y' = x\ D1n\ x + 1n\ x\ Dx = 1 + 1n\ x$

l. $y = 1n\ (1n\ x)$

$y' = \dfrac{1}{1nx}\ D\ 1n\ x = \dfrac{1}{x1nx}$

$y'' = -\dfrac{D\ 1n\ x}{(x1nx)^2} = -\dfrac{1+1n\ x}{(x1nx)^2}$

m. $a.y = 1n\ \sin x$

$y' = \dfrac{1}{\sin x}\ D\ \sin x = e\ \text{tg}\ x$

n. $y = \dfrac{1n\ x}{x}$

$y' = -\dfrac{1}{x^2}\ 1n\ x + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}(1 - 1n\ x)$

o. $y = {}^a\log(2x+3)$

$y' = \dfrac{1}{(2x+3)1n\ \alpha} D\ (2x+3) = \dfrac{2}{(2x+3)1n\ \alpha}$

p. $y = e^{2x}$

$y' = e^{2x}\ D\ (2x) = 2\ e^{2x}$

q. $y = e^{x2}$

$y' = e^{x2}\ D\ (x^2) = 2xe^{x2}$

r. $y = e^{2x} \cos\ 3x$

$y' = e^{2x}.2.\cos\ 3x - e^{2x}.3.\sin\ 3x = e^{2x}(2\cos\ 3x - 3\sin 3x)$

s. $y = a^{2x}$

$y' = a^{2x}1n\ a\ D\ 2x = 2a^{2x}1n\ a$

t. $y = 2.3^{x2}$

$y' = 2.3^{x2}1n\ 3\ Dx^2 = 4x.3^{x2}.1n\ 3$

Juga dengan pendiferensialan logaritmik:

$$1n\ y = 1n\ 2 + x^2 1n\ 3$$

$$\frac{1}{y} y' = 2\ x\ 1n\ 3$$

$$y' = 2.3^{x2}.2 \times 1n\ 3 = 4x.3^{x2} 1n\ 3$$

u. Fungsi $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (1)

Itu semua adalah fungsi dalam bentuk eksplisit, yang grafiknya suatu setengah lingkaran dengan radius $r = a$.
Dalam bentuk implisit, maka fungsi ini dapat ditulis:

$y^2 = a^2 - x^2$ (2)

atau $x^2 + y^2 = a^2$ (2a)

Dalam bentuk parameter fungsi ini dapat ditulis:

$x = a \sin \omega t$

$y = a \cos \omega t$ (3)

Jika dieliminasi parameter t-nya memberikan:

$x^2 + y^2 = a^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = a^2$

Turunan y' dan y'' fungsi ini dapat diperoleh dengan mendiferensialkan fungsi berikut.

1) Fungsi eksplisit (1)

$$y = (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$y' = \tfrac{1}{2}(x^2 - a^2)^{-1/2}\ D(a^2 - x^2)$$

$$y' = -x(a^2 - x^2)^{-1/2}$$

$$y'' = -(a^2 - x^2)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(a^2 - x^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{-a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{-a^2}{y^3}$$

2) Fungsi implisit (2)

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = \frac{-x}{y}$$

$$y'' = \frac{-y + xy'}{y^2} = \frac{-a^2}{y^3}$$

3) Fungsi parameter (3)

$$x = a \sin t$$

$$y = a \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = -a \sin t$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = -\frac{a \sin t}{a \cos t} = -\frac{x}{y}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{a \sin t}{a \cos t}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{a^2\cos^2 t + a \sin^2 t}{a^2 \cos^2 t} \cdot \frac{1}{dx/dt}$$

$$= -\frac{a^2}{a^2\cos^2 t} \cdot \frac{1}{a \cos t} = \frac{-a^2}{a^3\cos^3 t} \cdot \frac{a^2}{y^3}$$

Pada umumnya, fungsi yang diucapkan dengan parameter t turunannya dy/dx adalah fungsi t, maka $y'' = d^2 y/dx^2$ diperoleh dengan kaidah pendiferensialan fungsi komposit:

$$y' = f(t)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Untuk y positif, maka y'' pada contoh di atas negatif. Jadi, setengah lingkaran cekung ke bawah.

v. $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}=\dfrac{(1-x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}}$

Dengan pendiferensialan logaritmik:

$$1n\, y=\tfrac{1}{2}\, 1n\,(1-x^2)-\tfrac{1}{2}\, 1n\,(1+x^2)$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2(1-x^2)}\cdot -2x-\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot 2x$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{-x}{1-x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{-x-x^3-x+x^3}{1-x^4}=\frac{-2x}{1-x^4}$$

$$y'=\frac{-2xy}{1-x^4}$$

Dengan pendiferensialan hasil kali:

$$y=(1-x^2)^{1/2}\,(1+x^2)^{-1/2}$$

$$y'=(1-x^2)^{1/2}\cdot -x(1+x^2)^{-3/2}-x(1-x^2)^{-1/2}\cdot(1+x^2)^{-1/2}$$

$$=\frac{-xy}{1+x^2}-\frac{x/y}{1+x^2}=-\frac{xy(y^2+1)}{y^2(1+x^2)}=\frac{xy\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}+1\right)}{\frac{1-x^2}{1+x^2}(1+x^2)}$$

$$=-\frac{xy(1-x^2+1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{2xy}{1-x^4}$$

Dengan pendiferensialan hasil bagi

Latihan Soal

Tentukan turunan pertama $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)$ dari fungsi-fungsi berikut.

a. $F(x)=3x^2\sqrt{2x^2+4x}$

b. $F(x)=\dfrac{2x\ 1n\ (3x^2+4x)}{3e^{x2}}$

c. $F(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 4$, dengan cara limit

d. $X^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 - 10 = 0$

e. $F(x) = 4\ 1nx^2\sqrt{x^2-5}$

f. $X = 3t^2 + 2t$

$Y = 2\sqrt{t} - 3e^{2t}$

g. $F(x) = 3\ 1n \sin 3x + 5 \cos^4 (2x^2 - 3x)^2$

h. $F(x) = 4x^2 e^{3x} + 6\ 1n\ (3x^2 - 2x)^3$

i. $F(x) = 5x\, e^{3x} + 2x^2y^2 - 4y^3 + 6 = 0$

B. PEMAKAIAN DIFERENSIAL DALAM ILMU EKONOMI ELASTISITAS

$$\eta=\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}$$

Ini berarti bahwa elastisitas $y = f(x)$ merupakan limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x, untuk x sangat kecil atau mendekati nol. Dengan terminologi lain, elastisitas y terhadap x dapat juga dikatakan sebagai rasio antara persentase perubahan y terhadap persentase perubahan x.

1. Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan adalah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan harga.

$$\eta_d=\frac{\%\,\Delta Q_d}{\%\,\Delta P}=\frac{EQ_d}{EP}=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\frac{\Delta Q_d}{Q_d}}{\frac{\Delta P}{P}}=\frac{dQ_d}{dP}\cdot\frac{P}{Q_d}$$

Keterangan:

Q_d = Fungsi permintaan

$\dfrac{dQ_d}{dP}=Q'_d=F'(P)$

Contoh:

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan: $Q_d = 25 - 3p^2$. Tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga $P = 5$!

Diketahui: $Q_d = 25 - 3p^2$ dan $P = 5$

Jawab:

$Q'd = -6p$

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

$$\eta_d = -6p \cdot \frac{p}{25 - 3p^2}$$

Substitusikan $P = 5$

$$\eta_d = -6 \cdot (5) \cdot \frac{(5)}{25 - 3(5)^2}$$

$$\eta_d = 3 \ (\textit{elastik})$$

2. Elastisitas Penawaran

Suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan berkenaan adanya perubahan harga.

$$\eta_s = \frac{\%\ \Delta Q_s}{\%\ \Delta P} = \frac{EQ_s}{EP} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\frac{\Delta Q_s}{Q_s}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

Keterangan:

Q_s = Fungsi penawaran $\quad Q_s = f(p)$

Contoh:

Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -200 + 7P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga $P = 10$, dan $P = 15$?

Jawab:

$$Q_s = -200 + 7P^2 = \frac{dQ_s}{dP} = 14P$$

$$\eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s} = 14P \cdot \frac{P}{-200 + 7P^2}$$

Pada $P = 10, \rightarrow \eta_s = 14(10) \cdot \frac{(10)}{-200 + 7(10)^2} = 2{,}8$

Pada $P = 15, \rightarrow \eta_s = 14(15) \cdot \frac{(15)}{-200 + 7(15)^2} = 2{,}3$

3. Elastisitas Produksi

Suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah keluaran (*output*) yang dihasilkan akibat adanya perubahan masukan (*input*) yang digunakan.

$$\eta_p = \frac{\%\ \Delta P}{\%\ \Delta X} = \frac{EP}{EX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta X}{X}} = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}$$

Keterangan:

P = Fungsi produksi $\quad P = f(x)$

Contoh:

Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 6x^2 - x^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan faktor produksi sebanyak 3 unit dan 7 unit!

Jawab:

$P = 6x^2 - x^3$

$P' = 12x - 3x^3$

$$\eta_p = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{X}{P} = (12x - 3x^2) \cdot \frac{x}{6x^2 - x^3}$$

Pada $x = 3,\ \eta_p = (12(3) - 3(3)^2) \cdot \frac{(3)}{6(3)^2 - (3)^3}$

$A\ \eta_p = (36 - 27) \cdot \frac{(3)}{54 - 27} = 1$

Pada $P = 7,\ \eta_p = (12(7) - 3(7)^2) \cdot \frac{(7)}{6(7)^2 - (7)^3}$

$$\eta_p = (84 - 147) \cdot \frac{27}{294 - 343} = 9$$

4. Biaya Marjinal

Merupakan biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

$$Mc = c' = \frac{dc}{dQ}$$

Keterangan:

C = Fungsi biaya total	C = Biaya total
$C = f(Q)$	Q = Jumlah produksi

Contoh:

Diketahui fungsi biaya total $Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$. Tentukan biaya marjinalnya.

Jawab:

$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$, maka $Mc = c' = \frac{dc}{dQ} = 3Q^2 - 6Q + 4$

5. Penerimaan Marjinal

Penerimaan tambahan yang diperoleh berkenaan bertambahnya satu unit keluaran yang diproduksi atau dijual.

$$MR = R' = \frac{dR}{dQ}$$

Keterangan:

R = Fungsi penerimaan total	R = Penerimaan total
$R = f(Q)$	Q = Jumlah pengeluaran

Contoh:

Andaikan fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh $P = 16Q - 2Q^2$. Hitunglah penerimaan marjinal!

Jawab:

$P = 16Q - 2Q^2$

$MR = R' = 16 - 4Q$

Pada $MR = 0$, dan $Q = 4$

$P = 16 - 4\ (4) = 8$

$R = 16\ (4) - 2\ (4)^2 = 32$

6. Utilitas Marjinal

Utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkenaan satu unit tambahan barang yang dikonsumsinya.

$$Mu = u' = \frac{dU}{dQ}$$

Keterangan:

U = Fungsi utilitas total	U = Utilitas total
$U = f(Q)$	Q = Jumlah barang yang dikonsumsi

Contoh:

Tentukan utilitas marjinal dari fungsi $U = f(Q) = 90Q - 5Q^2$!

Jawab:

$u = f(Q) = 90Q - 5Q^2$

$Mu = u' = 90 - 10Q$

u maksimum pada $Mu = 0$, $Mu = 0$, $Q = 9$

$u_{maksimum} = 90\ (9) - 5\ (9)^2 = 810 - 405 = 405$

7. Produk Marjinal

Produk tambahan yang dihasilkan dari satu unit tambahan produk marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi produk total.

$$MP = P' = \frac{dP}{dX}$$

Keterangan:

P = Fungsi jumlah produk total	$P = f(x)$
P = Jumlah produk total	X = Jumlah pemasukan

Contoh:

Tentukan produk marjinal dari fungsi produksi $P = 9x^2 - x^3$!

Jawab:

Produk marjinal:

$MP = P' = 18x - 3x^2$	MP bernilai maksimum berada di $P'' = 0$
P maksimum pada $P' = 0$,	$(MP)' = 0$
$P' = 0$	$18 - 6x = 0$
$18x - 3x^2 = 0$	$x = 3$

$3x(6 - x) = 0$ $\qquad x = 6$

$(MP)_{maksimum} = 18(3) - 3(3)^2 \qquad P_{maksimum} = 9(6)^2 - (6)^3$

$= 54 - 27 \qquad = 324 - 216$

$= 27 \qquad = 108$

8. Analisis Keuntungan Maksimum

$$\pi = R - C$$

π optimum apabila $\pi' = 0$ atau $MR = MC$

Jika $\pi'' < 0 \rightarrow \pi$ maksimum = keuntungan maksimum

Jika $\pi'' > 0 \rightarrow \pi$ minimum = kerugian maksimum

Syarat keuntungan maksimum:

$\pi' = 0$ atau $MR = MC$

$\pi'' = 0$ atau $(MR)' < (MC)'$

AVC = 2Q + 7
FC = 60
P = 34

Contoh:

Andaikan seorang produsen monopolis menghadapi fungsi permintaan $Q = 100 - 5P$ dan biaya totalnya $C = 20 - 4Q + 0{,}1Q^2$. Pemerintah mengenakan pajak atas setiap unit barang yang dijual oleh penunggal ini, dan menginginkan pajak total yang diterimanya maksimum. Di lain pihak, walaupun barang dagangannya dikenakan pajak, produsen tetap menginginkan operasi bisnisnya menghasilkan keuntungan maksimum. Berapa pajak per unit yang harus ditetapkan oleh pemerintah agar penerimaan pajaknya maksimum dan juga keuntungan produsen maksimum? Hitunglah masing-masing penerimaan pajak maksimum dan keuntungan maksimum tersebut!

Jawab:

Pajak maksimum yang diterima oleh pemerintah adalah besarnya pajak per unit dikalikan jumlah barang yang terjual di pasar (jumlah keseimbangan) sesudah pengenaan tersebut.

Pajak maksimum yang diterima pemerintah:

$T = t(Q) = (c - a)Q - (d + b)Q^2$

T maksimum jika $T' = 0$, yakni pada $Q = (c - a)/2(d + b)$

Contoh:

Andaikan permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 15 - Q$, sedangkan penawarannya $P = 3 + 0{,}5Q$. Pemerintah bermaksud mengenakan pajak spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual. Jika penerimaan pajak atas barang ini diinginkan maksimum, berapa pajak per unit yang harus ditetapkan? Berapa besarnya penerimaan pajak maksimum tersebut?

Jawab:

Pengenaan pajak sebesar t per unit barang yang diproduksi atau dijual oleh penunggal akan mengakibatkan biaya rata-ratanya meningkat sebesar t, dan biaya totalnya meningkat sebesar tQ. Akibatnya bukan saja harga barang menjadi mahal, tetapi juga keuntungan yang diperoleh penunggal menjadi berkurang.

Penerimaan total: $R = r(Q)$

Biaya total: $C = c(Q)$

Biaya total setelah pengenaan pajak: $C = c(Q) + t(Q)$

Keuntungan setelah pengenaan pajak: $\pi = r(Q) - c(Q) - tQ$

Pajak per unit: t

Pajak total: $T = t.Q = f(t,Q)$

Keuntungan: $\pi = r(Q) - c(Q)$

Contoh:

Andaikan seorang penunggal atau monopolis menghadapi fungsi permintaan $P = 1000 - 2Q$ dan fungsi biaya totalnya. Pemerintah memungut pajak sebesar 405 atas setiap untuk barang yang diproduksi atau dijual. Bandingkan keuntungan maksimum yang diperoleh penunggal ini antara tanpa dan dengan pengenaan pajak! Berapa pajak total yang diterima pemerintah?

Jawab:

Andaikan:

$R = r(Q) = -2Q^2 + 1000Q$

$C = c(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$

$\pi = R - C$

$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

Agar keuntungan maksimum, maka $\pi = 0$

$\pi' = 0$

$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

$-Q^2 + 38Q - 105 = 0$

$(-Q + 3+ (Q - 35) = 0$

$Q_1 = 3$ dan $Q_2 = 35$

9. Model Pengendalian Persediaan

Pengendalian persediaan baik persediaan bahan mentah atau barang jadi, bertujuan meminimumkan biaya total persediaan. Persediaan bahan mentah yang berlebihan akan menimbulkan biaya penyimpangan ekstra.

$$Q = \sqrt{\frac{2C_1D}{C_2}}$$

Keterangan:

Q = Jumlah pesanan optimal

C_1 = Biaya pemesanan per unit barang per periode

C_2 = Biaya penyimpanan per unit barang per periode

D = Kebutuhan barang per periode

Contoh:

Berdasarkan pengalamannya, seorang kontraktor kecil membutuhkan 100 karung pasir setiap bulan. Biaya pengadaan atau pemesanan Rp1.250,00 setiap kali pesan, sedangkan biaya penyimpanan Rp400,00 per karung per minggu. Jika ia menginginkan biaya total persediaan minimum dengan cara membagi kebutuhan 100 karung pasir per bulan atas beberapa kali kedatangan dengan jumlah sama, berapa jumlah pesanan yang optimal?

Jawab:

$D = 100$, $C_1 = 1250$, $C_2 = 400$

$$Q = \sqrt{\frac{2C_1D}{C_2}} = \sqrt{\frac{(2)(1250)(100)}{400}} = \sqrt{625} = 25$$

Jadi, jumlah pesanan yang optimal ialah 25 karung pasir setiap kali pesan. Berarti kebutuhan per bulan dibaginya menjadi D/Q = 100/25 = 4 kali kedatangan (4 angkatan). Dengan perkataan lain, pesanan untuk kebutuhan bulanan dilakukan secara mingguan. Biaya total persediaannya per bulan adalah:

$$C = \frac{C_1D}{Q} + \frac{C_2Q}{2} = \frac{(1250)(100)}{25} + \frac{(400)(25)}{2} = 10.000 \text{ rupiah}$$

10. Hubungan Biaya Marjinal dengan Biaya Rata-Rata

Dalam ekonomi mikro terdapat hubungan teoretis antara biaya marjinal dengan biaya rata-rata. Bahwa pada saat biaya rata-rata mencapai nilai minimumnya maka biaya marjinal sama dengan biaya rata-rata minimum tersebut. Andaikan biaya total dinyatakan $C = f(Q)$, maka:

Biaya marjinal: $MC = C' = \dfrac{dC}{dQ}$

Biaya rata-rata: $AC = \dfrac{C}{Q}$

(syarat AC minimum ialah bahwa derivatif pertamanya = 0)

Pada posisi AC minimum: $MC = AC$, $\dfrac{dC}{dQ} = \dfrac{C}{Q}$

Contoh:

Andaikan biaya total $C = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$, buktikan bahwa biaya rata-rata minimum sama dengan biaya marjinal!

Jawab:

Biaya marjinal: $MC = C' = dC/dQ = 3Q^2 - 12Q + 15$

Biaya rata-rata: $AC = C/Q = Q^2 - 6Q + 15$

$(AC)' = dAC/dQ$

$0 = 2Q - 6$

$2Q = 6$

$Q = 3$

Pada $Q = 3$

$MC = 3(3)^2 - 12(3) + 15 = 6$

$AC = (3)^2 - 6(3) + 15 = 6$

$MC = AC_{min}$

11. Hubungan Produk Marjinal dengan Produk Rata-Rata

Produk marjinal sama dengan produk rata-rata pada saat produk rata-rata mencapai posisi ekstrimnya. Andaikan biaya total dinyatakan $P = f(x)$, maka:

Biaya marjinal: $MP = P' = \dfrac{dP}{dx}$

Biaya rata-rata: $AP = \dfrac{p}{x}$

$$AP' = \frac{xP' - Px'}{x^2} = \frac{xP' - P}{x^2}$$

$$\left[Px' = P, \text{sebab jika } P = P \text{ maka } P' = \frac{dP}{dP} = 1\right]$$

Agar AP maksimum: $(AP)' = 0 \rightarrow \dfrac{xP' - P}{x^2} = 0 \rightarrow P' = \dfrac{p}{x}$

Mengingat $P' = MP$ dan $\dfrac{p}{x} = AP$, jelas bahwa:

Pada posisi AP maksimum: $MP = AP$, $\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{p}{x}$

Bab 3

HITUNG INTEGRAL

A. INTEGRAL

Dalam kalkulus integral dikenal dua macam pengertian integral, yaitu integral tak tentu (*indefinite integral*) dan integral tertentu (*definite integral*). Integral tak tentu adalah kebalikan dari diferensial, yakni suatu konsep yang berhubungan dengan proses penemuan suatu fungsi asal apabila turunan atau derivatif dari fungsinya diketahui. Sedangkan integral tertentu merupakan suatu konsep yang berhubungan dengan proses pencarian luas, volume, dan panjang suatu area yang batas-batas atau limit dari area tersebut sudah tertentu.

1. Integral Tak Tentu

Operasi kebalikan lazim, terdapat dalam matematika, misalnya penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, memangkatkan dan mengakarkan, menentukan sinus dan arc sinus, logaritma dan antilogaritma. Demikian juga pendiferensialan mempunyai kebalikan, yaitu pengintegralan.

Pada pendiferensialan dicari laju perubahan atau turunan sesuatu fungsi. Sebaliknya pada pengintegralan dicari suatu fungsi yang laju perubahannya atau turunannya adalah fungsi tertentu. Pada hitung diferensial dicari limit suatu hasil bagi. Sedang pada hitung integral dicari limit suatu jumlah daripada suku-suku yang tak berhingga banyaknya, yang masing-masing mendekati nol.

Untuk pendiferensialan ada kaidah umum, yang darinya dijabarkan kaidah-kaidah khusus, tetapi pada pengintegralan tidak ada kaidah umum semacam itu, sehingga suatu integral harus diperoleh dari pengetahuan tentang hasil-hasil diferensial.

Maka dari itu, hitung integral jauh lebih luas dan rumit daripada hitung diferensial, dan yang dapat kita bicarakan dalam buku ini hanya sebagian kecil saja. Dapat dibedakan dua jenis pengintegralan, yaitu pengintegralan tak tertentu dan pengintegralan tertentu. Mengintegralkan suatu fungsi $f(x)$ ialah mencari integral atau turunannya. Artinya $F(x)$ yang bila dideferensialkan memberikan $f(x)$.

Integral F tidak unik bukanlah satu-satunya fungsi yang bila dideferensialkan memberikan $f(x)$. Karena diferensial suatu tetapan C = nol, maka pendiferensialan $F(x) + C$ memberikan $f(x)$. Adapun tetapan C dapat sebarang, maka integral $F(x) + C$ tidak tertentu sepenuhnya dan dinamakan integral tak tertentu serta dilambangkan:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Tanda $\int$ yang serupa huruf S memanjang adalah tanda integral.

$f(x)$ = integran
dx = diferensial
$F(x)$ = integral partikelar
C = tetapan pengintegralan

Integral di atas berarti pula:

$$\frac{d}{dx}[F(x)+C] = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

a. *Kaidah-Kaidah Integrasi Tak Tentu*

Karena integrasi tak tentu pada dasarnya merupakan kebalikan dari diferensiasi, maka kaidah-kaidah integrasi tak tentu akan dapat dipahami berdasarkan pengetahuan tentang kaidah-kaidah diferensial.

1) *Kaidah 1: formula pangkat*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

$n \neq -1$; k = konstanta

Contoh:

a) $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + k = \frac{x^5}{5} + k = 0{,}2x^5 + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(0{,}2x^5 + k) = x^4$

b) $\int 4dx = \frac{4x^{0+1}}{0+1} + k = 4x + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(4x + k) = 4$

c) $\int 3x^2 dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + k = x^3 + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(x^3 + k) = 3x^2$

d) $\int dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + k = x + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(x + k) = 1$

e) $\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^{2+1}}{2+1} + k = \frac{1}{3}(x+1)^3 + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}\frac{1}{3}(x+1)^3 + k = (x+1)^2$

2) *Kaidah 2: formula logaritmis*

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k \qquad n = -1$$

Contoh:

a) $\int \frac{3}{x}\, dx = 3\ 1nx + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(3\ 1nx + k) = \frac{3}{x}$

b) $\int \frac{3}{x+1}\, dx = \int \frac{3d(x+1)}{x+1} + k = 3\ 1n\ (x+1) + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}\{3\ 1n\ (x+1) + k\} = \frac{3}{x+1}$

3) *Kaidah 3: formula eksponen*

$$\int e^x dx = e^x + k$$
$$\int e^u du = e^u + k,\quad u = f(x)$$

Contoh:

a) $\int e^{x+2} dx = \int e^{x+2} d(x+2) = e^{x+2} + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(e^{x+2} + k) = e^{x+2}$

b) $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + k\right) = e^{2x}$

c) $\int e^{-3x+2} dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x+2} d(-3x+2) = -\frac{1}{3}e^{-3x+2} + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x+2} + k\right) = e^{-3x+2}$

4) *Kaidah 4: formula penjumlahan*

$$\int\{(x) + g(x)\}dx = \int f(x) + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + k$$

Contoh:

a) $\int(x^4 + 3x^2)dx = \int x^4 dx + \int 3x^2 dx = 0{,}2x^5 + x^3 + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(0{,}2x^5 + x^3 + k) = x^4 + 3x^2$

b) $\int\left(e^x + \frac{1}{x}\right)dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx = e^x + 1nx + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(e^x + 1nx + k) = e^x + \frac{1}{x}$

c) $\int(3x^2 - 10x)dx = \int 3x^2 dx - \int 10x\, dx = x^3 - 5x^2 + k$

Bukti: $\frac{d}{dx}(x^3 - 5x^2 + k) = 3x^2 - 10x$

5) *Kaidah 5: formula perkalian*

$$\int nf(x)dx = n\int f(x)dx$$

$n \neq 0$

Contoh:

a) $\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx = 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + k_i\right) = x^3 + k,\ k =$ suatu konstanta

Bukti: $\frac{d}{dx}(x^3 + k) = 3x^2$

b) $\int -x^3 dx = -1\int x^3 dx = -1\left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + k_i\right) = -\frac{1}{4}x^4 \pm k$

Bukti: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}x^4 \pm k\right) = -x^3$

Tidak ada kaidah umum untuk menjabarkan rumus pengintegralan. Rumus pengintegralan harus diperoleh dari rumus pendiferensialan. Dari setiap pendiferensialan dapat diperoleh suatu rumus pengintegralan.

b. *Rumus-Rumus Pengintegralan yang Penting dan Berbentuk Standar*

Rumus dikumpulkan dalam suatu daftar yang dapat membuat sampai beberapa ratus rumus. Rumus-rumus pengintegralan bentuk standar yang diperoleh sebagai kebalikan dari rumus-rumus pendiferensialan dalam Tabel 3.1 tanpa tetapan pengintegralan C.

Tabel 3.1 Bentuk Standar Integral

1)	$\frac{du^n}{du} = nu^{n-1}$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
2)	$\frac{d^a \log u}{du} = \frac{1}{u \, 1n \, a}$	$\int \frac{du}{u 1na} = \frac{1nu}{1na} = {}^a \log u$
3)	$\frac{d 1nu}{du} = \frac{1}{u}$	$\int \frac{du}{u} = 1nu$
4)	$\frac{d\, a^u}{du} = a^u 1na$	$\int a^u 1na \, du = a^u$
5)	$\frac{d\, a^u}{du} = e^u$	$\int e^u du = e^u$
6)	$\frac{d \sin u}{du} = \cos u$	$\int \cos u \, du = \sin u$
7)	$\frac{d \cos u}{du} = -\sin u$	$\int \sin u \, du = -\cos u$
8)	$\frac{d \, tg \, u}{du} = \sec^2 u$	$\int \sec^2 u \, du = \tan u$
9)	$\frac{d \, cotg \, u}{du} = -\csc^2 u$	$\int cosec^2 u \, du = cotg \, u$
10)	$\frac{d \sin^{-1} u}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u$
11)	$\frac{d \cos^{-1} u}{du} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\cos^{-1} u$
12)	$\frac{d \, tg^{-1} u}{du} = \frac{-1}{1+u^2}$	$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u$
13)	$\frac{d \, cotg^{-1} u}{du} = \frac{-1}{1+u^2}$	$\int \frac{du}{1+u^2} = -cotan^{-1} u$
14)	$\frac{d \sinh u}{du} = \cosh u$	$\int \cosh u \, du = \sinh u$
15)	$\frac{d \cosh u}{du} = \sinh u$	$\int \sinh u \, du = \cosh u$
16)	$\frac{d \, tgh \, u}{du} = sech^2 u$	$\int sech^2 u \, du = \tanh u$
17)	$\frac{d \, cotgh \, u}{du} = -cosech^2 u$	$\int csch^2 u \, du = -\coth u$
18)	$\frac{d \sinh^{-1} u}{du} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u$
19)	$\frac{d \cosh^{-1} u}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u$
20)	$\frac{d \, tgh^{-1} u}{du} = \frac{1}{1-u^2}$	$\int \frac{du}{1-u^2} = tgh^{-1} u$
21)	$\frac{d \, cotg^{-1} u}{du} = \frac{-1}{u^2-1}$	$\int \frac{du}{u^2-1} = -cotgh^{-1} u$

Dalam rumus-rumus, pembilang tidak boleh nol dan bilangan yang akan diakarkan tidak boleh negatif. Dari definisi fungsi hiperbolik dan inversnya dapat dibuktikan:

1) $\sinh^{-1} u = 1n \, (u + \sqrt{1+u^2})$ $\qquad -\infty < u < \infty$

2) $\cosh^{-1} u = 1n \, (u \pm \sqrt{u^2-1})$ $\qquad u \geq 1$

3) $tgh^{-1} u = \frac{1}{2} 1n \frac{1+u}{1+u}$ $\qquad -1 < u < 1$

4) $cotgh^{-1} u = \frac{1}{2} 1n \frac{1+u}{u-1}$ $\qquad |u| < 1$

Bukti:

1) Misalkan $x = \sinh^{-1} u$, maka $u = \sinh x$

$\cosh x = +\sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+u^2}$

dengan tanda + karena $\cosh x$ senantiasa positif.

$\sinh x + \cosh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = e^x$

2) Misalkan $x = \cosh^{-1} u$, maka $u = \cosh x$

$\sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \pm\sqrt{u^2-1}$

$\sinh x + \cosh x = e^x = u \pm \sqrt{u^2-1}$

$x = 1n\left[u \pm \sqrt{u^2-1}\right] = \cosh - 1u$

3) Misalkan $x = tgh^{-1} u$, maka

$u = tgh \, x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})} = \frac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}$

$ue^{2x} + u = e^{2x} - 1$

$e^{2x} = \frac{1+u}{1-u}$

$x = \frac{1}{2} 1n \frac{1+u}{1-u} = tgh^{-1} u$

4) Misalkan $x = \text{cotgh}^{-1} u$, maka

$$u = \text{cotgh } x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$ue^{2x} - u = e^{2x} + 1$$

$$e^{2x} = \frac{1+u}{u-1}$$

$$x = \frac{1}{2} 1n \frac{1+u}{u-1} = \text{cotgh}^{-1} u$$

Dengan rumus-rumus ini, maka bentuk standar 18 s/d 21, dapat ditulis:

18. $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = 1n\left[u + \sqrt{1+u^2}\right]$

19. $\int \frac{du}{\sqrt{u-1^2}} = 1n\left[u \pm \sqrt{u-1^2}\right]$

20. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} 1n \frac{1+u}{1-u}$

21. $\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}$

Dalam bentuk yang agak lebih umum, maka 10' s/d 13' dan 18' s/d 21' dapat ditulis

10' dan 11': $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} = -\cos^{-1}\frac{u}{a}$

12' dan 13': $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{u}{a}$

18'. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = 1n\left[u + \sqrt{a^2+u^2}\right]$

19'. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = 1n\left[u \pm \sqrt{u^2-a^2}\right]$

20'. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{2a} 1n \frac{a+u}{a-u}$

21'. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} 1n \frac{u-a}{u+a}$

Pada ruas kanan rumus-rumus pengintegralan masih harus ditambahkan tetapan pengintegralan C. Dalam rumus-rumus Tabel 3.1, u dapat melambangkan sesuatu peubah x ataupun fungsinya $f(x)$. Tidak semua integral dapat diucapkan dalam integral-integral elementer, misalnya $\int e^{-x^2} dx$.

Tidak semua bentuk standard penting tercantum dalam Tabel 3.1, misalnya $\int 1n\ u\ du$, $\int \tan u\ du$, yang perlu dicari rumus pengintegralannya dengan cara lain. Ada dua cara yang dapat ditempuh pada pengintegralan, yaitu dengan substitusi dan dengan pengintegralan penggalan (*by parts*). Pada cara substitusi maka untuk u disubstitusi bagian fungsi yang serasi.

c. *Pengintegralan Penggalan*

Cara pengintegralan penggalan timbul dari membalik pendiferensialan hasil kali.

$d(uv) = udv + vdu$, maka $uv = \int udv + \int vdu \rightarrow \int udv = uv - \int vdu$

Dalam hal ini telah kita gunakan pula pembalikan pendiferensialan jumlah: $d(u + v) = du + dv$, maka $\int (du + dv) = \int du + \int dv$.

Integral sejumlah fungsi = jumlah integral fungsi-fungsi itu.

Telah terpakai pula pembalikan: $du = \frac{du}{dx}.dx$ maka $\int du = u$

Rumus pendiferensialan: $\int d\,(au) = a\,du$

Kebalikannya: $\int adu = a \int du$, yaitu tetapan dapat dipindah ke luar tanda integral.

Apabila perlu maka rumus tersebut dikenakan lebih dari sekali. Dalam memilih u dan dv perlu diperhatikan:

1) *Dv* harus segera dapat diintegralkan.
2) $\int vdu$ harus lebih mudah dintegralkan dari $\int udv$.

Contoh 1:

Bentuk standar $\int 1n\ x\ dx = x\ 1n\ x - x + C$

Dapat diperoleh dengan mengambil $u = 1n\ x$ dan $dv = dx$. Jadi:

$du = \frac{dx}{x}$ dan $v = x$

$\int udv = uv - \int vdu$

$\int 1n\ x\ du = x\ 1n\ x - \int x\ du = x\ 1n\ x - x + C$

Contoh 2:

Dicari: $I = \int x^2 e^x\ dx$

Misalkan: $u = x^2$ dan $dv = e^x\ dx$

Maka: $du = 2\ x\ dx$ dan $v = e^x \rightarrow I = x^2e^x - 2\int xe^x\ dx$

Misalkan: $I' = \int xe^x\ dx,\ u = x,$ dan $dv = e^x dx$

Maka: $du =$ $\cos x\ dx$ dan $v = -\cos x$

$I = -\sin x \cos x + \int cos^2\ dx$

?

$= -\sin x \cos x + \int (1-sin^2x)\ dx = -\sin x \cos x + \int dx - 1$

$2I = -\sin x \cos x$

$I = -½ \sin x \cos x + ½x + C$

Pada contoh ini I timbul lagi di ruas kanan dan dipindahkan di ruas kiri. Beberapa teknik lain pada pengintegralan ialah dengan penggantian peubah atau dengan fraksi parsial.

d. Pengintegralan dengan Substitusi

Kalau integran tidak sesuai dengan salah satu bentuk standar maka dapat dicoba pengintegralan dengan substitusi atau penggantian suatu peubah dengan peubah yang lain. Misalkan dicari yang bukan suatu bentuk standar maka dapat dicoba mensubstitusi peubah x dengan peubah u sehingga diperoleh suatu bentuk standar. Dapat ditulis:

$I = \int f(x)\ dx = \int f(x)\frac{dx}{du}du$

Misalkan $\frac{dx}{du} = g'(u) = \frac{dg}{du}$, jadi $x = g\ (u)$ maka integralnya:

$I = \int f[g(u)]g'(u)\ du$

Atau: [redacted]

Di mana $u = g(x)$ dan $\int du$ merupakan substitut bagi $\int dx$ yang mungkin berbentuk standar.

Contoh:

1) Selesaikanlah $\int 6x\ (3x^2 - 10)dx$, dengan cara penyelesaian biasa atau langsung: $\int 6x\ (3x^2 - 10)dx = \int (18x^3 - 60x)dx = 4{,}5x^4 - 30x^2 + k$.
   Dengan cara substitusi, misalkan:
   $u = 3x^2 - 10$; maka $\frac{du}{dx} = 6x$, atau $dx = \frac{du}{6x}$.
   Sehingga: $\int 6x(3x^2 - 10)dx = \int 6\ x\ u\frac{du}{6x} = \int u\ du = \frac{u^2}{2} + k_i$
   $= \frac{(3x^2-10)^2}{2} + k_i = \frac{1}{2}(9x^4 - 60x^2 + 100) + k_i$
   $= 4{,}5x^4 - 30x^2 + 50 + k_i = 4{,}5x^4 - 30x^2 + k$
   di mana $k = 50 + k_i$ (suatu konstanta)

2) Selesaikanlah $\int \frac{x+3}{x^2+6x}dx$!
   Misalkan $u = x^2 + 6x$, maka $\frac{du}{dx} = 2x + 6$
   Karenanya pembilang $(x+3) = \frac{1}{2}\left[\frac{du}{dx}\right]$.
   Sehingga: $\int \frac{x+3}{x^2+6x}dx = \int \frac{½\left[{du}/{dx}\right]}{u}dx = \int \frac{½ du}{u} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u}$
   $= \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}1nu + k = \frac{1}{2}1n(x^2+6x) + k$

3) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x-3}}$, disubstitusi $u = 5x - 3$; $du = 5dx$;
   $dx = \frac{1}{5}du$; maka substitusi memberikan:
   $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{5x-3}} = \frac{1}{5}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\cdot 2u^{½} = \frac{2}{5}\sqrt{2x-5}$

4) $I = \int \sin^3 x \cos x \, dx$, disubstitusi $u = \sin x;\ du = \cos x \, dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 = \frac{1}{4}\sin^4 x$$

5) $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

Yaitu integran adalah hasil bagi yang pembilangnya turunan pertama penyebut. Disubstitusi $u = f(x);\ du = f'(x)dx$

$$I = \int \frac{du}{u} = 1nu = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1nf(x)$$

6) $I = \int \frac{x^2}{1+2x^3} dx$

Disubstitusi $u = 1 + 2x^3;\ du = 6x^2 dx;\ x^2 dx = \frac{1}{6} du$

$$I = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6} 1nu + C = \frac{1}{6} 1n\ (1+2x^3) + C$$

Atau: $f(x) = 1 + 2x^3$, maka $x^2\ dx = \frac{1}{6} f'(x)$

Jadi: $I = \frac{1}{6} 1n\ f(x) = \frac{1}{6} 1n\ (1+2x^3) + C$

7) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Disubstitusi $x = \frac{1}{u};\ dx = -\frac{1}{u^2} du;\ 1 + x^2 = \frac{1}{u^2}(u^2+1)$

$$I = \int \frac{-du}{\sqrt{u^2+1}}$$

Maka dengan bentuk standar:

$$I = -1n(u + \sqrt{u^2+1}) = -1n\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$$?

$$= -1n\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = 1n\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C$$

e. *Kesimpulan*

1) Substitusi x dengan $\frac{1}{u}$ ini dinamakan *substitusi resiprok.*

2) Pendiferensialan fungsi rasional lebih mudah dari pendiferensialan fungsi tak rasional maka kerap pendiferensialan suatu fungsi tak rasional dapat dilaksanakan sesudah substitusi diubah menjadi fungsi rasional. Cara mendiferensialkan suatu fungsi tak rasional dengan mengubahnya terlebih dahulu menjadi fungsi rasional dengan substitusi dinamakan *pendiferensialan dengan rasionalisasi.* Dua cara yang paling lazim adalah sebagai berikut.

   a) Fungsi tak rasional yang hanya mengandung x pangkat pecahan dirasionalkan dengan substitusi $x = u^n$ di mana n = penyebut bersama terkecil dari pangkat-pangkat pecahan daripada peubah x itu.

   b) Fungsi tak rasional yang hanya mengandung $a + bx$ pangkat pecahan dirasionalkan dengan substitusi $(a + bx)^n$ di mana n = penyebut bersama terkecil daripada pangkat-pangkat pecahan dari $a + bx$.

3) Untuk integral bentuk: $\int x^m(a + bx^n)^{pq}\, dx$, di mana m, n, p, dan q = bilangan bulat positif atau negatif maka dicoba substitusi:

   $a + bx^n = u^q;\ x = b^{-1/n}\,(u^q - a)^{1/m}$

   Atau kalau macet, maka disubstitusi:

   $$\frac{a+bx^n}{x^n} = u^q;\ x = a^{\frac{1}{m}}(u^q - b)^{-1/n}$$

4) Untuk integral yang mengandung e^x dicoba substitusi $e^x = u;\ x = 1n\ u;\ dx = du/u$. Pengintegralan selain dengan substitusi aljabar dilakukan juga dengan substitusi trigonometri dan hiperbolik. Kemahiran dalam pengintegralan hanya dapat diperoleh dengan banyak latihan dan pengalaman.

2. Integral Tertentu

Integral tertentu dapat digunakan untuk menghitung volume, panjang busur, luas area yang terletak di antara kurva $y = C = f(x)$, dan sumbu-horizontal $-x$, dalam suatu rentangan wilayah yang dibatasi oleh $x = a$ dan $x = b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) + k$$

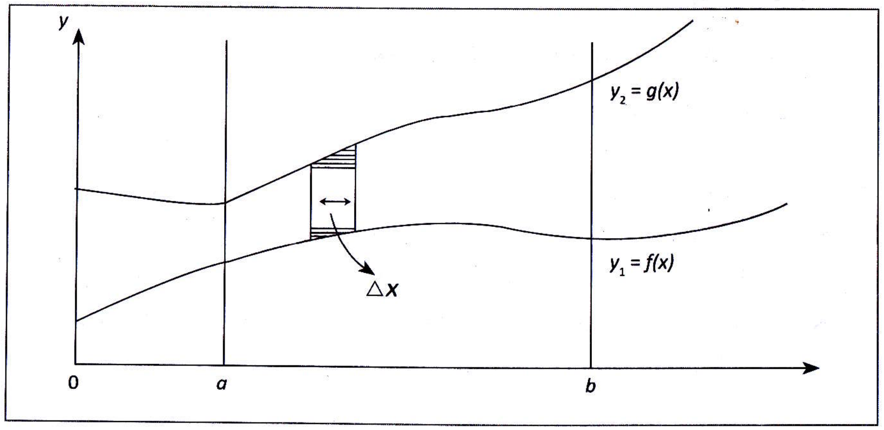
Jika kita ingin mengetahui hasil integrasi tersebut untuk suatu rentangan wilayah tertentu, katakanlah antara $x = a$ dan $x = b$ di mana $a < b$, maka x dapat disubstitusi dengan nilai-nilai a dan b sehingga ruas kanan persamaan di atas menjadi:

$\{F(b) + k\} - \{F(a) + k\} = F(b) - F(a)$.

$F(b) - F(a)$ adalah hasil integral tertentu dari $f(x)$ antara a dan b. Secara lengkap persamaan pertama tadi dapat dituliskan menjadi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Andaikan kita memiliki dua buah kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$, di mana $f(x) < g(x)$. Maka luas area antara kedua kurva ini untuk rentang wilayah dari a ke b $(a < b)$ adalah sebagai berikut.



Kaidah-Kaidah Integral Tertentu

Untuk $a < c < b$, berlaku:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Contoh: $\int_2^5 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^5 = \frac{1}{5}\left[x^5\right]_2^5 = \frac{1}{5}(3125 - 32) = 618{,}9$

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Contoh: $\int_2^2 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^2 = \frac{1}{5}\left[x^5\right]^2 = \frac{1}{5}(32 - 32) = 0$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Contoh: $\int_2^5 x^4\,dx = 618{,}6$

$-\int_5^2 x^4\,dx = -\left[\frac{x^5}{5}\right]_5^2 = -\frac{1}{5}\left[x^5\right]_5^2 = -\frac{1}{5}(32 - 3125) = 618{,}6$

4) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Contoh: $\int_2^5 5x^4\,dx = \left[x^5\right]_2^5 = 3125 - 32 = 3093 \rightarrow 5\int_2^5 x^4\,dx = 5(618{,}6) = 3093$

5) $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Contoh: $\int_a^b \{x^4 + 5x^4\}\,dx = \int_a^5 x^4\,dx + \int_2^5 5x^4\,dx = 618{,}6 + 3093 = 3.711{,}6$

6) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, di mana $a < c < b$

Contoh: $\int_2^3 x^4\,dx + \int_3^5 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^3 + \left[\frac{x^5}{5}\right]_3^5$

$= \frac{1}{5}(253 - 32) + \frac{1}{5}(3125 - 243) = 618{,}6$

Latihan Soal

1) Selesaikanlah: $\int(x^4 + 3x^2 - 2)\,dx = \ldots$
2) Jika $f(x) = \int(x^2 - 2x + 5)\,dx$ dan $f(0) = 5$, tentukan fungsi $f(x)$!
3) Hitunglah nilai dari: $\int_0^2 (3x^2 - 3x + 7)\,dx = \ldots$
4) Jika $a > 0$ dan $\int_1^a (2x - 3)\,dx = 0$. Tentukan nilai yang memenuhi a!
5) Hitunglah nilai dari: $\int_{-1}^{1} x^2(x - 6)\,dx = \ldots$
6) Hitunglah nilai dari: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2(3\cos x - 5\sin x)\,dx = \ldots$
7) Selesaikan $\int(x - 3)(x^2 - 6x + 1)^3\,dx = \ldots$
8) Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4$, garis $x = 0$ dan $x = 2$!
9) Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = 5x - 4$!
10) Hitunglah volume benda putar yang terjadi karena daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x + 3$, sumbu x dan garis $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°.

B. PEMAKAIAN INTEGRAL DALAM ILMU EKONOMI

Pendekatan integral tak tentu dapat diterapkan untuk mencari persamaan fungsi total dari suatu variabel ekonomi apabila persamaan fungsi marjinalnya diketahui. Karena fungsi marjinal pada dasarnya merupakan turunan dari fungsi total, maka dengan proses sebaliknya, yakni integrasi, dapat dicari fungsi asal dari fungsi turunan atau fungsi totalnya.

1. Fungsi Biaya Total

Biaya total $C = f(Q)$
Biaya marjinal $MC = C' = dC/dO = f'(Q)$
Biaya total tak lain adalah integral dari biaya marjinal.

$$C = \int MC\,dQ = \int f'(Q)\,dQ$$

Contoh:
Ditentukan fungsi biaya marjinal suatu perusahaan ditunjukkan oleh $MC = 3Q^2 - 6Q + 4$. Carilah persamaan biaya total dan biaya rata-ratanya.

Jawab:
Biaya total $C = \int(3Q - 6Q + 4)\,dQ = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$
Biaya rata-rata $AC = C/Q = Q^2 - 3Q + 4 + k/Q$
Konstanta k tak lain adalah biaya tetap. Jika diketahui biaya tetap tersebut sebesar 4, maka:
Biaya total $C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$
Biaya rata-rata $AC = Q^2 - 3Q + 4 + 4/Q$

2. Fungsi Penerimaan

Penerimaan total $R = f(Q)$
Penerimaan marjinal $MR = R' = dR/dQ = f'(Q)$
Penerimaan total tak lain adalah integral dari penerimaan marjinal.

$$R = \int MR\,dQ = \int f'(Q)\,dQ$$

Dalam persamaan penerimaan total konstanta $k = 0$, sebab penerimaan tidak akan ada jika tidak ada barang yang dihasilkan atau terjual.

3. Fungsi Utilitas

Utilitas total $U = f(Q)$
Utilitas marjinal $U' = MU = dU/dQ = f'(Q)$
Utilitas total tak lain adalah integral dari utilitas marjinal.

$$U = \int f'(Q)\,dQ$$

Contoh:
Carilah persamaan utilitas total dari seorang konsumen jika utilitas marjinalnya $MU = 90 - 9Q$!
$U = \int(90 - 9Q)\,dQ = 90Q - 4{,}5Q^2 + k$

4. Fungsi Produksi

Produk total $p = f(x)$ di mana P = keluaran dan X = masukan

Produk marjinal $MP = P' = \frac{dP}{dx} = f'(x)$

Produk total $P = \int f'(x)\,dx$

Contoh:

Produk marjinal sebuah perusahaan dicerminkan oleh $MP = 18x - 3x^2$. Carilah persamaan produk total dan produk rata-ratanya!

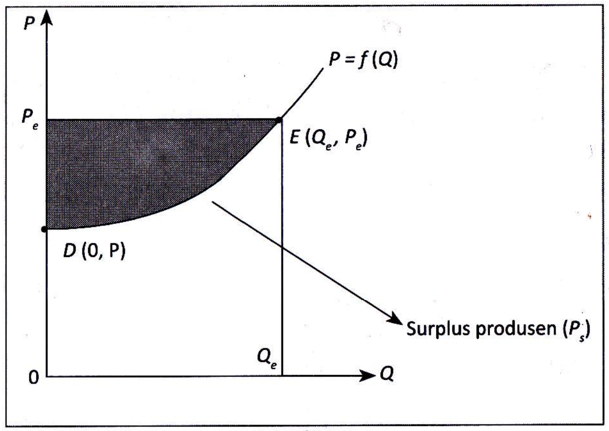
Jawab:

Produksi total $P = \int (18x - 3x^2)\,dx = 9x^2 - x^3 + k$

Produksi rata-rata $= \frac{P}{x} = 9x - x^2 + \frac{k}{x}$

5. Surplus Produsen

Surplus produsen (*producers surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar barang yang ditawarkannya.



Fungsi penawaran $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah suatu barang yang akan dijual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e, maka bagi produsen tertentu yang sebetulnya bersedia menjual dengan harga yang lebih rendah dari P_e. Hal ini merupakan keuntungan baginya, sebab ia dapat menjual barangnya dengan harga P_e (lebih tinggi dari harga jual semula yang direncanakan). Keuntungan lebih semacam ini disebut surplus produsen. Secara geometri, besarnya surplus produsen ditunjukkan oleh luas area di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar.

Surplus produsen atau P_s (singkatan dari *produsens surplus*) tak lain adalah segitiga P_eDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas bawah dan $Q = Q_e$ sebagai batas atas. Besarnya surplus produsen adalah:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$$

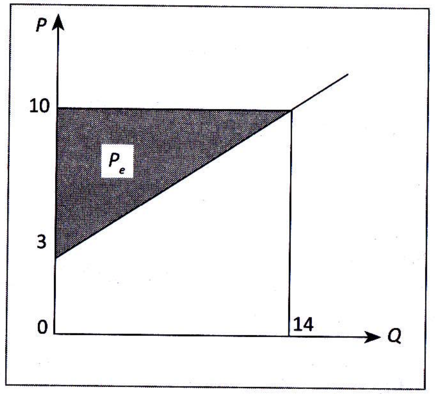
Dalam hal fungsi penawaran berbentuk $P = f(Q)$ atau

$$P_s = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)dP$$

Dalam hal fungsi penawaran berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$, atau penggal kurva penawaran pada sumbu harga. Dengan demikian:

Contoh 1:

Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran $P = 0{,}50Q + 3$. Berapa surplus produsen bila tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 10? Lakukan perhitungan dengan dua cara.



Jawab:

$P = 0{,}50Q + 3 \rightarrow Q = -6 + 2P$

$P = 0 \rightarrow Q = -6$

$Q = 0 \rightarrow P = 3 = P$

$P_e = 10 \rightarrow Q_e = 14$

Cara pertama:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ = (14)(10) - \int_0^{14} (0{,}50Q + 3)dQ$$

$$= 140 - \left[0{,}25Q^2 + 3Q\right]_0^{14}$$

$$= 140 - \left[0{,}25(14)^2 + 3(14)\right] - \left[0{,}25(0)^2 + 3(0)\right] = 140 - 91 - 0 = 49$$

Cara kedua:

$$P_s = \int_P^{P_e} f(P)dP = \int_3^{10} (-6 + 2P)dP = \left[-6P + P^2\right]_3^{10}$$

$$= \left[-6(10) + 10^2\right] - \left[-6(3) + 3^2\right] = 40 - (-9) = 49$$

√ 9

Contoh 2:

Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh $Q = -30 + 5P$ dan $Q = 60 - 4P$.

a. Hitunglah harga keseimbangan pasar!

b. Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen dan gambar grafiknya!

Jawab:

a. Penawaran:

$Q = -30 + 5P \rightarrow P = 6 + 0{,}20Q$

Permintaan:

$Q = 60 - 4P \rightarrow P = 15 - 0{,}25Q$

Keseimbangan pasar:

$Q_s = Qd$

$-30 + 5P = 60 - 4P$

$9P = 90$

$P = 10 = P_e$

$Q = 60 - 4P = 60 - 4(10) = 20 = Q_e$

b. **Surplus konsumen:**

$$C_s = \int_n^{Q_e} f(Q)dQ - Q_e P_e = \int_0^{20} (15 - 0{,}25Q)dQ - (20)(10)$$

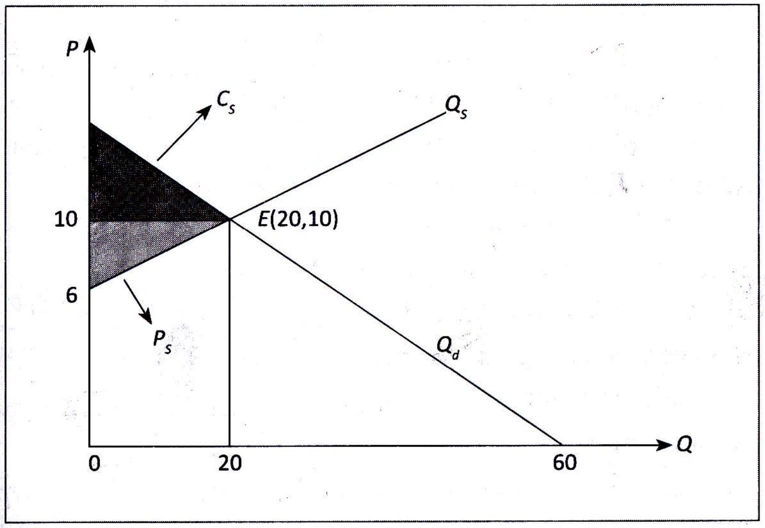
$$= \left[15Q - 0{,}125Q^2\right]_0^{20} - 200 = 250 - 200 = 50$$

Surplus produsen:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ = (20)(10) - \int_0^{20} (6 + 0{,}20Q)dQ$$

$$= 200 - \left[6Q - 0{,}10Q^2\right]_0^{20} = 200 - 160 = 40$$

9 √



6. Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Berdasarkan kaidah integrasi, konsumsi dan tabungan masing-masing adalah integral dari *marginal propensity to consume* dan *marginal propensity to save.*

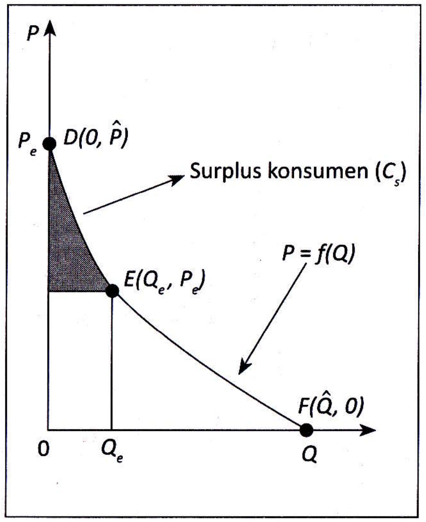
$$C = \int MPC\, dy = F(Y) + k \rightarrow k \equiv a$$
$$S = \int MPS\, dy = G(Y) + k \rightarrow k \equiv -a$$

Konstanta k pada fungsi konsumsi dan fungsi tabungan masing-masing adalah *autonomous consumption* dan *autonomous saving*.

7. Surplus Konsumen

Surplus konsumen (*consumers surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang.

Fungsi permintaan $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah suatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari P_e hal ini merupakan keuntungan baginya, sebab ia cukup membayar barang tadi dengan harga P_e. Keuntungan lebih semacam inilah yang oleh *Alfred Marshall* disebut surplus konsumen. Secara geometri, besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas area di bawah kurva permintaan, tetapi di atas tingkat harga pasar.



Surplus konsumen atau C_s (singkatan dari *consumers surplus*) tak lain adalah segitiga P_eDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = Q_e$ sebagai batas-bawah dan sebagai batas-atas.

Besarnya surplus konsumen adalah:

$$C_{s^*} = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e$$

Dalam hal fungsi permintaan berbentuk $P = f(Q)$ atau

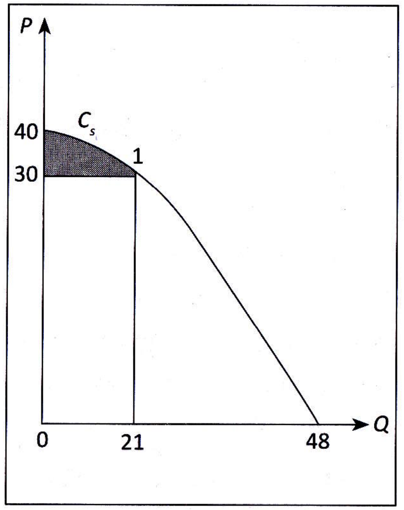
$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP$$

Dalam hal fungsi permintaan berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$ atau penggal kurva permintaan pada sumbu harga.

Dengan demikian:

$$C_{s^*} = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_eP_e = C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP$$

Contoh 1:
Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q = 48 - 0{,}03P^2$. Hitunglah surplus konsumen jika tingkat harga pasar adalah 30!



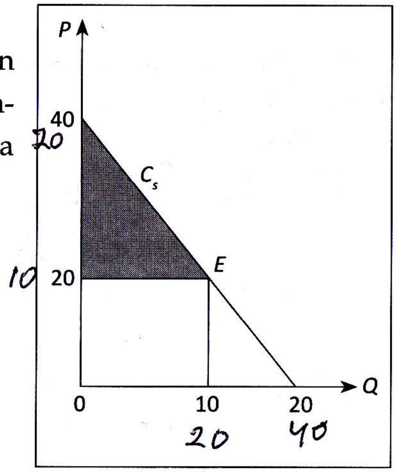
Jawab:
$Q = 48 - 0{,}03P^2$
Jika $P = 0$, $Q = 48$
Jika $Q = 0$, $P = 40 = \hat{P}$
Jika $P = P_e = 30$, $Q = Q_e = 21$

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP = \int_{30}^{40} (48 - 0{,}03P^2)dP$$

$$= \Big[48P - 0{,}01P^3\Big]_{30}^{40} = \{48(40) - 0{,}01(40)^3\} - \{48(30) - 0{,}01(30)^3\}$$

$$= (1920 - 640) - (1440 - 270) = 110$$

Contoh 2:
Hitunglah surplus konsumen dengan dua macam cara untuk fungsi permintaan $Q = 40 - 2P$ yang tingkat harga pasarnya 10.



Jawab:
$Q = 40 - 2P$
$P = 20 - 0{,}50Q$
Jika $P = 0$, $Q = 40$
Jika $Q = 0$, $P = 20 = \hat{P}$
Jika $P_e = 10$, $Q_e = 20$

Cara pertama: $C_s = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_e P_e = \int_0^{20} (20 - 0,50Q)dQ - (20)(10)$

$= \left[20Q - 0,25Q^2\right]_0^{20} - 200 = \{20(20) - 0,25(20)^2\} - \{20(0) - 0,25(0)^2\} - 200$

$= 400 - 100 - 200 = 100$

Cara kedua: $C_s = \int_{P_e}^{P} f(P)dP = \int_0^{20} (40 - 2P)dP$

$= \left[40P - P^2\right]_{10}^{20} = \{40(20) - (20)^2\} - \{40(10) - (10)^2\}$

$= 400 - 300 = 100$

Contoh 3:

Hasrat konsumsi marginal $c' = 0,7 + 0,1x^{-1/2}$. Ditanyakan fungsi konsumsi dan fungsi tabungan bila pada konsumsi c sama dengan pendapatan x, maka $x = 64$.

$C = \int (0,7 + 0,1x^{-1/2})\, dx = 0,7x + 0.2x^{1/2} + c$

Untuk $y = 64$ maka $x = 64$

$64 = 0,7.64 + 0,2.64 + c$

$C = 17,6$

Fungsi konsumsi $C = 0,7x + 0,2x^{1/2} + 17,6$

Tabungan marginal $S' = 1 - c' = 0,3 - 0,1x^{-1/2}$

$S = \int (0,3 - 0,1x^{-1/2})\, dx = 0,3x - 0.2x^{1/2} + c$

Pada pendapatan $x = 64$, maka konsumsi $c = 64$ dan tabungan $s = 0$

$S = 0,3.64 - 0,2.8 = c_1$

$C_1 = -17,6$

Fungsi tabungan $s = 0,32x - 0,2x^{1/2} - 17,6$

Bab 4

PROGRAM LINEAR

Program linear adalah bagian dari matematika yang banyak digunakan, antara lain dalam bidang ekonomi, pertanian dan perdagangan. Dengan menggunakan program linear, seseorang dapat menghitung keuntungan maksimum atau biaya minimum. Hal itu sangat bergantung pada pembatas atau kendala, yaitu sumber daya yang tersedia.

Dalam mempelajari program linear, kita perlu mengingat kembali cara menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel dengan menggunakan grafik. Oleh karena itu, kita awali pembahasan ini dengan mengulang kembali cara menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel.

Setelah hal ini kita pahami dengan baik, kita lanjutkan pembicaraan ini dengan membahas pengertian program linear dan model matematika, menentukan nilai optimum bentuk objektif, dan menyelesaikan soal-soal program linear.

A. SISTEM PERSAMAAN LINEAR

1. Pendahuluan

Sistem persamaan linear yang akan kita bahas adalah sistem persamaan linear yang homogen dan yang tak homogen, yang mempunyai jawab (solusi) dan yang tak mempunyai jawab. Dalam bab ini kita menggunakan cara operasi baris elementer yang juga disebut metode *Gaus-Jordan*. Selain itu juga dengan cara determinan Gramer.

Sistem persamaan linear antara lain muncul di dalam penentuan titik potong dua garis, garis dan bidang, tiga bidang, bidang dan bidang, demikian pula dalam teori rangkaian listrik dan lain-lain.

2. Sistem Persamaan Linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1j}x_j ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2j}x_j ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3j}x_j ... + a_{3n}x_n = b_3$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{ij}x_j ... + a_{in}x_n = b_i$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mj}x_j ... + a_{mn}x_n = b_m \qquad (4.1)$$

Definisi:

Susunan persamaan (4.1) dinamakan sistem persamaan linear mXn, yaitu dengan m adalah persamaan dan n bilangan anu, di mana a_{ij} adalah bilangan real tetap untuk $i = 1, 2, 3, ...,$ dan $j = 1, 2, 3, ... n$. Jika tak semua dari $b_1 = 0$, maka susunan (4.1) dinamakan sistem persamaan linear tak homogen, dan $b_i = 0$, dan untuk setiap i maka (4.1) dinamakan sistem persamaan linear homogen.

Dengan notasi $\sum$ (sigma), susunan (4.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum a_{ij}x_j = b_i \qquad (4.2)$$

Di mana $i = 1, 2, 3, ... m$.

Definisi:

$(r_1, r_2, r_3, ... r_n)$ dinamakan jawab (solusi) dari sistem persamaan linear (4.1) ataupun (4.2) jika memenuhi: $\sum a_{ij}r_j = b_i$, $i = 1, 2, 3, ... m.j = 1$.

B. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA PEUBAH

1. Sistem Persamaan Linear Dua Peubah

Bentuk umum persamaan linear dua peubah adalah $ax + by + c = 0$, dengan a, b, dan c adalah konstanta, a dan b tidak sama dengan nol, sedangkan x dan y adalah peubah pada bilangan real. Grafik persamaan linear dua peubah berbentuk garis lurus. Cara menggambar grafik ini dapat dilakukan dengan menggunakan titik-titik (minimal dua titik) yang terletak pada garis tersebut, kemudian menghubungkannya dengan sebuah garis lurus.

Contoh:

Gambarlah grafik persamaan berikut.

a. $2x + 5y = 10$

b. $x + 2y = -6$

Jawab:

a. Untuk menggambar garis dengan persamaan $2x + 5y = 10$, terlebih dahulu kita tentukan titik-titik yang memenuhi persamaan tersebut. Biasanya, dipilih titik-titik yang merupakan titik potong garis dengan sumbu koordinat.

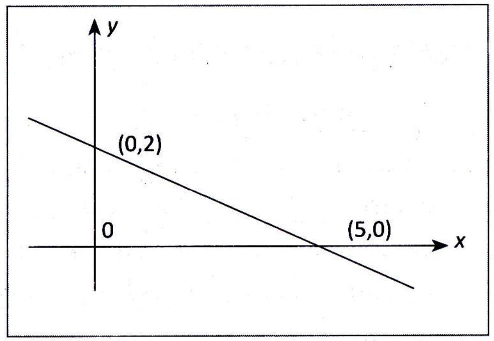
1) Titik potong garis $2x + 5y = 10$ dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$ sehingga $x = 5$. Jadi, titik potongnya adalah (5,0).

2) Titik potong garis $2x + 5y = 10$ dengan sumbu y diperoleh jika $x = 0$ sehingga $y = 2$. Jadi, titik potongnya adalah (0,2).

Hasil-hasil di atas dapat disajikan pada tabel berikut.

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
5	0	(5, 0)

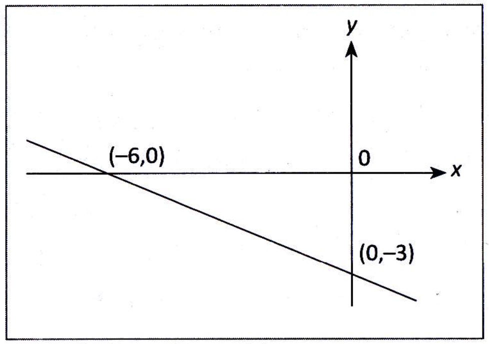
Kemudian, kedua titik tersebut kita gambar pada bidang koordinat dan kita hubungkan dengan garis lurus seperti pada gambar berikut.



b. Untuk menggambar garis dengan persamaan $x + 2y = -6$, kita tentukan titik potong garis dengan sumbu-sumbu koordinat, seperti pada tabel berikut.

x	y	(x, y)
0	3	(0, −3)
6	0	(−6, 0)

Kemudian, kedua titik tersebut kita gambar pada bidang koordinat dan kita hubungkan dengan garis lurus seperti pada gambar berikut.



Bentuk umum persamaan linear dua peubah adalah:

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ dan } a_2x + b_2y = c_2$$

Dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 konstanta real, a_1 dan a_2 adalah koefisien dari peubah x, b_1, dan b_2 adalah koefisien dari peubah y. Nilai-nilai pengganti peubah dan yang membuat sistem persamaan di atas bernilai benar disebut *penyelesaian* sistem persamaan itu. Adapun himpunan penyelesaiannya beranggotakan penyelesaian-penyelesaian sistem persamaan tersebut.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah, dapat digunakan metode grafik, substitusi, eliminasi, gabungan substitusi dan eliminasi, determinan, serta matriks. Pada pembahasan ini kita hanya akan mempelajari cara menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah dengan metode substitusi, eliminasi, dan gabungan keduanya.

2. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Peubah dengan Metode Substitusi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah dengan metode substitusi, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

a. Langkah 1:
Pilihlah salah satu persamaan, kemudian nyatakan salah satu peubah persamaan tersebut ke dalam peubah yang lain sehingga diperoleh persamaan baru.

b. Langkah 2:
Substitusikan persamaan yang diperoleh pada langkah 1 ke persamaan yang lainnya sehingga diperoleh sebuah persamaan linear satu peubah. Kemudian selesaikan persamaan tersebut sehingga diperoleh nilai salah satu peubah.

c. Langkah 3:
Substitusikan nilai peubah yang diperoleh pada langkah 2 ke persamaan yang diperoleh pada langkah 1 sehingga diperoleh nilai peubah kedua.

Contoh:

Dengan metode substitusi, tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut!

a. $2x + 3y = 4$
   $2x - y = 4$

b. $2x + 3y - 9 = 0$
   $3x - 2y - 10 = 0$

Jawab:

a. $2x + 3y = 4$ (1)
   $2x - y = 4$ (2)

Langkah 1:

Dari persamaan (2), diperoleh $2x - y = 4 \Leftrightarrow y = 2x - 4$ (3)

Langkah 2:

Persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (1):

$2x + 3y = 4$

$\Leftrightarrow 2x + 3(2x - 4) = 4$

$\Leftrightarrow 2x + 6x - 12 = 4$

$\Leftrightarrow 8x = 16$

$\Leftrightarrow x = 2$ (4)

Langkah 3:

Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (3), diperoleh:

$y = 2x - 4$

$\Leftrightarrow y = 2(2) - 4$

$\Leftrightarrow y = 0$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = 2$ dan $y = 0$.

b. $2x + 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y = 9$ (1)
   $3x - 2y - 10 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = 10$ (2)

Langkah 1:

Dari persamaan (1), diperoleh

$2x + 3y = 9 \Leftrightarrow 2x = 9 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{9-3y}{2}$ (3)

Langkah 2:

Persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (2), diperoleh:

$3x - 2y = 10$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{9-3y}{2}\right) - 2y = 10$

$\Leftrightarrow \frac{27-9y}{2} - 2y = 10$

$\Leftrightarrow 27 - 9y - 4y = 20$

$\Leftrightarrow -13y = -7$

$\Leftrightarrow y = \frac{7}{13}$ (4)

Langkah 3:

Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (3), diperoleh:

$x = \frac{9-3y}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{9-3\left(\frac{7}{13}\right)}{2} = \frac{\frac{96}{13}}{2} = \frac{48}{13}$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = \frac{48}{13}$ dan $y = \frac{7}{13}$.

3. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Peubah dengan Metode Eliminasi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah dengan metode eliminasi, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

a. Langkah 1:

Eliminasikan (hilangkan) salah satu peubah, misalnya peubah x dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan suku-suku yang sama dari kedua persamaan tersebut sehingga diperoleh nilai peubah yang kedua (peubah y).

b. Langkah 2:

Eliminasikan peubah yang kedua (peubah y) sehingga diperoleh nilai peubah x.

Contoh:

Dengan metode eliminasi, tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut!

a. $2x + 4y = 6$
$3x + 2y = 1$

b. $x = 2y + 9$
$x + 5y = -5$

Jawab:

a. Langkah 1:

Mengeliminasi peubah x untuk mendapatkan nilai y.

$2x + 4y = 6 \mid \times 3 \rightarrow 6x + 12y = 18$

$3x + 2y = 1 \mid \times 2 \rightarrow \underline{6x + 4y \;\; = 2} \;\; -$

$8y = 16$

$y = 2$

b. Langkah 2:

Mengeliminasi peubah y untuk mendapatkan nilai x.

$2x + 4y = 6 \mid \times 1 \rightarrow 2x + 4y = 6$

$3x + 2y = 1 \mid \times 2 \rightarrow \underline{6x + 4y \;\; = 2} \;\; -$

$-4x = 4$

$x = -1$

Jadi himpunan penyelesaian sistem persamaan tersebut: $x = -1$ dan $y = 2$.

C. MASALAH KEHIDUPAN SEHARI-HARI YANG MEMUAT SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang bila ditilik dari materi matematika adalah masalah yang memuat persamaan atau sistem persamaan linear dua variabel.

Contoh 1:

Pak Joko merupakan petani jeruk. Pada musim panen Pak Joko memetik jeruknya seminggu sekali. Pada minggu ke-4 Pak Joko memetik jeruknya 25 kg dan pada minggu ke-7 adalah 31 kg dan ternyata grafik hasil panen jeruk Pak Joko membentuk sebuah garis lurus. Tentukan:

a. Persamaan garis lurus hasil panen jeruk Pak Joko!
b. Berapakah jeruk yang dipetik pada minggu pertama?

Jawab:

a.

Minggu ke	Jumlah jeruk yang dipetik (kg)
	$y_1 = 25$
$x_2 = 7$	$y_2 = 31$

Misalkan waktu = x dan jumlah jeruk yang dipetik = y.

Persamaan garisnya:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{y - y}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{y - 25}{31 - 25} = \frac{x - 4}{7 - 4}$$

$$y - 25 = \frac{6}{3}(x - 4) \rightarrow y - 25 = (2x - 8)$$

$$y = 2x + 17$$

Jadi, jumlah jeruk y yang dipetik adalah $y = 2x + 17$.

b. Jumlah jeruk yang dipetik pada minggu pertama adalah $x = 1$. Substitusikan $x = 1$ ke persamaan $y = 2x + 17 \rightarrow y = 2(1) + 17 = 19$. Jadi, jumlah jeruk yang dipetik pada minggu pertama adalah 19 kg.

Contoh 2:

Tomy berada pada jarak 6 km terhadap Andrew. Bila mereka berjalan berlawanan arah (saling mendekati), mereka akan bertemu dalam 1 jam. Jika mereka berjalan dalam arah yang sama Tomy akan menyusul Andrew dalam 3 jam. Tentukan kecepatan masing-masing!

Jawab:

Misalnya kecepatan Tomy adalah x km/jam dan kecepatan Andrew y km/jam.

Jika mereka berlawanan arah maka diperoleh:

$x + y = 6$ (1)

Jika mereka berjalan dalam arah yang sama diperoleh:

$3x = 3y + 6$

$x = y + 2$ (2)

Substitusikan persamaan (2) ke dalam persamaan (1), diperoleh:

$(y + 2) + y = 6$

$2y = 6 - 2$

$2y = 4$

$y = 2$ (3)

Substitusikan (3) ke persamaan (2) diperoleh:

$x = 2 + 2 = 4, x = 4.$

Jadi, kecepatan Tomy adalah 4 km/jam sedangkan Andrew adalah 2 km/jam.

Latihan Soal

1. Tentukan penyelesaian dari:
   a. $x - y = 5$ dan $2x + y = 4$
   b. $2x + 4y = 22$ dan $3x - 5y = -11$
2. Suatu persegi panjang memiliki ukuran panjang 5 cm lebih dari lebarnya. Bila lebar persegi panjang tersebut x cm dan kelilingnya y cm. Tuliskan persamaan yang sesuai dengan masalah di atas!
3. Sekarang umur Tuti sama dengan dua kali umur Bety. Lima tahun yang akan datang umur Tuti 7/4 umur Bety. Berapakah umur Tuti sekarang?

Inspirasi

Sebuah tempat parkir dengan luas 176 m^2 hanya dapat menampung 20 bus dan mobil. Tiap mobil membutuhkan tempat parkir seluas 4 m^2 dan untuk bus seluas 20 m^2. Setiap kendaraan yang menggunakan tempat parkir tersebut, dikenakan biaya sesuai jenisnya. Biaya parkir untuk mobil Rp2.000,00 per jam dan untuk bus Rp4.000,00 per jam. Jika dalam satu jam tidak ada kendaraan yang keluar dan masuk, berapakah hasil maksimum yang dapat diperoleh dari tempat parkir tersebut dalam satu jam?

Setelah membaca kasus di atas, apakah kalian mengetahui bagaimana cara memecahkan masalah tersebut? Kasus itu masih berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV), tetapi memiliki perbedaan dengan sistem persamaan linear.

Pada sistem persamaan linear tidak menggunakan kata-kata seperti maksimum, hanya dapat menampung, atau bebas tertentu. Jadi, bentuk SPLDV dapat ditulis sebagai:

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ dan } a_2x + b_2y = c_2$$

Selanjutnya, nilai x dan y dapat dicari menggunakan cara eliminasi atau substitusi. Karena kasus di atas memuat kata-kata maksimum dan hanya dapat menampung, maka bentuk SPLDV berubah menjadi:

$$a_1x + b_1y \le c_1 \text{ dan } a_2x + b_2y \le c_2$$

Dengan melihat kedua bentuk di atas, dapatkah kalian membedakannya? Jelas terlihat pada bentuk kedua dihubungkan oleh tanda "kurang dari atau sama dengan". Bentuk seperti ini dinamakan program linear. Secara umum, pada program linear terdapat tanda pertidaksamaan, yaitu <, >, ≤ atau ≥. Tanda-tanda ini digunakan tergantung dari permasalahannya.

Jadi, hal terpenting sebelum menyelesaikan masalah mengenai program linear adalah memahami dan mengerti permasalahan itu sendiri sehingga bentuk program linear yang kita buat menjadi tepat. Jika kita tidak memahami permasalahan yang dihadapi, tentu penyelesaiannya menjadi tidak tepat.

Cara penyelesaian masalah pada program linear agak berbeda dengan sistem persamaan linear, karena kita memerlukan beberapa tahap, salah satunya adalah membuat grafik. Lalu, bagaimana selanjutnya?

Untuk mengetahui lebih jauh lagi mengenai program linear, kalian dapat mempelajari bab ini, sehingga kasus di atas dapat diselesaikan.

1. Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

a. *Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel*

Kita ingat bahwa suatu pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang memuat salah satu dari tanda-tanda ketidaksamaan, seperti lebih dari (>), tidak kurang dari (≥), kurang dari (<), atau tidak lebih dari (≤). Untuk memahami pengertian pertidaksamaan linear dengan dua variabel, simaklah beberapa bentuk hubungan berikut.

1) $x - 3y < 5$
2) $2x + y \leq 4$
3) $x - y > -3$
4) $2x + 5y \geq 10$

Dari hubungan-hubungan di atas dapat diamati dua hal, yaitu sebagai berikut.

1) Hubungan itu memuat salah satu lambang ketidaksamaan yang disebut *pertidaksamaan*.
2) Hubungan itu memuat dua variabel (variabel-variabel x dan y) dan masing-masing variabel berpangkat satu (linear), disebut pertidaksamaan *linear dengan dua variabel*.

Bertolak dari pengamatan itu, maka bentuk-bentuk hubungan di atas dinamakan sebagai *pertidaksamaan linear dengan dua variabel*. Dengan demikian, pertidaksamaan linear dengan dua variabel dapat didefinisikan sebagai berikut.

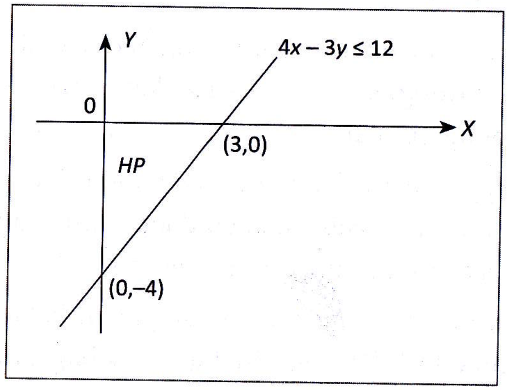
Pertidaksamaan linear dengan dua variabel adalah suatu pertidaksamaan yang di dalamnya memuat dua variabel dan masing-masing variabel itu berderajat satu.

Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel $ax + by \leq c$, a, b, c = bilangan tetap, x dan $y \in R$.

Secara umum dapat ditentukan dengan menggunakan langkah-langkah (algoritma) sebagai berikut.

1) Gambarlah garis $ax + by = c$ pada sebuah bidang Cartesius dengan cara menghitung titik-titik potong garis dengan sumbu X dan titik potong garis dengan sumbu Y. Garis $ax + by = c$ ini sebagai bidang Cartesius menjadi dua bagian bidang.
2) Ambil sebarang titik uji $P(x_1, y_1)$ yang terletak di luar garis $ax + by = c$ dan hitunglah nilai $ax_1 + by_1$, kemudian bandingkan nilai $ax_1 + by_1$ dengan nilai c.
   a) Jika $ax_1 + by_1 \leq c$, maka bagian belahan bidang yang memuat titik $P(x_1, y_1)$ ditetapkan sebagai daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $ax_1 + by_1 \leq c$.
   b) Sebaliknya jika $ax_1 + by_1 \leq c$, maka bagian belahan bidang yang memuat titik $P(x_1, y_1)$ ditetapkan sebagai daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $ax_1 + by_1 \leq c$.
3) Tandailah bagian belahan bidang yang menunjukkan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan dengan menggunakan raster, sedangkan bagian belahan yang tidak diraster (daerah bersih) menunjukkan bukan daerah himpunan penyelesaian.
   a) Gambarlah garis $4x - 3y \leq 12$.
      Untuk $x = 0$, diperoleh $y = -4 \Rightarrow$ titik potong dengan sumbu Y adalah $(0, -4)$.
      Untuk $y = 0$, diperoleh $x = 3 \Rightarrow$ titik potong dengan sumbu X adalah $(3, 0)$.
      Garis $4x - 3y \leq 12$ digambarkan pada bidang Cartesius dengan cara menghubungkan titik $(0, -4)$ dan titik $(3, 0)$.
   b) Ambil titik uji $P(0, 0)$, sehingga diperoleh hubungan:
      $4(0) - 3(0) = 0 < 12$ (benar)
      Karena benar, maka daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $4x - 3y \leq 12$ adalah belahan bidang yang memuat titik $P(0, 0)$.

c) Daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan $4x - 3y \leq 12$ ditandai dengan raster sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut.



b. ***Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel***

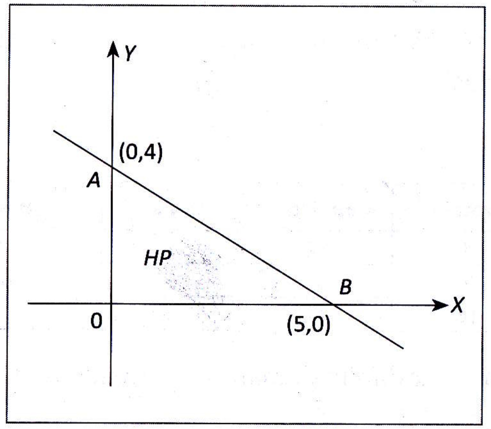
Sistem pertidaksamaan linear dua variabel terbentuk dari dua atau lebih pertidaksamaan linear dua variabel dengan variabel-variabel yang sama. Sebagai contoh:

1) $x + 3y \leq 3$, $2x - 3y \geq 4$ dan $x + y \leq 8$, membentuk *sistem* pertidaksamaan linear dengan dua variabel.
2) $a + 3b \leq 4$, $2k - l \geq 1$, dan $3x + y \leq 5$, *bukan* merupakan *sistem* pertidaksamaan linear dengan dua variabel.

Lalu timbul pertanyaan, bagaimana cara menentukan daerah atau grafik himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel? Daerah atau grafik dari sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel merupakan *irisan* atau *interseksi* dari masing-masing daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel yang membentuknya. Cara menentukan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel itu dapat dipelajari melalui contoh berikut ini.

Contoh:
Gambarlah grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel: $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $4x + 5y \leq 20$, untuk x dan $y \in R$!

Jawab:
$X = 0$, $y = 0{,}4x + 5y = 20$, jika $x = 0$ maka $y = 4$ berarti titik potong sumbu y adalah (0,4). Jika $y = 0$ maka $x = 5$ berarti titik potong sumbu x adalah (5,0).



Pertama-tama digambarkan masing-masing grafik himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan-pertidaksamaan yang membentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel itu. Grafik himpunan penyelesaian $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4x + 5y \leq 20$ diperlihatkan pada gambar di atas dan daerah penyelesaiannya adalah daerah segi tiga OAB.

2. Model Matematika dan Program Linear

a. Model Matematika dari Masalah Program Linear

Merancang atau membuat model matematika dalam suatu masalah program linear adalah menentukan *fungsi tujuan* beserta *kendala* yang harus dipenuhi dalam masalah program linear itu. Merancang model matematika dalam suatu masalah program linear (yang memuat fungsi tujuan dan kendala yang harus dipenuhi) dapat dipelajari melalui contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1:

Dalam satu minggu tiap orang membutuhkan paling sedikit 16 unit protein, 24 unit karbohidrat dan 18 unit lemak. Satu kg makanan A mengandung 4 unit protein, 12 unit karbohidrat dan 2 unit lemak. Satu kg makanan B mengandung 2 unit protein, 2 unit karbohidrat dan 6 unit lemak. Jika harga 1 kg makanan A = Rp17.000,00 dan makanan B = Rp8.000,00, tulislah model matematika yang memenuhi masalah tersebut!

Jawab:

	Protein	Karbohidrat	Lemak	Harga/Kg
Makanan *A*	4	12	2	Rp17.000
Makanan *B*	2	2	6	Rp8.000
Tersedia	16	24	18	

Pemisalan makanan $A = x$ dan makanan $B = y$, maka model matematikanya dapat ditulis:

$4x + 2y \geq 16 \Rightarrow 2x + y \geq 8$

$12x + 2y \geq 24 \Rightarrow 6x + y \geq 12$

$2x + 6y \geq 18 \Rightarrow x + 3y \geq 9$

$x \geq 0, y \geq 0$

$z = 17.000x + 8.000y$

Contoh 2:

Sebuah industri kecil memproduksi dua jenis barang (barang A dan barang B) dengan menggunakan dua mesin (mesin M_1 dan mesin M_2). Satu unit barang A dibuat dengan mengoperasikan mesin M_1 selama 2 menit dan mesin M_2 selama 4 menit, sedangkan satu unit barang B dibuat dengan mengoperasikan mesin M_1 selama 8 menit

dan mesin M_2 selama 4 menit. Dalam satu hari mesin M_1 dan mesin M_2 beroperasi tidak lebih dari 8 jam. Keuntungan bersih yang diperoleh dari satu unit barang A adalah Rp250,00 dan satu unit barang B adalah Rp500,00. Buatlah model matematika dari masalah program linear di atas jika keuntungan bersih diharapkan mencapai sebesar-besarnya!

Jawab:

Untuk memudahkan dalam membuat model matematika, data atau informasi yang ada dalam soal yang dirangkum dalam sebuah tabel sebagaimana yang diperlihatkan dalam tabel berikut.

	Barang A	Barang B	Operasi Setiap Hari
Mesin M_1	2 menit	8 menit	480 menit
Mesin M_2	4 menit	4 menit	480 menit
Keuntungan	Rp250,00	Rp500,00	

Misalkan dalam satu hari:

Barang A diproduksi sebanyak x buah dan barang B diproduksi sebanyak y buah. Waktu yang diperlukan untuk mengoperasikan mesin $M_1 = (2x + 8y)$ menit. Waktu yang diperlukan untuk mengoperasikan mesin $M_2 = (4x + 4y)$ menit. Karena mesin M_1 dan mesin M_2 beroperasi tidak lebih dari 8 jam (480 menit) dalam satu hari, maka haruslah dipenuhi hubungan:

$2x + 8y \leq 480$ atau $x + 4y \leq 240$

$4x + 4y \leq 480$ atau $x + y \leq 120$

Dengan mengingat bahwa x dan y menyatakan banyak barang, maka x dan y mustahil negatif dan harus merupakan bilangan cacah. Selain itu, harus memenuhi hubungan: $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, dengan x dan $y \in C$.

Keuntungan bersih yang diperoleh jika barang A diproduksi x buah dan barang B diproduksi y buah ditentukan oleh hubungan:

$K = 250x + 500y$

Jadi, model matematika dari contoh 2 tersebut adalah:

1) $x \geq 0, y \geq 0, x + 4y \leq 240$, dan $x + y \leq 120$, dengan x dan $y \in C$. Bagian ini merupakan *sistem pertidaksamaan linear dua variabel.*
2) $K = 250x + 500y$ yang akan ditentukan *nilai maksimumnya.* Bagian ini merupakan *fungsi linear dua variabel.*

Contoh 3:

Sebuah pabrik farmasi menyediakan dua jenis bahan campuran, yaitu campuran A dan campuran B. Bahan-bahan dasar yang terdapat dalam tiap kg campuran A dan tiap kg campuran B disajikan dalam tabel berikut ini.

	Bahan *A* (*x*)	Bahan *B* (*y*)	Persediaan (kg)
Bahan I	0,4	0,8	4
Bahan II	0,6	0,2	3

Dengan menggunakan bahan campuran A dan campuran B akan dibuat campuran C, sekurang-kurangnya mengandung bahan I sebanyak 4 kg dan sekurang-kurangnya mengandung bahan II sebanyak 3 kg. Harga tiap kg campuran A adalah Rp20.000,00 dan tiap kg campuran B adalah Rp10.000,00. Buatlah model matematika untuk masalah program linear tersebut jika biaya untuk membuat campuran C diharapkan semurah-murahnya!

Jawab:

Misalkan campuran C dengan cara mengkombinasikan campuran A sebanyak x kg dan campuran B sebanyak y kg.

Bahan I yang terkandung dalam campuran C sebanyak $0{,}4x + 0{,}8y$ kg. Campuran C sekurang-kurangnya mengandung bahan I sebanyak 4 kg, maka diperoleh hubungan:

$0{,}4x + 0{,}8y \geq 4$

$\Leftrightarrow x + 2y \geq 10$

Bahan II yang terkandung dalam campuran C sebanyak $0{,}6x + 0{,}2y$ kg, sehingga campuran C sekurang-kurangnya mengandung bahan II sebanyak 3 kg, maka diperoleh hubungan:

$0{,}6x + 0{,}2y \geq 3$

$\Leftrightarrow 3x + y \geq 15$

Karena x dan y menyatakan berat campuran, maka x dan y mustahil negatif dan harus merupakan bilangan real. Dengan demikian, x dan y harus memenuhi hubungan:

$x \geq 0$ dan $y \geq 0$ dan y dengan x dan $y \in R$

Biaya untuk membuat campuran C yang merupakan kombinasi campuran A sebanyak x kg dan campuran B sebanyak y kg, ditentukan oleh hubungan: $Z = 20.000X + 10.000Y$

Jadi model matematika dari contoh 3 adalah:

1) $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \geq 10$, dan $3x + y \geq 15$, dengan x dan $y \in R$. Bagian ini merupakan sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
2) $Z = 20.000x + 10.000y$ yang akan ditentukan nilai minimumnya. Bagian ini merupakan fungsi linear dua variabel

Dari contoh-contoh tersebut, perhatikan bahwa model matematika yang diperoleh dari suatu masalah program linear terdiri atas dua bagian. Kedua bagian tersebut adalah sebagai berikut.

1) Bagian ini berbentuk sistem pertidaksamaan linear satu variabel. Bagian ini merupakan *kendala* (*syarat* atau *pembatas*) yang harus dipenuhi variabel-variabelnya.
2) Bagian yang berbentuk fungsi linear dua variabel. Bagian ini merupakan tujuan yang akan *dioptimumkan* (*dimaksimum* atau *diminimumkan*). Oleh karena itu, fungsi linear dua variabel ini disebut fungsi tujuan atau fungsi objektif. Jika variabel-variabel yang terlibat dalam fungsi ini adalah x dan y, maka fungsi tujuan atau fungsi objektif tadi dilambangkan sebagai $f(x,y)$.

Secara umum, fungsi tujuan mempunyai bentuk:

$f(x, y) = 20.000x + 10.000y$ (dengan x dan $y \in R$ yang tidak sama dengan nol).

Dengan kendala:

$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \geq 10$, dan $3x + y \geq 15$, dengan x dan $y \in R$.

3. Menentukan Nilai Optimum dari Fungsi Tujuan

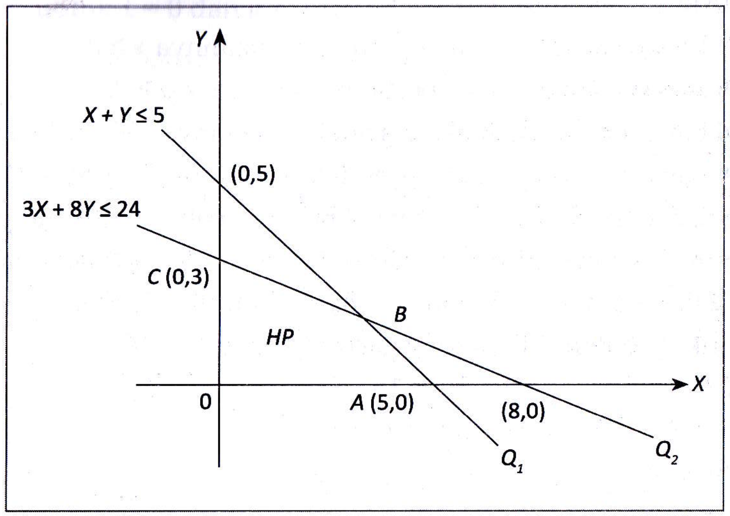
Metode grafik cocok digunakan untuk memecahkan masalah program linear yang sederhana, yaitu program linear yang model matematikanya berbentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel dan fungsi linear dua variabel. Metode grafik sendiri ada dua macam, yaitu *metode uji titik pojok* dan *metode garis selidik.*

a. *Menentukan Nilai Optimum Fungsi Tujuan dengan Metode Uji Titik Pojok*

Menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan dengan metode uji titik pojok dapat dikerjakan melalui langkah-langkah berikut.

1) Buatlah model matematika dari masalah program linear. Model matematika ini memuat fungsi tujuan (berbentuk fungsi linear dua variabel) beserta kendala-kendala (berbentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel) yang harus dipenuhi.
2) Gambarlah grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel, kemudian tentukan titik-titik pojok pada grafik himpunan penyelesaian tersebut.
3) Hitunglah nilai fungsi tujuan $f(x, y) = ax + by$ untuk titik-titik pojok yang diperoleh pada langkah 2.
4) Berdasarkan hasil perhitungan pada langkah 3, nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi tujuan $f(x, y) = ax + by$ dapat ditentukan. Begitu pula nilai x dan nilai y yang menyebabkan fungsi tujuan mencapai nilai optimum.
5) Tafsirkan nilai optimum fungsi tujuan yang diperoleh sebagai penyelesaian akhir dari masalah program linear.

Contoh 1:



1) Daerah segi empat *OABC* merupakan grafik himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Tentukan sistem pertidaksamaan linear dua variabel itu.
2) Tentukan titik-titik (x, y) pada daerah himpunan penyelesaian pada gambar di atas untuk x dan $y \in C$ (C adalah himpunan bilangan cacah).
3) Hitunglah nilai dari bentuk $(2x + 3y)$ untuk titik-titik yang diperoleh soal 2.
4) Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari bentuk $(2x + 3y)$ serta untuk titik-titik mana nilai-nilai itu tercapai.

Jawab:

1) Garis Q_1 melalui titik (5, 0) dan (0, 5), maka persamaannya adalah

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \Leftrightarrow x + y = 5$$

Garis Q_2 melalui titik (8,0) dan (0,3), maka persamaannya adalah

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 8y = 24$$

Daerah himpunan penyelesaian itu terletak pada segi empat OABC.

Di kanan sumbu Y, maka pertidaksamaannya $x \geq 0$.
Di atas sumbu X, maka pertidaksamaannya $y \geq 0$.
Di bawah garis Q_1, maka pertidaksamaannya $x + y \leq 5$.
Di bawah garis Q_2, maka pertidaksamaannya $3x + 8y \leq 24$.
Jadi, daerah pada segi empat OABC merupakan grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel: $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5$, dan $3x + 8y \leq 24$ untuk $x, y \in R$

Titik B adalah titik potong garis Q_1 dan Q_2, yaitu:

$$\begin{array}{ll} X + Y = 5 & 3x + 3y = 15 \\ 3x + 8y = 24 \rightarrow & \underline{3x + 8y = 24} \; - \end{array}$$

$-5y = -9$

$Y = 1{,}8$

$$\begin{array}{ll} X + Y = 5 & 8x + 8y = 40 \\ 3x + 8y = 24 \rightarrow & \underline{3x + 8y = 24} \; - \end{array}$$

$5x = 16$

$x = 3{,}2$

Jadi, koordinat titik B (3,2; 1,8).

2) Berdasarkan Gambar 4.5, titik-titik (x, y) pada daerah himpunan penyelesaian untuk x dan $y \in C$ adalah titik-titik dengan koordinat: $O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(3{,}2; 1{,}8)$ dan $C(0,3)$.

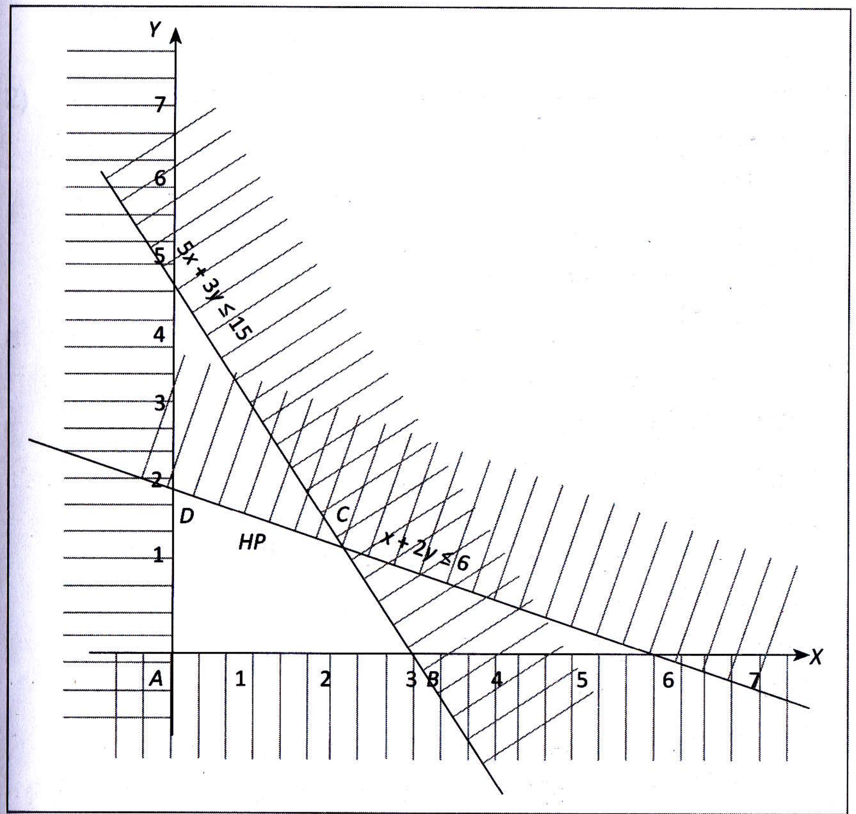
3) Nilai dari bentuk $(2x + 3y)$ untuk titik-titik yang diperoleh pada hasil 2 adalah:
pada titik $O(0,0)$ didapat 0;
pada titik $A(5,0)$ didapat 10;
pada titik $B(3{,}2; 1{,}8)$ didapat 11,8; dan
pada titik $C(0,3)$ didapat 9.

4) Berdasarkan nilai-nilai di atas dapat ditetapkan bahwa:
   a) nilai maksimum dari bentuk $2x + 3y$ sama dengan 11,8, dicapai untuk $x = 3{,}2$ dan $y = 1{,}8$ atau dicapai di titik (3,2; 1,8);

   b) nilai minimum dari bentuk $2x + 3y$ sama dengan 0, dicapai untuk $x = 0$ dan $y = 0$ atau dicapai di titik (0,0).

Perhatikan bahwa nilai optimum (nilai maksimum dan nilai minimum) dari bentuk $2x + 3y$ dicapai di titik (3,2; 1,8) dan titik (0,0). Titik (0, 0) merupakan *titik pojok,* sedangkan titik (3,2; 1,8) merupakan *titik garis Q_1 dan Q_2* pada daerah himpunan penyelesaiannya.

Contoh 2:
Pada gambar berikut, daerah yang tidak diarsir merupakan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear.



1) Tulislah model matematika atau pertidaksamaan linear yang memenuhi daerah tersebut.
2) Hitung nilai maksimum dan minimum $f(x,y) = z = x + 2y$.

Jawab:

Persamaan garis pada titik (0,5) dan (3,0)

$$PG = \frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$$

$$\frac{y-5}{0-5} = \frac{x-0}{3-0} \rightarrow \frac{y-5}{-5} = \frac{x}{3}$$

$(-5)x = 3(y - 5)$

$-5x = 3y - 15$

$5x + 3y = 15$ (1)

Persamaan garis pada titik (0,3) dan (6,0)

$$PG = \frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$$

$$\frac{y-3}{0-3} = \frac{x-0}{6-0} \rightarrow \frac{y-3}{-3} = \frac{x}{6}$$

$(-3)x = 6(y - 3)$

$-3x = 6y - 18$

$(3x + 6y = 18) \times \frac{1}{3}$

$x + 2y = 6$ (2)

1) Model matematika atau pertidaksamaan linier

$5x + 3y = 15$ (1)

Misal $(x, y) = (0,0)$

Maka $5x + 3y = 15$

$5(0) + 3(0) = 15$

$0 + 0 = 15$

$0 \leq 15$

$x + 2y = 6$ (2)

Misal $(x, y) = (0, 0)$

Maka $x + 2y = 6$

$0 + 2(0) = 6$

$0 + 0 = 6$

$0 \leq 15$

Jadi, model matematikanya adalah:

$5x + 3y \leq 15$

$x + 2y \leq 6$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

2) Nilai maksimum dan minimum

Titik C = titik potong

$$\begin{array}{ll|l} 5x + 3y = 15 & \times 1 \rightarrow & 5x + 3y = 15 \\ x + 2y = 6 & \times 5 \rightarrow & 5x + 10y = 30 \\ \hline & & -7y = -15 \\ & & y = \frac{15}{7} \end{array}$$

$$y = \frac{15}{7} \rightarrow x + 2y = 6$$

$$x + 2\left[\frac{15}{7}\right] = 6$$

$$x + \left[\frac{30}{7}\right] = 6$$

$$x = 6 - \frac{30}{7}$$

$$x = \frac{12}{7}$$

Maka titik $C\,(x, y) = \left[\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right]$

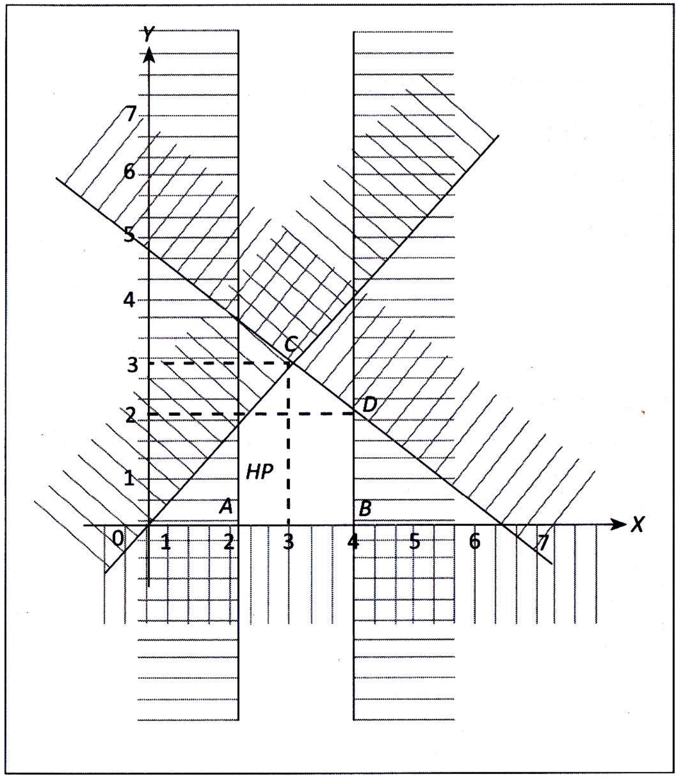
Tabel Optimum

Titik	x	x	Z = x + 2y
A	0	0	0
B	3	0	3
C	12/7	15/7	6
D	0	3	6

Jadi nilai maksimumnya adalah 6 pada titik $\left[\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right]$ dan (0,3), nilai minimumnya adalah 3 pada titik (3,0).

Contoh 3:

Hitunglah nilai maksimum dan minimum $f(x,y) = 7x + 5y$, daerah *HP* pada gambar berikut!



Jawab:

Diketahui: titik A (2,0), titik B (4,0), titik C (3,3), titik D (4,2), dan titik E (4,0).

Tabel Optimum

Titik	x	y	f(x,y) = 7x + 5y
A	2	0	14
B	4	0	24
C	3	3	36
D	4	2	38
E	4	0	28

Jadi, nilai minimumnya adalah 14 pada titik (2,0) dan nilai maksimumnya adalah 38 pada titik (4,2).

Contoh 4:

Tentukan nilai minimum dan maksimum dari $z = 3x + 6y$ yang memenuhi syarat $4x + y \geq 20$, $x + y \leq 20$, $x + y \geq 10$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$!

Jawab:

1) $4x + y \geq 20 \rightarrow$ Jika $x = 0$ maka $y = 20$, dan didapat nilai $(x,y) \rightarrow (0,20)$
   Jika $y = 0$ maka $x = 5$, dan didapat nilai $(x,y) \rightarrow (5,0)$
2) $x + y \leq 20 \rightarrow$ Jika $x = 0$ maka $y = 20$, dan didapat nilai $(x,y) \rightarrow (0,20)$
   Jika $y = 0$ maka $x = 20$, dan didapat nilai $(x,y) \rightarrow (20,0)$
3) $x + y \geq 10 \rightarrow$ Jika $x = 0$ maka $y = 10$, dan didapat nilai $(x,y) \rightarrow (0,10)$
   Jika $y = 0$ maka $x = 10$, dan didapat nilai $(x,y) \rightarrow (10,0)$

Mencari titik C:

$$
\begin{array}{rl|l|rl}
4x + y = 20 & & \times 1 & 4x + y = 20 & \\
x + y = 20 & & \times 4 & \underline{4x + 4y = 80} & - \\
 & & & -3y = -60 & \\
 & & & y = 20 &
\end{array}
$$

Menyubstitusikan titik-titik pada daerah himpunan penyelesaian ke dalam fungsi objektif $5x + 10y$:

$(0,32) \Rightarrow 5(0) + 10(32) = 320$

$(6,20) \Rightarrow 5(6) + 10(20) = 230$

$(24,8) \Rightarrow 5(24) + 10(8) = 200$

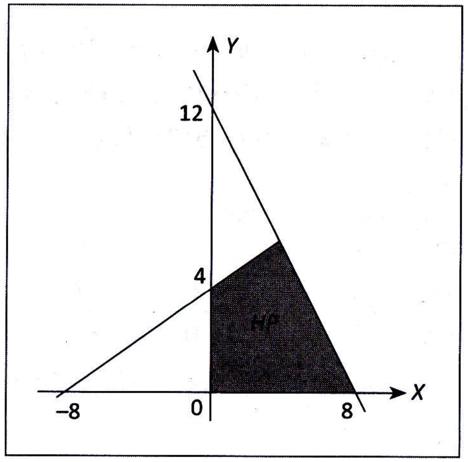
$(48,0) \Rightarrow 5(48) + 10(0) = 240$

Maka, nilai minimumnya adalah 200 dan nilai maksimumnya adalah 320.

Contoh 6:

Tentukan nilai maksimum dari $f(x,y) = 2x + 3y$ pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan:

$3x + 2y \leq 24 \rightarrow (0,12), (8,0); -x + 2y \leq 8 \rightarrow (0,4), (-8,0); x \geq 0$ dan $y \geq 0$.



Jawab:

$\Rightarrow$ $3x + 2y = 24$
$\underline{-x + 2y = 8}\ -$
$4x = 16$
$x = 4$
$Z = 2x + 3y$

$\Rightarrow$ $-x + 2y = 8$
$\underline{-4 + 2y = 8}$
$2y = 12, y = 6$

$\Rightarrow$ $(0,4) = 12$
$\Rightarrow$ $(4,6) = 26 \Rightarrow$ nilai maksimum
$\Rightarrow$ $(8,0) = 16$

Jadi nilai maksimum adalah 26 pada titik (4,6).

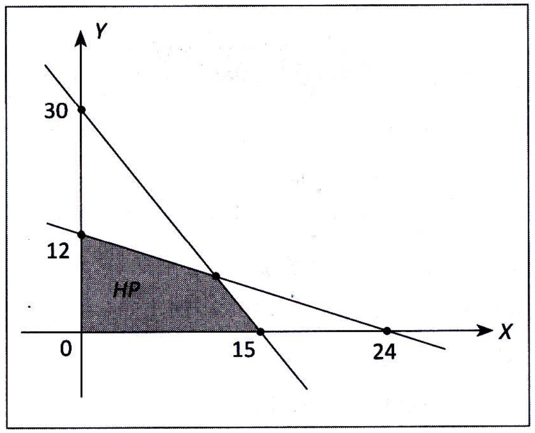
Contoh 7:

Tentukan nilai maksimum fungsi sasaran $Z = 8x + 6y$ dengan syarat $4x + 2y \leq 60; 2x + 4y \leq 48; x \geq 0$ dan $y \geq 0$!

Jawab:

$Z = 8x + 6y$

1) $4x + 2y \leq 60$ (diperkecil atau dibagi 2 setiap koefisiennya) sehingga menjadi $2x + y \leq 30$, kemudian mencari nilai (x,y), yaitu jika $x = 0 \rightarrow y = 30; y = 0 \rightarrow x = \frac{30}{2} = 15$. Jadi, titik-titiknya adalah (0,30) dan (15,0).
2) $2x + 4y \leq 48$ (diperkecil atau dibagi 2 setiap koefisiennya) sehingga menjadi $x + 2y \leq 24$ kemudian mencari nilai (x,y), yaitu jika $x = 0 \rightarrow y = 12; y = 0 \rightarrow x = 24$. Jadi, titik-titiknya adalah (0,12) dan (24,0).
3) $x \geq 0$
4) $y \geq 0$



$$\Rightarrow \quad 2x + y \le 30 \;|\times 1|\; 2x + y = 30 \qquad \Rightarrow \quad 2x + y = 30$$

$$x + 2y \le 24 \;|\times 2|\; \underline{2x + 4y = 48} \; - \qquad 2x + 6 = 30$$

$$-3y = -18 \qquad 2x = 30 - 6$$

$$y = \frac{-18}{-3} \qquad 2x = 24$$

$$y = 6 \qquad x = \frac{24}{2} = 12$$

(x,y)	Z = 8x + 6y
(0,12)	72
(12,6)	132
(15,0)	120

Jadi, nilai maksimumnya adalah 132 pada titik (12,6).

Contoh 8:

Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah dengan tipe *A* dan tipe *B*. Untuk rumah tipe *A* diperlukan 100 m^2 dan tipe *B* diperlukan 75 m^2. Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe *A* adalah Rp6.000.000,00 per unit dan tipe *B* adalah Rp4.000.000 per unit. Berapakah keuntungan maksimum dan minimum yang diperoleh dari penjualan rumah tersebut?

Jawab:

Cara grafik:

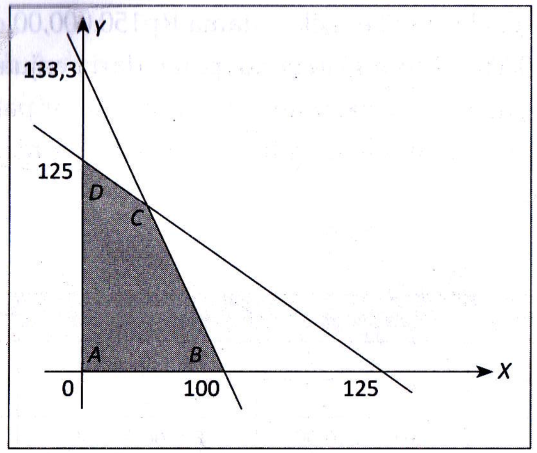
	Luas	Jumlah Unit	Keuntungan
Tipe *A*	100	*A*	Rp6.000.000,00
Tipe *B*	75	*B*	Rp4.000.000,00
Tersedia	10.000	125	

Misalnya tipe $A = x$ dan tipe $B = y$:

$100x + 75y \le 10.000 \rightarrow 4x + 3y \le 400 \rightarrow (0; 133,3), (100,0)$

$x + y \le 125 \rightarrow (0,125)\ (125,0)$

$x \ge 0, y \ge 0 \rightarrow z = 6.000.000x + 4.000.000y$



Menentukan titik *C*:

$$4x + 3y = 400 \;|1|\; 4x + 3y = 400$$

$$x + y = 125 \;|3|\; \underline{3x + 3y = 375} \; -$$

$$x = 25$$

$4x + 3y = 400 \rightarrow 3y = 400 - 100$

$y = 100 \rightarrow$ Titik $C = (25,100)$

Tabel Optimal

Titik	x	y	z = 6.000.000x + 4.000.000y
A	0	0	0
B	100	0	600.000.000,00
C	25	100	550.000.000,00
D	0	125	500.000.000,00

Jadi, keuntungan maksimumnya adalah Rp600.000.000,00 dengan jumlah 100 rumah tipe A dan keuntungan minimumnya adalah Rp500.000.000,00 dengan jumlah 25 rumah tipe A dan 100 tipe B.

Contoh 9:

Pesawat penumpang mempunyai kapasitas tempat duduk sebanyak 48. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg, sedangkan kelas ekonomi 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Hitunglah pendapatan dari penjualan tiket pesawat dengan kapasitas maksimum dan jumlah tempat duduk kelas utama dan kelas ekonomi yang harus terjual agar mencapai maksimum tersebut!

Jawab:

	Kelas Utama	Kelas Ekonomi	Jumlah
Jumlah Bagasi	60 kg	20 kg	1440 kg
Kapasitas			48
Harga tiket	Rp150.000,00	Rp100.000,00	

Maka model matematikanya:

$x \geq 0, y \geq 0$

$\rightarrow 60x + 20y \leq 1440$

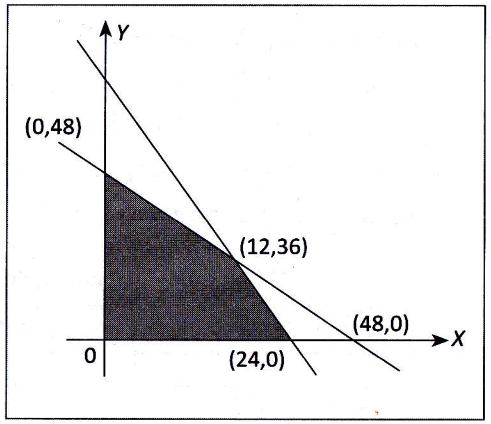
$\rightarrow x + y \leq 48$

$F(x,y) = 150.000x + 100.000y$

$F(24,0) = 3.600.000$

$F(12,36) = 5.400.000$ (*maks*)

$F(0,48) = 4.800.000$



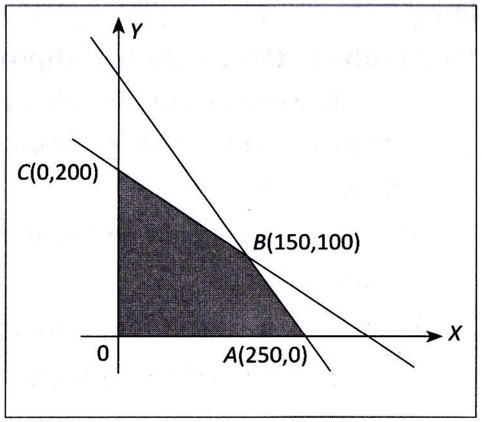
Supaya hasil penjualan tiket maksimum, maka x = tempat duduk kelas utama = 12 dan kelas ekonomi y = 36.

Contoh 10:

Rokok A dengan harga beli Rp1.000,00 dijual dengan harga Rp1.100,00 per bungkus. Sedangkan rokok B dengan harga beli Rp1.500,00 dijual dengan harga Rp1.700,00 per bungkus. Berapa bungkus rokok yang harus dibeli, jika untuk mendapatkan keuntungan maksimum seorang pedagang rokok mempunyai modal Rp300.000,00 dan kiosnya dapat menampung paling banyak 250 bungkus rokok?

Jawab:

Misalkan rokok A dan B berturut-turut dibeli sebanyak x dan y bungkus, maka maksimum $100x + 200y$:



$1000x + 1500y \leq 300.000$

$x + y \leq 250, x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{array}{r} 1000x + 1500y = 300.000 \\ 1000x + 1000y = 250.000 \\ \hline 500y = 50.000 \end{array} -$$

$y = 100, x = 150$

Titik-Titik Sudut	100x + 200y
$A(250,0)$	25.000 + 0 = 25.000
$B(150,100)$	15.000+ 20.000 = 35.000
$C(0,200)$	0 + 40.000 = 40.000
$O(0,0)$	0 + 0 = 0

Dari tabel di atas terlihat bahwa agar keuntungan maksimum harus membeli 200 bungkus rokok B saja.

Contoh 11:

Sebuah pabrik buku memproduksi buku jenis polos dan bergaris. Dalam satu hari pabrik itu paling banyak memproduksi 1.000 buku. Dari bagian penjualan diperoleh keterangan bahwa setiap hari terjual tidak lebih dari 800 buku polos dan 600 buku bergaris. Keuntungan setiap buku jenis polos adalah Rp100,00 dan jenis bergaris adalah Rp150,00. Berapakah keuntungan bersih maksimum yang dapat diperoleh setiap hari dan berapa banyak buku polos dan buku bergaris yang harus diproduksi setiap hari?

Jawab:

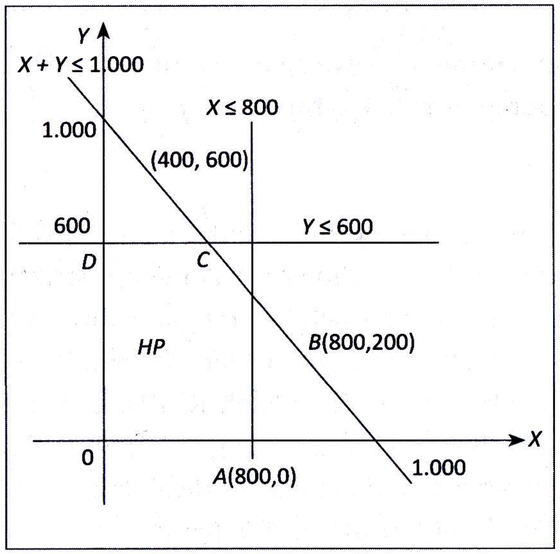
1) Misalkan dalam satu hari diproduksi buku polos sebanyak x buah dan buku bergaris sebanyak y buah. Berdasarkan keterangan-keterangan yang ada dapat disusun model matematika sebagai berikut.

   a) Fungsi tujuan ditentukan dari keterangan keuntungan yang ingin dicapai.

   b) Akan dimaksud fungsi tujuan: $f(x,y) = 100x + 150y$.

   c) Bagian kendala yang harus dipenuhi ditentukan dari keterangan keterbatasan bagian produksi dan bagian penjualan: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 800$, $y \leq 600$, dan $x + y \leq 1000$ dengan x dan $y \in R$.

2) Grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 800$, $y \leq 600$, dan $x + y \leq 1000$ dengan x dan $y \in R$. Ditunjukkan oleh daerah penyelesaian pada gambar berikut. Titik-titik pojok yang terletak pada grafik himpunan penyelesaian pada gambar berikut adalah titik $O(0,0)$, $A(800,0)$, $B(800,200)$, $C(400,600)$ dan $D(0,600)$.



3) Nilai fungsi tujuan $f(x,y) = 100x + 150y$ untuk titik pojok yang diperoleh pada langkah 2 dihitung dengan menggunakan bantuan tabel sebagaimana disajikan dalam tabel di bawah ini.

Titik Pojok (x,y)	$f(x,y) = 100x + 150y$
$O(0,0)$	0
$A(800,0)$	80.000
$B(800,200)$	110.000
$C(400,600)$	130.000
$D(0,600)$	90.000

4) Berdasarkan hasil perhitungan nilai fungsi tujuan yang disajikan dalam tabel di atas dapat disimpulkan bahwa fungsi tujuan $f(x,y) = 100x + 150y$ mencapai nilai maksimum sebesar 130.000 dan nilai maksimum itu dicapai titik $C(400,600)$.

5) Hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 kemudian ditafsirkan ke dalam masalah program linear semula sebagai berikut. Dengan kendala yang ada, produsen buku dalam satu hari dapat diperoleh keuntungan sebesar-besarnya Rp130.000,00 keuntungan sebesar ini dapat dicapai jika dalam satu hari, diproduksi buku polos sebanyak 400 buah dan buku bergaris sebanyak 600 buah.

b. *Menentukan Nilai Optimum Fungsi Tujuan dengan Metode Garis Selidik*

1) *Pengertian garis selidik yang berbentuk $ax + by = k(k \in R)$*

   Misalkan akan ditentukan nilai optimum fungsi tujuan $f(x,y) = ax + by$ pada daerah himpunan penyelesaian kendala (yang berbentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel). Nilai optimum fungsi tujuan itu dapat dicari dengan menggunakan garis selidik yang persamaannya $ax + by = k(k \in R)$. Garis selidik $ax + by = k$ merupakan garis-garis sejajar. Untuk nilai k tertentu akan diperoleh sebuah garis sebagai anggota dari himpunan garis-garis tersebut.

Dengan demikian, secara umum dapat disimpulkan bahwa nilai optimum fungsi tujuan $f(x,y) = ax + by$ dapat ditentukan dengan menggunakan garis selidik $ax + by = k(k \in R)$, pada daerah himpunan penyelesaian kendalanya.

2) *Menemukan nilai optimum fungsi tujuan dengan menggunakan garis selidik*

Setelah pengertian garis selidik dipahami, sekarang akan dibahas bagaimana cara menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan $f(x,y) = ax + by$ dengan menggunakan garis selidik $ax + by = k(k \in R)$. Nilai optimum fungsi tujuan $f(x,y) = ax + by$ pada suatu daerah himpunan penyelesaian dapat ditentukan dengan menggunakan garis selidik melalui langkah-langkah sebagai berikut.

a) Tetapkan persamaan garis selidik sebagai $ax + by = k(k \in R)$. Ambil nilai k tertentu (misalnya $k = k_0$), sehingga garis $ax + by = k_0$ dengan mudah dapat digambarkan.

b) Buatlah garis-garis yang sejajar terhadap garis $ax + by = k_0$.

(1) Jika garis $ax + by = k_1$ terletak *paling jauh* terhadap titik asal $O(0,0)$ serta melalui titik $A(x_1,y_1)$ terletak pada daerah himpunan penyelesaian), maka dapat disimpulkan: titik $A(x_1, y_1)$ merupakan titik yang mengakibatkan fungsi tujuan $f(x, y) = ax + by$ mencapai nilai maksimum, dan nilai maksimum fungsi tujuan itu sama dengan $ax_1 + by_1 = k_1$.

(2) Jika garis $ax + by = k_2$ terletak paling dekat dengan titik asal $O(0,0)$ serta melalui titik $D(x_2,y_2)$ terletak pada daerah himpunan penyelesaian), maka dapat disimpulkan: titik $D(x_2,y_2)$ merupakan titik yang mengakibatkan fungsi tujuan $f(x,y) = ax + by$ mencapai nilai minimum, dan nilai minimum fungsi tujuan itu sama dengan $ax_2 + by_2 = k_2$.

Contoh:

Dengan menggunakan garis selidik, tentukan nilai maksimum dari fungsi $f(x,y) = 2x + 3y$ pada daerah himpunan penyelesaian kendala yang berbentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel $x \geq 0$, $y \geq 0$, dan $x + y \leq 6$, dengan x dan $y \in R$.

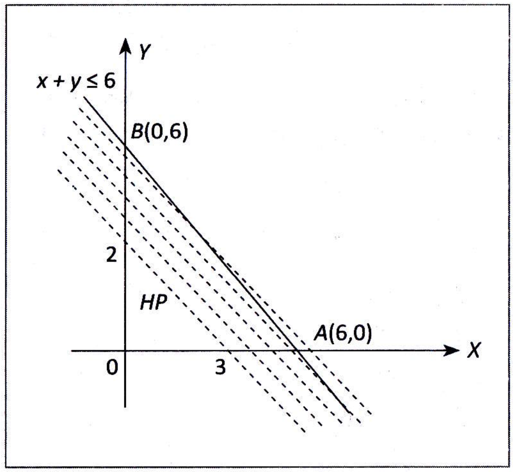
Jawab:

$X + Y = 6$

Jika $x = 0$, maka $y = 6$, titik (0,6)

Jika $y = 0$, maka $x = 6$, titik (6,0)

Daerah himpunan penyelesaian adalah daerah segi tiga OAB.



Grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel $x \geq 0$, $y \geq 0$, dan $x + y \leq 6$ (x dan $y \in R$) ditunjukkan oleh daerah segi tiga OAB sebagaimana diperlihatkan pada gambar di atas.

Oleh karena fungsi tujuan berbentuk $f(x,y) = 2x + 3y$, maka persamaan garis selidiknya adalah $2x + 3y = k(k \in R)$. Gambarlah garis selidik $2x + 3y = k$ untuk nilai $k = 6$, sehingga garis itu mempunyai persamaan $2x + 3y = 6$.

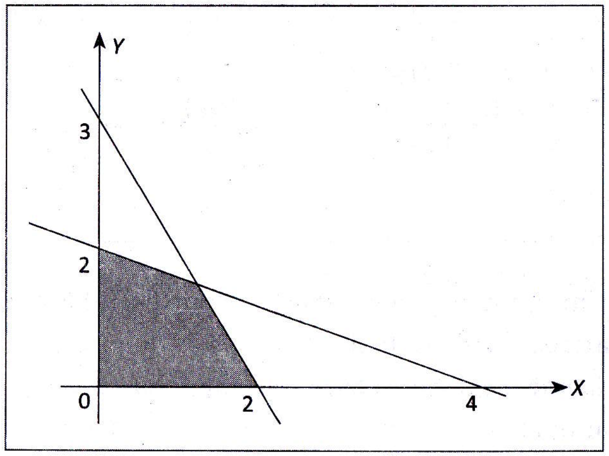
Garis yang sejajar dengan garis $2x + 3y = 6$ dan paling jauh dari titik asal adalah yang melalui titik $B(0,6)$. Jadi, titik $B(0,6)$ merupakan titik pada daerah himpunan penyelesaian yang mengakibatkan fungsi tujuan $f(x,y) = 2x + 3y$ mencapai nilai maksimum. Nilai maksimum fungsi tujuan $f(x,y) = 2x + 3y$ sama dengan $2(0) + 3(6) = 18$.

Latihan Soal

1. a. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi dari sistem pertidaksamaan: $2x + y \le 4$, $x + 3y \ge 3$, $x \ge 0$.

   b. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum $f(x,y) = 6y - 4x$ pada $3y - 2x \le 10$, $y - 2x \le -2$, $x \le 7$, $y \ge 0$.

2. Perhatikan daerah yang diarsir pada gambar di bawah, kemudian tulislah sistem pertidaksamaan yang memenuhi daerah tersebut.



3. Seorang pedagang buah mempunyai lemari yang hanya cukup untuk menyimpan 40 kg buah, jeruk dibeli dengan harga Rp12.000,00/kg dan apel dibeli dengan harga Rp16.000,00/kg. Jika pedagang itu mempunyai modal sebesar Rp600.000,00 untuk membeli x kg jeruk dan y kg apel, tulislah model matematika dari masalah tersebut.

4. Hitunglah nilai minimum $f(x,y) = 2x + 5y$ pada himpunan penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan berikut.

   $x + 2y \ge 12$, $3x + 2y \ge 24$, $x \ge 0$; $y \ge 0$

5. Suatu tempat parkir yang luasnya 300 m^2 digunakan untuk memarkir sebuah mobil rata-rata 10 m^2 dan untuk sebuah bus rata-rata 20 m^2 dengan daya tampung hanya 24 kendaraan. Biaya parkir untuk mobil Rp2.000,00/jam dan untuk bus Rp3.000,00/jam jika dalam satu jam tempat parkir penuh dan tidak ada kendaraan yang datang dan pergi. Hitunglah hasil maksimum tempat parkir tersebut.

6. Hitunglah nilai maksimum fungsi objektif, $f(x,y) = 4x + 10y$ yang memenuhi himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear: $x + y \le 12$, $x + 2y \le 16$, $x \ge 0$; $y \ge 0$.

7. Gambarlah daerah penyelesaian yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear $2x + 4y \ge 4$, $x + 2y \ge 4$, $x \ge 0$; $y \ge 0$!

8. Rokok A yang harganya Rp200,00 per bungkus dijual dengan laba Rp40,00 per bungkus. Sedangkan rokok B yang harganya Rp100,00 per bungkus dijual dengan laba Rp30,00 per bungkus. Seorang pedagang rokok mempunyai modal Rp80.000,00 dan kiosnya maksimum dapat menampung 500 bungkus rokok. Tentukan banyaknya rokok A dan B yang harus dijual agar dapat memperoleh keuntungan sebesar-besarnya.

9. Untuk membuat barang A diperlukan 6 jam pada mesin I dan 4 jam pada mesin II, sedangkan untuk membuat barang B diperlukan 2 jam pada mesin I dan 8 jam pada mesin II. Kedua mesin tersebut setiap harinya masing-masing bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari membuat x buah barang A dan y buah barang B, tulislah model matematika yang memenuhi uraian tersebut.

10. Pada tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun perumahan dengan dua tipe, yaitu tipe A dengan luas 100 m^2 dan tipe B dengan luas 75 m^2. Jumlah rumah yang akan dibangun tidak lebih 125 unit. Laba dari tipe A adalah Rp800.000,00 dan tipe B adalah Rp600.000,00. Hitunglah laba maksimum yang dapat diperoleh.
11. Dalam satu minggu tiap orang membutuhkan paling sedikit 16 unit protein, 24 unit karbohidrat, dan 18 unit lemak. Satu kg makanan A mengandung 4 unit protein, 12 unit karbohidrat, dan 2 unit lemak. Satu kg makanan B mengandung 2 unit protein, 2 unit karbohidrat, dan 6 unit lemak. Jika harga 1 kg makanan A = Rp17.000,00 dan makanan B = Rp8000,00, maka agar kebutuhan protein, karbohidrat, dan lemak terpenuhi dengan biaya yang paling murah, hitunglah banyaknya makanan A dan B yang harus dibeli setiap minggu.

Bab 5

HITUNG KEUANGAN

A. PENDAHULUAN

Setiap orang yang bekerja berusaha untuk mendapatkan uang sebanyak mungkin. Uang itu dipergunakan untuk keperluan sehari-hari. Seandainya masih ada sisa uang tentunya akan diusahakan agar nilai uang tersebut terjamin pada masa depan. Salah satu usaha untuk menjamin nilai uang tersebut dengan menabungkannya di bank atau meminjamkan kepada pihak lain dengan syarat imbalan berupa bunga uang.

Penentuan bunga uang tergantung kepada kesepakatan antara yang meminjamkan uang (kreditor) dan yang meminjam (debitor). Misalnya, suatu bank memberikan bunga uang 12% per tahun.

Perhitungan bunga masa depan ada 3 (tiga) cara, yaitu perhitungan bunga tunggal, perhitungan bunga ganda (majemuk), dan perhitungan bunga cara kontinu (setiap saat).

Seseorang yang meminjam uang (modal) dalam jangka waktu tertentu dan dengan persetujuan bersama ketika mengembalikan pinjaman biasanya ia memberikan biaya tambahan yang disebut *bunga*. Dalam matematika, bunga dapat diartikan sebagai suatu jasa atau kelebihan dalam bentuk uang yang diberikan oleh seorang peminjam kepada orang yang membutuhkan modal atas dasar persetujuan bersama.

Perhatikan ilustrasi berikut. Sudarmi meminjamkan uangnya kepada Tisna sebesar Rp1.000.000,00 dengan kesepakatan bersama bahwa sebulan kemudian Tisna bersedia mengembalikan uang tersebut sebesar Rp1.020.000,00.

Dari ilustrasi di atas, kelebihan uang Rp20.000,00 itu disebut dengan bunga. Apabila pinjaman modal = Mo dan besarnya bunga = B, maka besarnya pengembalian:

$$M = Mo + B.$$

B. BUNGA TUNGGAL

Seseorang yang meminjam uang (modal) dalam jangka waktu tertentu dan dengan persetujuan bersama ketika mengembalikan pinjaman biasanya ia memberikan biaya tambahan yang disebut bunga.

Jika bunga dibayarkan pada setiap akhir jangka waktu, ini berarti bahwa besarnya modal yang dijadikan dasar perhitungan bunga untuk setiap jangka waktu berikutnya selalu tetap atau sama jumlahnya. Bunga yang diperhitungkan dari suatu modal yang tetap jumlahnya disebut bunga tunggal atau *stright interest*. Besarnya bunga dapat dinyatakan dalam persentase yang disebut suku bunga (b) atau *interest* (i).

Jika besarnya bunga = B dan modal = Mo, maka besarnya suku bunga:

$$b = (B/M) \times 100\%$$

Jika besarnya modal = Mo, suku bunga $b = p\%$, maka besarnya bunga $B = p\% \times Mo$ dan besarnya pengembalian $M = Mo + B$, maka $M = Mo + p\% \times Mo = Mo\,(1 + p\%)$.

Contoh:
Pak Sodikun meminjam uang di bank sebesar Rp5.000.000,00 dengan suku bunga 2,5%. Hitunglah besarnya bunga dan uang yang harus dikembalikan.
Dik: $Mo = 5.000.000$ dan $i = 2{,}5\%$
Dit: B dan M

Jawab:
$B = p\% \times Mo = 2{,}5\% \times 5.000.000 = \text{Rp}1.250.000{,}00$
$M = Mo + B = \text{Rp}5.000.000{,}00 + \text{Rp}1.250.000{,}00 = \text{Rp}6.250.000{,}00$

Misalnya, modal awal M_0 dibungakan secara bunga tunggal sebesar i persen dalam n periode, maka nilai modal tersebut tiap periode dapat dilihat pada tabel berikut.

Periode	Bunga (1)	Nilai Modal
1	$I = i \times M_0$	$M_1 = M_0 + I$
2	$I = i \times M_0$	$M_2 = M_1 + I = M_0 + 2I$
3	$I = i \times M_0$	$M_3 = M_2 + I = M_0 + 3I$
4	$I = i \times M_0$	$M_4 = M_3 + I = M_0 + 4I$
.... n	$I = i \times M_0$	$M_n = M_{n-1} + I = M_0 + nI$

Dapat disimpulkan bahwa nilai modal tiap periode mengikuti kaidah barisan aritmatika dan rumus nilai modal pada periode ke-n adalah:

$$M_n = M_0\,(1 + in)$$

Dengan:
M_0 adalah modal mula-mula; M_n adalah nilai modal periode ke-n; i adalah persentase bunga; dan n adalah periode pembungaan.

Perlu diingat bahwa pada perhitungan bunga tunggal, apabila waktu dinyatakan dalam hari ada dua macam perhitungan waktu yang bisa digunakan, yaitu bunga tunggal eksak dan bunga tunggal biasa (bunga tunggal pendekatan)

Metode bunga tunggal biasa (pendekatan) adalah metode perhitungan bunga dengan menggunakan waktu pendekatan. Waktu pendekatan adalah waktu yang dihitung berdasarkan jumlah hari dalam satu bulan rata-rata 30 hari.

Metode bunga tunggal eksak adalah metode perhitungan bunga tunggal yang menggunakan waktu eksak. Waktu eksak adalah waktu yang dihitung berdasarkan jumlah hari pada kalender.

Contoh:
Hitung banyaknya hari dalam waktu pendekatan dan waktu eksak dari tanggal 23 Agustus–2 Desember 2013.

Jawab:
Waktu pendekatan (waktu biasa) dalam 1 bulan jumlah hari dihitung rata-rata = 30 hari adalah:
$(30 - 23 + 1) + 30 + 30 + 30 + 2 = 100$ hari

Waktu eksak dalam 1 bulan jumlah dihitung berdasarkan jumlah hari dalam kalender adalah:
$(31 - 23 + 1) + 30 + 31 + 30 + 2 = 102$ hari

1. Metode Perhitungan Bunga

Jika suatu modal M dibungakan $p\%$ setahun (1 tahun = 360 hari), maka:
setelah 1 tahun bunganya $B = p\%. M$;
setelah t tahun bunganya $B = p\%.M.t$ atau $B = M.P.t/100$;
setelah b bulan bunganya $B = p\%.M.b$ atau $B = M.P.b/1.200$;
setelah h hari bunganya $B = p\%.M.h$ atau $B = M.P.h/36.000$ (jika waktu pendekatan);
setelah h hari bunganya $B = p\%.M.h$ atau $B = M.P.h/36.500$ (jika waktu eksak).

Contoh:
Modal sebesar Rp500.000,00 dipinjamkan selama 2 tahun 9 bulan 10 hari dengan suku bunga tunggal 5%/tahun. Berapakah besarnya bunganya?
Dik: M = Rp500.000,00 dan B = 5%
Dit: Bunga selama 2 tahun 9 bulan 10 hari

Jawab:
B (2 tahun) = $M.p.t/100$ = Rp $\dfrac{500.000 \times 5 \times 2}{100}$ = Rp50.000,00

B (9 bulan) = $M,p,b/1.200$ = Rp $\dfrac{500.000 \times 5 \times 9}{1.200}$ = Rp18.750,00

B (10 hari) = $M.p.h/36.000$ = Rp $\dfrac{500.000 \times 5 \times 10}{36.000}$ = Rp694,4,00

Jadi, jumlah bunga seluruhnya:
Rp50.000,00 + Rp18.750,00 + Rp694,40 = Rp69.444,40

2. Metode Pembagi Tetap atau Metode Bunga Tunggal Biasa (1 Tahun = 360 Hari)

B = (hasil bunga) : pembagi tetap
$B = (M.p.h) : 36.000 = (M.h) : 100. p : 360 = [(M.h) : 100] : (360 : p)$
Jadi, hasil bunga = $[(M.h) : 100]$ dan pembagi tetap = $(p : 360)$
$B = M.p.h/36.000 = (p.h) : 360$ atau $h = (360 : p)$

Contoh 1:
Bila 1 tahun = 360 hari dengan suku bunga tunggal 5% per tahun, berapakah besarnya bunga dari modal Rp5.000.000,00 selama 135 hari?
Dik: M = Rp5.000.000,00 dan b = 5%/tahun
Dit: B selama 135 hari

Jawab:

Hasil bunga = $(M.h) : 100$

Pembagi tetap = $360 : p$ = (Rp5.000.000,00 × 135) : 100

$360 : 5 = 72$ = Rp6.750.000,00

Jadi, B = Rp6.750.000,00 : 72 = Rp93.750,00

Contoh 2:

Hitunglah jumlah bunga dari modal Rp950.000,00, Rp2.375.000,00, dan Rp3.750.000,00. Dibungakan berturut-turut selama 75 hari, 60 hari, dan 100 hari dengan suku bunga tunggal yang sama, yaitu 7% setahun.

Dik: Modal Rp950.000,00, Rp2.375.000,00, dan Rp3.750.000,00
$b = 7\%/\text{tahun}$

Dit: Jumlah bunga dari seluruh bunga

Jawab:

Modal	Hari	$M \times h$
Rp950.000,00	75	Rp71.250.000,00
Rp2.375.000,00	60	Rp142.500.000,00
Rp3.750.000,00	100	Rp375.000.000,00
Jumlah		Rp588.750.000,00

Hasil bunga = Rp588.750.000,00 : 100 = Rp5.887.500,00

Pembagi tetap = $360 : 7 = 51{,}43$

Jadi, jumlah bunga seluruhnya = Rp114.479,17

Perhitungannya memerhatikan perjanjian sebagai berikut.

a. Waktu rata-rata dalam 1 bulan = 30 hari.
b. Waktu eksak (dihitung berdasarkan pada banyaknya hari setiap bulan.
c. Tiap persentase mempunyai masa bunga tertentu pula.

Besarnya bunga dengan metode Prancis:

$B = (M.p.h)/36.000 = M/100 \,.\, (p.h)/360 \rightarrow (p.h)/360 \rightarrow h = 360/p$

Contoh 3:

Bila suatu modal Rp500.000,00 dipinjamkan selama 100 hari, hitung besarnya bunga:

a. 5% b. 6% c. 9%

Dik: M = Rp500.000,00; h = 100 hari

Dit: Bunga untuk 5%, 6%, dan 9% setahun

Jawab:

a. Bunga untuk 5% setahun, $h = 360/5 = 72$ hari
   Besarnya bunga untuk 72 hari:
   1/100 × Rp500.000,00 = Rp5.000,00
   Jadi, besarnya bunga selama 100 hari untuk 5%:
   100/72 × Rp5.000,00 = Rp6.944,44

b. Bunga untuk 6% setahun, $h = 360/6 = 60$ hari
   Besarnya bunga untuk 60 hari :
   1/100 × Rp500.000,00 = Rp5.000,00
   Jadi, besarnya bunga selama 100 hari untuk 6%:
   100/60 × Rp5.000,00 = Rp8.333,33

c. Bunga untuk 9% setahun, $h = 360/9 = 40$ hari
   Besarnya bunga untuk 40 hari:
   1/100 × Rp500.000,00 = Rp5.000,00
   Jadi, besarnya bunga selama 100 hari untuk 9%:
   100/40 × Rp5.000,00 = Rp12.500,00

Contoh 4:

Pada awal Januari 2011, Jonny menabung di Bank Makmur sebesar 10 juta, pihak bank memberikan bunga 10% per tahun. Berapakah jumlah tabungan Jonny setelah 5 tahun?

Jawab:

Dari soal di atas diperoleh M_0 = Rp10.000.000,00; $i = 10\%$; $n = 5$

$M_n = M_o (1 + in)$

$M_n = 10.000.000\ (1 + 10\%(5))$

$= 10.000.000\ (1 + 50\%)$

$= 10.000.000\ (150\%) = 15.000.000$

Jadi, tabungan Jonny setelah 5 tahun sebesar Rp15.000.000,00.

Contoh 5:

Pada awal Januari 2011, Nadia menabung di bank sebesar Rp100.000,00. Setiap awal bulan Nadia menabung dengan jumlah yang sama dan pihak bank memberikan bunga tunggal sebesar 2% per bulan. Berapakah jumlah tabungan Nadia pada akhir tahun 2011?

Jawab:

Besarnya bunga tiap bulan adalah Rp100.000 × 2% = Rp2.000,00.

Nilai tabungan Nadia tiap periode disajikan oleh tabel berikut.

Bulan Menabung	Periode Bunga (n)	Total Bunga ($n \times I$)	Nilai Modal
Jan	= 1	2.000	=102.000
Feb	= 2	4.000	= 104.000
Maret	= 3	6.000	= 106.000
April	= 4	8.000	= 108.000
Mei	= 5	10.000	= 110.000
Juni	= 6	12.000	= 112.000
July	= 7	14.000	= 114.000
Agst	= 8	16.000	= 116.000
Sept	= 9	18.000	= 118.000
Oktb	=10	20.000	= 120.000
Nov	=11	22.000	= 122.000
Des	=12	24.000	= 124.000

Jumlah tabungan Nadia seluruhnya adalah:

$S_n = 102.000 + 104.0000 + \ldots + 124.000$ yang merupakan deret aritmatika dengan suku pertama $a = 102.000$

$U_n = 124.000$ dan $n = 12$, sehingga

$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{12}{2}(102.000 + 124.000) = 6\ (226000) = 1.356.000$

Jadi jumlah tabungan Nadia seluruhnya adalah Rp1.356.000,00.

Contoh 6:

Hitunglah besarnya bunga dari modal Rp300.000,00 yang dibungakan selama 20 hari atas dasar bunga tunggal 10% setahun (1 tahun = 360 hari atau waktu pendekatan).

Jawab:

$M = 300.000$

$W = 20$ hari (1 tahun = 360 hari)

$P = 10\%$ per tahun

Karena 1 tahun = 360 hari, maka $I = \frac{\text{Angka bunga}}{\text{Pembagi tetap}}$

Angka bunga $= \frac{Mw}{100} = \frac{300.000 \times 20}{100} = 60.000$

Pembagi tetap $= \frac{360}{P} = \frac{360}{10} = 36$

Jadi $I = \frac{60.000}{36} = 1666{,}67$

Jadi, besarnya bunga sebesar Rp1.666,67.

Contoh 7:

Hitunglah besarnya bunga selama 45 hari dari modal sebesar Rp500.000,00 atas dasar bunga tunggal 3% setahun (1 tahun = 365 hari atau waktu eksak).

Jawab:

$M = 500.000$

$P = 3$

$W = 45$ hari (1 tahun = 365 hari)

Besarnya bunga $= \frac{500.000 \times 45}{100} : \frac{365}{3} = \frac{500.000 \times 45 \times 3}{100 \times 365} = 1849{,}32$

Contoh 8:

Bila modal sebesar Rp60.000,00 dengan menggunakan waktu pendekatan dengan besar bunga 3% setahun. Hitunglah besarnya uang bunga, jika modal tersebut dibungakan selama 30 hari.

Jawab:

Angka bunga = $\frac{M \times h}{100} = \frac{600.000 \times 30}{100}$

Pembagi tetap = $\frac{360}{P} = \frac{360}{3} = 120$

Jadi, bunga selama 30 hari adalah: $\frac{180.000}{120}$ = Rp1.500,00

3. Nilai Uang Masa Depan

Andi mempunyai uang sebanyak Rp500.000,00. Ia akan meminjamkan uangnya kepada Arli dengan syarat bunga 12% per tahun. Arli mengembalikan pinjaman itu bersama bunganya kepada Andi setelah 2 tahun. Berapa rupiah harus diberikan Arli kepada Andi?

Bunga selama 2 tahun adalah 2 × 12% = 24%

Jumlah uang yang harus dikembalikan Arli bersama bunganya adalah:

Rp500.000,00 + 0,24 × Rp500.000,00

= Rp500.000,00 + Rp120.000,00 = Rp620.000,00.

Pada persoalan ini seharusnya Arli harus memberikan bunga satu tahun Rp60.000,00, tetapi bunga ini diperkirakan pada akhir tahun kedua. Perhitungan bunga seperti ini disebut perhitungan bunga tunggal. Secara umum, penentuan nilai uang masa depan adalah sebagai berikut.

Misalkan jumlah uang mula-mula (modal) yang akan dipinjamkan sebanyak P dengan bunga sebesar i setiap tahun, nilai uang masa depan (FV = *future value*) adalah:

$$FV = P + in\,P = P\,(1 + in) \text{ atau } FV_{i,n} = P + in\,P = P\,(1 + in) \qquad (1)$$

$FV_{i,n}$ = nilai uang sesudah waktu n dengan bunga i; i = suku bunga (%); n = satuan waktu (tahun)

Soal tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus (1):

$$FV_{12\%,2} = \text{Rp}500.000{,}00\,(1 + 0{,}12 \times 2)$$
$$= \text{Rp}500.000{,}00\,(1 + 0{,}24) = \text{Rp}620.000{,}00$$

4. Nilai Masa Sekarang

Kadang-kadang yang dipersoalkan dalam menghitung nilai masa depan adalah berapa harus kita sediakan uang (modal) untuk saat ini, jika kita menginginkan sejumlah uang tertentu masa depan.

Menurut rumus (1): $FV_{i,n} = P\,(1 + in)$ atau $P = \frac{FV_{i,n}}{1 + in}$

Jadi nilai uang sekarang adalah P.

5. Nilai Uang Sekarang dan Masa Depan Berdasarkan Pembayaran Seri

Perhitungan nilai uang sekarang dan masa depan telah dijelaskan, kadang-kadang perhitungan ini dikaitkan dengan pembayaran seri jumlah dengan jumlah pembayaran sama. Andaikan pembayaran seri sebanyak R per satuan waktu saat pembayaran dianggap merupakan akhir periode sebelumnya atau awal periode sesudahnya adalah sama. Setiap akhir periode atau sebelum awal periode sesudahnya, bunga dihitung atas dasar modal awal (P).

C. MACAM-MACAM PERSEN

1. Persen

Adalah perbandingan yang dinyatakan dengan suatu pecahan yang penyebutnya = 100.

Misalnya: 5% = $\frac{5}{100}$, 1,5% = $\frac{1{,}5}{100}$, p% = $\frac{p}{100}$

2. Persen di Bawah 100

Adalah perbandingan yang dinyatakan dengan suatu pecahan yang jumlah pembilang dan penyebutnya = 100, yaitu $p/(100 - p)$.

Misalnya: 5% di bawah 100 = $\frac{5}{95}$; 1,5% di bawah 100 = $\frac{1,5}{98,5}$; 25% di bawah 100 = $\frac{25}{75}$

3. Persen di Atas 100

Adalah perbandingan yang dinyatakan dengan suatu pecahan yang jumlah pembilang dan penyebutnya = 100, yaitu $p/(100 + p)$.

Misalnya: 5% di atas 100 = $\frac{5}{105}$, 1,5% di atas 100 = $\frac{1,5}{101,5}$; 25% di atas 100 = $\frac{25}{125}$

Contoh:

Hitunglah bunga:

a. 2% dari modal Rp5.000.000,00;

b. 9% di bawah 100 dari modal Rp 4.000.000,00;

c. $20\frac{1}{5}$% di atas 100 dari modal Rp1.202.000,00.

Jawab:

a. $\frac{2}{100} \times$ Rp5.000.000,00 = Rp100.000,00

b. $\frac{9}{91} \times$ Rp4.000.000,00 = Rp395.604,40

c. $\frac{20,2}{120} \times$ Rp1.202.000,00 = Rp202.336,67

D. DASAR PERHITUNGAN BUNGA

Dalam proses pinjam-meminjam uang ada 5 (lima) hal yang tidak bisa diabaikan, antara lain:

1. pihak yang meminjamkan modal atau kreditur,
2. pihak yang meminjam modal atau debitur,
3. pokok pinjaman,
4. periode bunga, dan
5. suku bunga.

Adapun sistem pinjaman yang akan dibahas adalah sistem berdasarkan pada saat pembayaran.

1. Sistem Bunga

Sistem bunga adalah bunga diperhitungkan terhadap modal yang diterima pada awal masa bunga.

$$B = p\% \times Mo \text{ atau } B = (p/(100 + p) \times M$$

Contoh:

Pak Syahroni meminjam uang dari Bank sebesar Rp1.000.000,00 dengan suku bunga 5%. Tentukan:

a. besarnya bunga;

b. besarnya uang yang harus dikembalikan.

Dik: Mo = Rp1.000.000,00; $I = 5\%$.

Dit: B dan M

Jawab:

a. $B = p\% \times \text{Mo} = 0,05 \times$ Rp1.000.000,00 = Rp50.000,00

b. $M = Mo + B$ = Rp1.000.000,00 + Rp50.000,00 = Rp1.050.000,00

2. Sistem Diskonto

Sistem diskonto adalah bunga yang dibayarkan terhadap modal yang dikembalikan pada akhir masa bunga.

$$D = (p/100 - p) \times M \text{ atau } D = p\% \times Mo$$

Contoh:

a. Pak Roni meminjam uang dari Bank sebesar Rp1.000.000,00 dengan diskonto 5%. Tentukan:
   1) besarnya diskonto;
   2) besarnya uang yang harus diterima.

   Dik: Mo = Rp1.000.000,00; $i = 5\%$

   Dit: D dan M

Jawab:

1) $D = I \times Mo = 5\% \times \text{Rp}1.000.000{,}00 = \text{Rp}50.000{,}00$
2) $M = Mo - D = \text{Rp}1.000.000{,}00 - \text{Rp}50.000{,}00 = \text{Rp}950.000{,}00$

b. Pak Mardi menerima pinjaman uang sebesar Rp950.000,00 dengan besar diskonto 5% per tahun. Hitunglah:
   1) besar diskonto;
   2) besar uang yang harus dikembalikan.

   Dik: M = Rp.950.000,00; $i = 5\%$

   Dit: D dan Mo

   Jawab:

   1) $D = (p/100 - p) \times M = \frac{0{,}05}{100 - 0{,}05} \times \text{Rp}950.000{,}00 = \text{Rp}475{,}24$
   2) $Mo = M + D = \text{Rp}950.000{,}00 + \text{Rp}475{,}24 = \text{Rp}950.475{,}24$

Latihan Soal

1. Dengan modal Rp500.000,00, Tuan Hendrik mendapat pinjaman dari sebuah Bank dengan perjanjian bunga tunggal 2%/bulan. Tentukan:
   a. besarnya bunga yang harus dibayar pada akhir tahun pertama;
   b. besarnya uang yang harus dikembalikan!
2. Gita menabung di koperasi pada awal tahun 2005 sebesar Rp100.000,00 dengan bunga tunggal 15% setahun. Hitunglah besar uang Gita pada awal tahun 2008!
3. Seseorang meminjam modal dari koperasi sebesar Rp800.000,00 dengan suku bunga tunggal 3% setiap bulan. Hitunglah besar bunga setelah ½ tahun!
4. Sebuah koperasi memberikan bunga pinjaman 1% per bulan pada anggotanya. Pak Ase meminjam uang Rp1.000.000,00 dan akan diangsur selama 10 bulan. Hitunglah besar angsuran yang harus dibayar tiap bulan!

5. Gaharin meminjam uang pada sebuah bank dengan suku bunga tunggal 8% setiap tahun. Setelah 1,5 tahun ia harus mengembalikan pinjaman dan bunganya sebesar Rp5.600.000,00. Hitunglah besar pinjaman Gaharin!
6. Sebuah bank memberikan pinjaman secara bunga tunggal kepada Tuan Sodik sebesar Rp2.500.000,00. Setelah 2 tahun simpanannya menjadi Rp3.300.000,00. Hitunglah besar persentase suku bunga setiap tahunnya!
7. Modal sebesar Rp20.000.000,00 dibungakan secara bunga tunggal 2,5% tiap semester. Hitunglah berapa tahun modal tersebut dibungakan agar menjadi Rp27.000.000,00!
8. Modal sebesar Rp10.000.000,00 dibungakan secara bunga tunggal 1,5% setiap cawu. Hitunglah berapa tahun modal tersebut dibungakan agar menjadi Rp11.800.000,00!
9. Sebuah pinjaman dengan sistem diskonto 8%. Jika pada waktu meminjam uang yang diterima sebesar Rp460.000,00, hitunglah besarnya diskonto pinjaman tersebut!
10. Seseorang meminjam uang dengan diskonto 2% per bulan. Jika ia menerima Rp294.000,00, hitunglah besarnya pinjaman yang harus dikembalikan orang tersebut setelah satu bulan!
11. Karsin menerima kredit dengan diskonto 3% sebulan sebesar Rp291.000,00. Hitunglah utang Karsin setelah satu bulan!
12. Jika pada awal bunga seseorang menerima uang Rp950.000,00 dengan besar diskonto Rp50.000,00, hitunglah besar persentase diskonto!
13. Seorang pedagang kelontong meminjam uang dari Bank BRI dengan diskonto 18% per tahun. Uang yang diterima sebesar Rp25.500.000,00. Setelah 10 bulan pedagang tersebut ingin mengembalikan pinjaman. Hitunglah jumlah uang yang harus ia bayarkan!

14. Pak Samuel mengembalikan uang ke Bank Rp1.050.000,00 dengan suku bunga 5%. Tentukan:
    a. besarnya bunga;
    b. besarnya pinjaman!
15. Berapa % suku bunga tunggalnya setahun bila:
    a. modal Rp500.000,00 menjadi Rp600.000,00 selama 2 tahun;
    b. modal Rp450.000,00 menjadi Rp600.000,00 selama 3 tahun?
16. Modal sebesar Rp4.800.000,00 diperbungakan selama 100 hari dengan suku bunga 6% per tahun. Hitunglah besar bunga dengan metode pembagi tetap, Inggris, dan Prancis!
17. Suatu modal sebesar Rp3.600.000,00 diperbungakan dari tanggal 3 Maret hingga 25 Mei 2005 dengan metode pembagi tetap. Hitung besar bunga bila suku bunga:
    a. 5% setahun;
    b. 6% setahun;
    c. 5,5% setahun;
    d. 6,5% setahun (untuk waktu eksak dan waktu rata-rata)!
18. Dengan metode pembagi tetap. Hitunglah bunga dari modal-modal dengan suku bunga yang sama 4% per tahun sebagai berikut:
    a. Rp250.000,00 dibungakan selama 112 hari;
    b. Rp160.000,00 dibungakan selama 72 hari;
    c. Rp210.000,00 dibungakan selama 41 hari;
    d. Rp175.000,00 dibungakan selama 63 hari;
    e. Rp200.000,00 dibungakan selama 88 hari!
19. Suatu modal Rp3.500.000,00 dipinjamkan selama 165 hari dasar bunga 3,25% setahun. Hitung besarnya bunga dengan metode pembagi tetap, Inggris, dan Prancis!
20. Modal sebesar Rp1.000.000,00 diperbungakan selama 100 hari, dengan metode Inggris. Hitunglah besar bunga jika suku bunga:

    a. 5% setahun;
    b. 6% setahun;
    c. 3% setahun!
21. Lima modal diperbungakan 7% setahun dengan modal masing-masing sebesar Rp2.000.000,00, Rp1.500.000,00, Rp500.000,00, Rp200.000,00, dan Rp75.000,00, dalam jangka waktu berturut-turut selama 20, 25, 15, 30, dan 10 hari dengan metode Inggris. Hitunglah jumlah bunga modal-modal tersebut!

E. BUNGA MAJEMUK

1. Pengertian Bunga Majemuk

Jika suatu modal dibungakan pada akhir suatu periode, modal itu menghasilkan bunga, bunga tersebut dapat diambil atau tidak diambil. Andaikan bunga tersebut tidak diambil, maka dapat ditambahkan pada modal yang akhirnya bunga tersebut dalam periode tertentu juga dapat menghasilkan bunga. Modal yang demikian dibungakan atas dasar bunga majemuk.

Bunga modal sekarang ditambahkan ke dalam modal dan menjadi dasar perhitungan bunga pada periode berikutnya. Oleh karena itu, bunga majemuk sering juga disebut bunga berbunga. Nilai modal tersebut tiap periode disajikan di tabel di bawah ini.

Periode ke-*n*	Modal Periode ke-*n*	Bunga Periode ke-*n*	Nilai Modal Periode ke-*n*
1	M_0	$i \times M_0$	$M_1 = M_0 + iM_0 = M_0\,(1 + i)$
2	M_1	$i \times M_1$	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1\,(1 + i) = M_0\,(1 + i)^2$
3	M_2	$i \times M_2$	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2\,(1 + i) = M_0\,(1 + i)^3$
4	M_3	$i \times M_3$	$M_4 = M_3 + iM_3 = M_3\,(1 + i) = M_0\,(1 + i)^4$
5	M_{n-1}	$i \times M_{n-1}$	$M_n = M_{n-1} + iM_{n-1} = M_{n-1}\,(1 + i) = M_0\,(1 + i)^n$

Contoh:

Husna meminjam uang Rp1.000.000,00 pada sebuah bank dengan suku bunga majemuk 5% per bulan dan jangka waktu pengembalian 3 bulan. Hitunglah besar pengembalian yang harus dibayar setiap akhir bulan.

Jawab:

Besar angsuran pada akhir bulan ke-1:

1.000.000 + (5% × Rp1.000.000,00) = Rp1.050.000,00

Besar angsuran pada akhir bulan ke-2:

1.050.000 + (5% × Rp1050.000,00) = Rp1.102.500,00

Besar angsuran pada akhir bulan ke-3:

1.102.500,- + (5% × Rp1.102.500,00) = Rp1.157.625,00

2. Nilai (Modal) Akhir Bunga Majemuk

a. *Nilai (Modal) Akhir Bunga Majemuk dengan Masa Bunga Bulat*

Jika suatu modal M dibungakan secara majemuk dengan dasar bunga $I = p\%$, maka besarnya:

1) Modal setelah 1 tahun = M_1, di mana:
   $M_1 = M + p\% \,.\, M = M\,(1 + p\%) = M \,.\, (I + i)$
2) Modal setelah 2 tahun = M_2, di mana:
   $M_2 = M_1.(I + i) = M \,.\, (I + i) \,.\, (I + i) = M \,.\, (I + i)^2$
3) Modal setelah 3 tahun = M_3, di mana:
   $M_3 = M_2 \,.\, (I + i) = M \,.\, (I + i)^2 \,.\, (I + i) = M \,.\, (I + i)^3$
4) Modal setelah n tahun = M_n, di mana:
   $Mn = M.(I + i)^n$

Mn: nilai akhir, M: modal awal, $i = p\%$ (suku bunga), n: periode

Contoh:

1) Modal sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan dengan bunga majemuk sebesar 4% setahun. Hitunglah besarnya modal setelah 10 tahun!

   Jawab:

   $M_n = M\,(1 + i)^n$

   $M_{10} = 1.000.000\,(1 + 0{,}04)^{10}$

   $= 1.000.000\,(1{,}48024428) = \text{Rp}1.480.244{,}28$

2) Modal Rp1.000.000,00 dibungakan atas dasar bunga majemuk 10% setahun. Berapa besar modal itu pada akhir tahun ke-3?

   Jawab:

Tahun	Modal Awal (Rp)	Bunga 10% (Rp)	Modal Akhir (Rp)
I	1.000.000	$\frac{10}{100} \times 1.000.000 = 100.000$	1.000.000 + 100.000 = 1.100.000
II	1.100.000	$\frac{10}{100} \times 1.100.000 = 110.000$	1.100.000 + 110.000 = 1.210.000
III	1.210.000	$\frac{10}{100} \times 1.210.000 = 121.000$	1.210.000 + 121.000 = 1.331.000

Jadi, besar modal pada akhir tahun ke-3 adalah Rp1.331.000,00.

3) Hitunglah bunga majemuk pada bulan ke-6 jika modal awal sebesar Rp5.000.000,00 dan mendapat suku bunga sebesar 3% per bulan.

   Jawab:

   $Mn = Mo \times (1 + i)^3 = 5.000.000 \times (1 + 0{,}03)^3 = 5.970.261{,}483$

4) a) Hitunglah 10% di atas seratus dari Rp50.000,00.

   Jawab:

   $\frac{P}{100 + P} \times M = \frac{10}{100 + 10} \times \text{Rp}50.000{,}00 = \text{Rp}4.545{,}45$

   b) Hitunglah 5% di bawah seratus dari Rp100.000,00.

   Jawab:

   $\frac{P}{100 - P} \times M = \frac{5}{100 - 5} \times \text{Rp}100.000{,}00 = \text{Rp}5.263{,}10$

b. *Nilai (Modal) Akhir Bunga Majemuk dengan Masa Bunga Pecahan*

Cara I dengan kalkulator:

$$Mn_{w/v} = M.(I + i)^n \ (1 + {}_{w/v} \, . \, i)$$

Cara II dengan tabel logaritma.

Contoh:

Hitunglah nilai akhir suatu modal sebesar Rp5.000.000,00 dibungakan secara bunga majemuk selama 7 bulan 10 hari atas dasar bunga majemuk 5%/bulan.

Dik: M =Rp5.000.000,00; i = 5%/bulan; n = 7; ${}_{w/v}$ = 10/30 = 1/3

Jawab:

Cara I

$Mn_{w/v} = M.(I + i)^n (1 + {}_{w/v} \, . \, i)$

$M\,7_{1/3}$ = Rp5.000.000 (1,05)7 (1 + ${}_{1/3}$.5%)

Cara II

$Mn_{w/v} = M \, . \, (I + i)^{7\,1/3}$

Log $M\,7_{1/3}$ = Log 5.000.000 $(1{,}05)^{7\,1/3}$

= Log 5.000.000 + log $(1{,}05)7^{1/3}$ = Log 5.000.000 + 22/3 log 1.05

Latihan Soal

1. Hitunglah nilai berikut dengan menggunakan tabel bunga atau kalkulator!

   a. $(1{,}03)^5$ b. $(1{,}06)^3$ c. $(1{,}05)^{2,\,3/5}$ d. $(1{,}025)^{5{,}2/3}$

2. Modal sebesar Rp2.000.000,00 jika modal diperbungakan selama lima tahun dengan dasar bunga majemuk 5% per semester, hitunglah modal akhir tahun ke-5!

3. Modal sebesar Rp1.500.000,00 jika modal diperbungakan selama 5 tahun dengan dasar bunga majemuk 5% per triwulan, hitunglah modal akhir setelah 4½ tahun!
4. Modal sebesar Rp450.000,00 jika modal diperbungakan selama 5 tahun dengan dasar bunga majemuk 5% per tiga bulan, hitunglah nilai akhir modal tersebut!
5. Sejumlah modal Rp100.000,00 dibungakan selama 10 tahun 4 bulan dengan bunga majemuk 6 per tahun. Hitunglah nilai akhir modal tersebut!
6. Suatu modal sebesar Rp5.000.000,00 dibungakan secara bunga majemuk dasa bunga 2 setahun selama 4 tahun. Hitunglah modal tersebut pada akhir tahun ke-4!
7. Tentukan nilai akhir sebuah modal sebesar Rp2.500.000,00 jika modal diperbungakan selama 3 tahun dengan dasar bunga majemuk 3% tiap setengah tahun!

3. Nilai Tunai Bunga Majemuk

a. *Nilai Tunai Bunga Majemuk dengan Masa Bunga Bulat*

Nilai tunai adalah modal awal sebelum mendapatkan pembungaan. Bertitik tolak dari rumus nilai akhir dengan masa bunga bulat.

$$Mn = M \, . \, (I + i)^n \leftrightarrow M = \frac{Mn}{(I + i)^n} \text{ atau } M = Mn \, . \, (I + i)^{-n}$$

M: nilai tunai, Mn: modal akhir, $i = p\%$ (suku bunga), n: periode

Contoh:

Jesi menabung uangnya pada sebuah bank dengan suku bunga majemuk 1,5% sebulan. Ternyata setelah 7 bulan, tabungan Jesi menjadi Rp1.109.844,91. Berapakah besar uang yang ditabung Jesi?

Dik: Mn = Rp1.109.844,91; i = 1,5% sebulan atau 0,015; n = 7

Dit: M

Jawab:

$M = Mn \,.\, (I + i)^{-n}$

$M = \text{Rp}.1.109.844{,}91\ (1 + 0{,}015)^{-7} = \text{Rp}.1.109.844{,}91\ (1{,}015\ )^{-7}$

b. Nilai Tunai Bunga Majemuk dengan Masa Bunga Pecahan

Bertitik tolak dari rumus nilai akhir bunga majemuk dengan masa bunga pecahan, yaitu:

$$Mn_{w/v} = M.(I + i)^n\ (1 + {}_{w/v} \,.\, I) \text{ atau } Mn_{w/v} = \frac{Mn}{(I + i)^n\ (1 + {}_{w/v} \,.\, I)}$$

Contoh:

Seorang pedagang ingin menambah modalnya dengan meminjam pada sebuah koperasi yang memberikan bunga majemuk 5% per bulan. Setelah 6 bulan 18, hari pedagang tersebut mengembalikan uangnya sebesar Rp2.760.597,02. Berapakah besar modal yang dipinjam pedagang tersebut?

Dik: Mn = Rp2.760.597,02; i = 5% sebulan atau 0,05; n = 6 bulan 18 hari; N = 6; w/v = 18/30 = 3/5

Dit: M

Jawab:

$$Mn_{w/v} = \frac{Mn}{(I + i)^n\ (1 + {}_{w/v} \,.\, I)} = \frac{2.760.597{,}02}{(1 + 0{,}05)^6\ \ (1 + 3/5.0{,}05)}$$

Latihan Soal

1. Dengan suku bunga majemuk 6%/bulan, hitunglah nilai tunai dari modal Rp900.000,00 yang akan diterima 8 bulan yang akan datang!
2. Suatu modal akan dibayarkan 9 bulan yang akan datang sebesar Rp800.000,00 dengan suku bunga 1,5% per semester. Berapakah nilai tunai modal tersebut?

3. Zahrah meminjam uang di koperasi selama 3 tahun 6 bulan dengan bunga majemuk 3,5% per caturwulan. Setelah jangka waktu habis ia harus mengembalikan Rp15.000.000,00. Hitunglah uang yang dipinjam Zahrah!
4. Aldi menabung pada sebuah bank dengan suku bunga majemuk 12% setahun. Setelah 3 tahun jumlah tabungan Aldi dan bunganya menjadi Rp5.000.000,00. Hitunglah besar uang yang ditabung Aldi!

F. RENTE

1. Pengertian Rente

Rente adalah cara pembayaran atau penerimaan sejumlah uang tetap secara berkala dan dalam jangka waktu tertentu. Pembayaran atau penerimaan disebut angsuran. Dalam kehidupan sehari-hari rente dipakai antara lain pada pembayaran angsuran KPR (kredit pemilikan rumah), pembayaran premi asuransi, dan lain-lain.

2. Macam-Macam Rente

a. Berdasarkan banyaknya angsuran
   1) Rente tertentu, yaitu rente yang dibayarkan selama jangka waktu terbatas.
   2) Rente kekal, yaitu rente yang dibayarkan selama jangka waktu tidak terbatas.

b. Berdasarkan saat pembayaran
   1) Rente pranumerando, yaitu rente yang pembayarannya setiap awal jangka waktu.
   2) Rente postnumerando, yaitu rente yang pembayarannya setiap akhir jangka waktu.

3. Nilai Akhir dan Nilai Tunai Rente

Nilai akhir, yaitu jumlah dari semua angsuran.

a. Nilai akhir rente pranumerando

1) Cara deret geometri:

$$Sn = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{M\,(1 + i)\,[(1 + i)^n - 1]}{(1 + i) - 1}$$

atau $N_{a\,pra} = \dfrac{M\,(1 + i)\,[(1 + i)^n - 1]}{i}$

2) Cara daftar bunga:

$$N_{a\,pra} = M \,.\, \Sigma\,(1 + i)^n \leftrightarrow N_{a\,pra} = M \,.\, \delta n\; p\%$$

b. Nilai akhir rente postnumerando

1) Cara deret geometri:

$$Sn = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{M\,[(1 + i)^n - 1]}{(1 + i) - 1}$$

atau $N_{a\,post} = \dfrac{M\,[(1 + i)^n - 1]}{i}$

2) Cara daftar bunga:

$$N_{a\,post} = M + M \,.\, \Sigma\,(1 + i)^n \leftrightarrow N_{a\,post} = M + M \,.\, \delta_{n-1\,p\%}$$

Nilai tunai rente, yaitu jumlah nilai tunai dari semua angsuran-angsurannya yang dihitung pada awal masa bunga pertama.

a. Nilai tunai rente pranumerando

1) Cara deret geometri:

$$Sn = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{M\,[1 - (1 + i)^{-1}]^n}{[1 - (1 + i)^{-1}]}$$

atau $N_{t\,pra} = \dfrac{M\,[1 - (1 + i)^{-n}]}{[1 - (1 + i)^{-1}]}$

2) Cara daftar bunga:

$$N_{t\,pra} = M + M\,\Sigma\,(1 + i)^{-n} \leftrightarrow N_{t\,pra} = M + M \,.\, a_{(n-1)\,p\%}$$

b. Nilai tunai rente postnumerando

1) Cara deret geometri:

$$Sn = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{M\,[(1 + i)^n - 1]}{i\,(1 + i)^n}$$

atau $N_{t\,post} = \dfrac{M\,[1 - 1/(1 + i)^n]}{i}$

2) Cara daftar bunga:

$$N_{t\,post} = M\,\Sigma\,(1 + i)^{-n} \leftrightarrow N_{t\,post} = M \,.\, a_{np}$$

4. Rente Kekal

Rente kekal adalah rente yang pembayarannya tidak terbatas. Nilai tunai rente kekal pranumerando adalah rente yang pembayaran angsurannya dilakukan setiap awal periode dalam waktu tidak terbatas. Cara deret geometri:

$$S_{\sim} = \frac{a}{(1 - r)} \leftrightarrow N_{t\,kekal\,pra} = \frac{M\,(1 + i)}{i} \leftrightarrow N_{t\,kekal\,pra} = M + M/i$$

5. Rente yang Ditangguhkan

Rente yang ditangguhkan adalah rente yang pembayaran angsuran pertamanya tidak dilakukan secara langsung pada awal masa bunga pertama tetapi ditangguhkan atau ditunda beberapa waktu.

$Nt_{\,tertunda} = T_1 - T_2$

T_1: nilai tunai sebelum ditangguhkan.

T_2: nilai tunai setelah ditangguhkan.

$T_1 = M\,\Sigma\,(1 + i)^{-n} \leftrightarrow T_1 = M \,.\, a_{n\,p\%}$ dan $T_2 = M\,\Sigma\,(1 + i)^{-s} \leftrightarrow T_2 = M \,.\, a_{s\,p\%}$

Latihan Soal

1. Setiap awal bulan, seorang karyawati meminjam uang di bank Rp1.500.000,00 dengan suku bunga majemuk 1,5% per bulan. Berdasarkan pada tabel berikut, hitunglah jumlah uang tabungan pada akhir tahun ke-2!

N	1,5%
23	27,6335
24	290630
25	30,5135

2. Setiap awal, bulan Ningsih menerima beasiswa Rp200.000,00 dari seorang donatur selama 2 tahun suku bunga majemuk 1,5% per bulan. Seluruh uang tersebut diterima sekaligus pada awal bulan pertama. Hitunglah jumlah uang yang diterima Ningsih!
3. Setiap akhir tahun Anton menabung di bank Rp200.000,00. Suku bunga majemuk 12% per tahun berdasarkan tabel di bawah. Hitunglah jumlah tabungan Anton pada akhir tahun ke-5!

N	12%
2	1,2544
3	1,4049
4	1,5735

4. Setiap awal bulan Hasbi menabung uangnya Rp700.000,00 pada sebuah bank dengan suku bunga majemuk 2,5% per bulan. Hitunglah jumlah tabungannya setelah 1,5 tahun!
5. Setiap akhir tahun seorang pengusaha menyimpan uang sebesar Rp1.500.000,00 pada sebuah bank dengan perhitungan bunga majemuk 10% tahun. Berdasarkan pada tabel di bawah ini, hitunglah jumlah simpanan pada akhir tahun ke-10!

N	10%
9	14,9374
10	17,5312
11	20,3843

6. Setiap awal semester Umami menabung uangnya Rp200.000,00 pada sebuah koperasi dengan suku bunga majemuk 5,5% per semester. Hitunglah jumlah tabungannya pada akhir tahun ke-4!

7. Pada setiap akhir bulan Risna menabung pada sebuah bank swasta sebesar Rp1.000.000,00, pihak bank memberikan suku bunga majemuk 2% per bulan. Hitunglah jumlah uang yang akan diterima Risna pada akhir bulan ke-4!
8. Setiap akhir bulan, uang sebesar Rp500.000,00 ditabung pada sebuah bank dengan perhitungan bunga majemuk 0,5% per bulan. Dengan berdasar pada tabel di bawah ini, hitunglah jumlah uang tabungan pada akhir tahun ke-2!

N	0,5%
23	24,4320
24	25,5591
25	26,6919

9. Vega mendapat beasiswa sebesar Rp200.000,00 setiap awal tahun secara terus-menerus. Jika beasiswa tersebut diterima sekaligus pada awal tahun pertama dengan perhitungan suku bunga 5% setahun, hitunglah jumlah uang yang diterima Vega!
10. Setiap awal tahun, sebuah panti jompo menerima bantuan sebesar Rp8.000.000,00 secara terus-menerus. Bantuan tersebut akan diterima sekaligus pada awal tahun dengan perhitungan bunga majemuk 12,5% per tahun. Hitunglah uang yang harus dikeluarkan oleh bank!
11. Dengan jangka waktu tidak terbatas, Mujiman mendapat beasiswa setiap awal bulan sebesar Rp150.000,00. Bantuan tersebut diterima sekaligus dengan perhitungan bunga majemuk 1,5% per bulan. Hitunglah jumlah uang yang diterima Mujiman!
12. Mulai 1 Januari 2007, setiap awal bulan Rafli menabung uang sebesar Rp50.000,00 pada sebuah bank yang memberikan suku bunga 3% per bulan. Pada akhir Juni 2007, Rafli mengambil semua uangnya. Berapakah jumlah uang yang diterima Rafli?

13. Mulai 31 Januari 2007, setiap akhir bulan Nita menabung uang sebesar Rp100.000,00 pada sebuah bank yang memberikan suku bunga 5% per bulan. Pada akhir Desember 2007, Nita mengambil semua uangnya. Berapakah jumlah uang yang diterima Nita?
14. Sebuah perusahaan mempunyai kewajiban untuk membayar angsuran pada sebuah bank dengan jumlah yang sama sebesar Rp10.000.000,00 setiap tanggal 1 Januari selama 5 tahun. Angsuran pertama dibayar pada tanggal 1 Januari 2004. Apabila perusahaan tersebut ingin melunasi utang seluruhnya pada tanggal 1 Januari 2004, hitung berapa besar yang harus dibayar jika bank memberikan suku bunga 3,5% setahun!
15. Sebuah panti asuhan akan menerima bantuan Rp3.000.000,00 setiap akhir bulan dari seorang donator mulai 31 Maret 2007 s.d. akhir Desember 2008. Jika bantuan tersebut dibayarkan sekaligus pada awal Maret 2007 dengan perhitungan bunga 3,5% per bulan, berapa jumlah yang akan diterima panti asuhan itu?
16. Suatu yayasan panti jompo setiap awal bulan selalu menerima bantuan dari sebuah perusahaan sebesar Rp2.000.000,00 secara terus-menerus. Pengurus tersebut menginginkan bantuan tersebut diterima sekaligus pada awal masa bunga pertama. Jika pihak bank memberikan suku bunga majemuk 3% per bulan, berapa jumlah uang yang diterima pengurus panti tersebut?
17. Marjuki adalah seorang anak veteran pejuang kemerdekaan yang mendapat beasiswa mulai tanggal 31 Januari 2007 sebesar Rp500.000,00 secara terus-menerus. Jika Marjuki ingin beasiswa tersebut diterima sekaligus pada tanggal 1 Januari 2007 diperhitungkan dengan suku bunga majemuk 4% sebulan. Berapa jumlah uang yang akan diterima Marjuki?
18. Pada tanggal 1 Januari 2007, Ibu Mirna meminjam uang di bank. Pinjaman tersebut akan diangsur dengan jumlah angsuran yang sama, sebesar Rp2.000.000,00 setiap awal bulan. Angsuran pertama dibayarkan pada tanggal 1 Mei 2007 dan seterusnya hingga berakhir pada tanggal 1 Desember 2007. Jika diperhitungkan suku bunga majemuk 3% sebulan, hitunglah besarnya pinjaman Ibu Mirna!

19. Suatu pinjaman akan dilunasi dengan angsuran yang sama besarnya, yaitu Rp1.500.000,00, dengan suku bunga 3% sebulan. Angsuran pertama dilakukan 6 bulan setelah transaksi. Jika pinjaman itu lunas pada angsuran ke-17, hitunglah besarnya pinjaman!
20. Pada awal tahun 2006, suatu perusahaan pemerintah memberikan pinjaman lunak. Sambil menunggu stabilitas keuangan perusahaan, pinjaman tersebut akan diangsur dengan jumlah angsuran yang sama, sebesar Rp10.000.000,00. Angsuran pertama dibayarkan pada awal 2008 dan seterusnya hingga berakhir pada awal tahun 2012. Jika diperhitungkan suku bunga majemuk 8% setahun, hitunglah besarnya pinjaman!

G. ANUITAS

1. Pengertian Anuitas

Anuitas adalah pembayaran atau angsuran dengan jumlah tetap yang dilakukan secara periodik. Selain itu, anuitas juga berarti cara pembayaran utang dengan jumlah yang sama besar dan dalam jangka waktu yang sama. Dalam anuitas (A) terkandung angsuran (An) dan bunga (Bn).

$$A = An + Bn$$

Contohnya pembelian rumah dengan fasilitas KPR, adapun jenis suku bunga yang dipakai dalam anuitas adalah suku bunga majemuk dan besarnya bunga tersebut sudah termasuk dalam setiap anuitas. Jadi, anuitas terdiri atas angsuran dan bunga.

$$A = a_k + b_k$$
$$k = 1, 2, 3 \ldots$$

A: anuitas; a_k: angsuran pelunasan pinjaman KPR; b: bunga. Karena besarnya anuitas selalu tetap, maka yang berubah adalah angsuran dan bunga.

2. Menghitung Anuitas

Besar pinjaman sama dengan jumlah nilai tunai anuitas-anuitasnya. Misalnya pinjaman sebesar M akan dilunasi dengan n kali anuitas A setiap periode dengan suku bunga $p\%$ per periode. Berapakah besarnya anuitas?

Anuitas ke-	Besar Anuitas	Nt Pada Awal Periode
1	A	$\frac{A}{(1+i)^1}$
2	A	$\frac{A}{(1+i)^2}$
.	.	.
.	.	.
$n-1$	A	$\frac{A}{(1+i)^{n-1}}$
n	A	$\frac{A}{(1+i)^n}$
Pinjaman (M)		$\frac{SA}{(1+i)^t}$

M adalah nilai tunai anuitas dan dapat diuraikan sebagai berikut.

$$M = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \ldots\ldots + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$M = A\,\Sigma \frac{1}{(1+i)^t} \leftrightarrow A = \frac{M}{1} \leftrightarrow A = \frac{M}{a_{n\,p\%}} \leftrightarrow A = M \times 1/a_{n\,p\%} = \Sigma \frac{1}{(1+i)^t}$$

Dengan deret geometri (pengerjaan dengan kalkulator):

$$A = \frac{M\,.\,i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Contoh:

1. Hitunglah besarnya anuitas dari pinjaman Rp8.000.000,00 dilunasi selama 3 tahun dalam anuitas bulanan, bunganya diperhitungkan 2,5% sebulan!

   Jawab:

   $M = 8.000.000$; $i = 0{,}025$; $n = 3$ tahun = 36 bulan

   Cara 1 (deret geometri):

   $$A = \frac{i \times M}{1-\frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{0{,}025 \times 8.000.000}{1-\frac{1}{(1+0{,}025)^{36}}} = \frac{200.000}{1-\frac{1}{(1{,}025)^{36}}}$$

   $$A = \frac{200.000}{1-0{,}411093723} = \frac{200.000}{0{,}5889062726} = \text{Rp}339.612{,}61$$

   Cara 2 (notasi sigma):

   $$A = M \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)}} = 8.000.000 \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{36}\frac{1}{(1{,}025)^k}}$$

   $$A = 8.000.000 \times 0{,}04245158 = \text{Rp}339.612{,}64$$

2. Utang sebesar Rp4.000.000,00 akan dilunasi dengan anuitas Rp500.000,00 per bulan dengan suku bunga 2% per bulan. Hitunglah besarnya angsuran ke-8!

   Jawab:

   $M = 4.000.000$; $A = 500.000$; $i = 2\%$

   $a_n = (A - iM)(1 + i)^{n-1}$

   $a_8 = (500.000 - 0{,}02 \times 4.000.000)(1 + 0{,}02)^{8-1}$

   $a_8 = (500.000 - 80.000)(1{,}02)^7 = (420.000)(1{,}148685668) = 482.447{,}98$

   Jadi, angsuran ke-8 adalah Rp482.447,98.

3. Pinjaman sebesar Rp100.000,00 akan dilunasi dengan anuitas Rp23.700 per bulan dengan suku bunga 6% per bulan. Buatlah tabel rencana angsurannya atau pelunasannya!

Jawab:

Bulan	Pinjaman Awal		Anuitas (A) = 23.700				Sisa Utang (M – a)	
			Bunga (b) = 6% × M		Angsuran (a) = A – b			
1.	100.000,	00	6.000,	00	17.700,	00	82.300,	00
2.	82.300,	00	4.938,	00	18.762,	00	63.538,	00
3.	63.538,	00	3.812,	00	19.887,	00	43.650,	00
4.	43.650,	00	2.619,	00	21.080,	00	22.569,	00
5.	22.569,	00	1.354,	00	22.569,	00	0	00
			Jumlah Rp100.000,00					

4. Modal sebesar Rp5.000.000,00, suku bunga 20% per bulan, selama 10 bulan. Tentukan:
   a. besarnya anuitas;
   b. besarnya bunga pada bulan ke-7;
   c. besarnya angsuran pada bulan ke-5;
   d. buatlah tabel pelunasannya!

   Jawab:

   $M = 5.000.000; i = \frac{P}{100} = \frac{20}{100} = 0{,}2; n = 10$

   a. $A = \frac{M\,i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} \leftrightarrow A = \frac{5.000.000 \times 0{,}2}{1 - \frac{1}{(1+0{,}2)^{10}}} = 1.192.613$

   Maka anuitasnya, yaitu Rp1.192.613,00.

   b. $n = 7$

   $\frac{P}{100} \times M \times \frac{n}{10} \leftrightarrow \frac{20}{100} \times 5.000.000 \times \frac{7}{10} = 700.000$

   Maka besarnya bunga pada bulan ke-7 adalah Rp700.000,00.

   c. $n = 5$

   $b_1 = \frac{20}{100} \times 5.000.000 = 1.000.000$

   $a_1 = A - b_1 \leftrightarrow a_1 = 1.192.613 - 1.000.000 = 192.613$

   $a_n = a_1 (1 + i)^{n-1} \leftrightarrow a_5 = 192.613\ (1 + 0{,}2)^4 = 399.402{,}32$

   Maka besarnya angsuran pada bulan ke-5 adalah sebesar Rp399.402,32.

   d. Tabel pelunasan:

Bulan	Pinjaman Awal Tahun (Rp)	Anuitas = 1.192.613		Sisa Pinjaman (Rp)
		Bunga (Rp)	Angsuran (Rp)	
1	5.000.000	20% × 5.000.000 = 1.000.000	1.192.613 – 1.000.000 = 192.613	5.000.000 – 192.613 = 4.807.387
2	4.807.387,00	961.477,40	231.135,60	4.576.251,40
3	4.576.251,40	915.250,28	277.362,72	4.298.888,68
4	4.298.888,68	859.777,736,00	332.835,26	3.966.053,42
5	3.966.053,42	793.210,68	399.402,32	3.566.651,10
6	3.566.651,10	713.330,22	479.282,78	3.087.368,32
7	3.087.368,32	617.473,66	575.139,34	2.512.228,98
8	2.512.228,98	502.445,80	690.167,20	1.822.061,78
9	1.822.061,78	364.412,36	828.200,64	993.861,14
10	993.861,14	198.772,23	993.840,77	20.37

5. Rexy meminjam uang sebesar Rp2.500.000,00 dilunasi dengan cara anuitas Rp585.441,10 (selama 2 tahun) dengan bunga 2% per tahun. Tentukan besar anuitas jika angsuran 2 tahun pertama sesudah peminjaman, dan buatlah rencana angsurannya.

   Jawab:

   $A = \frac{m_{1(1+i)^n}}{(1+i)^n} = 2.500.000 \times 0{,}05 \times (1+0{,}05)^4 : (1+0{,}05)^4 - 1$

   $A = \frac{137.500 \times (1{,}05)^4}{(1+0{,}05) - 1} = \frac{170.338.389{,}5}{0{,}23882465}$

   $A = 713.236.2154 = 713.236{,}22$

   Maka anuitasnya, yaitu Rp713.236,22.

Bulan	Pinjaman Awal	Anuitas = 585.441,10		Sisa Pinjaman
		Bunga	Angsuran	
1	2.500.000,00	137.500,00	447.941,10	2.052.058,90
2	2.052.085,80	112.863,24	472.577,86	1.579.481,04
3	1.579.481,04	86.871,48	498.569,64	1.080.911,40
4	1.080.911,40	59.450,13	525.990,97	554.920,43
5	554.920,43	30.520,60	585.920,48	–0,05

3. Rumus-Rumus Hubungan Antara Anuitas, Angsuran, Sisa Pinjaman, dan Besar Pinjaman

a. *Mencari Hubungan Antara Angsuran dengan Angsuran yang Berurutan*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pada akhir tahun I} \quad : A = A1 + B1 \\ \text{Pada akhir tahun II} \;\: : A = A2 + B2 \\ \text{Pada akhir tahun III} : A = A3 + B3\end{array}\right\} A1 + B1 = A2 + B2 = A3 + B3$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A1 + B1 = A2 + B2\\
&\Rightarrow A1 + Hb = A2 + (H - A1)b\\
&\Rightarrow A1 + Hb = A2 + Hb - A1b\\
&\Rightarrow \quad A1 = A2 - A1b\\
&\Rightarrow \quad A2 = A1 + A1b\\
&\qquad\; A2 = A1\,(1 + b)\\
&\Rightarrow A2 + B2 = A3 + B3\\
&\Rightarrow A2 + (H - A1)b = A3 + (H - A1 - A2)b\\
&\Rightarrow \qquad A2 = A3 - A2b\\
&\Rightarrow \qquad A3 = A2 + A2b\\
&\qquad\qquad A3 = A2\,(1 + b)
\end{aligned}$$

Jadi, rumus mencari angsuran ke-n, jika diketahui angsuran sebelumnya adalah:

$$\boxed{A_{k+1} = A_k\,(1 + b) \text{ atau } A_k = A_{k-1}\,(1 + b)}$$

Contoh:

Utang sebesar Rp100.000,00 akan dilunasi dengan sistem angsuran anuitas selama 4 tahun, dengan suku bunga 2% per tahun. Jika besar angsuran ke-2 adalah Rp24.747,63, hitunglah besarnya angsuran ke-3!

Diketahui: H = Rp100.000,00; $n = 4$; $b = 2\%$; $A2$ = Rp24.747,63

Ditanya: angsuran ke-3 ($A3$)

Jawab:

$A_k = A_{k-1}\,(1 + b)$

$A3 = A2\,(1 + 0{,}02)$

$A3 = 24.747{,}63\,(1{,}02)$

$A3 = 25.242{,}58$

Besarnya angsuran ke-3 adalah Rp25.242,58.

b. *Mencari Hubungan Antara Angsuran ke-n dengan Angsuran ke-1*

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A_{k+1} = A_k(1 + b)\\
&\Rightarrow A2 = A1(1 + b)\\
&\Rightarrow A3 = A2(1 + b) = A1(1 + b)\,(1 + b)\\
&\Rightarrow A3 = A1\,(1 + b)^2\\
&\Rightarrow A4 = A3(1 + b) = A1(1 + b)^2\,(1 + b)\\
&\Rightarrow A4 = A1(1 + b)^3
\end{aligned}$$

Jadi, rumus mencari angsuran ke-n, jika diketahui angsuran pertama adalah:

$$\boxed{A_{k+1} = A1\,(1 + b)^k \text{ atau } A_k = A1\,(1 + b)^{k-1}}$$

Contoh:

Utang sebesar Rp100.000,00 akan dilunasi dengan anuitas tahunan selama 4 tahun, dengan suku bunga 2% per tahun. Berapakah besarnya angsuran tahun ke-3, jika diketahui angsuran tahun pertama Rp24.262,38?

Diketahui: H = Rp100.000,00; $n = 4$; $b = 2\%$; $A1$ = Rp24.262,38

Ditanya: angsuran ke-3 ($A3$)

Jawab:

$A_k = A1\,(1+b)^{k-1}$

$A3 = A1\,(1+b)^2$

$A3 = 24.262{,}38\,(1{,}02)^2$

$A3 = 25.242{,}58$

Besarnya angsuran ke-3 adalah Rp25.242,58.

c. *Hubungan Antara Utang dengan Angsuran*

$H = A1 + A2 + A3 + \ldots\ldots + An$

$$H = \underbrace{A1 + A1\,(1+b) + A1\,(1+b)^2 + \ldots + A1\,(1+b)^{n-1}}_{\text{deret geometri}}$$

$$Sn = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1} = A1\,\frac{(1+b)^n - 1}{(1+b) - 1} = A1\,\frac{(1+b)^n - 1}{b}$$

$a = A1$; $r = (1+b)$; $n = n$

Jadi, rumus mencari utang mula-mula dan rumus mencari angsuran pertama adalah:

$$H = A1\,\frac{(1+b)^n - 1}{b} \quad \text{atau} \quad A1 = \frac{Hb}{(1+b)^n - 1}$$

d. *Hubungan Antara Anuitas dengan Angsuran ke-1*

$A = A1 + B1$

$A = A1 + Hb$

$A = A1 + A1\,\frac{(1+b)^n - 1}{b}\,b$

$A = A1 + A1\,(1+b)^n - A1$

$A = A1\,(1+b)^n$

$\Rightarrow A = A1\,(1+b)^n \Rightarrow A = \frac{Hb}{(1+b)^n - 1} \cdot (1+b)^n$

Jadi rumus untuk mencari besarnya anuitas adalah:

$$A = Hb\,\frac{(1+b)^n}{(1+b)^n - 1}$$

Contoh:

Suatu pinjaman akan dikembalikan dengan sistem anuitas, dengan suku bunga 2% per bulan, selama 3 bulan, dengan angsuran pertama Rp8.000,00. Tentukan:

1) besarnya pinjaman;
2) besarnya anuitas!

Diketahui: $A1$ = Rp 8.000,00; $b = 2\%$; $n = 3$

Ditanya: besarnya pinjaman (H) dan besarnya anuitas (A)

Jawab:

1) $H = A1\,\frac{(1+b)^n - 1}{b} = 8.000\,\frac{(1+0{,}02)^3 - 1}{0{,}02}$ = Rp.24.483,1
2) $A = Hb\,\frac{(1+b)^n}{(1+b)^n - 1} = 24.483{,}1\,(0{,}02)\,\frac{(1+0{,}02)^3}{(1+0{,}02)^3 - 1}$ = Rp8.489,67

e. *Sisa Utang pada Akhir Tahun ke-k*

$Sk = H - A1 - A2 - A3 - \ldots\ldots - Ak$

$Sk = H - (A1 + A2 + A3 + \ldots\ldots + Ak)$

$$Sk = H - [\underbrace{A1 + A1\,(1+b) + A1\,(1+b)^2 + \ldots\ldots + A1\,(1+b)^{k-1}}_{\text{deret geometri}}]$$

$$Sn = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1} = A1\,\frac{(1+b)^k - 1}{b}$$

$a = A1$; $r = (1+b)$; $n = k$

$$Sk = H - A1\,\frac{(1+b)^k - 1}{b} = A1\,\frac{(1+b)^n - 1}{b} - A1\,\frac{(1+b)^k - 1}{b} = \frac{A1(1+b)^n - (1+b)^k}{b}$$

Jadi, rumus mencari sisa utang pada akhir tahun ke-k adalah:

$$Sk = A1\,\frac{(1+b)^n{}_{k} - (1+b)}{b}$$

Contoh:

Utang sebesar Rp10.000.000,00 akan dilunasi dengan 10 anuitas tahunan. Anuitas pertama dibayar setelah satu tahun. Dasar bunga 15% per tahun. Tentukan:

1) besarnya anuitas;
2) besarnya sisa utang pada akhir tahun ke-3!

Diketahui: H = Rp10.000.000,00; $n = 10$; $b = 15\%$

Ditanya: anuitas (A) dan sisa utang akhir tahun ke-3 ($S3$)

Jawab:

1) $A = Hb \dfrac{(1+b)^n}{(1+b)^n - 1}$

   $A = 10.000.000\ (0,15) \dfrac{(1+0,15)^{10}}{(1+0,15)^{10} - 1}$ = Rp1.992.520,63

   Jadi, besarnya anuitas adalah Rp1.992.520,63.

2) $Sk = A1 \dfrac{(1+b)^n - (1+b)^k}{(1+b)^n - 1}$

   * Mencari nilai $A1$:

   $A = A1\ (1+b)^n$

   $1.992.520,63 = A1\ (1,15)^{10}$

   $A1 = \dfrac{1.992.520,63}{1,15^{10}} = 492.520,63$

   * Mencari nilai $S3$:

   $Sk = A1 \dfrac{(1+b)^n - (1+b)^k}{b}$

   $S3 = 492.520,63 \dfrac{(1+0,15)^{10} - (1+0,15)^3}{0,15} = 8.289.722,21$

   Jadi, besar sisa utang pada akhir tahun ke-3 adalah Rp8.289.722,21.

Keterangan:

A : Anuitas	H : Utang
An : Angsuran ke-n ($A1$, $A2$, $A3$, ..., dst)	b : Suku bunga
	Sk : Sisa utang akhir tahun ke-k
Bn : Bunga ke-n	n : Periode angsuran

Kesimpulan:

1. Rumus-rumus hubungan antara angsuran dengan angsuran:
   $a_n = a_{n-1}(1+i)$
2. Rumus-rumus hubungan antara angsuran dengan angsuran pertama: $a_n = a_1(1+i)^{n-1}$
3. Rumus-rumus hubungan antara angsuran pertama dengan besar pinjaman:
   $a_1 = \dfrac{i \cdot M}{S_{np\%} - 1}$ atau $a_1 = A - b_1$
4. Rumus-rumus hubungan antara anuitas dengan angsuran pertama: $A = a_1 \cdot S_{n\,p\%}$ dan $A = M \times 1/a_{n\,p\%}$
5. Rumus-rumus hubungan antara sisa pinjaman dengan anuitas, bunga, dan angsuran pertama:
   a. $S_n = M - (1 + \delta_{n-1\ p\%})$
   b. $S_n = M - a_1/i \times [(1+i)^n - 1]$
   c. $S_n = A \times a_{n\,p\%}$
   d. $S_n = b_{n+1}/i$
   e. $S_p = a_1/i \times [(1+i)^n - (1+i)^p]$
   f. $S_p = a_1/i \times [1 - (1+i)^{-n+p}]$

Latihan Soal

1. Suatu pinjaman sebesar Rp10.000.000,00 akan dilunasi secara anuitas bulanan, jika a_5 = Rp1.500.000,00 berdasarkan suku bunga majemuk 2% per bulan. Dengan berdasarkan tabel anuitas (hlm. 178), tentukan angsuran bulan ke-2!
2. Pada pelunasan dengan anuitas diketahui suku bunga 2% sebulan, jika angsuran bulan ke-3 Rp67.300,00, hitunglah besar angsuran ke-5!
3. Pinjaman Rp1.000.000,00 dilunasi dengan anuitas tahunan sebesar Rp216.300,00 dengan suku bunga majemuk 8% setahun.

Tabel Rencana Pelunasan Anuitas pada Pinjaman Obligasi

Tahun	Pinjaman	Dalam Obligasi	A = Rp2.373.964		Sisa Angsuran + Bunga	Total Angsuran	Jumlah Obligasi yang Diangsur	Dalam Obligasi	Sisa Angsuran	Sisa Pinjaman
			Bunga 6%	Angsuran						
1	10.000.000	100	600.000	1.773.964	–	–	1.700.000	17	73.964	8.300.000
2	8.300.000	83	498.000	1.875.964	78.401,8	1.954.365,8	1.900.000	19	54.365,8	6.400.000
3	6.400.000	64	384.000	1.989.964	57.627,75	2.047.591,75	2.000.000	20	47.591,75	4.400.000
4	4.400.000	44	264.000	2.109.964	50.447,26	2.160.411,26	2.100.000	21	60.411,26	2.300.000
5	2.300.000	23	138.000	2.235.964	64.035,94	2.299.999,94	2.200.000	22	99.999,94	100.000
Jumlah							10.000.000	100		

Angsuran pertama dilaksanakan setelah satu tahun penerimaan pinjaman. Hitunglah sisa pinjaman setelah angsuran pertama dibayar!

4. Diketahui tabel rencana pelunasan sebagian data sebagai berikut. Hitunglah besarnya anuitas!

Tahun ke-	Pinjaman Awal	A = Rp		Sisa Pinjaman
		Bunga 2 %	Angsuran	
1	Rp100.000,00		Rp6.355,00	
2		Rp1.872,00		Rp87.162,00

5. Perhatikan tabel rencana pelunasan berikut. Hitunglah besar angsuran ke-3!

Tahun ke-	Pinjaman Awal	A = Rp45.000,00		Sisa Pinjaman
		Bunga 5 %	Angsuran	
1	Rp200.000,00	Rp10.000,00		
2				Rp128.250,00
3				Rp89.662,50

6. Dari tabel di bawah ini hitunglah pinjaman awal bulan ke-3!

Bulan ke-	Pinjaman Awal	A = Rp1.060.791,97		Sisa Pinjaman
		Bunga %	Angsuran	
1	Rp5.000.000,00			Rp4.039.208,03
2		Rp80.784,16		

7. Diketahui tabel rencana pelunasan sebagian data sebagai berikut. Hitunglah besarnya bunga pada bulan ke-2!

Bulan ke-	Pinjaman Awal	A = Rp26.262,38		Sisa Pinjaman
		Bunga %	Angsuran	
1	Rp100.000,00		Rp24.262,38	
2				

8. Diketahui tabel rencana pelunasan sebagian data sebagai berikut. Hitunglah besarnya anuitas!

Bulan ke-	Pinjaman Awal	A = Rp		Sisa Pinjaman
		Bunga 6 %	Angsuran	
1	Rp2.000.000,00			Rp1.542.817,02
2		Rp92.569,02		

9. Diketahui tabel rencana pelunasan sebagian data sebagai berikut. Hitunglah besarnya sisa pinjaman pada periode ke-3!

Periode ke-	Pinjaman Awal	A = Rp.44.583,96		Sisa Pinjaman
		Bunga 9%	Angsuran	
1		Rp18.000,00		Rp173.416,04
2			Rp28.976,52	
3		Rp12.999,56		

10. Pinjaman Rp20.000.000,00 dilunasi dengan anuitas bulanan sebesar Rp1.000.000,00 suku bunga 2% sebulan. Dengan berdasar pada tabel, hitunglah besarnya angsuran ke-5!

n	2%
4	1,0824
5	1,1041
6	1,1262

11. Pak Sony meminjam uang pada sebuah bank Rp5.000.000,00 yang akan dilunasi dengan cara anuitas suku bunga 2% per bulan. Pinjaman tersebut diharapkan akan lunas dalam 1 tahun. Hitunglah besar anuitasnya!

12. Pinjaman sebesar Rp10.000.000,00 akan dilunasi dalam 6 anuitas bulanan dengan suku bunga 5% per bulan. Tentukan besarnya anuitas dan buatlah tabel rencana pelunasan!

13. Utang sebesar Rp5.000.000,00 akan dilunasi dengan 10 anuitas tahunan. Jika dasar bunga 6% setahun, dan pembayaran pertama setelah satu tahun, hitunglah anuitas, angsuran ke-1, angsuran ke-6 dan ke-8, serta sisa utang pada akhir tahun ke-8!

4. Anuitas dengan Pembulatan

Anuitas pada pembayaran terakhir dapat dilakukan pembulatan ke atas atau ke bawah, misalnya pembulatan kesatuan, ke puluhan, ke ratusan, dan ke ribuan. Misalnya anuitas = Rp21.830,00, jika dibulatkan ke atas ke seratusan rupiah menjadi Rp21.900,00, dan jika dibulatkan ke bawah ke ribuan rupiah menjadi Rp21.000,00. Dengan demikian, akan terjadi kelebihan atau kekurangan, namun pada akhir pelunasan harus diperhitungkan.

Contoh:

Suatu utang sebesar Rp1.000.000,00 akan dilunasi dalam 5 anuitas yang *dibulatkan ke bawah* sampai kelipatan Rp100,00. Pembayaran pertama dilakukan setelah satu bulan. Jika suku bunga majemuk 3% sebulan, hitunglah:

a. Anuitas matematis dan pembulatannya.
b. Susunlah tabel rencana angsurannya.
c. Angsuran terakhir.
d. Anuitas terakhir.

Dik: M = Rp1.000.000,00; i = 3% setahun atau 0,03; n = 5

Dit: A, tabel rencana angsuran, a terakhir, dan A terakhir

Jawab:

a. $A = M \times 1/a_{n\,p\%}$ = Rp1.000.000,00 $\times 1/a_{5\,3\%}$ = Rp218.354,57
   A pembulatan ke bawah ke seratusan rupiah menjadi:
   Rp218.300,00 $\rightarrow s = 54{,}57$

b. Tabel rencana angsuran:

Bulan ke-	Pinjaman Awal	A = Rp218.300,00		Sisa Pinjaman
		Bunga 3 %	Angsuran	
1	Rp1.000.000,00	Rp30.000,00	Rp188.300,00	Rp811.700,00
2				
3				
4				
5			Rp211.933,31	Rp289,73

c. Angsuran terakhir:
   Rp211.933,31 + Rp289,73 = Rp212.223,04

d. Anuitas terakhir:
   Rp218.300,00 + Rp289,73 = Rp218.589,73

Catatan:

Rp289,73 disebut suku kekurangan utang

(s = 54,57) disebut suku kelebihan anuitas

Misalnya suku kekurangan atau kelebihan utang adalah P dan kelebihan anuitas adalah S maka besarnya:

$$P = \frac{S\,(1+i)^n - 1}{i}$$

Dari contoh soal di atas:

S = Rp54,57; i = 3% per bulan; n = 5, maka:

$$P = \frac{S\,(1+i)^n - 1}{i} = \frac{\text{Rp}54{,}57\,[(1{,}03)5 - 1]}{0{,}03}$$

Besarnya pelunasan utang terakhir = A pembulatan + P

Latihan Soal

1. Suatu utang sebesar Rp8.000.000,00 dikembalikan dengan 7 anuitas tiap akhir bulanan. Jika i = 4,5% dan anuitas dibulatkan ke bawah ke ribuan rupiah. Buatlah daftar angsurannya dan hitung anuitas terakhir!
2. Pinjaman sebesar Rp500.000,00 dilunasi dengan 10 anuitas bulanan suku bunga 5% sebulan, jika dibulatkan ke atas Rp1.000,00 dengan berdasar pada tabel, hitunglah besarnya anuitas!

n	5%
9	0,1407
10	0,1295
11	0,1204

3. Suatu utang sebesar Rp60.000.000,00 dikembalikan dengan 6 anuitas tiap akhir tahun. Jika i = 4% dan anuitas dibulatkan ke atas ke ribuan rupiah, hitunglah:
   a. Anuitas matematis dan pembulatannya.
   b. Susunlah tabel rencana angsurannya.
   c. Besar angsuran ke-1.
   d. Besar angsuran ke-6.
   e. Suku kelebihan utang.
   f. Anuitas terakhir.

5. Anuitas Pada Pinjaman Obligasi

Obligasi adalah surat pengakuan utang yang dikeluarkan oleh pemerintah atau oleh suatu badan. Biasanya pinjaman untuk mendapatkan modal dalam jumlah cukup besar yang dipecah dalam satuan-satuan kecil, misalnya Rp50.000,00 atau Rp100.000,00. Dalam surat obligasi biasanya tertera "nilai nominal, nilai emisi, suku bunga, dan tanggal pembebasan.

Contoh:

Utang sebesar Rp10.000.000,00 terdiri atas 100 lembar obligasi akan dilunasi dengan 5 anuitas tahunan dan suku bunga 6%. Buatlah rencana pelunasannya.

Dik: M = Rp10.000.000,00
   i = 6%;
   n = 5
   jumlah lembar obligasi = 100 lembar

Dit: tabel rencana pelunasannya

Jawab:

Nilai nominal = Rp10.000.000,00 : 100 lembar = Rp100.000,00

$A = M \times 1/a_{np\%}$ = Rp10.000.000,00 $\times 1/a_{56\%}$ = Rp2.373.964,00

Tabel Rencana Pelunasan Anuitas pada Pinjaman Obligasi

Tahun	Pinjaman	Dalam Obligasi	A = Rp2.373.964		Sisa Angsuran + Bunga	Total Angsuran	Jumlah Obligasi yang Diangsur	Dalam Obligasi	Sisa Angsuran	Sisa Pinjaman
			Bunga 6%	Angsuran						
1	10.000.000	100	600.000	1.773.964	-	-	1.700.000	17	73.964	8.300.000
2	8.300.000		498.000	1.875.964	78.401,8	1.954.365,8	1.900.000	19	54.365,8	6.400.000
Jumlah							10.000.000	100		

Latihan Soal

1. Utang sebesar Rp50.000.000,00 terdiri dari 50 lembar obligasi dilunasi dengan 5 anuitas tahunan dengan suku bunga 6% per tahun. Berapa lembar obligasi yang dapat diangsur pada tahun pertama?
2. Utang terdiri dari 200 lembar obligasi dengan nilai nominal Rp10.000,00 akan dilunasi dengan pembayaran bulanan selama 1 tahun dengan suku bunga 3% per bulan. Berapa banyak obligasi yang diangsur pada periode ke-2?
3. Pinjaman 250 lembar obligasi Rp25.000.000,00 akan diangsur dengan 65 anuitas suku bunga 5% per triwulan. Buatlah tabel rencana angsurannya!

6. Penyusutan (Amortisasi atau Depresiasi)

a. Pengertian Penyusutan

Penyusutan adalah penurunan nilai aktiva tetap dengan penaksiran secara berkala dari sebagian harta perolehan suatu aktiva terhadap biaya perusahaan.

Beberapa istilah yang harus diketahui dalam mempelajari penyusutan adalah sebagai berikut.

1) Aktiva

Aktiva adalah semua kekayaan yang dimiliki suatu perusahaan baik yang berasal dari modal sendiri ataupun pinjaman. Aktiva terbagi dalam 2 bagian, yaitu aktiva lancar dan aktiva tetap.

Aktiva lancar adalah aktiva yang dipakai tidak lebih dari satu tahun atau nilainya habis dalam satu jangka pakai. Misalnya, surat berharga, piutang barang dagangan, dan perlengkapan.

Aktiva tetap adalah aktiva yang dimiliki untuk menunjang operasional perusahaan yang digunakan dalam jangka panjang. Misalnya, tanah, gedung, dan mesin.

2) Harga perolehan/harga pokok/harga beli adalah total harga beli dengan biaya-biaya yang dikeluarkan sampai aktiva siap digunakan.

3) Umur manfaat/umur ekonomi adalah masa pemakaian aktiva (harta) tetap yang masih mempunyai manfaat ekonomi.

4) Nilai sisa/nilai residu adalah *scrap value; residual value*, yaitu sisa suatu barang yang sudah habis umur ekonomisnya; dalam akuntansi nilai tersebut diperhitungkan sebagai pengurang biaya *over head*.

b. *Metode-Metode Penyusutan*

1) *Metode garis lurus (straight line method)*

Metode garis lurus (*straight line method*) adalah persentase tetap dari harga beli, dengan beban penyusutan tiap periode tetap. Beberapa lambang yang akan digunakan dalam penyusutan adalah sebagai berikut.

A : harga perolehan (aktiva)
S : nilai sisa (residu)
n : umur manfaat
r : persentase atau tingkat penyusutan
D : beban penyusutan tiap periode

a) Beban penyusutan: $D = A - \dfrac{S}{n}$

b) Persentase penyusutan: $r = \dfrac{S}{n} \times 100\%$

c) Nilai sisa/buku akhir periode ke-i:
$S_i = A - i.D = A\,(1 - i.r)$

d) Nilai sisa/buku akhir periode ke-n:
$S_n = A - n.D = A\,(1 - n.r)$

e) Jumlah penyusutan s.d. tahun ke-n atau akumulasinya:
$Sn = A - J_n$ atau $J_n = n\,.\,D$

Contoh:

Sebuah televisi berwarna seharga Rp7.000.000,00 dengan garansi 3 tahun, mempunyai nilai sisa atau residu Rp2.500.000,00. Tentukan:

a) Penyusutan tiap tahun.
b) Presentasi penyusutan.
c) Nilai buku akhir ke-3.
d) Daftar penyusutan.

Jawab:

a) Penyusutan tiap tahun:

$$D = \frac{A - S}{n} = \frac{7.000.000 - 2.500.000}{3} = \text{Rp}1.500.000,00$$

b) Presentasi penyusutan:

$$r = \frac{7.000.000 - 2.500.000}{3 \times 7.000.000} \times 100\%$$

$$r = \frac{4.500.000}{21.000.000} \times 100\% = 21,4\%$$

c) Nilai buku akhir tahun ke-3:

$A - 3D = 7.000.000 - 3 \times 1.500.000$
$= 7.000.000 - 4.500.000 = \text{Rp}2.500.000,00$

d) Daftar penyusutan:

Tahun ke-	Beban Penyusutan	Akumulasi Penyusutan	Nilai Buku Akhir Tahun
0	–	–	7.000.000
1	1.500.000	1.500.000	5.500.000
2	1.500.000	3.500.000	4.000.000
3	1.500.000	4.300.000	2.500.000

2) *Metode persentase tetap dari nilai buku atau metode saldo menurun*

a) Besar tingkat penyusutan: $r = (1 - V\,S/A) \times 100\%$

b) Beban penyusutan tahun ke-n: $Dn = A\,.\,r\,(1 - r)^{n-1}$

c) Nilai buku akhir tahun ke-n: $Sn = A\,.\,(1 - r)^n$

Contoh:

Suatu aktiva bernilai Rp200.000,00 dengan umur manfaat enam tahun dan residu Rp60.000,00. Dengan metode tetap dari nilai buku, hitunglah:

a) Persentase penyusutan tiap tahun.
b) Beban penyusutan tahun ke-2.
c) Nilai/sisa buku akhir tahun ke-2.

Dik: A = Rp200.000,00; $n = 6$; s = Rp60.000,00

Dit: r, $D2$, dan $S2$

Jawab:

a) $r = (1 - VS/A) \times 100\%$

$r = (1 - V60.000/200.000) \times 100\%$

$r = (1 - 0,818) \times 100\% = 18,18\%$

b) $Dn = A \,.\, r\,(1 - r)^{n-1}$

$D2 = 200.000 \,.\, 0,1818\,(1 - 0,1818)^{2-1} = 29.749,75$

c) $Sn = A \,.\, (1 - r)^n$

$S2 = 200.000 \,.\, (1 - 0.1818)^6$ = Rp50.004,92

3) *Metode jumlah bilangan tahun*

a) Jumlah bilangan tahun: $P = ½ \,.\, n\,(n + 1)$
b) Tingkat penyusutan tahun ke-i: $r_i = \dfrac{n + 1 - i}{P}$
c) Beban penyusutan tahun ke-i: $Di = (A - S) \times r_i$
d) Jumlah/akumulasi sampai tahun ke-i: $J_i = (A - S)$ Sigma r_i
e) Nilai buku akhir tahun: $S_i = A - (A - S)$. Sigma r_i

Contoh:

Suatu mesin fotokopi bernilai Rp10.000.000,00 dengan umur manfaat enam tahun jika nilai sisa mesin/residu Rp2.000.000,00. Dengan metode jumlah bilangan tahun, hitung:

a) Tingkat penyusutan tiap tahun.
b) Beban penyusutan pada tahun ke-4.
c) Nilai/sisa buku akhir tahun ke-5.
d) Buatlah tabel penyusutan.

Dik: A = Rp10.000.000,00; S = Rp2.000.000,00; $n = 6$

Dit: r_1 s.d r_6; D_4; S_5; serta tabel penyusutan

Jawab:

a) 6/21; 5/21; 4/21; ...; ...; ....
b) D_4 = 3/21 (10.000.000 – 2.000.000) = Rp ....
c) $S_5 = A - (A - S)$. Sigma r_5

S_5 = 10.000.000 – (10.000.000 – 2.000.000) . 20/21 = Rp ....

d) Tabel penyusutannya:

Tahun ke-	Tingkat Penyusutan	A – S	Beban Penyusutan	Akumulasi	Nilai Sisa Akhir Tahun
1	6/21	Rp8.000.000,00	Rp2.285.714,29	Rp2.285.714,29	Rp7.714.285,71
2	5/21		Rp1.904.761,90	Rp4.190.476,19	Rp5.809.523,81
3					
4					
5					
6					Rp2.000.000,00
Jumlah			Rp8.000.000,00		

4) *Metode satuan jam kerja*

a) Beban penyusutan tiap jam kerja: $D = \dfrac{A - S}{H}$
b) Beban penyusutan tahun ke-n: $D_n = D \times h_n$
c) Jumlah atau akumulasi penyusutan tahun ke-n:

$Jn = D \times$ Sigma h_n

d) Nilai buku akhir tahun ke-n: $Sn = A - D \times$ Sigma h_n

Contoh:

Suatu mesin fotokopi bernilai Rp8.000.000,00 dengan umur manfaat 5 tahun jika nilai sisa mesin/residu Rp1.000.000,00 selama 5 tahun mesin tersebut dioperasikan sebagai berikut: tahun ke-1 hingga ke-5 berturut-turut selama 2.300 jam, 2.500 jam, 2.000 jam, 1.000 jam, dan 2.200 jam. Dengan metode satuan jam kerja, hitung:

a) Tingkat penyusutan tiap jam kerja mesin tersebut.
b) Beban penyusutan pada tahun ke-4.
c) Nilai/sisa buku akhir tahun ke-3.
d) Buatlah tabel penyusutannya.

Dik: A = Rp8.000.000,00
S = Rp1.000.000,00
$n = 5$
jumlah jam operasi mesin = 10.000 jam

Dit: D; D_4; S_3; dan tabel penyusutan

Jawab:

a) $D = \frac{A - S}{H} = \frac{\text{Rp}8.000.000{,}00 - \text{Rp}1.000.000{,}00}{10.000} = \text{Rp}700{,}00$

b) $D_n = D \times h_n \leftrightarrow D_4 = \text{Rp}700 \times h_4 = \text{Rp}700 \times 1.000 = \text{Rp}700.000$

c) $Sn = A - D \times \text{sigma } h_n \leftrightarrow S_3 = 8.000.000 - (\text{Rp}700 \times 6.800)$

d) Tabel penyusutan:

Tahun ke-	Nilai Buku Awal Tahun	Jam Kerja	Tingkat Penyusutan	Beban Penyusutan	Akumulasi	Nilai Sisa Akhir Tahun
1	Rp8.000.000,00	2.300	Rp700,00	Rp1.610.000,00	Rp1.610.000,00	Rp6.390.000,00
2						
3						
4				Rp700.000,00		
5						
Jumlah		10.000		Rp7.000.000,00		

5) *Metode satuan hasil produksi*

a) Beban penyusutan tiap satuan hasil produksi: $D = \frac{A - S}{Q}$
b) Beban penyusutan tahun ke-n: $D_n = D \times q_n$
c) Jumlah atau akumulasi penyusutan tahun ke-n:
$Jn = D \times \text{sigma } q_n$
d) Nilai buku akhir tahun ke-n: $Sn = A - D \times \text{sigma } q_n$

Contoh:

Suatu mesin fotokopi bernilai Rp7.000.000,00 dengan umur manfaat 4 tahun jika nilai sisa mesin/residu Rp1.000.000,00 selama 4 tahun mesin tersebut dapat menghasilkan 5.000 unit produksi dengan perincian sebagai berikut: tahun ke-1 hingga 4 berturut-turut menghasilkan 1.500, 2.000, 1.000, dan 500 unit produksi. Dengan metode satuan hasil produksi, hitung:

a) Tingkat penyusutan tiap satuan hasil produksi mesin tersebut.
b) Beban penyusutan pada tahun ke-2.
c) Nilai/sisa buku akhir tahun ke-3.
d) Buatlah tabel penyusutannya.

Dik: A = Rp.7.000.000; S = Rp.1.000.000; $n = 4$; jumlah unit produksi mesin 5.000 unit

Dit: D; D_2; S_3; dan tabel penyusutan

Jawab:

a) $D = \frac{A - S}{Q} = \frac{\text{Rp}7.000.000{,}00 - \text{Rp}1.000.000{,}00}{5.000} = \text{Rp}1.200{,}00$

b) $D_n = D \times q_n$
$D_2 = \text{Rp}1.200{,}00 \times q_2 = \text{Rp}1.200{,}00 \times 2.000 = \text{Rp}2.400.000{,}00$

c) $Sn = A - (D \times \text{sigma } q_n)$
$S_3 = \text{Rp}7.000.000{,}00 - (\text{Rp}1.000.000{,}00 \times \text{sigma } q_3)$
$S_3 = \text{Rp}7.000.000{,}00 \times (\text{Rp}1.200{,}00 \times 4.500) = \text{Rp}1.600.000{,}00$

d) Tabel penyusutan

Tahun ke-	Nilai Buku Awal Tahun	Satuan Hasil Produksi	Tingkat Penyusutan	Beban Penyusutan	Akumulasi	Nilai Sisa Akhir Tahun
1	Rp7.000.000,00	1.500	1.200	Rp1.800.000,00	Rp1.800.000,00	Rp5.200.000,00
2				Rp2.400.000,00		
3						Rp1.600.000,00
4						
Jumlah		5.000		Rp6.000.000,00		

Latihan Soal

1. Suatu komputer bernilai Rp7.000.000,00 dengan umur manfaat 4 tahun jika nilai sisa mesin atau residu Rp1.000.000,00. Dengan metode garis lurus, hitung:
   a. Besar penyusutan tiap tahun.
   b. Besar % penyusutan tiap tahun.
   c. Nilai/sisa buku akhir tahun ke-3.
2. Sebuah mobil dengan harga Rp100.000.000,00 akan mengalami penyusutan 10% setiap tahun. Dengan metode tetap dari nilai buku hitunglah nilai buku pada akhir tahun ke-3!
3. Sebuah mobil dibeli dengan harga Rp120.000.000,00 dan setelah dipakai 6 tahun diperkirakan nilainya Rp60.000.000,00. Jika mobil tersebut dipakai dari tahun pertama hingga tahun ke-6 berturut-turut sejauh: 5.000 km; 4.000 km; 2.500 km; 1.500 km; 1.000 km. Dengan metode satuan km kerja, tentukan:
   a. Besar penyusutan tiap km.
   b. Harga mobil tersebut pada tahun ke-4.
   c. Daftar penyusutan.
4. Biaya perolehan suatu aktiva Rp6.000.000,00 setelah 5 ditaksir harganya Rp1.500.000. Dengan metode jumlah bilangan tahun, hitunglah:
   a. Beban penyusutan tahun ke-4.
   b. Nilai/sisa buku akhir tahun ke-3.
5. Sebuah mesin fotokopi bernilai Rp15.000.000,00 dengan umur manfaat 5 tahun jika nilai sisa mesin atau residu Rp5.000.000,00, selama 5 tahun mesin tersebut dapat menghasilkan produksi dengan perincian sebagai berikut:
   Tahun ke-1 hingga ke-5 berturut-turut 3.000; 1.500; 2.500; 1.000 dan 2.000 unit produksi. Dengan metode satuan hasil produksi, hitunglah:

   a. Beban penyusutan.
   b. Beban penyusutan pada tahun ke-3.
   c. Nilai/sisa buku akhir tahun ke-3.
6. Suatu aktiva bernilai Rp800.000,00 dengan umur manfaat lima tahun. Jika nilai sisa/residu Rp200.000,00, dengan metode garis lurus/metode tetap dari harga beli, hitunglah:
   a. Beban penyusutan tiap tahun.
   b. Persentase penyusutan tiap tahun.
   c. Jumlah/akumulasi sampai tahun ke-3.
   d. Nilai/sisa buku akhir tahun ke-3.
   e. Buatlah tabel pembukuannya.

Bab 6

KESEIMBANGAN DALAM EKONOMI

A. KESEIMBANGAN PASAR PARSIAL–MODEL LINIER

Model linier ini terdiri atas satu syarat keseimbangan antara permintaan (*demand*) dan penawaran (*supply*) dan dua persamaan hubungan antara permintaan dengan penawaran dengan harga sebagai berikut:

$Q_d = Q_s$

$Q_d = a - b\,p \; (a,b > 0)$

$Q_s = -c + d\,p \; (c,d > 0)$

Di mana:

Q_d = kuantitas komoditi diperlukan/diminta

Q_s = kuantitas komoditi ditawarkan

P = harga

Misalkan harga Q_d, Q_s, dan p yang memenuhi persamaan di atas disebut harga-harga keseimbangan. Dengan cara substitusi $Q_d = Q_s$ dengan Q didapat:

$Q = a - b\,p$ (1)

$Q = -c + d\,p$ (2)

$$a - b\,p = -c + d\,p$$
$$(b + d)\,p = a + c \longrightarrow P = \frac{a+c}{b+d},\ (b + d \neq 0)$$

Substitusi $P = \frac{a+c}{b+d}$ pada (1) atau boleh juga pada (2) didapat:

$$Q = a - b\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{ab + ad - ab - bc}{b+d} = \frac{ad - bc}{b+d}$$

Dengan cara determinan:

$$Q = a - b\,p \longrightarrow b\,p + Q = a$$
$$Q = -c + d\,p \longrightarrow d\,p - Q = c$$

$$P = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & 1 \\ d & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-a-c}{-b-d} = \frac{a+c}{b+d} \rightarrow Q = \frac{\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & 1 \\ d & -1 \end{vmatrix}} = \frac{bc-ad}{-b-d} = \frac{ad-bc}{b+d}$$

Dengan cara matriks:

$$\begin{matrix} b\,p + Q = a \\ d\,p - Q = c \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b & 1 \\ d & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

Menentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} b & 1 \\ d & -1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{A}{\det.A},\ \text{di mana } A = adjoin\ A$$

$$|A| = \begin{bmatrix} b & 1 \\ d & -1 \end{bmatrix} = -b - d$$

$$A^{-1} = \frac{A}{\det.A} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{-d}{-b} & \frac{b}{-d} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = A^{-1}.\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{-d}{-b} & \frac{b}{-d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -c \\ \frac{-ad+b}{-b} & -d \end{bmatrix}$$

Jadi, $P = \frac{-a-c}{-b-d} = \frac{a+c}{b+d}$; $Q = \frac{-ad+bc}{-b-d} = \frac{ad-bc}{b+d}$

Bila matriks A dijadikan matriks identitas:

$$b\,p + Q = a$$
$$d\,p - Q = c, \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} b & 1 & a \\ d & -1 & c \end{array}\right]$$

pandang matriks lengkap $\Downarrow$ A

Matriks A dijadikan matriks identitas $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} b & 1 & a \\ \frac{a+c}{b+d} & & \\ d & -1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{b_1 + b_2} \left[\begin{array}{cc|c} b+d & 0 & a+c \\ d & -1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{b_1 - (b+d)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & 0 \\ d & -1 & c \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{b_2 - db_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a+c}{b+d} \\ 0 & -1 & c - \frac{d(a+c)}{b+d} \end{array}\right] \xrightarrow{b_2 : -1}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a+c}{b+d} \\ 0 & 1 & \frac{d(a+c)}{b+d} - c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a+c}{b+d} \\ 0 & 1 & \frac{ad-bc}{b+d} \end{array}\right]$$

Jadi, $P = \dfrac{a+c}{b+d}$; $Q = \dfrac{ad-bc}{b+d}$

Model Linier – Keseimbangan Pasar

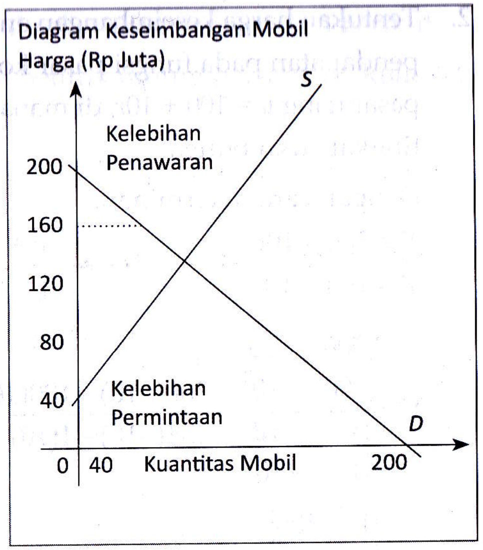
Permintaan dan penawaran untuk suatu komoditi merupakan keinginan pembeli dan penjual pada transaksi dalam pasar. Titik temu antara permintaan dan penawaran menghasilkan harga keseimbangan.

Jika harga di bawah harga keseimbangan akan terjadi kelebihan permintaan, sebab permintaan akan meningkat dan penawaran menjadi berkurang.

Sebaliknya, jika harga melebihi harga keseimbangan akan terjadi kelebihan penawaran. Jumlah penawaran meningkat, sedangkan jumlah permintaan menurun.

Contoh:

1. Perhatikan model linier permintaan dan penawaran mobil sedan berikut.



Permintaan:

$Q_d = 200 - 10p$

Penawaran:

$Q_s = -40 + 5p$

Di mana:

Q_d dan Q_s = ribu unit per tahun

P = puluh juta rupiah per unit

Keseimbangan pasar dengan cara substitusi:

$Q_d \;= Q_s$

$200 - 10p = -40 + 5p$

$240 = 15p$

$P \;= 16$

$Q_d \;= 200 - 10p = 200 - 10\,(16) = 40$

$Q_s \;= -40 + 5p = -40 + 5\,(16) = 40$

Keseimbangan terjadi pada saat harga mobil Rp160 juta per unit. Saat itu jumlah permintaan sama dengan jumlah penawaran, yaitu 40.000 unit mobil per tahun.

Jika harga mobil ditetapkan harganya diturunkan Rp10 juta menjadi Rp150 juta per unit (di bawah harga keseimbangan) maka akan terjadi kelebihan permintaan sebanyak 15.000 unit mobil per tahun. Jika harga mobil dinaikkan Rp10 juta menjadi Rp170 juta per unit (di atas harga keseimbangan), terjadi kelebihan penawaran sebanyak 15.000 unit mobil per tahun.

2. Tentukan harga keseimbangan antara tingkat suku bunga dengan pendapatan pada fungsi pasar komoditi $y = 300 - 10r$ dan fungsi pasar uang $y = 100 + 10r$, di mana y = tingkat pendapatan dan r = tingkat suku bunga!

Dengan cara determinan:

$$\begin{aligned} Y &= 300 - 10r \longrightarrow & y + 10r &= 300 \\ Y &= 100 + 10r & y - 10r &= 100 \end{aligned}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 300 & 10 \\ 100 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{300(-10) - 100(10)}{1(-10) - 1(10)} = \frac{-3000 - 1000}{-10 - 10} = 200$$

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 300 \\ 1 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{1(100) - 300(1)}{1(-10) - 1(10)} = \frac{100 - 300}{-10 - 10} = 10$$

Jadi, pada tingkat suku bunga 10% besarnya pendapatan pada pasar komoditi maupun pada pasar uang adalah 200.

B. KESEIMBANGAN PASAR PARSIAL–MODEL NONLINIER

Perhatikanlah fungsi permintaan $Q_d = 6 - p^2$. Fungsi penawaran $Q_s = 6p - 1$, tentukan harga keseimbangan pasar antara fungsi permintaan dan fungsi penawaran tersebut. Jika fungsi linier tidak dapat diselesaikan dengan cara matriks dan cara determinan, hanya dapat diselesaikan dengan cara substitusi sebagai berikut.

$Q_d = 6 - p^2$

$Q_s = 6p - 1$

Syarat keseimbangan:

$Q_d = Q_s$

$6 - p^2 = 6p - 1$

$p^2 + 6p - 7 = 0$, merupakan persamaan kuadrat

Persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan cara berikut.

1. Cara rumus kuadrat, yaitu bentuk umum persamaan kuadrat:

   $a x^2 + b x + c = 0, (a \neq 0)$

   Akar-akarnya dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

   $$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   $$P_1 = \frac{-6 + \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 + 8}{2} = 1$$

   $$P_2 = \frac{-6 - \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 - 8}{2} = -7 \text{ (tidak memenuhi)}$$

2. Cara memfaktorkan

   $(p + 7)(p - 1) = 0$

   $P = -7$ (tidak memenuhi) atau $p = 1$

   $Q_d = 6 - p^2 \qquad Q_d = 6 - (1)^2 = 5$

   $Q_s = 6p - 1 \longrightarrow Q_s = 6(1) - 1 = 5$

   Jadi pada tingkat harga 1 satuan jumlah barang yang diminta dan yang ditawarkan sama = 5 satuan.

   Grafik dari fungsi tersebut: $f(p) = P^2 + 6p - 7$

   Titik sumbu p didapat jika $f(p) = 0$

   $P^2 + 6p - 7 = 0$

   $P = 1$ atau $p = -7$, (1,0) , (–7,0)

   Titik potong sumbu $f(p)$ didapat jika $p = 0$

   $f(p) = P^2 + 6p - 7$

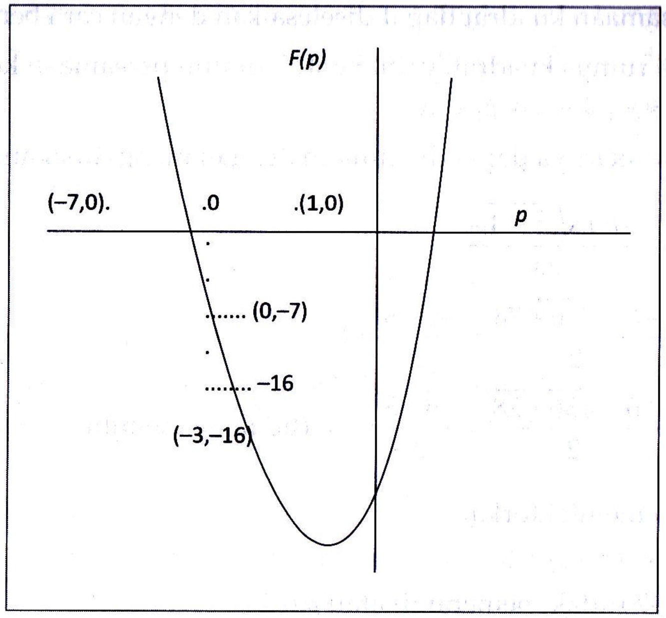
   $f(p) = -7$, (0,–7)

   Sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a} \rightarrow P = \frac{-6}{2} = -3$

   Titik balik didapat dengan mensubstitusi:

   $p = -3$ pada $f(p) = P^2 + 6p - 7$

   $F(p) = -16$, (–3,–16)



C. MODEL PASAR DENGAN DUA KOMODITI

$Q_{d1} = Q_{s1}$

$Q_{d1} = a_0 + a_1p_1 + a_2p_2$

$Q_{s1} = b_0 + b_1p_1 + b_2p$

$Q_{d2} = Q_{s2}$

$Q_{d2} = \alpha_0 + \alpha_1p_1 + \alpha_2p_2$

$Q_{s2} = \beta_0 + \beta_1p_1 + \beta_2p_2$

Dapat diselesaikan menjadi 2 (dua) persamaan:

$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)p_1 + (a_2 - b_2)p_2 = 0$

$(\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)p_1 + (\alpha_2 - \beta_2)p_2 = 0$

Misalkan:

$c_i = a_i - b_i$

$\alpha_i = \alpha_i - \beta_i \rightarrow (I = 0,1,2)$

Didapatlah:

$c_1p_1 + c_2p_2 = -c_0$ .... (1)

$\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 = -\alpha_0$ .... (2)

Dari persamaan pertama:

$$p_2 = \frac{-(c_0 + c_1p_1)}{c_2}$$

Dari persamaan kedua:

$$p_1 = \frac{-\alpha_0 - \alpha_2p_2}{\alpha_1} = \frac{-\alpha_0 - \alpha_2\left(\frac{-(c_0 + c_1p_1)}{c_2}\right)}{\alpha_1} = \frac{-c_2\alpha_0 - c_0\alpha_2 + c_1\alpha_2p_1}{\alpha_1c_2}$$

$$\alpha_1c_2p_1 = -c_2\alpha_0 + c_0\alpha_2 + c_1\alpha_2p_1$$

$$p_1 = \frac{c_2\alpha_0 - c_0\alpha_2}{c_1\alpha_2 - \alpha_1c_2}$$

Dapat diperoleh pula:

$$p_2 = \frac{c_0\alpha_1 - c_1\alpha_0}{c_1\alpha_2 - \alpha_1c_2}$$

Setelah p_1, p_2 didapat, maka dapat pula dihitung Q_1 dan Q_2.

Contoh:

Misalkan:

$Q_{d1} = Q_{s1}$

$Q_{d1} = 9 - 3p_1 + 2p_2$

$Q_{s1} = -1 + 2p_1$

$Q_{d2} = Q_{s2}$

$Q_{d2} = 7 + 2p_1 - p_2$

$Q_{s2} = -5 + 3p_2$

Tentukan harga keseimbangan!

Jika contoh ini diperlukan, maka ternyata Q_{s1} bergantung pada p_1 dan Q_{s2} pada p_2, tetapi Q_{d1} dan Q_{d2} masing-masing bergantung pada p_1 dan p_2.

Jawab:

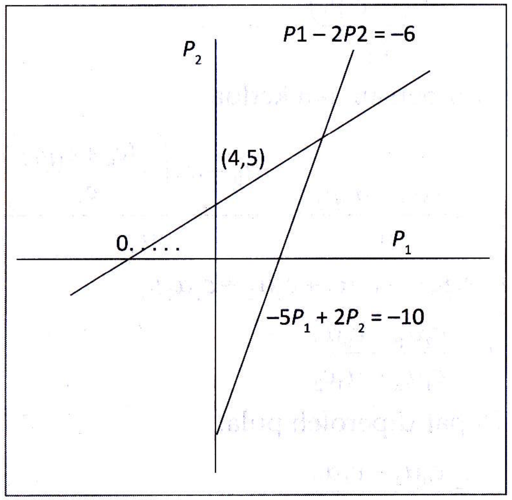
$9 - 3p_1 + 2p_2 = -1 + 2p_1$

$7 + 2p_1 - p_2 = -5 + 3p_2$

$-5p_1 + 2p_2 = -10$

$p_1 - 2p_2 = -6$

$p_1 = 4, p_2 = 5,$



Kemudian dapat dihitung $Q_{d1} = Q_{s1} = Q_1$, misalnya jika menggunakan:

$Q_{d1} = 9 - 3p_1 + 2p_2$

$Q_{d1} = 9 - 3(4) + 2(5) = 7$ atau

$Q_{s1} = -1 + 2p_1$

$Q_{s1} = -1 + 2(4) = 7$

Jika disubstitusi pada:

$Q_{d2} = Q_{s2} = Q_2$

$Q_{d2} = 7 + 2p_1 - p_2$

$Q_{s2} = -5 + 3p_2$

$Q_{d2} = 7 + 2(4) - 5 = 10$ atau $Q_{s2} = -5 + 3(5) = 10$

Ternyata nilai keseimbangan Q_1 dan Q_2 adalah positif.

Dapat pula p_1 dan p_2 diperoleh dari grafik:

Pakai sumbu p_1 dan p_2 serta gambarkan grafik $-5p_1 + 2p_2 = -10$ yang diperoleh dari persamaan kedua dan ketiga.

Gambarkan pula grafik dari $p_1 - 2p_2 = -6$ yang diperoleh dari persamaan kelima dan keenam.

Dari gambar di atas dapat dibaca titik potongnya $(p_1, p_2) = (4,5)$

Kemudian dapat dihitung Q_1 dan Q_2 seperti di atas.

Jika n komoditi, secara umum dapat dipakai model:

$Q_{di} = Q_{di}(p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n)$ .... (1)

$Q_{si} = Q_{si}(p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n)$ .... (2)

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$

Maka ada $2n$ fungsi tidak linier semua.

$Q_{di} = Q_{si}$ atau $Q_{di} - Q_{si} = 0$ .... (3)

$i = 0,1,2,3, \ldots\ldots\ldots, n$

Ada n persamaan sebagai syarat keseimbangan. Jadi, keseluruhannya ada $3n$ persamaan. Jika persamaan (1) dan (2) disubstitusi pada persamaan (3) maka didapat:

$Q_{di}(p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots, p_n) - Q_{si}(p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n)$

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$ (n persamaan)

Jika dimisalkan $E_i = Q_{di} - Q_{si}$, didapat:

$E_i(p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n) = 0$

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$

Jika solusi n persamaan ini bisa ditentukan, maka terdapatlah harga keseimbangan P_i dan kemudian dapatlah ditentukan Q_i.

D. KESEIMBANGAN DALAM ANALISIS PENDAPATAN NASIONAL

Model pendapatan nasional tertutup sederhana tanpa kebijakan fiskal:

$$Y = C + I_0$$

Fungsi konsumsi $C = C_0 + cY$

Di mana:

Y = besarnya pendapatan nasional

C = besarnya konsumsi

I_0 = besarnya investasi pada saat pendapatan nasional nol

C_0 = besarnya konsumsi pada saat pendapatan nasional nol

C = kecenderungan mengubah nilai konsumsi jika ada perubahan pendapatan, maka didapat model pendapatan nasional:

$$Y = \frac{1}{1-c}(C_0 + I_0)$$

Model pendapatan nasional sebagai determinan investasi:

Fungsi *saving* $S = S_0 + sY$ dan fungsi investasi $I = I_0 + \alpha$

Y = besarnya pendapatan nasional
S_0 = besarnya *saving* pada saat pendapatan nasional nol
I_0 = besarnya investasi pada saat pendapatan nasional nol
S = besarnya total konsumsi
I = besarnya total investasi
s = kecenderungan mengubah nilai *saving* jika ada perubahan pendapatan
α = kecenderungan mengubah nilai investasi jika ada perubahan pendapatan dengan mensubstitusi pada syarat keseimbangan $S = I$, maka didapat model pendapatan nasional:

$$Y = \frac{I_0 - S_0}{s - \alpha}$$

Model pendapatan nasional dengan adanya kebijakan fiskal.

Fungsi pendapatan $Y = C + I + G$

Fungsi konsumsi $C = C_0 + c\,Yd$

Fungsi pendapatan yang siap dibelanjakan $Yd = Y + Tr - Tx$, maka didapat:

$$\begin{aligned}
Y &= C + I + G \\
&= C_0 + c\,Yd + I + G \\
&= C_0 + c\,(Y + Tr - Tx) + I + G \\
&= C_0 + c\,Y + c\,Tr - c\,Tx + I + G \\
Y - c\,Y &= C_0 + c\,Tr - c\,Tx + I + G \\
(1 - c)Y &= C_0 + c\,Tr - c\,Tx + I + G
\end{aligned}$$

$$Y = \frac{C_0 + cTr - cTx + I + G}{1 - c}$$

Di mana:
Y = besarnya pendapatan nasional
C_0 = besarnya konsumsi pada saat pendapatan nol
Tr = besarnya transfer pemerintah

Tx = besarnya pajak
I = besarnya pengeluaran investasi
G = besarnya pengeluaran konsumsi rumah tangga pemerintah

Contoh:

Ditentukan fungsi konsumsi per tahun $C = 0{,}75Y + 20$ tr.rp. Fungsi investasi per tahun $I = I_0 + 0{,}05Y$ tr.rp. Hitunglah besarnya pendapatan nasional, konsumsi, *saving*, dan investasi ekuilibrium!

Jawab:

Fungsi $S = Y - C = Y - (0{,}75Y + 20)$
$S = 0{,}25Y - 20$, maka nilai $s = 0{,}25$ dan $S_0 = -20$
Fungsi konsumsi $C = 0{,}75Y + 20$, $C_0 = 20$ dan $c = 0{,}75$
Fungsi investasi $I = 20 + 0{,}05Y$ (karena $C_0 = I_0 = 20$)
Syarat keseimbangan:

$$\begin{aligned}
S &= I \\
0{,}25Y - 20 &= 20 + 0{,}05Y \\
0{,}20Y &= 40 \\
Y &= 200 \text{ (besarnya pendapatan nasional)}
\end{aligned}$$

Besarnya investasi $I = 20 + 0{,}05\,(200) = 20 + 10 = 30$
Besarnya *saving* $S = 0{,}25\,(200) - 20 = 50 - 20 = 30$
Besarnya konsumsi $C = 0{,}75\,(200) + 20 = 150 + 20 = 170$

Jadi, harga keseimbangan terjadi pada saat tingkat pendapatan = 200, besarnya investasi sama dengan besarnya *saving* = 30 dan besarnya konsumsi = 150.

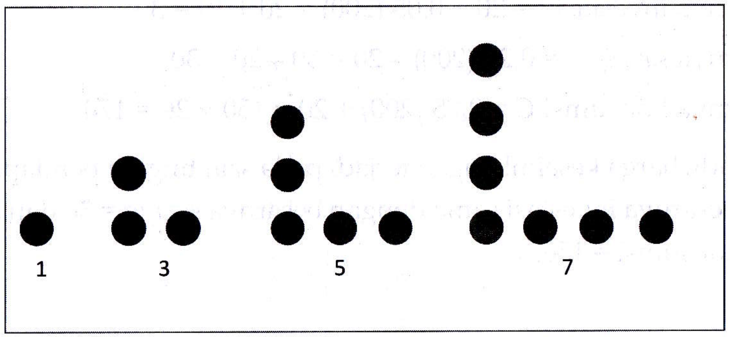
Bab 7

BARISAN DAN DERET BILANGAN

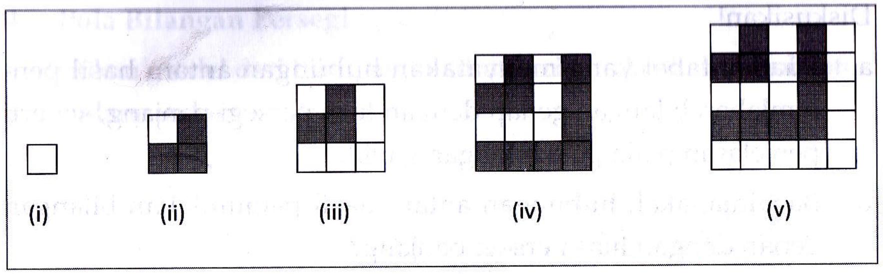
A. POLA BILANGAN

1. Pola Bilangan Ganjil

Perhatikan gambar noktah-noktah berikut. Gambar di bawah membentuk suatu pola bilangan ganjil.



Perhatikan gambar persegi (di hlm. 207) berikut. Apakah antara persegi yang tidak berwarna dengan yang berwarna gelap membentuk pola bilangan?



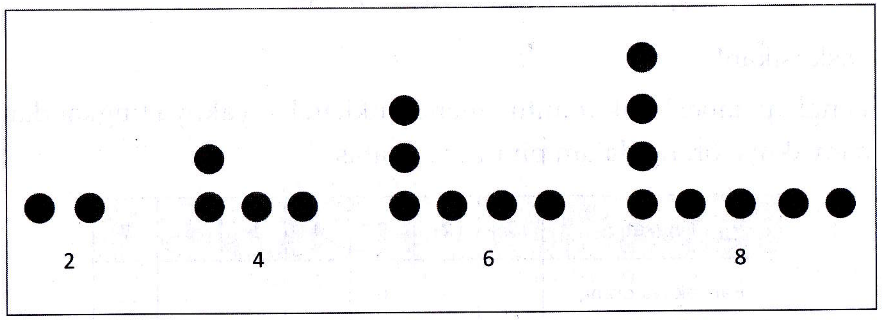
Dari pola-pola di atas dapat kita buat tabel berikut ini.

Pola	Penjumlahan Bilangan Ganjil	Banyaknya Bilangan	Luas Persegi
(i)	$1 = 1$	1	$1 \times 1 = 1$
(ii)	$1 + 3 = 4$	2	$2 \times 2 = 4$
(iii)	$1 + 3 + 5 = 9$	3	$3 \times 3 = 9$
(iv)	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$	4	$4 \times 4 = 16$
(v)	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$	5	$5 \times 5 = 25$

Bagaimanakah hubungan antara hasil penjumlahan bilangan-bilangan yang pertama dan terurut ganjil dengan luas persegi? Dengan demikian, bagaimanakah rumus jumlah dari n bilangan ganjil yang pertama?

2. Pola Bilangan Genap

Perhatikan gambar berikut. Gambar tersebut membentuk suatu pola bilangan genap.



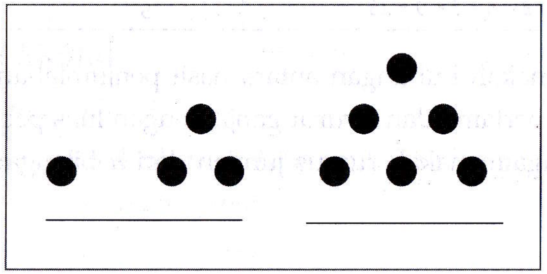
Diskusikan!

a. Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara hasil penjumlahan bilangan genap dengan luas persegi panjang, seperti penjelasan pada pola bilangan ganjil.

b. Bagaimanakah hubungan antara hasil penjumlahan bilangan genap dengan luas persegi panjang?

3. Pola Bilangan Segitiga

Diketahui bentuk piramida dalam suatu atraksi *cheerleaders.* Misalkan satu orang dalam piramida tersebut digambarkan dengan tanda "●" pada suatu piramida. Maka pola banyaknya orang dalam piramida manusia itu digambarkan sebagai berikut.



Banyaknya tanda "●" pada suatu piramida menunjuk pada bilangan 1, 3, 5, ... Karena bentuknya seperti segitiga, maka pola bilangan itu dinamakan *pola bilangan segitiga.*

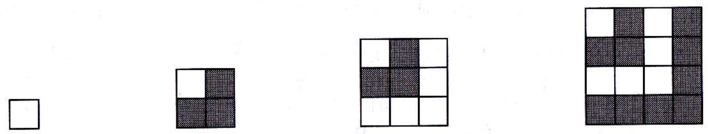
Diskusikan!

Lengkapi tabel berikut untuk menunjukkan banyaknya tingkat dan banyaknya orang dalam piramida di atas.

Tingkat	1	2	3	4	5	6	7
Banyaknya orang	1	3	6	....	....	....	....

4. Pola Bilangan Persegi

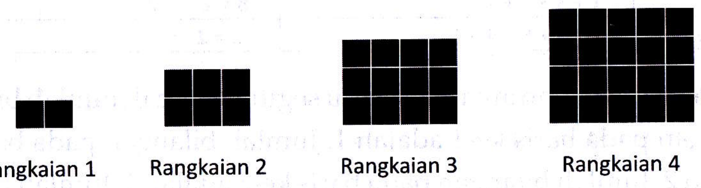
Perhatikan model dari bilangan kuadrat berikut. Apakah membentuk pola bilangan kuadrat?



$1 = 1 \times 1$	$1 + 3 = 2 \times 2 = 4$	$1 + 3 + 5$ $= 3 \times 3 = 9$	$1 + 3 + 5 + 7$ $= 4 \times 4 = 16$

Karena bilangan-bilangan 1, 4, 9, dan 16 berhubungan dengan bentuk persegi, maka pola bilangan itu dinamakan juga *pola bilangan persegi.*

5. Pola Bilangan Persegi Panjang



Lihatlah gambar di atas. Apakah banyaknya kotak-kotak tersebut membentuk suatu pola? Tuliskan pola itu.

Karena bilangan 2, 6, 12, dan 20 berhubungan dengan bentuk persegi panjang, maka pola bilangan ini dinamakan *pola bilangan persegi panjang.*

6. Pola Bilangan pada Segitiga Pascal

Pola berikut ini merupakan pola bilangan segitiga Pascal.

```
                    1
                 1     1
              1     2     1
           1     3     3     1
        1     4     6     4     1
     1     5    10    10     5     1
  1     6    15    ...   ...   ...   ...
...   ...   ...   ...   ...   ...   ...   ...
```

Diskusikan!

Buatlah tabel yang menyatakan hasil penjumlahan bilangan pada tiap baris segitiga Pascal.

Baris ke-	Penjumlahan Bilangan	Hasil Penjumlahan
1	1	$1 = 2^{1-1} = 2^0$
2	1 + 1	$2 = 2^{2-1} = 2^1$
3	1 + 2 + 1	$4 = 2^{3-1} = 2^3$
4	1 + 3 + 3 + 1	$8 = 2^{4-1} = 2^3$
5	1 + 4 + 6 + 4 + 1	$\ldots = 2^{\ldots} = \ldots$

Perhatikan dan amatilah suatu segitiga Pascal. Jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-1 adalah 1. Jumlah bilangan pada baris ke-2 adalah 2. Jumlah bilangan pada baris ke-3 adalah 4. Jumlah bilangan pada baris ke-4 adalah 8. Berapakah jumlah barisan ke-n dari pola bilangan segitiga Pascal itu?

B. BARISAN BILANGAN

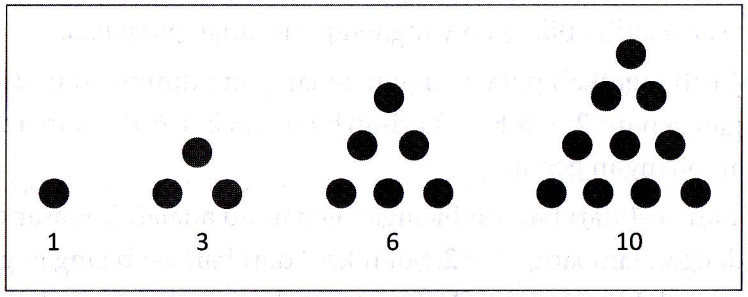
Barisan bilangan adalah mengurutkan bilangan-bilangan menurut suatu aturan tertentu dan setiap bilangan diantarai oleh tanda koma. Barisan bilangan yang dibentuk dari bilangan-bilangan yang tidak

diurutkan dengan pola (aturan) tertentu disebut barisan bilangan sebarang. Bentuk umum barisan bilangan biasa dituliskan:

$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$

Misalnya barisan bilangan tidak teratur (1, 2, 5, 3, 2, 7, ...). Barisan bilangan teratur (1, 3, 5, 7, 9, ...). 1 disebut suku pertama, 3 disebut suku kedua, 5 disebut suku ketiga, dan seterusnya.

Ada bermacam-macam cara menyusun barisan bilangan. Mulai dari cara yang sederhana sampai pada cara yang kompleks. Misalnya dengan menggunakan noktah-noktah sebagai berikut.



Pola ini dinamakan pola noktah berbentuk segitiga. Dari pola ini disusun barisan bilangan yang disebut barisan bilangan segitiga.

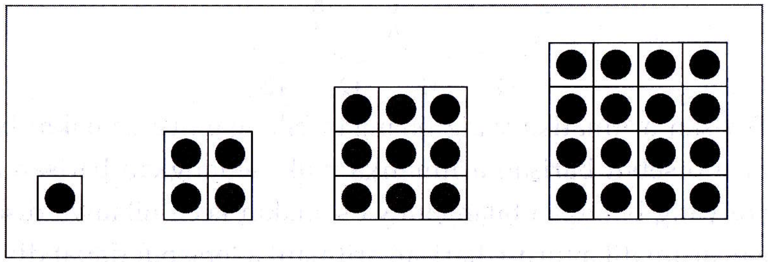
$1 = 1 + 1$

$3 = 1 + 2$

$6 = 1 + 2 + 3$

$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

Contoh:



Pola pada gambar disebut pola bilangan persegi. Dari pola ini disusun barisan bilangan sebagai berikut.

$1 = 1$	atau	$1^2 = 1$
$4 = 1 + 3$		$2^2 = 1 + 3$
$9 = 1 + 3 + 5$		$3^2 = 1 + 3 + 5$
$16 = 1 + 3 + 5 + 7$		$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

C. BARISAN ARITMATIKA

Barisan bilangan yang suku berikutnya didapat dari penambahan suku sebelumnya dengan bilangan yang tetap (tertentu) dinamakan *barisan aritmatika*. Bilangan yang tetap itu dinamakan *beda*.

Masih ingatkah pola bilangan genap yang dimulai dari 2? Pola bilangan genap: 2, 4, 6, 8, ... Barisan bilangan 2, 4, 6, 8, ... dinamakan barisan bilangan genap.

Suku ke-1 dari barisan bilangan genap itu adalah 2. Biasanya ditulis dengan lambang $U_1 = 2$. Suku ke-2 dari barisan bilangan genap itu adalah 4. Biasanya ditulis dengan lambang $U_2 = 4$. Suku ke-3 dari barisan bilangan genap itu adalah 6. Biasanya ditulis dengan lambang $U_3 = 6$, dan seterusnya. Berapakah suku ke-5?

Untuk menemukan suku ke-5 dari barisan itu harus diketahui aturan urutan suku-suku pada barisan itu. Aturan pada barisan bilangan genap itu dimulai dengan 2 dan suku berikutnya diperoleh dengan menambahkan 2 pada suku sebelumnya. Dengan demikian suku kelima adalah 10 atau $U_5 = 10$.

$$\underbrace{2 \quad 4}_{+2}\;\underbrace{\quad 6}_{+2}\;\underbrace{\quad 8}_{+2}\;\underbrace{\quad 10}_{+2}$$

Barisan aritmatika yang bilangan-bilangannya semakin besar nilainya disebut barisan aritmatika naik, sedangkan barisan aritmatika yang bilangan-bilangannya semakin kecil nilainya disebut barisan aritmatika turun. Barisan aritmatika tersebut dapat ditulis:

$$U_1, U_2, U_3, \ldots U_{n-1}, U_n$$

Jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1}$ = konstanta. Selisih ini disebut juga beda $(b) = b = U_n - U_{n-1}$

Suku ke-n barisan aritmatika:

$a, a + b, a + 2b, \ldots\ldots, a + (n-1)b$

$U_1, U_2, U_3, \ldots\ldots, U_n$

1. Menentukan Suku ke-*n* Barisan Bilangan

Bila pada suatu barisan beda antara suku ke-$n + 1$ dengan suku ke n adalah b, tetap untuk setiap n bilangan asli dan suku pertama barisan tersebut adalah a, maka barisan berbentuk:

a	$a + b$	$a + 2b$	$a + 3b$	$a + (n-1)b$
Suku ke-1	Suku ke-2	Suku ke-3	Suku ke-4	Suku ke-*n*

Pola pada gambar di atas tampak bahwa setiap suku a dan b tetap serta koefisien b selalu kurang 1 dari nomor urut suku. Jadi, suku ke-$n = a + (n-1)b$

Suku ke-n suatu barisan ditulis dengan notasi U_n, sehingga:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Contoh:

Barisan aritmatika: 2, 5, 8, 11, ..., n. Berapa suku ke-n barisan tersebut bila diketahui $n = 20$?

Jawab:

Pada barisan tersebut diketahui $a = 2$ dan $b = 3$, sehingga diperoleh:

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_{20} = 2 + (20 - 1).3 = 2 + 19.3 = 59$

Jadi, suku ke-20 barisan tersebut adalah 59.

2. Deret Aritmatika

$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)b)$ disebut deret aritmatika.

Di mana:

a = suku awal

b = beda

n = banyak suku

$U_n = a + (n - 1)b$ adalah suku ke-n

Pengertian deret adalah menjumlah suku-suku suatu barisan bilangan. Contohnya: 2, 4, 6, 8,. .. adalah barisan bilangan, sedangkan 2 + 4 + 6 + 8 +... disebut deret.

Deret aritmatika dinyatakan dengan menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmatika. Untuk menyatakan jumlah n suku yang pertama pada barisan aritmatika digunakan simbol Sn. Bila suku-suku pada barisan aritmatika naik dijumlahkan maka akan terbentuk deret aritmatika naik, begitu pula bila suku-suku pada barisan aritmatika turun dijumlahkan maka akan terbentuk deret aritmatika turun.

Hubungan antara S_n dan U_n dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{array}{llllllll}
S_n = & a_1 & + (a_1 + b) & + (a_1 + 2b) & + \ldots + (U_n - 2b) & + (U_n - b) & + U_n & \\
S_n = & U_n & + (U_n - b) & + (U_n - 2b) & + \ldots + (a_1 + 2b) & + (a_1 + b) & + a_1 & + \\
\hline
\end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + U_n) + (a_1 + U_n) + (a_1 + U_n) + \ldots + (a_1 + U_n) + (a_1 + U_n) + (a_1 + U_n)$$

$$= n(a_1 + U_n)$$

Sehingga rumus jumlah n suku yang pertama pada deret aritmatika adalah:

$$S_n = \frac{n(a_1 + U_n)}{2}$$

Contoh:

Carilah jumlah 20 suku yang pertama dari deret 12 + 15 + 18 + ...

Jawab:

$a = 12;\ b = 3;\ n = 20$

$$S_n = \frac{n(a_1 + U_n)}{2} = \frac{n(a + a + (n-1)b)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2a + (n-1)b)}{2} = \frac{\{20(2.12 + (20-1).3)\}}{2} = 810$$

D. BARISAN GEOMETRI

Barisan bilangan yang suku-suku berikutnya diperoleh dari hasil kali suku sebelumnya dengan bilangan tetap yang tidak sama dengan nol dinamakan barisan geometri. Bilangan tetap tersebut dinamakan pembanding (rasio).

Misalnya: 1, 3, 9, 27, ... Suku ke-1 dari barisan bilangan tersebut adalah 1. Biasanya ditulis dengan lambang $U_1 = 1$, $U_2 = 3$, $U_3 = 9$, dan $U_4 = 27$.

Untuk menemukan suku ke-5 dari barisan itu harus diketahui aturan urutan suku-suku pada barisan itu. Aturan pada barisan bilangan itu adalah dimulai dengan 1 dan suku berikutnya diperoleh dengan mengalikan 3 pada suku sebelumnya. Dengan demikian, suku kelima adalah 81 atau $U5 = 81$.

$$1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} 27 \xrightarrow{\times 3} 8$$

Perhatikan barisan-barisan berikut ini: 128, 64, 32, 16, ... dan 1, 2, 4, 8, ... Bagaimana dengan bilangan-bilangannya, apakah semakin naik atau turun?

Barisan geometri yang suku-suku bilangan-bilangannya semakin besar nilainya disebut barisan geometri naik, sedangkan barisan geometri yang bilangan-bilangannya semakin kecil nilainya disebut barisan geometri turun.

Pembanding pada barisan geometri turun bernilai antara 0 dan 1, sedangkan pembanding pada barisan geometri naik bernilai lebih dari 1. Diskusikanlah, bagaimana jika pembanding dari barisan geometri bernilai negatif, apakah merupakan barisan geometri naik atau turun?

Selain barisan aritmatika, dikenal barisan geometri yang berbentuk:

a	ar	ar^2	ar^{n-1}
Suku ke-1	Suku ke-2	Suku ke-3	Suku ke-n

Suku ke-n barisan geometri: $U_n = ar^{n-1}$

Di mana r = rasio yang dapat dicari dengan menggunakan rumus:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Contoh:

Barisan geometri 1, 2, 4, 8, ..., n. Cari suku ke-n bila diketahui $n = 11$!

Jawab:

Pada barisan ini $a = 1$ dan $r = 2$ sehingga diperoleh:

$U_n = ar^{n-1}$

$U_{11} = 1.212 = 1024$

$U_{11} = 1.2^{11-1} \rightarrow U_{11} = 1024$

Deret geometri dinyatakan dengan menjumlah suku-suku pada barisan geometri. Untuk menyatakan jumlah n suku yang pertama pada barisan geometri digunakan simbol S_n. Untuk menentukan jumlah n suku yang pertama pada deret geometri, perlu mengingat suku ke-n pada deret geometri.

$$\begin{array}{l} S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ \underline{r\,S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \; -} \\ S_n - r\,S_n = a + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - ar^n \end{array}$$

$S_n(1 - r) = a - ar^n$

Sehingga diperoleh:

$$S_n = \frac{a - ar^n}{(1-r)} = \frac{a(1-r^n)}{1-r};\; r < 1;\; S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1};\; r > 1$$

Contoh:

Diketahui deret geometri 2 + 6 + 18 + ... Carilah jumlah 7 suku pertama!

Jawab:

$a = 2$; $r = 6/2 = 3$; $n = 7$; karena $r > 1$ maka digunakan rumus:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_7 = \frac{2(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(2187 - 1)}{2} = 2186$$

Latihan Soal

1. Tentukan rumus suku ke-n dari masing-masing barisan berikut!
   a. 4, 7, 10, 13, 16, ...
   b. -60, –49, –38, –27, ...
2. Tentukan rasio dari barisan geometri $(a + 2)$, $(a–1)$, $(a–7)$, ...!
3. Selidikilah apakah barisan berikut barisan aritmetika, barisan geometri, atau bukan keduanya. Carilah tiga suku berikutnya!
   a. 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; ...
   b. 2, 5, 10, 17, 26, ...
   c. 1, 2, 4, 7, 11, ...
   d. 300, 60, 12, 2, ...

E. PEMAKAIAN BARISAN DAN DERET DALAM ILMU EKONOMI

Barisan, derat bilangan khususnya barisan, deret bilangan aritmatika dan geometri sering dengan tidak disadari digunakan pada pembahasan beberapa bidang ilmu lain, khususnya dalam ilmu ekonomi, misalnya suku bunga, modal, dan lain sebagainya.

1. Pemakaian Barisan dan Deret Aritmetika dalam Ilmu Ekonomi

Barisan dan deret aritmatika biasanya digunakan pada perhitungan modal, tingkat suku bunga, angsuran, dan banyaknya periode bunga dengan dasar bunga tunggal. Misalnya modal awal M_0 dibungakan secara bunga tunggal sebesar i persen dalam n periode, maka nilai modal tersebut tiap periode dapat dilihat pada tabel berikut.

Periode	Bunga (I)	Nilai Modal
1	$I = i \times M_0$	$M_1 = M_0 + I$
2	$I = i \times M_0$	$M_2 = M_1 + I = M_0 + 2I$
3	$I = i \times M_0$	$M_3 = M_2 + I = M_0 + 3I$
4	$I = i \times M_0$	$M_4 = M_3 + I = M_0 + 4I$
.... n	$I = i \times M_0$	$M_n = M_{n-1} + I = M_0 + nI$

Dapat disimpulkan, bahwa nilai modal tiap periode mengikuti kaidah barisan aritmatika dan rumus nilai modal pada periode ke-n:

$$M_n = M_0 (1 + in)$$

M_0 adalah modal mula-mula
M_n adalah nilai modal periode ke-n
i adalah persentase bunga
n adalah periode pembungaan

Contoh 1:

Pada awal Januari 2011, Jonny menabung di Bank Makmur sebesar 10 juta, pihak bank memberikan bunga 10% per tahun. Berapakah jumlah tabungan Jonny setelah 5 tahun?

Jawab:

Dari soal tersebut diperoleh: M_0 = Rp10.000.000,00; i = 10%; n = 5

$M_n = M_0 (1 + in)$

M_n = 10.000.000 (1 + 10% (5)) = 10.000.000 (1 + 50%)

M_n = 10.000.000 (150%) = 15.000.000

Jadi, tabungan Jonny setelah 5 tahun sebesar Rp15.000.000,00.

Contoh 2:

Pada awal Januari 2011, Nadia menabung di bank Rp100.000,00 dan setiap awal bulannya dengan jumlah yang sama. Pihak bank memberikan bunga tunggal sebesar 2% per bulan. Berapakah jumlah tabungan Nadia pada akhir tahun 2011?

Jawab:

Besarnya bunga tiap bulan adalah Rp100.000,00 × 2% = Rp2.000,00

Nilai tabungan Nadia tiap periode disajikan oleh tabel berikut.

Bulan Menabung	Periode Bunga (n)	Total Bunga ($n \times I$)	Nilai Modal
Januari	= 1	2.000	= 102.000
Februari	= 2	4.000	= 104.000
Maret	= 3	6.000	= 106.000
April	= 4	8.000	= 108.000
Mei	= 5	10.000	= 110.000
Juni	= 6	12.000	= 112.000
Juli	= 7	14.000	= 114.000
Agustus	= 8	16.000	= 116.000
September	= 9	18.000	= 118.000
Oktober	= 10	20.000	= 120.000
November	= 11	22.000	= 122.000
Desember	= 12	24.000	= 124.000

Jumlah tabungan Nadia seluruhnya adalah:

S_n = 102.000 + 104.0000 + ... + 124.000 yang merupakan deret aritmatika dengan suku pertama a = 102.000.

$U_n = 124.000$ dan $n = 12$, sehingga: $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$S_n = \frac{12}{2}(102.000 + 124.000) = 6\ (226000) = 1.356.000$

Jadi, jumlah tabungan Nadia seluruhnya adalah Rp1.356.000,00.

2. Pemakaian Barisan dan Deret Geometri dalam Ilmu Ekonomi

Barisan geometri biasanya digunakan pada perhitungan modal akhir, tingkat suku bunga, dan banyaknya periode pinjaman dengan dasar bunga majemuk. Misalnya modal awal M_0 dibungakan secara bunga majemuk sebesar i persen dalam n periode, maka nilai modal tersebut tiap periode dapat dilihat pada tabel berikut.

Periode ke-*n*	Modal Periode ke-*n*	Bunga Periode ke-*n*	Nilai Modal Periode ke-*n*
1	M_0	$i \times M_0$	$M_1 = M_0 + iM_0 = M_0(1 + i)$
2	M_1	$i \times M_1$	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = M_0(1 + i)^2$
3	M_2	$i \times M_2$	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = M_0(1 + i)^3$
4	M_3	$i \times M_3$	$M_4 = M_3 + iM_3 = M_3(1 + i) = M_0(1 + i)^4$
5	M_{n-1}	$i \times M_{n-1}$	$M_n = M_{n-1} + iM_{n-1} = M_{n-1}(1 + i) = M_0(1 + i)^n$

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut: Husna meminjam uang Rp1.000.000,00 pada sebuah bank dengan suku bunga majemuk 5% per bulan dan jangka waktu pengembalian 3 bulan. Hitunglah besar pengembalian yang harus dibayar setiap akhir bulan!

Pembahasan:

Besar angsuran pada akhir bulan ke-1:

1.000.000 + (5% × Rp1.000.000,00) = Rp1.050.000,00

Besar angsuran pada akhir bulan ke-2:

1.050.000 + (5% × Rp1.050.000,00) = Rp1.102.500,00

Besar angsuran pada akhir bulan ke-3:

1.102.500 + (5% × Rp1.102.500,00) = Rp1.157.625,00

Contoh:

1. Modal sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan dengan bunga majemuk sebesar 4% setahun. Hitunglah besarnya modal setelah 10 tahun!

   Jawab:

   $M_n = M(1 + I)^n$

   $M_{10} = 1.000.000\ (1 + 0{,}04)^{10}$

   $M_{10} = 1.000.000\ (1{,}48024428) = \text{Rp}1.480.244{,}28$

2. Modal Rp1.000.000,00 dibungakan atas dasar bunga majemuk 10% setahun. Berapa besar modal itu pada akhir tahun ke-3?

   Jawab:

Tahun	Modal Awal (Rp)	Bunga 10% (Rp)	Modal Akhir (Rp)
I	1.000.000	$\frac{10}{100} \times 1.000.000 = 100.000$	1.000.000 + 100.000 = 1.100.000
II	1.100.000	$\frac{10}{100} \times 1.100.000 = 110.000$	1.100.000 + 110.000 = 1.210.000
III	1.210.000	$\frac{10}{100} \times 1.210.000 = 121.000$	1.210.000 + 121.000 = 1.331.000

Jadi, besarnya modal pada akhir tahun ke-3 adalah Rp1.331.000,00.

Latihan Soal

1. Dengan modal Rp5.000.000,00, Hendrik mendapat pinjaman dari sebuah bank dengan perjanjian bunga tunggal 2% per bulan. Tentukan besarnya bunga yang harus dibayar pada akhir tahun pertama dan besarnya uang yang harus dikembalikan!
2. Gita menabung di koperasi pada awal tahun 2005 sebesar Rp1.000.000,00 dengan bunga tunggal 15% setahun. Hitunglah besar uang Gita pada awal tahun 2008!

3. Seseorang meminjam modal dari koperasi sebesar Rp1.800.000,00 dengan suku bunga tunggal 3% setiap bulan. Hitunglah besar bunga setelah ½ tahun!
4. Sebuah koperasi memberikan bunga pinjaman 1% per bulan pada anggotanya, Pak Asep meminjam uang Rp2.000.000,00 pada koperasi dan akan diangsur selama 10 bulan. Hitunglah besar angsuran tiap bulan yang harus dibayar!
5. Modal sebesar Rp3.000.000,00 jika modal diperbungakan selama lima tahun dengan dasar bunga majemuk 5% per semester. Hitunglah modal akhir tahun ke-5!
6. Modal sebesar Rp1.500.000,00 jika modal diperbungakan selama lima tahun dengan dasar bunga majemuk 5% per tiga bulan. Hitunglah modal akhir setelah 4,5 tahun!
7. Modal sebesar Rp4.000.000,00 jika modal diperbungakan selama lima tahun dengan dasar bunga majemuk 5% per tiga bulan. Hitunglah nilai akhir modal tersebut!
8. Sejumlah modal Rp1.000.000,00 dibungakan selama 10 tahun 4 bulan dengan bunga majemuk 6% per tahun. Hitunglah nilai akhir modal tersebut!
9. Gaharin meminjam uang pada sebuah bank dengan suku bunga tunggal 8% setiap tahun. Setelah 1,5 tahun ia harus mengembalikan pinjaman dan bunganya sebesar Rp6.000.000,00. Hitunglah besar pinjaman Gaharin!

DAFTAR PUSTAKA

Armawi K. Mundit. 1979. *Aljabar Linier*. Bandung: Armico.

B.D. Nasendi dan Affendi Anwar. 1985. *Program Linier dan Variasinya*. Jakarta: Gramedia.

Dumairy. 1991. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: Penerbit BPFE.

Moh. Tohir, H. Haryono Wiryo Sadono, dan Pramono. 1980. *Matematika Ekonomi*. Yogyakarta: CV. Ananda.

Rinaldi Munir. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.

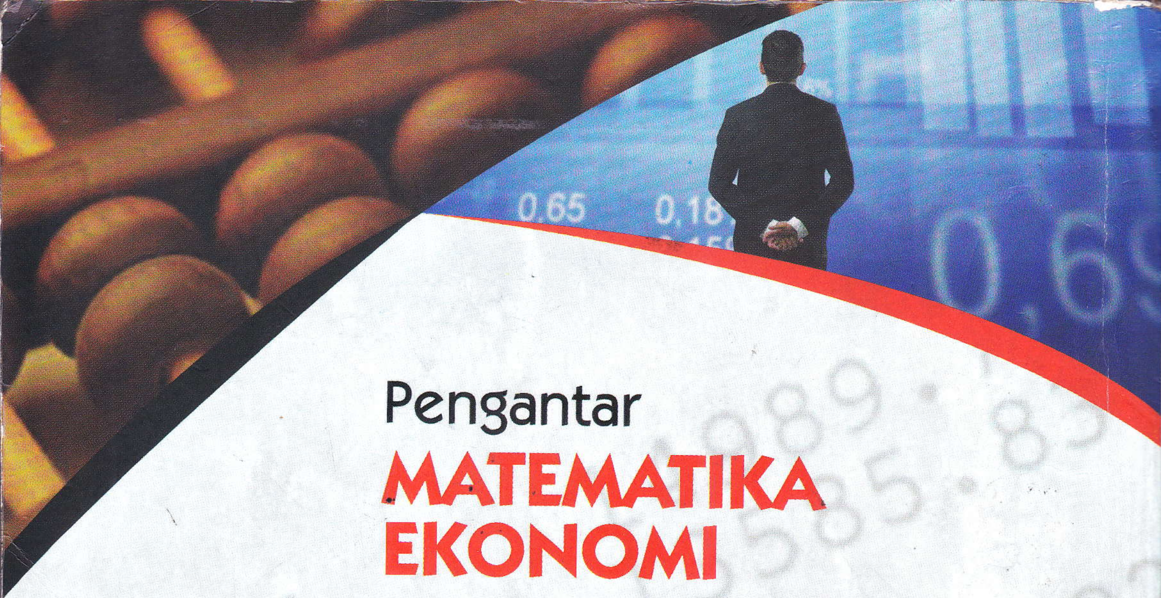
Richard Lungan. 2006. *Aplikasi Statistika dan Hitung Peluang*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wono Setya Budhi. 1995. *Aljabar Linier*. Jakarta: Gramedia.

PROFIL PENULIS

Dr. H.A. Sessu, M.Si., lahir dari Bapak H.A.B. Tjenning dan Ibu Hj. Andi Tenri Bali pada tanggal 27 April 1958 di Penrang, Makassar. Tamat SD Negeri Penrang tahun 1970, SMP Negeri 1 Sengkang tahun 1973, SMA Negeri 1 Sengkang tahun 1976, dan S-1 Prodi Matematika IKIP Ujung Pandang tahun 1982.

Setelah selesai pendidikan S-1, ia mulai meniti karir di STKIP Puangrimaggalatung Sengkang (1982–1986), AMI Vetran Makassar (1982–2006), SMA Negeri 2 Makassar (1982–2004), serta beberapa SMA dan universitas lainnya, yaitu SMA Negeri 8 Makassar, SMA Pembangunan Makassar, SMA Saewrigaring Makassar, SMA Ahmad Yani Makassar, SMA Yappi Makassar, SMA Bawakaraeng Makassar, SMA PGRI Makassar, STKIP Andi Matappa Pangkep (1990–2006), UMI Makassar (2002–2006), UPN Jakarta, Universitas Pamulang (2006–sekarang), dan Universitas Muhammadiyah Prof. DR. Hamka (2006–sekarang). Ia melanjutkan pendidikan S-2 Prodi PLH Kekhususan Kependudukan dan Keluarga Berencana yang selesai tahun 1994 dan S-3 Prodi Ilmu Ekonomi yang selesai tahun 2007.



Pengantar MATEMATIKA EKONOMI

Perkembangan berbagai bidang ilmu ekonomi pada beberapa dekade terakhir ini, di antaranya ilmu ekonomi makro, ekonomi mikro, ekonometrika, dan lain sebagainya selalu diikuti oleh berbagai formula matematika. Bahkan perkembangan ilmu komputer pun telah menembus daerah kekuasaan ilmu ekonomi. Pembicaraan berbagai teori ekonomi selalu tidak terlepas dari pengaruh formula-formula matematika. Agak berbeda dengan matematika murni, matematika yang diterapkan dalam ilmu ekonomi berfungsi sebagai alat penolong analisis. Bahasa matematika yang sederhana adalah alat penolong yang sangat baik bagi kepentingan kemajuan ilmu ekonomi itu sendiri.

Buku ini ditulis sebagai alat yang dapat membantu dalam pengembangan berbagai bidang ilmu ekonomi. Seluruh bab dalam buku ini sangat berkaitan dengan ilmu ekonomi. Diharapkan buku ini bisa menambah referensi buku matematika ekonomi dan dapat pula membantu para mahasiswa yang ingin mempelajarinya, serta semua pihak yang ingin memperdalam pengetahuannya di bidang teori ekonom

ISBN 978-602-217-290-1
9 786022 172901
Pengantar Matematika Ekonomi